Didactique

Enseigner la géométrie : permanences et révolutions[1]

Colette LABORDE
Labo LSD2- IMAG, Université Joseph Fourier,
BP 53 Grenoble Cedex 9

La permanence de la place importante qu'a joué la géométrie dans les mathématiques n'est plus à souligner. Jusqu'au XVIII^{ème} siècle et au delà, un mathématicien n'était rien d'autre qu'un géomètre comme en atteste l'article *géomètre* de l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert[2]. L'enseignement de la géométrie euclidienne a fait preuve d'une remarquable longévité dans de nombreux pays et a valu aux multiples auteurs des *remake* des Elements d'Euclide des succès de librairie dont devraient être jaloux nos auteurs actuels d'ouvrages scolaires puisque la durée de certains d'entre eux a pu excéder un siècle. Même si depuis lors, et peut être parce que, de profonds bouleversements ont affecté la nature de la géométrie et sa place dans les mathématiques (Straesser 1992), la prégnance de l'esprit de géométrie subsiste à tel point qu'il y a exactement vingt ans, dans la haute époque des mathématiques modernes, Thom (1972, p. 208) s'écriait que l'esprit de géométrie irrigue presque partout le champ immense des mathématiques et que

1 Ce texte est fortement inspiré d'une conférence plénière tenue à ICME 7 (Congrès international sur l'enseignement des mathématiques) à Québec en août 92.

2 Je cite : *«géomètre, se dit proprement d'une personne versée dans la Géométrie; mais on applique en général ce nom à tout mathématicien...»*

chercher à l'éliminer constituait une erreur pédagogique considérable[3].

Par révolutions, j'entends les changements, parfois spectaculaires malgré des signes précurseurs, qui ont ébranlé l'édifice institué de la géométrie ou de son enseignement, comme par exemple les géométries non euclidiennes, ou le mouvement des mathématiques modernes qui a chassé le géométrisme de l'enseignement de la géométrie. Mais j'entends surtout l'idée de trajectoire au sens de révolution des planètes, l'idée de mouvement inséparable de l'idée d'invariant géométrique puisque constitutive de l'élaboration des savoirs géométriques comme l'écrit Lobatchevski dans son introduction aux Nouveaux Principes de géométrie (1837) :

> *«En réalité dans la nature nous ne connaissons que le mouvement, c'est ce qui rend possible la perception de nos sens. Tous les autres concepts, par exemple ceux de la Géométrie, sont produits artificiellement par notre esprit et tirés des propriétés du mouvement et, pour cette raison, l'espace lui-même, pris à part, n'existe pas pour nous.»*

Plus encore, si l'on ne considère pas la géométrie pour elle-même mais du point de vue de son utilisation, les modèles géométriques ont souvent manifesté leur prégnance dans les problèmes de trajectoire, cinématique, mécanique ou de relativité générale mais aussi leur inadéquation; ainsi dans ce dernier cas, le modèle fourni par la géométrie euclidienne ne permet-il pas de rendre compte pourquoi ces fameux êtres mythiques à deux dimensions habitués à vivre sur un écran à deux dimensions et transportés brusquement sur la surface d'une sphère immense (Einstein & Infeld 1936), développant des moyens de communication qui leur permettent de parcourir des grandes distances, reviennent à leur point de départ lorsqu'ils vont toujours tout droit en avant.

C'est dans cette idée de *modèle* que la complémentarité entre permanence et révolution prend toute sa force. Le modèle fournit des éléments de permanence qui permettent de structurer la variabilité incontrôlée de domaines de réalité et de la maîtriser partiellement. Mais la validité d'un modèle possède des limites ; bien souvent ce sont des révolutions (Kuhn 1970) qui ont été à l'origine de la prise de conscience de ces limites face au conservatisme[4] scientifique qui a pu régner .

3 en anglais dans le texte : *" The spirit of geometry circulates almost everywhere in the immense body of mathematics, and it is a major pedagogical error to seek to eliminate it"*

4 Je reprends ici un des termes employés par Einstein et Infeld poursuivant la fiction des êtres à deux dimensions ; je cite :*"S'ils sont conservateurs, si la géométrie euclidienne a été enseignée chez eux pendant des générations, quand ils ne pouvaient pas*

L'argument de cet article gravite autour de l'idée de modèle. Il cherche à lire la résolution de problèmes mathématiques par le mathématicien d'une part, par l'élève d'autre part, à la lumière de la modélisation et de l'expérimentation dans le modèle, à dégager les caractéristiques des modèles géométriques, à souligner le rôle dans l'expérimentation de la dimension supplémentaire de modélisation en géométrie que constitue le mouvement, dimension historiquement ancienne mais qui a trouvé une forme contemporaine de matérialisation dans les nouvelles technologies.

Modèles et modélisation

Un modèle offre une certaine lecture, une certaine interprétation d'un *domaine de réalité*.

Ces notions de modèle et domaine de réalité sont volontairement prises ici dans une acception très large. Ainsi, on considérera que tout individu confronté dans son existence quotidienne à de nombreux domaines de réalité, en élabore des modèles mentaux qui lui sont propres, ces modèles lui permettent ensuite d'adapter ses comportements ou même de les automatiser. Certains modèles sont explicites et s'expriment alors dans divers supports d'expression (ou systèmes de signifiants) : dessins, schémas, langages naturels ou artificiels,... On appelle souvent modèle le résultat même de cette expression. Parmi les modèles explicites, certains sont collectivement partagés. Un exemple banal est celui d'un plan de métro, qui constitue un modèle du domaine de réalité que représente le réseau de transport en question. L'exposé ne concernera que les modèles explicites et collectivement partagés. Les modèles scientifiques entrent dans cette catégorie.

Du processus de modélisation, je retiendrai deux fonctions complémentaires, celle d'*abstraction* et celle de *représentation*.

Une modélisation met en jeu une certaine abstraction du domaine de réalité concerné en ne retenant de ce dernier qu'un certain ensemble d'objets et de relations qui sont représentées dans le modèle. Le modèle ne rend compte que d'une partie du domaine de réalité; une diminution de complexité est ainsi assurée mais au prix d'une réduction. A chaque modèle est donc attaché un *domaine de fonctionnement* dans le domaine de réalité dépendant des

voyager au loin et que leur géométrie était conforme aux faits observés, ils feront certainement tous les efforts possibles pour lui rester attachés, nonobstant l'évidence de leurs mesures. Ils pourraient essayer de rendre les phénomènes physiques responsables de ce désaccord. Ils pourraient, par exemple, dire que les variations de la température déterminent une déformation des lignes et, par suite un écart de la géométrie euclidienne."

objets et relations retenues pour la modélisation.

Ainsi, un plan de métro modélise-t-il le réseau matériel des voies et stations par un graphe de nœuds et d'arêtes liés par des relations d'appartenance et d'ordre. Si de sa lecture on peut trouver tous les chemins (c'est-à-dire les suites ordonnées de stations) d'une station à une autre, le plan ne donne en revanche aucune information sur le chemin à suivre à l'intérieur d'une même station pour changer de ligne, une station étant un objet primitif dans la lecture faite.

