1
ÉTUDES

Une représentation géométrique de l'ensemble des matrices réelles 2×2

par F. PECAUT, Centre Universitaire d'Avignon

Préambule

Chacun sait ce qu'est une matrice réelle d'ordre 2 : associée à une transformation du plan euclidien à deux dimensions ou à un système linéaire de deux équations à deux inconnues, c'est un objet mathématique familier. Mais l'ensemble de ces objets reste abstrait. Le désir de "voir" cet ensemble motive la présente étude ; on peut espérer en tirer un double bénéfice : une meilleure compréhension, et la possibilité d'utiliser l'outil de l'intuition. Dans un récent et très intéressant article de H.B. GRIFFITHS [4], intitulé "The topography of 2×2 real matrices", ces mêmes* idées sont appliquées à l'étude du comportement des solutions du système linéaire

$$\dot{x} = ax + by\,, \qquad \dot{x} = \mathrm{d}x / \mathrm{d}t$$
$$\dot{y} = cx + dy\,, \qquad \dot{y} = \mathrm{d}y / \mathrm{d}t$$

quand les paramètres a,b,c,d varient.

Ici, comme dans [4], une matrice 2×2 est considérée comme un point de l'espace à quatre dimensions $\mathbf{R}^4$; pour voir $\mathbf{R}^4$, je ne propose rien de plus original que la méthode du "découpage en tranches" ; le tout est de bien choisir le système de coordonnées dans lequel une tranche est l'ensemble des points dont l'une des coordonnées est constante.

*

* *

* Je n'ai eu connaissance de l'article de GRIFFITHS (qui m'a été signalé par J.L. OVAERT) qu'après la rédaction du mien.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 2, L(E) l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans E. Soit f un élément de L(E) ; si f n'est pas une homothétie, on sait qu'il existe 0, 1 ou 2 droites vectorielles stables par f ; si f est une homothétie, toute droite vectorielle de E est stable par f. Il est naturel de *classer les éléments de L(E) suivant le nombre de droites vectorielles stables.*

Une base (e_1, e_2) de E étant fixée, on repère un élément f de L(E) par sa matrice M dans cette base :

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$$

On identifie L(E) à $\mathbb{R}^4$ par $M = (x_1, x_2, x_3, x_4)$; dans la suite, on mettra en évidence deux régions de $\mathbb{R}^4$, respectivement caractérisées par le signe d'une forme quadratique q des quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4 : dans l'une de ces régions, M a deux directions privilégiées ; dans l'autre, M n'en a pas. Le fait fondamental est que cette forme quadratique q est *dégénérée,* avec la signature $+ \ + \ -$, c'est-à-dire qu'il existe un autre système de coordonnées (y_1, y_2, y_3, y_4) tel que $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$. L'ensemble des vecteurs isotropes de q est le cylindre de $\mathbb{R}^4$ d'équation $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$ (cylindre, puisqu'une des coordonnées, y_4, ne figure pas dans l'équation). Ce cylindre sépare les deux régions, il représente l'ensemble des matrices pour lesquelles il n'y a qu'une direction privilégiée et celles pour lesquelles toute direction est privilégiée (homothéties). La *section* du cylindre par un hyperplan $y_4 =$ constante est le cône de révolution $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$ qu'on peut représenter dans $\mathbb{R}^3$ euclidien ; ce cône sera dit dans toute la suite *cône isotrope.*

L'espace vectoriel des matrices 2×2 apparaît alors comme un défilé d'images, chacune prise au temps $t = y_4$ (on verra que la coordonnée y_4 est la moitié de la trace de la matrice). Cette représentation classe de manière pertinente les propriétés géométriques et topologiques de ces matrices.

Pour les notions supposées connues du lecteur, je propose les références suivantes : dans DIXMIER [3]

— valeurs propres, vecteurs propres, au chapitre XXXIII
— formes quadratiques, au chapitre XXXV
— notions élémentaires de topologie de $\mathbb{R}^n$, au chapitre XLVI.

On pourra aussi consulter LELONG-ARNAUDIES [5].

*

* *

Le plan de l'article est le suivant : au paragraphe 1, on rappelle ce qui concerne la diagonalisation des matrices dans le cas particulier des matrices 2×2 ; dans les paragraphes 2 et 3, on décrit l'espace affine à trois dimensions des matrices de trace donnée suivant la valeur de cette trace ; au paragraphe 4, on met en évidence différents groupes de matrices et leurs propriétés topologiques.

