L'enseignement des fonctions en Seconde et en Première : un milieu graphique pour élargir les possibilités d'action du professeur et l'apprentissage des élèves

Isabelle Bloch(*)

N.B. L'ensemble des fiches accompagnant ce texte peuvent être téléchargées sur le site http://www.ac-bordeaux.fr/APMEP/.

Le présent atelier se propose d'analyser les possibilités ouvertes par l'introduction de tâches graphiques dans l'enseignement de la notion de fonction au lycée. Il aboutit à la proposition d'une organisation de l'enseignement en deux temps imbriqués :
• Introduire les fonctions comme outils dans des problèmes géométriques, algébriques, ... que l'on trouve dans les manuels, ou des documents des IREM.
• Étudier ensuite les fonctions comme objets dans un milieu graphique/formel.

On obtient ainsi une organisation en deux étapes :

Étape 1 :
Introduire les fonctions comme outils dans des problèmes de variation géométrique, des graphiques, les touches de la calculatrice, la fonction « racine carrée », …
Étape 2 :
Construire un milieu graphique/formel pour l'étude des fonctions comme objets.

I. La situation « Graphiques et chemins »

Le but général du jeu est de construire des fonctions possédant certaines propriétés ; il faut donc être capable d'opérer l'action inverse, c'est-à-dire de vérifier si une fonction, construite ou donnée par un autre joueur, possède bien les propriétés annoncées.

1. Le milieu sur lequel on travaille

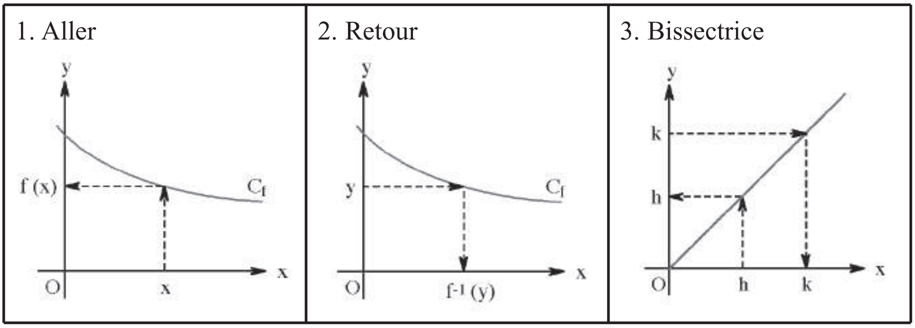
Le milieu est constitué :
- de **repères du plan** et de **graphiques fonctionnels**, dessinés dans un des repères du plan ;
- de **chemins** ;
- de **données** ou de **contraintes** amenant à construire des fonctions, ou à répondre à des questions relatives aux propriétés des fonctions construites.

Un ***chemin*** est une trace partant d'un point de l'axe $x'Ox$ ou de l'axe $y'Oy$, et comportant :

(*) IUFM d'Aquitaine.

- un segment parallèle à l'un des axes, et aboutissant sur un point d'une courbe ;
- un segment partant de ce dernier point, parallèle à l'autre axe, et aboutissant sur le premier axe.

Suivant l'axe dont on part, un chemin est un chemin *aller* ou *retour*.
La figure ci-dessous représente les trois chemins fondamentaux :



Un chemin aller permet d'identifier un nombre et son image ; il est noté par le point de départ et le point auquel il aboutit, à savoir $(x, f(x))$.
Un chemin retour permet d'identifier un nombre et son antécédent ; il est codé : $(y, f^{-1}(y))$.
Un chemin qui passe par la bissectrice est particulier en ce sens que les chemins aller, retour ne se distinguent que par le sens de parcours, ils sont codés h ou k et correspondent aux trajets (h, h) ou (k, k) dans les deux sens (voir fiche).
Les graphiques et les chemins font partie du milieu pour l'action ; sur les repères ou graphiques, l'élève peut tracer des RGC (Représentation Graphique Cartésienne), placer et coder des points ; avec les chemins, il peut contrôler des images, des antécédents, contrôler qu'une RGC est bien une RGC de fonction ; il peut contrôler des propriétés des fonctions ; il peut associer des RGC par une transformation ou une opération (somme ou produit, voir ci-dessous).