Un modèle fournit aussi une représentation du système d'objets et de relations retenus pour la modélisation ou encore, pour prendre une image plus parlante, une incarnation de ce système dans un support d'expression. Les plans de métro sont des représentations matérielles d'un système formel d'objets points et lignes liés par deux types de relations. Un même support peut être utilisé pour différents modèles: le dessin d'un graphe peut aussi bien représenter un plan de métro qu'un système de communication dans une communauté. C'est un autre aspect qui constitue aussi la force et la faiblesse des modèles. Parce qu'ils sont exprimés dans des supports déjà connus voire familiers, ils facilitent la compréhension par l'apport de sémantique inhérent au support même. Mais toute interprétation issue du support ne donne pas une information nécessairement valide sur le domaine de réalité. On peut ainsi délimiter un *domaine d'interprétation* à l'intérieur du support du modèle.

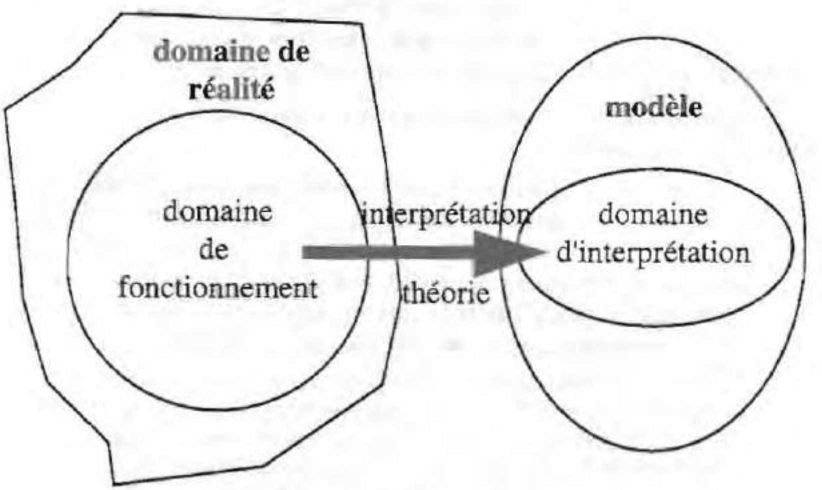


fig.1

Une information déterminée à partir du plan de métro de Montréal sur le tracé réel des lignes serait certainement erronée dans la mesure où ses concepteurs ont cherché (pour des raisons de clarté ou pour forcer les lignes de métro à suivre les directions Est-Ouest et Sud-Nord si particulières à Montréal [5]) à rendre le plus possible rectiligne par morceaux le dessin des lignes. En revanche, le plan routier d'une ville donne des informations fiables sur le tracé des rues, l'angle de leurs intersections par exemple.

Le passage du domaine de réalité au modèle (qui correspond au processus que j'ai appelé lecture ou interprétation) se fait par la construction du système d'objets et de relations retenus pour la modélisation. Dans le cas de modèles scientifiques, il s'agit d'éléments théoriques dont l'élaboration se fait en interaction avec celle des modèles. On parle souvent du domaine de validité d'un modèle. Dans la description que je propose ici, le domaine de validité est celui de la théorie : dans quelle mesure permet-elle de décrire, d'expliquer et de prédire des faits du domaine de réalité ? On appréciera le rôle fondamental de la théorie qui donne sens au modèle, en déterminant ses limites tant du point de vue de sa validité que de ses domaines de fonctionnement et d'interprétation.

Alors que dans les sciences expérimentales les domaines de réalité sont pris dans le monde matériel, la situation peut paraître quelque peu confuse au sein même des mathématiques, domaines de réalité et modèles étant de nature identique. En effet, en mathématiques, un ensemble d'objets est pris comme domaine de réalité et peut être lu comme modèle d'une axiomatique. Le même ensemble donne lieu à des lectures différentes et c'est en cela que réside la force des mathématiques (cf. plus bas).

L'ensemble des points du plan euclidien peut ainsi être lu dans une lecture projective. L'interprétation qui en sera faite est le plan projectif. De cette modélisation, on ne peut attendre des informations sur les distances entre points ou les angles par exemple (les distances et les angles sont en dehors du domaine de fonctionnement). De même que le plan de métro de Montréal rend rectiligne le tracé des lignes, la lecture projective rend sécantes toutes les droites. On ne peut donc inférer que deux droites euclidiennes se coupent à partir d'un modèle projectif (limites du domaine d'interprétation). L'existence du domaine d'interprétation est particulièrement apparente dans les modèles plans d'objets de l'espace à trois dimensions (intersection de

5) Toute personne ayant passé plus de 24 heures à Montréal sait que le choix des points cardinaux n'y est pas guidé par la logique solaire mais par la volonté de ses habitants de faire coïncider les axes cardinaux avec les axes géométriques de l'île de Montréal. C'est un exemple de modèle géographique tyrannique.

droites, longueur de segments, angles,...).

Outre les interprétations différentes que l'on peut faire d'un même ensemble en mathématiques, une même axiomatique peut aussi se matérialiser par différents modèles.

Une bonne illustration (en particulier à propos des domaines d'interprétation) en est fournie par les géométries non euclidiennes (Bourguignon 1993) dont des modèles sont exprimés en termes de géométrie euclidienne. Il y a plusieurs façons connues de modéliser l'axiomatique d'une géométrie hyperbolique : par exemple, les modèles de Klein - Beltrami ou celui de Poincaré. Dans les deux modèles, le plan hyperbolique est formé des points intérieurs à un disque euclidien donné D de bord C. Dans celui de Klein-Beltrami les droites sont les cordes ouvertes de ce disque, alors que dans celui de Poincaré, les droites sont les diamètres ouverts de D ou les arcs ouverts de cercle orthogonaux au cercle C. Dans les deux modèles, l'appartenance est représentée par l'appartenance euclidienne. Lire l'appartenance de façon identique à la géométrie euclidienne est donc licite dans les deux modèles. En revanche, lire la mesure des longueurs de façon identique à la géométrie euclidienne est illicite dans les deux modèles. On voit se dessiner les limites du domaine d'interprétation qui par ailleurs n'est pas le même dans les deux modèles : on ne peut interpréter à l'euclidienne les angles dans le modèle de Klein - Beltrami alors qu'on le peut dans celui de Poincaré.

Modèles et expérimentation

Dans les sciences expérimentales, nul n'est à convaincre du rôle de l'expérimentation sur le domaine de réalité pour l'élaboration du modèle. Mais le modèle même peut aussi servir de lieu d'expérimentation pour étendre les connaissances sur le domaine de réalité. On représente ainsi les relations entre objet et image par une lentille, dans une modélisation géométrique connue (Fig. 2).