1 — Réduction des matrices 2×2

La recherche de droites vectorielles invariantes par f équivaut à la recherche d'un vecteur non nul $u = xe_1 + ye_2$ tel qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ satisfaisant à

(1) $$f(u) = \lambda u \ , \qquad u \neq 0 \ .$$

Il est commode d'écrire cette équation sous la forme $(f-\lambda I)u = 0$ où I est l'application identique ; (1) signifie que $f-\lambda I$ n'est pas injective ; on sait que cette condition s'exprime par

(2) $$P_f(\lambda) = \det(f-\lambda I) = 0 \ .$$

A toute racine λ de P_f correspond au moins un vecteur $u \neq 0$ solution de $f(u) = \lambda u$. Avec nos notations

$$P_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} x_1-\lambda & x_3 \\ x_2 & x_4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (x_1+x_4)\lambda + x_1x_4 - x_2x_3$$

$u = (x,y)$ est solution du système

$$\begin{cases} (x_1-\lambda)x + x_3y = 0 \\ x_2x + (x_4-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

où λ est une racine du polynome P_f ; ce polynome n'est autre que le polynome caractéristique de f, invariant par rapport aux changements de repère : ses coefficients sont par suite invariants. On reconnaît

$$\text{trace } M = x_1 + x_4 \qquad \text{et} \qquad \det M = x_1x_4 - x_2x_3$$

Le nombre de directions privilégiées associées à la matrice M dépend du nombre de solutions de l'équation

(3) $$\lambda^2 - (x_1+x_4)\lambda + x_1x_4 - x_2x_3 = 0$$

donc du signe du discriminant $\Delta(M)$ de ce trinome

(4) $$\Delta(M) = (x_1+x_4)^2 - 4\,x_1x_4 + 4\,x_2x_3$$

Premier cas : $\Delta(M) > 0$

(3) a deux racines distinctes λ_1 et λ_2, à savoir les valeurs propres de M. Désignons par u_1 et u_2 deux vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres λ_1 et λ_2. On sait que (u_1, u_2) est une base de E, et que la matrice de f dans cette base est la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Les droites vectorielles D_1 et D_2 engendrées par u_1 et u_2 sont les seules droites stables par f .

Exemples

— *affinités* : l'une des valeurs propres est 1, l'autre $k \neq 0$.
Si f est une affinité d'axe u_1, de direction u_2, de rapport k, sa matrice dans la base (u_1,u_2) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

En particulier, si $k = -1$, une telle matrice est celle d'une *symétrie oblique.*

— *projecteurs de rang 1* : les valeurs propres sont 1 et 0 ; dans une base de vecteurs propres, un projecteur de rang 1 a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque

Il est utile pour la suite d'expliciter toutes les matrices de valeurs propres λ_1 et λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, admettant *la même* direction privilégiée D_1, l'autre direction privilégiée D_2 étant arbitraire. Soit $f \in L(E)$, de valeurs propres λ_1 et λ_2 distinctes, et soit (u_1,u_2) une base de vecteurs propres de f ; soit $g \in L(E)$ également de valeurs propres λ_1 et λ_2, de vecteurs propres u_1 associé à λ_1 et v associé à λ_2 ; on peut supposer que les composantes de v dans la base (u_1,u_2) sont $\alpha \in \mathbb{R}$ et 1 :

$$v = \alpha u_1 + u_2$$

En remplaçant dans $g(v) = \lambda_2 v$, on trouve

$$g(u_2) = \alpha(\lambda_2 - \lambda_1)u_1 + \lambda_2 u_2$$

Donc la matrice de g dans la base (u_1,u_2) est

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha(\lambda_2-\lambda_1) \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Soit maintenant une matrice de changement de base, d'éléments a,b,c,d $(ad-bc \neq 0)$; l'ensemble des matrices de valeurs propres λ_1 et λ_2 admettant la même direction privilégiée associée à λ_1 est l'ensemble des matrices semblables à (5), donc l'ensemble des matrices (x_1,x_2,x_3,x_4) telles que :

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha(\lambda_2-\lambda_1) \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$$

Sans faire le calcul d'identification des deux membres, on constate que x_1, x_2, x_3, x_4 sont des fonctions affines de α.

Deuxième cas : $\Delta(M) = 0$

Le polynome caractéristique P_f a une racine double $\lambda = \dfrac{x_1 + x_4}{2}$; ou bien f est l'homothétie de rapport λ et toutes les droites de E sont alors stables par f, ou bien il y a une droite stable par f et une seule. Dans ce dernier cas, soit $u_1 \neq 0$ tel que $f(u_1) = \lambda u_1$, et u_2 soumis à la seule condition que (u_1, u_2) soit une base de E ; alors la matrice de f dans la base (u_1, u_2) est

$$(6) \qquad \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad , \qquad \alpha \neq 0 \ .$$

Quel que soit u_2, l'élément de la deuxième ligne, deuxième colonne, est λ, puisque la trace de la matrice est $2\lambda = x_1 + x_4$; on ne peut pas "réduire" davantage cette matrice ; tout ce qu'on peut faire est de choisir u_2 de manière que $\alpha = 1$.

Exemples

— *matrices nilpotentes :* $\lambda = 0$. Une matrice M d'ordre 2 est dite *nilpotente* si $M^2 = 0$; une matrice nilpotente est de trace nulle et de déterminant nul sans être nulle.