2 La situation

L'activité s'organise suivant deux composantes :

a) Composante « fonctions »

Le but du jeu est de disposer d'un certain nombre de fonctions, et de pouvoir dire si ces fonctions possèdent, ou non, certaines propriétés. Ces propriétés ont été reconnues, par les élèves et le professeur, comme faisant partie du bagage commun de connaissances établies durant l'année de Seconde. Il s'agit donc de disposer d'un stock de fonctions sur lesquelles tester les propriétés énoncées. Ce stock de fonctions sera assimilé à un stock de RGC, ce qui permettra de le faire en grande partie construire par les élèves.

b) Composante « contraintes »

Le but du deuxième jeu est de construire des fonctions répondant à des contraintes (spécifications) données. Dans ce cas, il s'agit de disposer d'un stock de contraintes, et d'y éprouver les fonctions soit données, soit construites.

Les contraintes doivent être, au départ, explicitables avec les connaissances antérieures des élèves, mais elles doivent, pour qu'il y ait apprentissage, poser des questions que les élèves ne savent pas résoudre avec leurs connaissances. Exemple : existe-t-il des fonctions non majorées sur un intervalle borné ?

c) Validation

Dans les deux composantes de la situation, le but de la validation (et l'état final gagnant) est le même : être capable de dire si la contrainte est réalisée. Les moyens de cette validation sont ceux qui sont décrits ci-dessus : moyens graphiques / formels avec les RGC et les chemins, et éventuellement moyens numériques, algébriques si les données le permettent.

3 Les paramètres sur lesquels on peut jouer : les variables didactiques

a) La nature des fonctions intervenant dans les graphiques

- fonctions constantes, fonctions affines ; *a priori* les élèves les perçoivent comme plus faciles mais cela peut induire le passage direct au calcul, ce qui est contraire au projet ;
- fonctions quelconques, qui peuvent dérouter de prime abord mais qui permettent d'aborder des propriétés générales de la fonction sans s'attacher à sa nature particulière algébrique.

b) La nature des données numériques ou littérales présentes dans certains graphiques

- nombres entiers ou rationnels facilement repérables, ou nombres irrationnels ;
- par exemple pour la somme et le produit, signe des valeurs prises par f et g ; pour le produit, comparaison avec l'unité ;
- valeurs repérées sur l'axe des x ou des y, mais indiquées par une lettre ; suivant la consigne, le travail peut alors entraîner le recours obligatoire aux quantificateurs.

c) La nature et la complexité des consignes (contraintes) demandées

Les consignes sont de deux types : identification et validation de propriétés de fonctions dont la RGC est donnée ; ou tracé de RGC de fonctions avec des contraintes données. La difficulté du problème à résoudre tient alors à plusieurs modalités :

- la nature du travail demandé (travail sur une courbe déjà tracée ou tracé à réaliser) ;
- le nombre de conditions (contraintes) demandées ;
- le fait que les conditions soient données sous forme d'égalités ou d'inégalités, ce qui peut entraîner l'obligation de quantifier ;
- les valeurs : numériques ou valeurs « quelconques » repérées par des lettres, sur les axes ou dans les contraintes imposées ; valeurs quantifiées (variables) ou non ;
- les conditions globales ou locales (par exemple fonction bornée sur un intervalle, ou au contraire maximum localisé) ce qui peut conduire à des fonctions très différentes, et à des procédures de validation différentes.

d) La possibilité ou non de fonctionnement autonome du graphique/formel (nécessité de contrôle numérique / algébrique ou non)