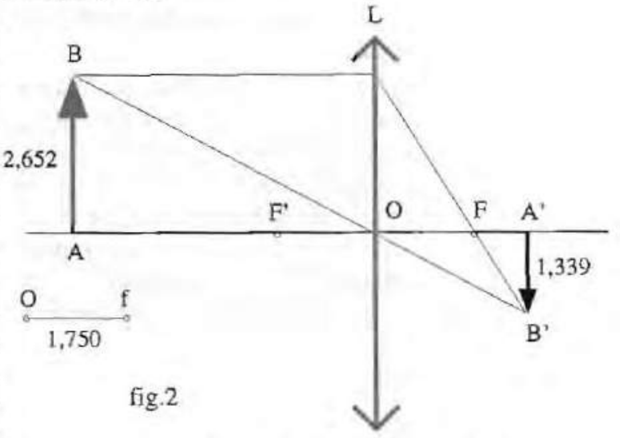


fig.2

Des manipulations dans ce modèle permettent d'anticiper les variations de l'image en fonction de certaines variations de l'objet (variations de la taille du segment objet AB, variations de la distance de l'objet à la lentille) ou de la lentille (variation de la distance focale). Ces manipulations peuvent aussi être considérées comme des expérimentations. Le modèle procure une plus grande facilité d'expérimentation que le domaine de réalité mais il permet aussi des expérimentations impossibles dans le domaine de réalité (tel un passe muraille, l'objet peut traverser la lentille dans le modèle, le modèle ne rendant pas compte des aspects matériels des objets). Le modèle fonctionne comme un *laboratoire d'expérimentation* du domaine de réalité. Il réalise une matérialisation de ce que Mach a appelé une expérience de pensée (*Gedankenexperiment*) ou encore d'une expérience imaginaire suivant les termes de Koyré (1966, pp. 225-6) :

> *«C'est là que l'imagination entre en scène. Allègrement elle supprime l'écart. Elle ne s'embarrasse pas des limitations que nous impose le réel. Elle réalise "l'idéal" et même l'impossible. Elle opère avec des objets théoriquement parfaits et ce sont ces objets-là que l'expérience imaginaire met en jeu. Ainsi, elle fait rouler des sphères parfaites sur des plans parfaitement lisses, et parfaitement durs, suspend des poids à des leviers parfaitement rigides et qui, eux ne pèsent rien; fait émaner la lumière de sources punctiformes;[...] Ce faisant, elle obtient des résultats d'une précision parfaite - ce qui ne les empêche pas, parfois, d'être faux, du moins par rapport à la rerum natura - et c'est pour cela, sans doute, que ce sont si souvent des expériences imaginaires qui sous-tendent les lois fondamentales des grands systèmes de philosophie naturelle, tels ceux de Descartes, de Newton, d'Einstein...et aussi de Galilée.»*

Un point de vue analogue d'expérimentation dans le modèle peut être pris en mathématiques (ce point de vue est en particulier défendu dans Chevallard 1992). Un exemple classique est celui des démonstrations en géométrie euclidienne ne mettant en jeu que des relations d'incidence. Le domaine de réalité ou système initial est la géométrie euclidienne. Une méthode rodée consiste à utiliser une modélisation projective, à envoyer une droite bien choisie à l'infini et à interpréter par une modélisation euclidienne le nouveau problème qui s'avère alors être un problème connu.

Ci-dessous un exemple de cette méthode pour le théorème de Pappus (P, Q et R sont alignés). Après envoi à l'infini de la droite (PQ), il suffit de montrer que R est aussi à l'infini c'est-à-dire que (BC') et (B'C) sont parallèles.

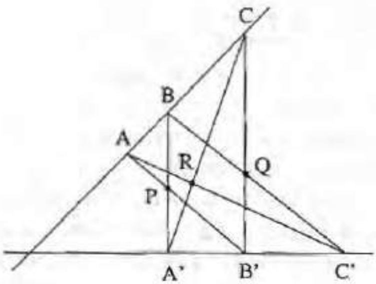


fig.3

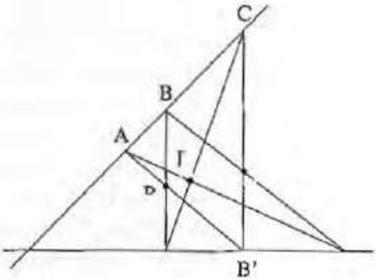


fig.4

Le jargon usuel des mathématiciens que j'ai repris à dessein dans l'expression *envoyer à l'infini* révèle bien le caractère de manipulation sous-jacent au procédé.

L'empilement des modèles est un des éléments de cette démarche expérimentale particulièrement fécond pour l'avancée dans le problème. En effet, le changement de modèle met en évidence certains aspects plus cachés dans un autre support ou facilite des manipulations moins aisées dans le précédent modèle. L'inadéquation partielle entre modèles due aux limites des domaines de fonctionnement et d'interprétation n'est pas à prendre avec résignation, il faut au contraire *se réjouir* de ce déséquilibre source d'avancée dans la connaissance. Une adéquation parfaite entre deux modèles signifie certes que le deuxième modèle confirme le premier mais aussi qu'aucun élément nouveau n'a été produit de cette uniforme platitude. On retrouve la notion de désiquilibre en tant que source de restructuration cognitive et de progrès subséquent, exprimée en particulier dans Piaget. Une part importante du travail du mathématicien réside, comme le souligne Douady (1986), dans les jeux de cadres qui se sont avérés très fructueux dans le développement des mathématiques. Que l'on pense par exemple au théorème de Fermat !

Les modèles géométriques

On peut s'interroger sur les caractéristiques des modèles de nature géométrique qui ont rendu leur prégnance si forte en mathématiques. Le point de départ de ces modèles est sans doute ce qu'on a souvent appelé le *"géométrisme hellène"* (Michel 1950, pp. 638 et suiv.), dont l'inventivité est certes due en partie à l'obstacle à une avancée purement algébrique que constituait pour les Grecs anciens leur numération engoncée dans le carcan de leur alphabet.

Dégageons, à l'aide d'un exemple de ce géométrisme hellène, les caractéristiques des modèles géométriques sur lesquelles s'appuient les procédés de résolution d'un problème algébrique. Le choix du domaine algébrique permet de mieux mettre en évidence par contraste le rôle du géométrique dans la solution. Nous prendrons la résolution de l'équation $ax = b$, problème énoncé dans le modèle hellène (probablement depuis l'époque pythagoricienne) sous la forme: "appliquer un rectangle égal à une figure rectiligne donnée sur un segment donné"[6], ou encore dans notre langage actuel "construire un rectangle dont on connaît le côté *a* et l'aire *b*"[7].

On se donne un segment AB de longueur a et un rectangle ACDE d'aire b. On construit alors F sommet du rectangle construit sur EAB. On appelle G le point d'intersection de la droite AF avec DC. On construit les rectangles ACGI et BCGH.

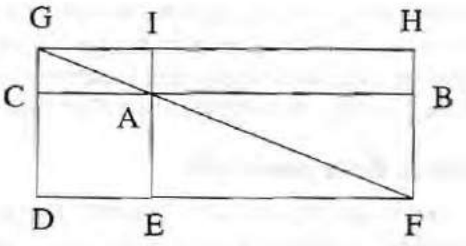


fig.5

La diagonale FG coupe le rectangle GHFD en deux triangles rectangles d'aire égale. De chacun de ces deux triangles on retranche des triangles égaux (GIA et GCA, ABF et AEF). Les rectangles restants, ACDE et BHIA, ont donc une aire égale.

Donc $HB \times a = b$. Le rectangle cherché est BHIA. La longueur du segment HB ou encore celle de CG est le nombre b/a.

La solution repose sur l'égalité des aires des rectangles ACDE et BHIA (proposition I 43 des Eléments) qui elle même est obtenue par une manipula-

6 Il s'agit d'une *"parabole"* au sens ancien du terme (c'est-à-dire depuis l'époque pythagoricienne jusqu'à Appolonius de Perge). On désignait alors par parabole l'opération qui consistait à porter sur une droite donnée, en coïncidence avec un segment donné de cette droite, un parallélogramme (rectangle ou non) d'une surface égale à une surface donnée.