— *transvections* : $\lambda = 1$. Une matrice (6) est le produit de l'homothétie de rapport λ et de la matrice de déterminant 1

$$(7) \qquad \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'application f représentée par la matrice (7) dans la base (u_1, u_2) donne pour image du vecteur $u = xu_1 + yu_2$ le vecteur

$$f(u) = xu_1 + y(\alpha u_1 + u_2) = u + \alpha y u_1 \ ,$$

c'est dire que pour tout élément u de E, $f(u) - u \in D_1$ où D_1 est l'unique direction privilégiée de la matrice (7).

De telles applications portent le nom de *transvections de droite* D_1 ; la figure 1 montre comment la transvection (7) opère sur $\mathbf{R}^2$ identifié à l'espace affine à deux dimensions de base (u_1, u_2), muni de l'origine O : le point u subit une translation de vecteur parallèle à D_1, d'amplitude proportionnelle à son ordonnée dans le système d'axes (Ou_1, Ou_2) .

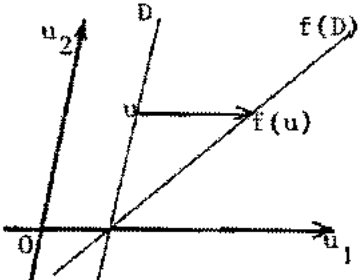


fig.1

Remarque

On montre comme précédemment que les coefficients des matrices des transvections de droite donnée sont fonctions affines d'un paramètre.

L'intérêt essentiel des transvections est qu'elles engendrent le sous-groupe de GL(E) constitué des matrices de déterminant 1 ; ce sous-groupe s'appelle le *groupe spécial linéaire* (ou unimodulaire) ; il est noté SL(E). A propos des transvections et du groupe spécial linéaire, on pourra consulter ARTIN [1] chap. IV ou CHAMBADAL et OVAERT [2] chap. 3, § 2.

Troisième cas : $\Delta(M) < 0$

Le polynome caractéristique n'a pas de racine réelle, il n'y a aucune droite stable par f.

2 — Description de l'ensemble des matrices 2×2 : propriétés affines

Soit M la matrice $\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$. Posons :

$$q(M) = \frac{1}{4}\Delta(M) = \frac{1}{4}(\text{trace } M)^2 - \det M = \frac{(x_1+x_4)^2}{4} - x_1x_4 + x_2x_3$$

q est une forme quadratique à quatre variables, qu'on peut décomposer en carrés :

$$q(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{(x_1-x_4)^2}{2} + \frac{(x_2+x_3)^2}{2} - \frac{(x_2-x_3)^2}{2}$$

Prenons les nouvelles coordonnées (y_1,y_2,y_3,y_4) définies par

$$y_1 = \frac{x_2+x_3}{2} \qquad y_3 = \frac{x_2-x_3}{2}$$

$$y_2 = \frac{x_1-x_4}{2} \qquad y_4 = \frac{x_1+x_4}{2}$$

$$q(M) = \frac{1}{4}\Delta(M) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

Dans ce qui suit, on représente $M = (y_1,y_2,y_3,y_4)$ par le point de coordonnées (y_1,y_2,y_3) par rapport à trois axes orthonormés Oy_1, Oy_2, Oy_3 et par sa trace $T = 2y_4$ dans la quatrième dimension. C'est-à-dire qu'on considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^4$ des matrices 2×2 comme la réunion des hyperplans $y_4 = $ cte , chacun de ces hyperplans étant identifié à $\mathbf{R}^3$ muni des axes Oy_1, Oy_2, Oy_3. Les matrices de trace T sont toutes représentées sur ce que nous nommons dans la suite le graphique T, section de $\mathbf{R}^4$ par l'hyperplan $y_4 = \frac{T}{2}$; l'ensemble des graphiques T à trois dimensions pour T variant de $-\infty$ à $+\infty$ est l'ensemble des matrices réelles 2×2 classées d'après leur trace.

Sur chaque graphique T, les matrices possédant deux directions privilégiées, et celles qui n'en possèdent pas, appartiennent à deux régions séparées par la surface C d'équation

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$$

Cette surface est un cône désigné dans la suite comme "le cône isotrope". Le cône isotrope est de révolution autour de Oy_3, de demi-angle au sommet 45°. Son sommet est l'origine du graphique T qu'on identifie au point $(0,0,0, y_4 = \frac{T}{2})$ de $\mathbf{R}^4$, c'est-à-dire à la matrice $\begin{pmatrix} T/2 & 0 \\ 0 & T/2 \end{pmatrix}$.
L'ensemble des cônes isotropes est invariant par translation de vecteur parallèle à Oy_4. Le signe de $\Delta(M)$ étant celui de $q(M)$, l'intérieur du cône isotrope représente dans chaque graphique T l'ensemble des matrices n'ayant pas de vecteurs propres.

Reprenons les considérations du paragraphe 1 pour interpréter géométriquement les ensembles particuliers de matrices rencontrés. N'ayant rien à dire de l'intérieur du cône isotrope, examinons successivement le cône isotrope lui-même et l'extérieur du cône isotrope. On pourra suivre sur la figure 2 (page 636).