C’est une variable à deux valeurs : le milieu graphique formel est suffisant pour résoudre le problème posé, ou il faut lui adjoindre une validation par un calcul algébrique ou numérique. *A priori* cela pourrait faire croître la difficulté, ou au contraire aider à la validation.
La **variable algébrique** est commandée par les éléments présents dans la consigne (possibilité ou non de disposer d’une équation, ou de la trouver si la fonction est suffisamment simple, par exemple une fonction affine).
La **variable numérique** est commandée par la présence ou l’absence d’un quadrillage sur les graphiques ; c’est une variable dont la commande sera en particulier intéressante lors du travail sur sommes et produits de fonctions. Si cette variable numérique est absente, ce travail ne peut voir lieu qu’en relation avec une mesure de l’échelle sur les axes, qui permet de la retrouver par une autre procédure. Mais, dans ce cas, on peut craindre que ce contrôle par l’échelle soit trop difficile à tenir pour les élèves (en sus du contrôle de la forme de la courbe et de l’anticipation sur la nature de la fonction à trouver), et donc qu’il ne soit pas mis en œuvre.

e) La présence ou l’absence de transformations

C’est un point déjà envisagé au chapitre 4, parmi les tâches proposées. La présence de transformations (modification du graphique et/ou de la formule algébrique donnant son équation) est *a priori* un facteur complexifiant la tâche, et obligeant à modifier les procédures.

4 Les difficultés prévues

a) Fonctions déjà connues

La connaissance, par les élèves, de fonctions surtout linéaires ou affines, ou des seules fonctions de référence, peut être un obstacle au fait de concevoir des fonctions variées, éventuellement ne possédant pas les propriétés (par exemple continuité) des fonctions connues. Certains élèves ont tendance à ne tracer des courbes que par segments successifs, voire à chercher systématiquement un coefficient directeur pour une RGC qui n’est pas une droite, ni une réunion de segments.

b) Contrat classique associé au graphique

Le traitement du graphique dans le contrat classique peut être un obstacle au fonctionnement que la situation souhaite instaurer, car :

- le graphique est vu dans ce contrat classique comme l’aboutissement d’une suite d’opérations algorithmiques et non comme un outil de preuve ou de construction ;
- le graphique peut être vu également comme une « photographie » de la fonction ou comme un idéogramme, la distance de la représentation au concept étant alors supprimée, ce qui peut amener à accorder à la fonction des propriétés qui sont en fait celles du dessin ;
- le traitement dans le contrat classique est essentiellement ponctuel : le graphique est construit à partir de points dont les coordonnées sont connues, ou bien le

graphique est utilisé comme abaque pour trouver des coordonnées. Or le fonctionnement ponctuel, non seulement n’induit pas le fonctionnement global (travailler sur les caractères graphiques globaux et opérer avec des courbes) mais plus encore, il se constitue en obstacle au fonctionnement global.

c) Expertise graphique

L’expertise du fonctionnement graphique opératoire ne fait pas partie des connaissances acquises par les élèves dans le contrat classique ; donc il faut prévoir son apprentissage, qui peut être source de difficultés. Par « expertise du fonctionnement graphique opératoire » nous entendons que le registre graphique est porteur, comme tout autre, d’un certain nombre de spécificités de fonctionnement qui doivent être enseignées / apprises et qui, d’habitude, ne font pas partie des connaissances publiques de la classe : par exemple, sur un graphique on peut déterminer si $a < b$ mais pas si $a = b$.
On peut (jusqu’à un certain point) faire l’analogie avec l’expertise nécessaire soulignée par les didacticiens et les professeurs, lorsqu’on utilise une calculatrice graphique ou un logiciel de calcul formel : il y a des choses que la machine permet de faire, et d’autres qu’elle refuse ou transforme suivant sa logique.