7 Pour des raisons de simplicité je donne ici un cas particulier de la proposition I.44 des Elements d'Euclide qui porte sur un parallélogramme et non un rectangle.

tion en pensée du dessin (appelée "appréhension opératoire" par Duval 1988) et l'*évidence sensible* de l'additivité des aires. Le dessin joue donc un rôle fondamental dans la manipulation et dans les évidences sensibles qu'il permet. Une caractéristique essentielle du modèle géométrique est son expression dans un support graphique à deux dimensions qui permet le recours à une perception globale (registre figuratif). Une deuxième caractéristique est la *généralité implicite* du procédé de solution qui ne dépend pas des dimensions du rectangle et du segment de départ (mais la question de l'existence de la solution n'est pas posée).

Signalons que ces deux caractéristiques du modèle géométrique (recours à l'évidence sensible et généralité implicite) sont encore à l'œuvre dans des manuels d'enseignement pour des élèves de 11 à 15 ans pour établir, par exemple, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, le procédé de multiplication des fractions ou des identités remarquables. Dans tous ces exemples semble sous-jacente l'intention de donner du sens à des écritures formelles par une interprétation géométrique. De même le recours à l'évidence sensible est un point d'appui dans la détermination de la convergence d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ ou la comparaison d'une série à une intégrale.

Dessins et figures de la géométrie

Les représentations graphiques, qu'on appelle communément figures, jouent un rôle fondamental dans le raisonnement géométrique. J'en prendrai pour indice le fait qu'*a contrario* les tentatives variées de remplacement des raisonnements géométriques par des démarches d'autre nature se sont accompagnées de la suppression des figures. Ainsi, en 1788, Lagrange peut-il exprimer son contentement dans l'introduction à sa Mécanique Analytique :

> *«On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou méchaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme.»*

On confond souvent la figure avec sa trace matérielle sur le papier. Mais l'on sait bien que le raisonnement ne porte pas seulement sur cette entité matérielle mais sur une entité plus générale. Si l'on adopte le point de vue de la modélisation, il est plus adéquat de distinguer *figure* de *dessin* comme il l'a déjà été proposé (par ex. dans Parzysz 1988, cf. la notion de *concept figural* dans Fishbein 1993). La figure est l'objet mathématique du modèle euclidien pris comme domaine de réalité tandis que le dessin est une matérialisation de la figure sur le papier, le sable ou l'écran de l'ordinateur, un modèle tout comme le dessin du métro de Montréal, un modèle de la figure. Le support de matérialisation n'est pas anodin et conditionne le domaine d'interprétation. Une figure peut aussi être représentée dans d'autres supports, par exemple pour une figure plane, dans l'ensemble des couples de $\mathbf{R}^2$.

Certainement issu d'un processus de modélisation d'objets physiques de l'espace dans sa double dimension d'abstraction et de représentation, le système des dessins géométriques s'est constitué avec ses règles et ses conventions, devenues petit à petit implicites. Il s'ensuit que son interprétation pose de nombreux problèmes. Au delà des bruits dus à la matérialité et l'éventuelle imprécision du tracé que tout mathématicien élimine de façon machinale pour ne plus travailler que sur un dessin infiniment précis (Arsac 1989), les informations licites que l'on peut tirer du dessin ne sont pas déterminées par le seul dessin mais par un discours accompagnant le dessin (Duval *op.cit.*).

Certes le mathématicien sait de façon générale que la position du dessin dans la feuille est en dehors du domaine d'interprétation, que les congruences et les rapports lus sur le dessin peuvent faire partie du domaine d'interprétation mais non la longueur d'un segment donné considérée indépendamment des autres longueurs (dans le modèle de l'axiomatique d'Euclide, tous les dessins attachés à une figure se déduisent par similitude[8]). Certes des conventions plus ou moins explicites sont en vigueur : le dessin doit être le plus général possible, il doit éviter de favoriser des interprétations abusives et ne sembler indiquer que des propriétés vérifiées par la figure. Certes le mathématicien a recours à des marques supplémentaires sur le dessin (de congruence de segments ou d'angles, de perpendicularité), mais un dessin ne pourra jamais lui donner avec certitude le domaine d'appartenance d'un point (segment, droite, demi-droite, domaine du plan,...), le dessin ne représentant qu'une instanciation particulière de la figure : un point représenté sur le segment [AB] côté d'un triangle, appartient-il seulement au segment ou à la droite (AB) toute entière, ou à une des deux demi-droites

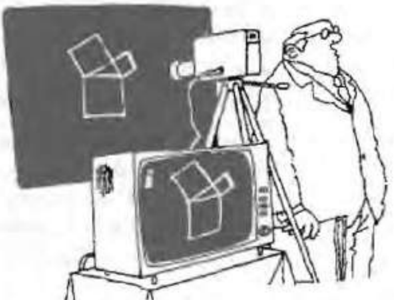
8 Les dessins plans de figures géométriques avec mesures, c'est-à-dire dont les angles et les segments ont des mesures indiquées, utilisés par exemple dans l'arpentage, sont des modèles relevant d'une lecture différente d'une lecture purement géométrique euclidienne du domaine de réalité que constitue un espace physique. Il s'agit d'une géométrie avec mesures. Cependant la géométrie scolaire utilise aussi ce type de dessins (en général avant l'introduction de la démonstration), en partie avec l'objectif de faire constater par les élèves des propriétés géométriques à l'aide de mesures sur le dessin. Il s'agit donc d'une modélisation différente qui peut s'ériger en obstacle lorsque les élèves ensuite doivent passer à une géométrie de la démonstration ne reposant plus sur des mesures constatées empiriquement. On change sans le dire le domaine d'interprétation des dessins géométriques.

d'origine A ou B ?

Ces problèmes d'interprétation ont été ignorés pendant longtemps et l'idée d'une théorie géométrique spontanée découlant naturellement du sensible (en particulier chez les enfants) a pu être dominante et culminer au XVIIIème siècle sous l'influence du sensualisme (théorie du primat des sensations dans la construction des connaissances par l'individu) hérité de Locke et poursuivi par Condillac. On en trouve trace en France, pays où fleurissaient les ouvrages d'enseignement en cette période révolutionnaire, par exemple dans le célèbre discours introductif à la 4ème édition des Eléments de géométrie de Lacroix (1804), idée qui avait été auparavant poussée à son extrême au point de devenir caricaturale chez La Chapelle (Institutions de Géométrie,1765) :

> *«Des angles, des lignes, des cercles, ne sont faits que pour frapper les sens; il n'y faut guère autre chose que les yeux & la main[...]L'objet de la Géométrie est bien autrement sensible que celui du Politique & de l'Astronome[...]Les Géomètres ne sauraient être plus près de leur objet qu'ils le sont, ils le voient et ils le touchent. On ne peut donc rien trouver qui soit mieux assorti au caractère des enfants qui veulent agir, voir, toucher que la science des Mathématiques, très visible, très maniable en ses éléments. Tracer une ligne, décrire un cercle, élever une perpendiculaire, mener des parallèles, tirer des tangentes, former des angles, les mesurer, les agrandir, les diminuer; toujours de l'action, toujours de l'amusement, & par conséquent toujours du progrès.»*

Si cet optimisme naïf n'est plus de mise, un certain inductivisme continue cependant d'animer l'enseignement de la géométrie, qui se manifeste par des procédés d'ostension dans les manuels ou chez les enseignants (Johsua & Johsua 1988) : il suffirait de montrer un ou des dessins pour que l'élève conceptualise la propriété géométrique visée. Un usage tout aussi incontrôlé des nouvelles technologies est susceptible de favoriser ces comportements qu'une caricatu-



„Hat noch jemand Fragen?" aus: Pythagoras Groningen

fig 6

9 «Quelqu'un a-t-il encore des questions ?»

re du numéro de juin 1992 du journal *Mathematiklehren* prend pour cible:

Les difficultés des élèves liées à l'interprétation des dessins en tant que modèles de figures ont néanmoins été dégagées depuis quelque temps. D'origine physiologique tout autant que conceptuelle, elles concernent notamment

- la résistance à l'élimination des imperfections du tracé (une tangente à un cercle est vue comme confondue sur un petit segment avec le cercle),
- la non reconnaissance de l'invariance de la figure pour des positions différentes du dessin (Arsac *op.cit.*, Yerushalmi & Chazan 1990), les phénomènes de typicalité (Cordier & Cordier, 1991) ou d'exemples prototypiques (Hershkowitz 1990, Noirfalise 1991).