$\Delta(M) = 0$, c'est-à-dire M appartient au cône isotrope

Sur chaque graphique T, le sommet du cône isotrope représente l'homothétie de rapport T/2 ; le cône isotrope épointé représente l'ensemble des applications linéaires ayant une seule direction privilégiée, dont le déterminant est :

$$\det M = \frac{T^2}{4} - \frac{1}{4}\Delta(M) = \frac{T^2}{4}$$

Sur le graphique T, il n'y a pas d'autres matrices de déterminant $\frac{T^2}{4}$ que celles représentées sur le cône. De plus, l'ensemble des matrices ayant la même valeur propre double $\lambda = \frac{T}{2}$ et la même direction privilégiée est représenté sur une génératrice du cône isotrope du graphique T ; en effet, d'après une remarque faite, les coefficients d'une telle matrice sont fonctions affines d'un paramètre.

Exemples

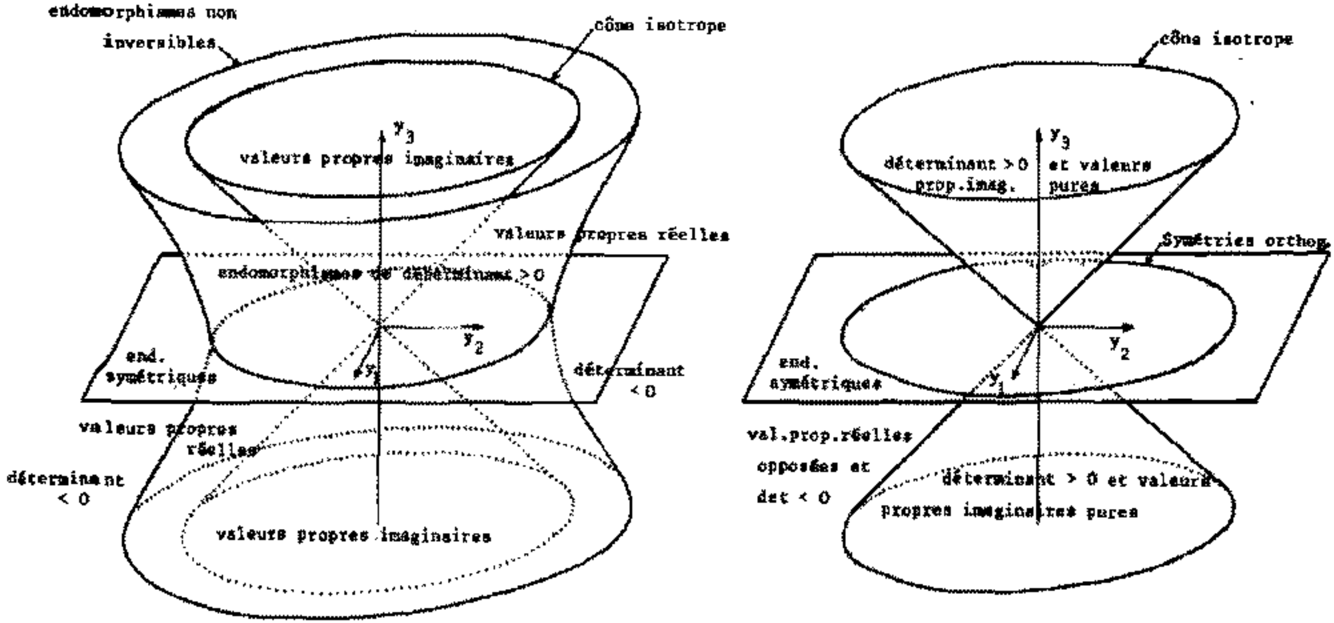
— Graphique T = 0 : le sommet du cône isotrope représente la matrice nulle, le cône épointé représente l'ensemble des *matrices nilpotentes.*

— Graphique T = 2 : le sommet du cône isotrope figure l'application identique, le cône épointé est l'ensemble des *transvections.*

$\Delta(M) > 0$, c'est-à-dire M extérieur au cône isotrope

Sur tous les graphiques T, l'extérieur du cône isotrope représente l'ensemble des matrices diagonalisables. L'ensemble des matrices ayant

UNE REPRESENTATION GEOMETRIQUE DE L'ENSEMBLE DES MATRICES REELLES 2×2



MATRICES DE TRACE T ≠ 0

MATRICES DE TRACE T = 0

figure 2

pour valeurs propres λ_1 et λ_2 fait partie du graphique $T = \lambda_1 + \lambda_2$; le déterminant de ces matrices est $\lambda_1\lambda_2$. L'expression du déterminant dans les coordonnées y_1, y_2, y_3, y_4 est

$$\det M = \frac{(\text{trace } M)^2}{4} - \frac{1}{4}\Delta(M) = y_3^2 + y_4^2 - (y_1^2 + y_2^2)$$

Un bref calcul montre que

$$\begin{cases} 2y_4 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \det M = \lambda_1\lambda_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y_4 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = \left(\dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)^2 \end{cases}$$

L'ensemble des matrices de valeurs propres λ_1 et λ_2 se trouve donc sur le graphique T, et dans ce graphique est représenté par la surface $H_1(\lambda_1,\lambda_2)$ d'équation

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)^2$$

C'est un hyperboloïde à une nappe, de révolution autour de l'axe Oy_3 ; le rayon du cercle de gorge est $\dfrac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{2}$. Cet hyperboloïde est l'ensemble des matrices semblables à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

On sait qu'une telle surface est engendrée par deux familles de droites ; d'après une remarque faite plus haut, l'interprétation géométrique de chacune de ces familles est aisée : une génératrice de l'une des familles porte l'ensemble des matrices admettant une direction donnée comme direction privilégiée associée à l'une des valeurs propres.