d) Etablissement du nouveau contrat et connaissances des élèves

- Le contrat relatif au graphique peut être difficile à établir. On constate en effet que, sauf exception, les tâches données dans l’enseignement partent implicitement d’un point de vue algébrique : ainsi le produit de deux fonctions affines étant donné, le professeur fera effectuer le produit algébrique, constater que l’on obtient une fonction du second degré, et trouver éventuellement la correspondance entre les paramètres de la parabole associée et les paramètres de départ des fonctions affines. La base du problème est donc algébrique et l’on s’y ramène, après un détour de vérification par le registre graphique.
  Le fait de donner, dans le registre graphique, une tâche du type prévu dans l’ingénierie, entraîne des erreurs non rencontrées dans le registre algébrique : par exemple, les élèves déclarent majoritairement que le produit de deux « segments » est un « segment » : il est en effet possible de donner à construire graphiquement des produits de fonctions (voir schéma 26, dans la fiche Produit de fonctions). Les élèves anticipent alors les constructions et les propriétés, et certains « théorèmes » sont tentants !
  Si l’on veut rendre le travail possible, il faut donc que la situation prenne à sa charge l’établissement d’un certain nombre de connaissances graphiques qui n’ont rien de triviales et qui ne doivent pas rester implicites, de façon que les élèves aient un minimum de contrôle empirique sur la vraisemblance des hypothèses qu’ils peuvent émettre. Par exemple, dans le cas précédent, il faut que les élèves puissent anticiper sur la construction de fonctions ou les propriétés des transformées de fonctions en relation avec les propriétés des fonctions déjà connues. Ainsi le milieu graphique permet de se poser des questions qui n’apparaissent pas dans le milieu algébrique : par exemple, toujours pour le produit de deux fonctions affines (le « produit de deux segments » dans le milieu graphique)

– le sommet de la parabole correspond-il systématiquement au point d'intersection des deux droites (segments) ?
– et sinon, quelles sont les conditions pour qu'il lui corresponde ?
– y a-t-il une règle pour trouver ce sommet ?
– et que se passe-t-il si les deux droites sont parallèles ?
Les premières séances sur les fonctions, où certaines tâches peuvent paraître triviales, sont justement prévues pour l'installation d'un consensus entre professeur et élèves sur ce qu'on admet qu'un graphique permet de voir ou de faire, les validations possibles, et ce qui est à la charge des élèves dans ce milieu, c'est-à-dire l'accord sur le droit ou non de valider sur un graphique, et l'accord sur un socle commun de connaissances.

- Remarquons que les connaissances nécessaires, dans un contrat relatif au milieu graphique, se structurent d'une façon différente qu'elles ne le font dans le milieu algébrique. En effet le registre algébrique permet de désigner une fonction sans ambiguïté ; le fonctionnement consiste donc à identifier une fonction, puis à décliner, sur cette fonction, un certain nombre de propriétés. Les éventuelles transformations se traitent de la même manière : calcul de l'objet final, et énumération (quand c'est possible) de ses propriétés.
- Au contraire, dans le milieu graphique, on est dans une angoissante incertitude quant au « désigné » de la fonction, que la lecture directe ne permet pas d'identifier sans ambiguïté ; on procède plutôt par accumulation d'informations sur la fonction, mais les informations recueillies restent en tout état de cause significatives d'une **classe de fonctions**, et non d'une fonction unique (à moins bien entendu que l'on ne dispose d'une information supplémentaire de type algébrique).
  Il faut remarquer que pour les élèves, c'est une **rupture** avec le contrat habituel qui, nous l'avons dit, prévoit que le professeur donne une fonction à l'élève (celui-ci n'a donc pas la charge de fabriquer des fonctions) et que l'élève ait à fournir une liste des propriétés vérifiées par la fonction, en puisant dans un catalogue établi par le professeur en classe. Ce catalogue est constitué de propriétés qui n'ont en général pas été problématisés : elles sont données par le professeur en classe de Seconde comme des savoirs établis.

II. Effets de la situation « Graphiques et chemins »

1. Changement de contrat

La preuve par la RGC est à la charge des élèves et non plus du ressort du seul professeur. Le graphique fonctionne comme graphique structuré, il y a un RAPPORT EFFECTIF avec le graphique (le graphique est un outil d'investigation et de preuve).

2. Modification des objets problématiques

Le graphique n'est plus le but rituel d'un travail qui se passe dans un autre registre (calculs algébriques, tableaux de variations, …). Il est devenu outil de preuve dans un questionnement où les objets problématiques sont des concepts mathématiques : fonctions et propriétés des fonctions.

3. Création d'un milieu fonctionnel

Cette situation contribue à créer un milieu fonctionnel pour poser des questions d'analyse, un « herbier » de fonctions plus riche que les fonctions de référence algébriques.
On trouvera sur le site http://www.ac-bordeaux.fr/APMEP/ les premières fiches de travail sur les fonctions, puis les supports du travail graphique.