L'attraction perceptive de certains aspects du dessin entrave une analyse géométrique adaptée à la solution du problème en cachant par contraste des combinaisons de parties de la figure (Guillaume 1937, Duval *op.cit.*). Ainsi dans le dessin de la proposition I.43 des Eléments (Fig. 5), l'œil est plus attiré par les sous-rectangles que par les triangles (les grands triangles surtout sont difficiles à voir), ce qui rend la démonstration de l'égalité des aires difficile pour des élèves de 11 à 15 ans (Mesquita 1989).

Certains principes de cette attraction sont formulés dans la *Gestaltpsychologie* ou plus récemment dans les études sur la typicalité qui porte sur les traits saillants d'un objet qui en font un exemple plus représentatif qu'un autre d'une catégorie d'objets. Ainsi l'évidence sensible est facilitée (Duval, *op. cit.*),

- si le regroupement de parties élémentaires du dessin utile pour la solution est convexe
- si ce regroupement est donné et non à trouver
- si une même partie élémentaire n'entre pas simultanément dans deux regroupements intermédiaires à comparer.

En un mot, le passage du dessin à la figure ne va pas de soi, les élèves en restant à une vue très empiriste de la géométrie. Mais un apprentissage est possible. En effet, contrairement à une idée répandue, les activités visuelles résultant d'une interaction entre données physiologiques et cognitives comme l'ont montré les théories psychogénétiques (Piaget, 1973), sont susceptibles d'évolution et peuvent être l'objet d'un apprentissage spécifique. L'activité de réorganisation visuelle est d'autant plus cruciale en géométrie que les dessins ne sont pas des formes élémentaires (telles rond ou trait) mais des assemblages complexes. Les problèmes ne satisfaisant pas aux conditions (données plus haut) facilitant l'évidence sensible permettent un tel apprentissage. Les problèmes nécessitant un changement de point de vue par rapport à celui de l'énoncé y participent également (Robert & Tenaud, 1988).

Le mouvement : une dimension supplémentaire de modélisation

L'idée du mouvement en géométrie n'est pas neuve puisque les géomètres grecs avaient mis au point divers procédés instrumentaux pour décrire des courbes définies mécaniquement, mais l'intervention du mouvement était alors *"interdite en droit dans le raisonnement géométrique"* pour des raisons qui tenaient plus de la métaphysique que de la science (Bkouche 1991). Rompant avec la tradition grecque, le XVII^{ème} siècle a vu l'apparition explicite du mouvement pour établir une propriété géométrique ou effectuer une construction géométrique (Bkouche *ibid.*). On en trouve de nombreux exemples à partir de ce siècle, dont celui de la génération cinématique de l'ellipse par un roulement sans glissement due à La Hire : Tout point du plan attaché à un cercle roulant intérieurement sans glisser sur un cercle de rayon double décrit une ellipse à l'exception des points du cercle intérieur qui décrivent un diamètre du grand cercle (hypocycloïde à deux points de rebroussement).

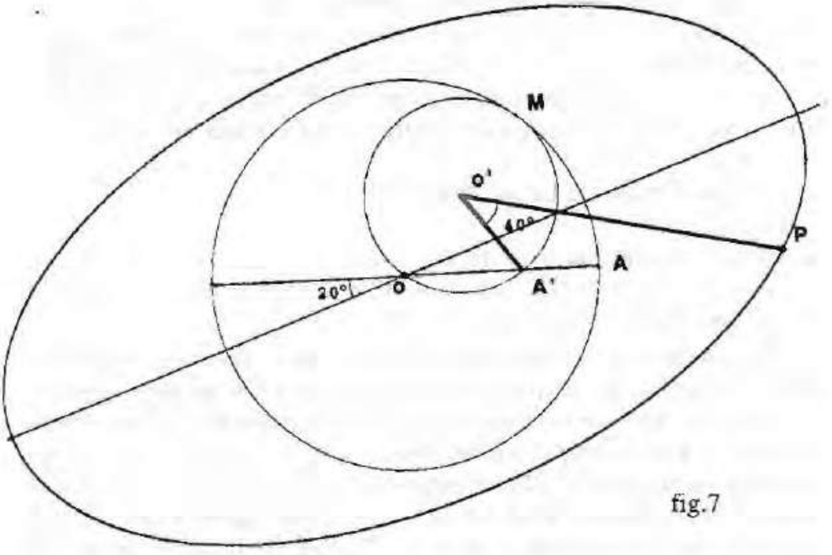


fig.7

Cette idée s'est d'abord exprimée dans la géométrie scolaire par le coup de balai donné à la géométrie des Eléments d'Euclide et l'instauration de la géométrie des transformations (qui continue d'être la seule enseignée dans certains pays), bien des années, il faut le dire, après la théorisation par les mathématiciens de la géométrie comme l'étude des invariants de groupes de transformations et bien des années aussi après une proposition audacieuse faite en France par Méray (*Nouveaux Eléments de Géométrie*, première édition 1874[10]) d'enseigner la géométrie à partir du mouvement alors que ce dernier n'avait sans doute pas connaissance du programme d'Erlangen[11]: le mouvement de translation permet d'introduire le parallélisme, le mouvement de rotation la perpendicularité.

Si Méray s'est intéressé au mouvement des *"figures solides"* indéformables (p. 3, 3ème édition), il évoque cependant (p.7, *ibid.*) la notion de figure variable :

> *"Une déformation lente et sans rupture, d'un corps mou comme une pâte ferme, ou flexible comme un ressort,... nous montre une succession de plusieurs figures solides inégales. mais l'origine commune qui caractérise toutes ces figures, les ressemblances plus ou moins accentuées qui sont observables entre elles, permettent de voir dans le phénomène une même figure, que le déplacement de ses divers points dans l'espace fait varier dans sa forme."*

Cette idée de mouvement plus général met en évidence la distinction figure / dessin : la figure apparaît comme l'invariant géométrique opposé aux variations du dessin à condition évidemment que le mouvement préserve les invariants de la théorie géométrique considérée (par exemple, les relations d'alignement et d'intersection en géométrie projective[12], les égalités d'angles et de rapports de longueur en géométrie euclidienne). Une nouvelle dimension est ajoutée au graphisme en tant que support d'expression des figures géométriques : le mouvement. De la même façon que les dessins géométriques procèdent d'une abstraction des objets de l'espace physique qui nous entoure, le mouvement dans lequel Lobatchevski voyait l'origine de nos sensations, est maintenant intégré dans la modélisation. Mais comme dans tout processus de modélisation, c'est un mouvement construit, un *mouvement conçu en fonction de la théorie et contrôlé par elle.*

---

10 deuxième édition 1903, troisième édition 1906.