Exemples

— *affinités* : l'ensemble des affinités de rapport k se trouve sur le graphique $T = 1 + k$ et dans ce graphique sur $H_1(1,k)$; dans ce graphique, il n'y a pas d'autres matrices de déterminant k que celles qui sont représentées sur $H_1(1,k)$. En particulier, les symétries obliques appartiennent au graphique $T = 0$, et dans ce graphique, à l'hyperboloïde à une nappe d'équation

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 1$$

— *projecteurs de rang 1* : ils se trouvent sur le graphique $T = 1$, et dans ce graphique sur l'hyperboloïde à une nappe d'équation

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = \frac{1}{4}$$

3 — Description géométrique des matrices 2×2 : propriétés métriques

Nous allons maintenant examiner ce qui ressort de la structure euclidienne de l'espace vectoriel E : si E est muni d'un produit scalaire $(u,v) \to u.v$, on sait que $f \in L(E)$ est dite symétrique si $f(u).v = u.f(v)$, et orthogonale si $f(u).f(v) = u.v$, quels que soient u et v éléments de E. Supposons désormais que la base (e_1,e_2) de E choisie pour représenter les éléments de L(E) est orthonormée. On sait que f est symétrique (respectivement orthogonale) si sa matrice M l'est.

a) *Etude des matrices symétriques*

Dans le système de coordonnées (y_1,y_2,y_3,y_4), la propriété de symétrie de M s'exprime par $y_3 = 0$. Donc, quel que soit le graphique T, on trouve les matrices symétriques dans le plan Oy_1y_2, et par suite à l'extérieur (au sens large) du cône isotrope : les valeurs propres d'une matrice symétrique sont réelles. Pour $T \geqslant 0$, les matrices symétriques positives $(\lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0)$ sont dans le plan Oy_1y_2 et telles que $y_1^2 + y_2^2 \leqslant \dfrac{T^2}{4}$, c'est-à-dire sont représentées par les points d'un disque fermé ; les matrices symétriques strictement positives sont les points du disque ouvert correspondant.

b) *Etude des matrices orthogonales*

Ce sont les rotations vectorielles, de déterminant 1 :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \quad \text{c'est-à-dire} \begin{cases} y_1 = 0,\ y_3 = \sin\phi \\ y_2 = 0,\ y_4 = \cos\phi \end{cases}$$

et les symétries orthogonales par rapport à une droite, de déterminant -1 :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}, \quad \text{c'est-à-dire} \begin{cases} y_1 = \sin\phi,\ y_3 = 0 \\ y_2 = \cos\phi,\ y_4 = 0 \end{cases}$$

Rotations vectorielles et symétries orthogonales sont dans deux plans vectoriels supplémentaires orthogonaux dans $\mathbf{R}^4$. Les symétries orthogonales sont représentées dans le seul graphique $T = 0$ par un cercle de centre l'origine et de rayon 1, dans le plan Oy_1y_2 comme il fallait s'y attendre, puisque ce sont des applications symétriques par rapport au produit scalaire. Les rotations vectorielles n'apparaissent qu'à raison de deux par graphique, et encore seulement dans les graphiques $-2 \leqslant T \leqslant 2$; ce sont les deux points de l'axe Oy_3 $(0,0,-\sin\phi)$ et $(0,0,\sin\phi)$ où $\cos\phi = \dfrac{T}{2}$. L'ensemble des rotations vectorielles est le cercle de centre l'origine et de rayon 1 du plan Oy_3y_4.

4 — Propriétés topologiques

On vient de voir que le groupe orthogonal O(E) a deux composantes connexes, chacune fermée dans L(E), bornée, et donc *compacte*. Nous allons maintenant étudier *la connexité* du groupe linéaire GL(E) et du groupe spécial linéaire SL(E).