11 Il a d'ailleurs rejeté ensuite la confusion entre la notion de mouvement et celle de transformation proposée par les organisateurs de la réforme de 1902/1905 de l'enseignement de la géométrie en France (Bkouche, *op.cit.*).

12 Le procédé de raisonnement en géométrie projective, décrit plus haut, qui consiste à envoyer une droite à l'infini, peut aussi être considéré comme relevant d'un usage dynamique dans lequel le mouvement est idoine à l'axiomatique de la géométrie projective

La sémantique des propriétés géométriques s'enrichit par le nouvel éclairage qu'apporte le mouvement. En effet, ces variations mettent en évidence des relations entre objets dont l'invariance ne peut pas apparaître dans un dessin statique mais peut en revanche être mise en évidence dans une vue dynamique par contraste avec des éléments variables. Il est intéressant de constater que Clairaut dans ses Eléments de Géométrie (1741) qui tranchent considérablement avec les *remake* des Elements d'Euclide de l'époque et dont l'objectif est *"d'intéresser et d'éclairer les Commençants"* (préface), utilise le mouvement pour *"faire voir comment on est parvenu à découvrir"* telle ou telle vérité. La propriété de la somme des angles d'un triangle[13] est ainsi introduite (première partie LXII) par l'idée que lors du déplacement de C sur le côté AC fixe, la variation de l'angle B est compensée par celle de C[14]. La méthode de démonstration qui consiste à mettre en jeu une parallèle à AC passant par B ne relève plus du *deus ex machina* mais devient un instrument délibéré de contrôle de la variation de la somme des angles B et C en les juxtaposant par la droite BC (tel un instrument de mesure en sciences expérimentales).

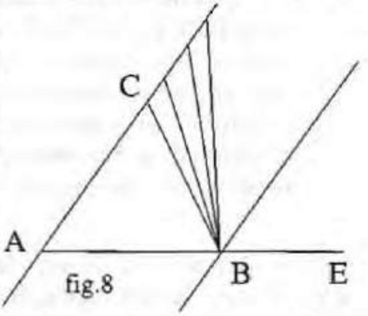


fig.8

Le même procédé de mouvement est pris pour introduire la construction d'un carré d'aire égale à la somme des aires de deux carrés inégaux (seconde partie XVII), proposition qui débouche sur la propriété de Pythagore.

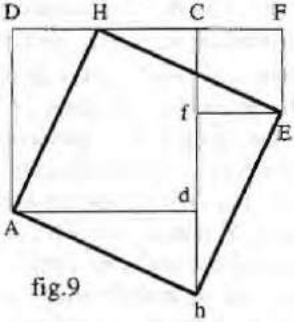


fig.9

Clairaut propose de chercher un point H de [DF] tel que

13 Cet exemple est commenté par Barbin (1991) pour illustrer l'utilité de l'étude par les élèves de textes historiques.

14 Le cite :*«Supposons, par exemple, que BC tournant autour du point B, s'écarte de AB, pour s'approcher de BE, il ext clair que pendant que BC tournerait, l'angle B s'ouvrirait continuellement ; & qu'au contraire l'angle C se resserrerait de plus en plus ; ce qui d'abord pourrait faire présumer que, dans ce cas, la diminution de l'angle C égalerait l'augmentation de l'angle B & qu'ainsi la somme des angles des trois angles A, B, C serait toujours la même quelle que fût l'inclinaison des lignes AC, BC sur la ligne AE.*

"1°) en tirant les lignes AH & HE, & faisant tourner les triangles ADH, EFH, autour des points A & E, jusqu'à ce qu'ils aient les positions Adh, Efh; ces deux triangles se joignent en h

2°) que les quatre côtés AH, HE, Eh, hA, soient égaux et perpendiculaires les uns les autres."

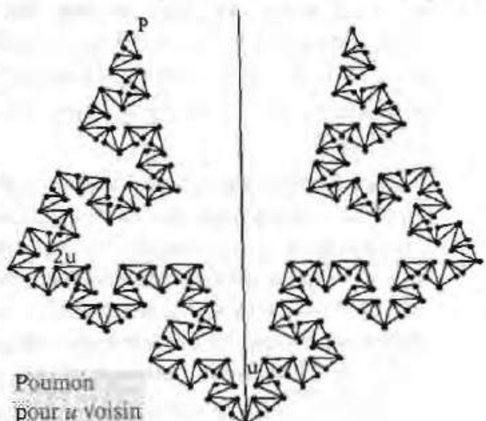
On s'aperçoit dans le mouvement que les deux triangles ne peuvent se joindre en h que si DH=CF.

La démonstration mathématique dont on connaît les difficultés d'enseignement universellement partagées est susceptible de prendre ainsi une autre dimension : ce n'est plus comme trop souvent dans l'enseignement, une preuve qui vient après la connaissance mais en fait ne l'établit pas, comme l'écrit Wheeler (1990, p.2), c'est une preuve qui explique (Hanna, 1990). Elle explique des phénomènes de compensation, une invariance, constatés, et dont on cherche les raisons.

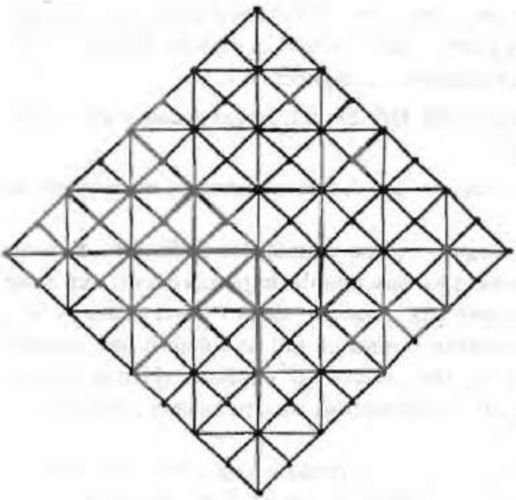
De plus, comme Hanna (*op. cit.*, p.11) le note, souvent le recours aux modèles géométriques peut être à la source d'une évidence visuelle qui ne constitue pas une preuve mais qui débouche sur une preuve appelée en allemand *inhaltich-anschaulicher Beweis*.Le mouvement élargit le spectre possible des évidences. La démonstration de Clairaut sur la somme des angles d'un triangle montre que si le mouvement appelle une explication, il peut conduire en même temps à l'outil mathématique de l'explication.

Les possibilités numériques et graphiques offertes par l'informatique ont conduit à la conception de logiciels de géométrie proposant des systèmes graphiques dynamiques modélisant la géométrie, utilisant en particulier la fonctionnalité de *manipulation directe* dans laquelle l'utilisateur s'engage en étant acteur et régulateur du mouvement (Nanard, 1990). Donnons ici deux exemples contemporains de la potentialité de ces modèles.