1°/ *Etude du groupe linéaire*

Dans chaque graphique T, l'ensemble des matrices non inversibles (on dit aussi *singulières*) est l'ensemble H(T) des points (y_1, y_2, y_3) tels que

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = \frac{T^2}{4}$$

Quel que soit $T \neq 0$, H(T) est un hyperboloïde de révolution à une nappe dont le cône asymptote est le cône isotrope (comme tous les hyperboloïdes qu'on a rencontrés jusqu'à présent) ; à l'intérieur, les matrices de déterminant strictement positif, à l'extérieur, les matrices de déterminant strictement négatif ; pour $T = 0$, l'ensemble des matrices non inversibles coïncide avec le cône isotrope, ensemble des matrices nilpotentes. Quand T varie de $-\infty$ à $+\infty$, H(T) rétrécit jusqu'à devenir le cône C et regrossit ensuite symétriquement ; le rayon du cercle de gorge est en effet $\left|\frac{T}{2}\right|$. La réunion *Int* des intérieurs des H(T) représente l'ensemble des matrices de déterminant strictement positif, la réunion *Ext* des extérieurs des H(T) représente l'ensemble des matrices de déterminant strictement négatif. Le groupe linéaire GL(E), ensemble des automorphismes de E, est $\mathbb{R}^4$ privé de l'ensemble des matrices singulières $\bigcup\limits_{T} H(T)$.

Le groupe linéaire GL(E) est ouvert dans L(E) et c'est la réunion de deux ouverts disjoints, à savoir :

Int : $y_3^2 + y_4^2 - y_1^2 - y_2^2 > 0$

Ext : $y_3^2 + y_4^2 - y_1^2 - y_2^2 < 0$

On va démontrer que *Int* et *Ext* sont deux ouverts connexes de $\mathbb{R}^4$; alors *Int* et *Ext* sont les deux composantes connexes de GL(E) ; l'élément neutre I de GL(E) appartient à *Int*, donc *Int* est la composante connexe de l'identité dans GL(E), souvent notée $GL^+(E)$. La connexité de *Ext* se déduit de celle de *Int* ; en effet, si S est une symétrie par rapport à une droite, l'application $M \to SM$ de L(E) dans lui-même est un homéomorphisme (application bijective et bicontinue) dans lequel *Ext* est l'image de *Int* : si donc *Int* est connexe, *Ext* est connexe.

Plus précisément, nous allons montrer que *Int* est *connexe par arcs*, c'est-à-dire que pour tout couple de matrices de déterminant strictement positif, il existe un chemin continu joignant ces deux matrices, dont chaque point appartient à *Int*. Il existe quantité de tels chemins ; notre propos est d'en exhiber un, qui se présente naturellement dans la représentation du paragraphe 2.

Soient donc M et M′ deux éléments de *Int* :

$$M = (y_1, y_2, y_3, y_4 = \frac{T}{2}) \ , \quad y_3^2 + y_4^2 - y_1^2 - y_2^2 > 0$$

$$M' = (y'_1, y'_2, y'_3, y'_4 = \frac{T'}{2}) \ , \quad y'^2_3 + y'^2_4 - y'^2_1 - y'^2_2 > 0$$

Dans le graphique T, faisons tourner M autour de Oy_3 jusqu'à ce que sa deuxième coordonnée soit nulle : le point M vient en N qui est comme M à l'intérieur de H(T).

$N = (z_1, 0, y_3, y_4)$ avec $z_1^2 = y_1^2 + y_2^2$, donc $y_3^2 + y_4^2 - z_1^2 > 0$

Soit K l'ensemble des matrices singulières (y_1, y_2, y_3, y_4) telles que $y_2 = 0$. Par rapport aux axes Oy_1, Oy_3, Oy_4, l'équation de K est $y_3^2 + y_4^2 - y_1^2 = 0$; c'est un cône de révolution d'axe Oy_1, dont l'extérieur représente l'ensemble des matrices de déterminant strictement positif et de deuxième coordonnée nulle. N est donc représenté à l'extérieur de K. Soit γ le chemin de M en N.

On peut faire le même travail avec M′ qu'on fait tourner dans le graphique T′ autour de Oy_3 de manière à l'amener en N′ de deuxième coordonnée nulle.

$N' = (z'_1, 0, y'_3, y'_4)$ avec $z'^2_1 = y'^2_1 + y'^2_2$, donc $y'^2_3 + y'^2_4 - z'^2_1 > 0$

N′ est lui aussi représenté à l'extérieur de K. Soit γ' le chemin de M′ en N′.

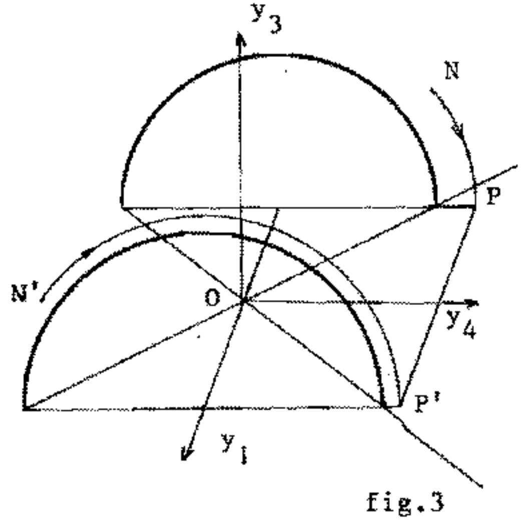


fig.3

Par rotation autour de Oy_1 (fig. 3) on peut amener N et N′ dans le plan Oy_1y_4 et d'un même côté de Oy_1 ; soit δ le chemin suivi par N pour parvenir en P :

$P = (z_1, 0, 0, z_4)$ avec $z_4^2 = y_3^2 + y_4^2$, donc $z_4^2 - z_1^2 > 0$

Soit δ' le chemin suivi par N′ pour parvenir en P′ :

$P' = (z_1', 0, 0, z_4')$ avec $z'^2_4 = y'^2_3 + y'^2_4$, donc $z'^2_4 - z'^2_1 > 0$

Il reste à joindre P et P′ par un segment, ce qui est possible en restant à l'extérieur de K, puisque la partie $\{(y_1,y_4) \ / \ |y_4| > |y_1| \ , y_4 > 0\}$ de Oy_1y_4 est convexe.

Remarque

On peut interpréter comme suit la connexité des deux parties *Int* et *Ext* ; rappelons qu'on a fixé une fois pour toutes la base (e_1,e_2) de E ; à chaque matrice inversible $\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$ on peut alors faire correspondre une autre base de E, à savoir $(x_1e_1 + x_2e_2, \ x_3e_1 + x_4e_2)$; l'ensemble des matrices inversibles s'identifie donc à l'ensemble des bases de E. Dans cette interprétation, *Int* représente l'ensemble des bases de même sens que (e_1,e_2), *Ext* représente l'ensemble des bases de sens contraire à (e_1,e_2).

La démonstration précédente montre que pour tout couple de bases de E de même sens, on peut modifier continuement la première pour l'amener sur la seconde de façon qu'à chaque stade de la transformation on dispose d'une base de même sens que les deux bases données.

2°/ *Etude du groupe spécial linéaire*

L'ensemble SL(E) des matrices de déterminant 1 n'est autre que le noyau de l'homomorphisme de groupes

$$M \longmapsto \det M$$

C'est donc un sous-groupe distingué de GL(E).

Soit $M = (y_1,y_2,y_3,y_4)$ appartenant à SL(E), c'est-à-dire

$$y_3^2 + y_4^2 - y_1^2 - y_2^2 = 1 \ .$$

Suivant que $|T| < 2$ ou que $|T| > 2$, les éléments de SL(E) de trace T sont ceux d'un hyperboloïde de révolution autour de Oy_3 à deux nappes ou à une nappe (voir figure 4, page 642) ; pour $T = 2$ on a le cône pointé des transvections et son sommet I ; l'ensemble représentant SL(E) admet l'hyperplan $y_4 = 0$ comme hyperplan de symétrie, c'est-à-dire que sur le graphique T, l'image de SL(E) est la même que sur le graphique $-T$.

LE GROUPE SPECIAL LINEAIRE

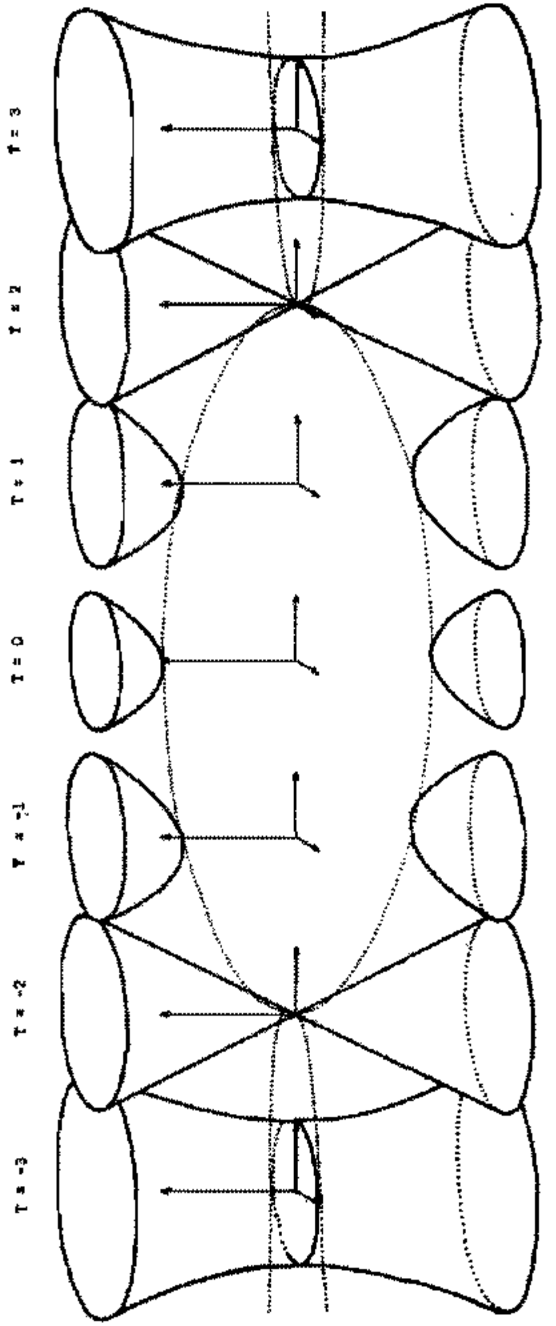


figure 4

Prouvons maintenant que SL(E) est connexe par arcs ; soient comme précédemment M et M′ deux points quelconques de SL(E) :