La notion de dimension fractionnaire est particulièrement mise en évidence par la variation continue d'une fractale (ci-contre celle modélisant une coupe plane de deux poumons dépendant du paramètre *u*, mesure du demi-angle séparant les deux poumons), d'une



Poumon pour *u* voisin de 10°



surface de dimension 2 pour $u = 0°$ à une ligne de dimension 1 pour $u = 90°$.

fig.11 - *Poumon idéal (u = 0)*

fig.12 - *Poumon de fumeur invétéré (u voisin de 90°)*

Le problème de l'optimisation de l'empaquetage de dix cercles égaux dans un carré a reçu une meilleure solution (Mollard & Payan, 1990) grâce à l'outil d'expérimentation qu'a été le logiciel Cabri-géomètre[15]. L'efficacité de l'expérimentation a tenu ici à la conjonction de deux éléments:

- la construction d'un modèle géométrique dynamique dans lequel les dix cercles pouvaient être déplacés en respectant les contraintes matérielles de non chevauchement grâce à la variation continue en manipulation directe de quelques points dont dépendaient géométriquement l'ensemble des cercles;

- la puissance de calcul du logiciel qui donnait les mesures avec une grande pré· ision.

Le caractère expérimental de l'activité mathématique est magnifiquement illustré par ce résultat ainsi que la distinction expérimentation /observation. L'expérimentation est construite à l'aide de connaissances au sein d'un modèle. On ne peut qu'être impressionné par la force du modèle géométrique si l'on sait que la même amélioration a été simultanément apportée de façon indépendante par un modèle numérique exigeant deux heures de calcul de CRAY X-MP (de Groot, Peikert & Würtz 1990).

15 Cabri-Géomètre est une implémentation informatique de la géométrie euclidienne sous forme d'un micro-monde à manipulation directe.

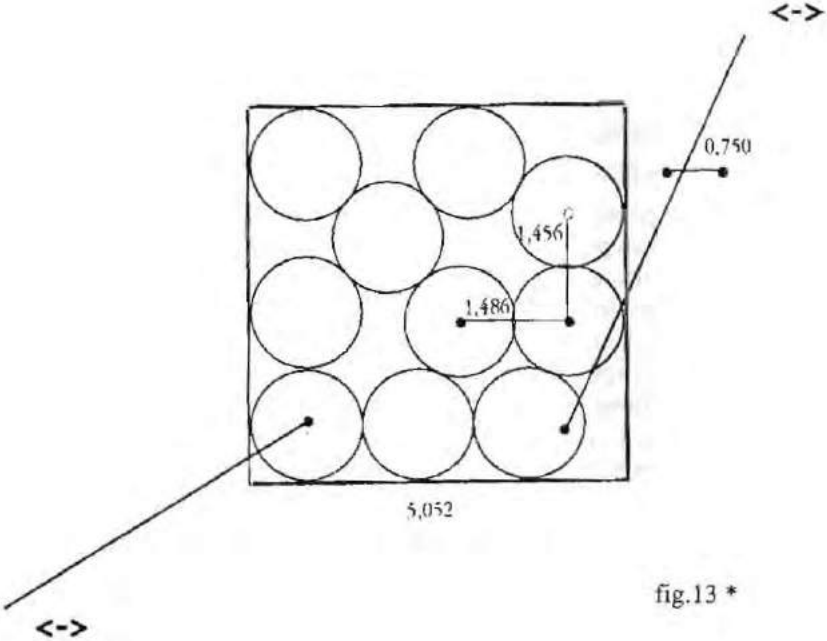


fig.13 *

* La figure représente la disposition des cercles avec les leviers à l'aide desquels on peut déplacer continûment l'ensemble des cercles et ajuster le carré.

Conséquences sur l'enseignement de la géométrie en scolarité moyenne

1 - Modélisation et problèmes

On sait que les situations d'apprentissage en mathématiques font souvent appel à des problèmes pour lesquels le sens de la question posée en fait aux élèves nécessite l'emploi de la connaissance visée et non l'utilisation d'indications externes au savoir comme par exemple lorsque les élèves cherchent à deviner les attentes de l'enseignant.

Les savoirs géométriques apparaissent comme efficaces dans des problèmes où ils permettent une modélisation moins coûteuse qu'une recherche empirique par tâtonnement longue ou même impossible. Ce sont historiquement les problèmes de calcul de distances inaccessibles (tels ceux de la hauteur des pyramides que la tradition eudémienne attribue à Thalès, de l'évaluation de la distance entre deux lieux séparés par une rivière). La solution de ces problèmes qui portent sur le méso-espace ou le macro- espace nécessite un modèle dans le micro- espace[16] qui peut prendre la forme d'un dessin sur une feuille de papier. Deux types de problèmes se posent:

- celui de la construction du modèle
- celui du calcul à l'aide du modèle de la distance cherchée.

Le premier type requiert l'abstraction de la situation des données à retenir pour la résolution du problème. Le second nécessite l'emploi de savoirs géométriques et des manipulations éventuelles (tracés auxiliaires par exemple, considération de parties du dessin) pour calculer la distance inconnue à l'aide d'éléments connus distances et/ou angles. Si le deuxième type de problèmes apparaît dans l'enseignement des mathématiques notamment à propos de la trigonométrie, le premier type est rare, les mécanismes de modélisation ne faisant pas l'objet d'un apprentissage en mathématiques[17] car trop souvent devenus transparents aux acteurs même de l'enseignement (Legrand 1990, p. 370).

Notons qu'on peut organiser le même type de problèmes en se cantonnant à l'espace de la feuille de papier en posant des questions relatives à des mesures qui ne peuvent être obtenues directement sur le papier :

- problèmes de comparaison d'aires (tels celui de la proposition I 43 des Elements d'Euclide, Capponi 1988) ou de recherche d'extrema de grandeurs;
- problèmes dans lesquels une contrainte artificielle est créée comme par exemple :

i) Trouver la bissectrice de deux droites dont l'intersection et son voisinage sont cachés sous une tache d'encre,

---

16 Il s'agit bien d'un modèle : pour avoir des informations sur le macro (resp.méso)-espace on passe dans le micro-espace et on pratique l'expérience dans le modèle : il suffit de repérer à quel moment de la journée, l'ombre du bâton est égale au bâton (d'après Hiéronyme de Rhodes rapporté par Diogème Laërce I, 37), au même moment, l'ombre de la pyramide sera égale à sa hauteur. C'est dans ce passage du macro (resp. méso)-espace au micro-espace que réside la puissance de la notion de modèle comme Apulée (Florides 18)- devait l'écrire à propos de Thalès = *«Maxima res, parvis lineis reperit»*.

17 En revanche, ils ont été l'objet de projets expérimentaux parfois de vaste taille comme dans l'équipe de Gênes autour de Boero (1989) où les savoirs géométriques sont introduits comme outils de contrôle et de prédiction de phénomènes technologiques ou astronomiques, ou comme projet «Applied problem-solving in middle school mathematics» de Lash (1981) aux USA.

ii) Trouver un moyen qui permet de calculer le périmètre de n'importe quel triangle tronqué comme celui donné ci-dessous, en ne disposant que d'*une* feuille de papier.