$$M = (y_1, y_2, y_3, y_4) \qquad y_3^2 + y_4^2 - y_1^2 - y_2^2 = 1$$

$$M' = (y'_1, y'_2, y'_3, y'_4) \qquad y'^2_3 + y'^2_4 - y'^2_1 - y'^2_2 = 1$$

Par rotation autour de Oy_3 dans le graphique $T = 2y_4$ et dans le graphique $T' = 2y'_4$ respectivement :

$$M \text{ vient en } N = (z_1, 0, y_3, y_4)\ , \qquad y_3^2 + y_4^2 - z_1^2 = 1$$

$$M' \text{ vient en } N' = (z'_1, 0, y'_3, y'_4)\ , \qquad y'^2_3 + y'^2_4 - z'^2_1 = 1$$

L'ensemble des éléments de SL(E) dont la deuxième coordonnée est nulle est K_1, d'équation relativement aux axes $Oy_1y_3y_4$

$$y_3^2 + y_4^2 - y_1^2 = 1$$

K_1 est un hyperboloïde à une nappe de révolution autour de Oy_3 ; N et N′ sont représentés dans ces axes $Oy_1y_3y_4$ sur K_1 (fig. 5).

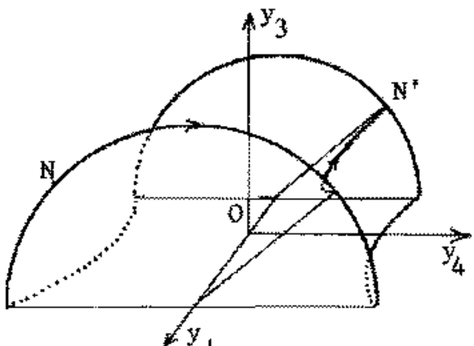


fig.5

Comme K_1 est connexe, il est facile de trouver un chemin joignant N et N′ ; on peut par exemple suivre un parallèle à partir de N jusqu'à ce qu'on se trouve dans le méridien de N′ ; il suffit ensuite de suivre la branche d'hyperbole méridienne pour parvenir en N′.

Remarque

On peut utiliser la connexité de SL(E) pour démontrer la connexité de $GL^+(E)$; en effet, une matrice $M = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$ de déterminant $k > 0$ peut être jointe à une matrice N de déterminant 1 par le chemin de matrices

$$t \mapsto N(t) \qquad \text{avec} \qquad N(t) = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t \log k} \end{pmatrix} \ ;$$

on vérifie $N(0) = M$ et $N(1) = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix}$

est de déterminant 1.

5 — Conclusion

La représentation proposée de L(E) par le déroulement d'un film dont chaque image représente l'ensemble des matrices de même trace a au moins les trois avantages suivants :

— le cône isotrope est un élément stable du cinéma ci-dessus, il a la même représentation dans chaque image.

— les applications linéaires sont agréablement triées par image : par exemple, il y a une homothétie par image, au plus deux rotations par image ; par contre, toutes les affinités de rapport k sont bloquées sur une seule image où on reconnaît géométriquement celles de même axe d'une part, celles de même direction d'autre part.

— enfin, deux points de la représentation sont voisins dans $\mathbb{R}^4$ si les applications qu'ils représentent sont voisines dans L(E) (au sens habituel du mot *voisin* dans $\mathbb{R}^4$ et L(E) respectivement) ; ceci entraîne que toutes les propriétés topologiques qu'on "voit" dans $\mathbb{R}^4$ sont vraies dans L(E).

Le sujet est loin d'être épuisé ; on peut représenter les quatre composantes connexes du groupe des automorphismes de E qui conservent la forme quadratique $x^2 - y^2$, dont deux sont sur SL(E) ; on peut chercher ce que représentent les parallèles et les méridiens de l'hyperboloïde à une nappe ensemble de toutes les matrices semblables à une matrice donnée, etc. ; ce qui précède suffit à montrer l'intention.

Je remercie vivement J.L. OVAERT de l'intérêt qu'il a manifesté pour ce divertissement géométrique ; ses suggestions m'ont permis d'améliorer la forme et d'élargir le fond ; je lui dois notamment l'idée d'examiner la connexité du groupe spécial linéaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. ARTIN : Algèbre géométrique. Cahiers scientifiques fascicule XXVII. Gauthier-Villars. 1962

[2] L. CHAMBADAL et J.-L. OVAERT : Algèbre II. Gauthier-Villars. 1972.

[3] J. DIXMIER : Cours de mathématiques du premier cycle, deuxième année. Gauthier-Villars. 1968.

[4] H.B. GRIFFITHS : Int. J. Math. educ. sci. technol., 1979, vol. 10.

[5] J. LELONG-FERRAND et J.M. ARNAUDIES : Cours de mathématiques, tome I, algèbre. Dunod Univesité. 1978.