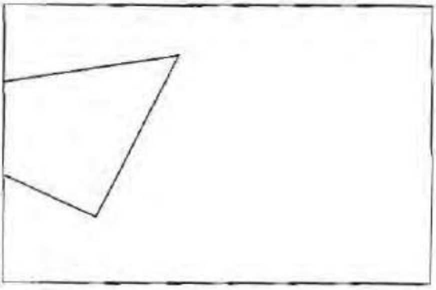


fig.14

La difficulté de ce deuxième problème réside justement pour les élèves dans la confection d'un modèle du triangle tronqué, sous forme d'un triangle entier de façon à pouvoir mesurer son périmètre. En effet, le modèle qu'ils essaient de construire est un modèle isométrique (Balacheff, 1988, Arsac 1992). Or le modèle isométrique peut fort bien ne pas rentrer dans la feuille de papier fournie puisque le procédé doit fonctionner pour n'importe quel triangle tronqué. L'idée la plus primitive de modèle est celle de copie parfaite, mais une qualité du modèle qui le rend opératoire est celle d'être plus manipulable que le domaine de réalité; un modèle est construit en général de façon à justement ne pas être une copie. Dans ce type de problème, les propriétés de l'homothétie) prennent un sens : ce sont d'une part les propriétés qui conservent les relations entre éléments dans le passage de l'objet à son modèle (parallélisme, congruence d'angles, égalité de rapports de longueurs), d'autre part la relation qui permet de passer d'une longueur d'un élément de l'objet à celle de son image dans le modèle. La même question pour un énoncé dans lequel l'objet et son modèle sont donnés, nécessite certes l'utilisation de certaines de ces propriétés mais le sens de ces dernières est complètement différent, car l'élève ne se pose pas le problème de trouver une transformation possédant ces propriétés. La transformation est déjà fournie, il suffit de la reconnaître et ses propriétés sont alors des règles qu'il faut savoir pour les appliquer.

2 - Rôle des informations visuelles

Un problème appelle l'usage de savoirs géométriques, si sa résolution ne consiste pas en une simple activité visuelle. Cependant les modèles que sont les dessins en géométrie mettent en jeu des informations visuelles qui, quoique ne fournissant pas directement la solution, jouent un double rôle dans la résolution de problèmes géométriques (Laborde 1990) :

- en fin de résolution, lorsque l'élève pense avoir trouvé une solution, elles donnent des indications sur la validité de cette solution; c'est un moyen de validation partielle ou d'invalidation; ce dernier cas se produit par exemple dans les problèmes de construction, si le procédé élaboré par l'élève aboutit à un résultat perceptif en contradiction flagrante avec ce qu'il attendait;

- pendant la recherche, l'exploration du dessin (ou des dessins) peut conduire l'élève à des conjectures et être à l'origine de démarches de solution.

Dans les deux cas, la visualisation n'est pas réduite à une appréhension perceptive mais en interaction avec des connaissances géométriques développées par l'élève. Dans la construction d'images de figures géométriques par une symétrie, l'élève s'attend à ce que la figure image ait une certaine ressemblance avec la figure objet, les longueurs et les angles ne doivent pas être trop différents, la nature de la figure doit être conservée (un triangle a pour image un triangle, un cercle a pour image un cercle, une figure fermée a pour image une figure fermée). L'activité visuelle repose sur des intuitions et des connaissances, qu'elles soient en actes (Vergnaud 1988) ou explicites et résultats d'un apprentissage. Elle s'enrichit au fur et à mesure de l'enseignement, si ce dernier s'attache à la faire progresser par un apprentissage approprié en confrontant l'élève à des problèmes qui appellent un travail sur le dessin (Lemonidis 1991).

3 - Les nouveaux laboratoires de géométrie

Les nouvelles technologies présentent l'intérêt, comme il a été déjà dit, de modifier l'éventail des manipulations permises et d'élargir le champ des évidences sensibles. En cela, elles fournissent autant de nouveaux *laboratoires* par les modèles géométriques (ou autres) qu'elles proposent (Laborde 1992). Les expériences imaginaires évoquées par Koyré (cf. plus haut) sont devenues réalités dans les micromondes (géométriques ou non) pour ordinateurs qui ne sont rien d'autres que des modèles de domaines de réalité.

Les fonctionnalités d'un micromonde de géométrie sont des outils potentiels d'expérimentation de différents types :

- action sur le dessin pour en modifier l'aspect et faciliter une appréhension opératoire :

La possibilité de rendre invisibles des éléments du dessin, ou au contraire d'épaissir les traits facilite ces regroupements de parties de figures évoqués plus haut ;

- obtention d'une multiplicité de dessins attachés à une même figure :

La multiplicité et/ou la variation continue des dessins attachés à une figure offerte par les logiciels fournit un instrument d'invalidation de dessins tracés au jugé. Le dessin visuellement correct cesse de l'être dès qu'un de ses éléments varie parce qu'il n'a pas été construit à l'aide de propriétés géométriques. La distinction figure/dessin et celle corrélative construction /tracé deviennent une réalité.

L'exploration dynamique d'une figure peut mettre en évidence des invariants ou l'absence d'invariants et conduire les élèves à se poser la question du pourquoi.

Ainsi une classe de cinquième (élèves de 12-13 ans) s'est posé le problème de l'existence de deux angles obtus dans un triangle (Bergue, 1992) car elle n'arrivait pas en déplaçant continûment les sommets d'un triangle à obtenir deux angles obtus. Il y avait toujours compensation d'un angle par un autre (on retrouve exactement le ressort de la présentation de Clairaut). Dans le même esprit, on peut demander de trouver un triangle dans lequel deux bissectrices intérieures sont perpendiculaires.

- variation contrôlée du dessin :

A partir de l'observation des modifications du dessin dans le *déplacement contrôlé* d'un de ses éléments c'est- à-dire d'un déplacement laissant *intentionnellement* invariante une propriété géométrique donnée (par exemple, déplacement d'un point sur une droite ou un cercle, déplacement d'une droite parallèlement à elle-même), on peut inférer des relations de dépendance entre éléments et déboucher sur des conjectures (cf. exemple de Clairaut).

Ce serait tomber dans le même utopisme que celui du XVIII^{ème} siècle que de laisser croire que les élèves se transforment spontanément en expérimentateurs avertis dès qu'ils ont entre les mains un de ces nouveaux logiciels. Au moins trois types de conditions sont nécessaires à un usage non erratique mais authentiquement expérimental du logiciel (en ce que l'expérimentation est contruite et se fait en interaction avec les connaissances) par rapport au domaine de savoir dont l'apprentissage est visé (ici la géométrie) :

i) des conditions sur le logiciel :

- la qualité du modèle numérique sous-jacent, la robustesse du moteur géométrique, afin d'éviter entre autres à l'interface des contradictions trop flagrantes avec la théorie géométrique;

- l'engagement direct de l'utilisateur qu'il permet, c'est-à-dire selon Nanard (*op.cit.*) la possibilité d'agir directement et librement sur les représentations des objets et de pouvoir percevoir de façon immédiate leurs réactions;

ii) l'explicitation des limites du domaine de fonctionnement et du domaine d'interprétation du logiciel afin que déjà au moins l'enseignant qui l'utilise dans la classe organise son enseignement et conçoive les tâches destinées aux élèves en connaissance de cause;

iii) des conditions sur l'organisation de l'enseignement : sur l'insertion du logiciel, sa dévolution aux élèves, la mise en place d'un nouveau contrat (ce que l'enseignant attend des élèves, les conditions de travail), le nouveau type de tâches proposées aux élèves.

Morale

De nombreuses époques de la géométrie ont été évoquées et cet exposé aura effectué plusieurs révolutions, de la géométrie grecque aux nouvelles technologies. J'espère que s'en dégage la permanence du modèle et de l'expérimentation géométriques. On dit qu'une jolie formule aurait été prononcée par Lagrange alors qu'il s'était placé dans la situation embarrassante de chercher à démontrer le postulat d'Euclide sur les parallèles à une séance de classe de physique et de mathématiques de l'Institut (Borgato & Pepe 1988); il se serait aperçu de sa méprise au milieu de son exposé et aurait mis son manuscrit dans sa poche en s'exclamant : "il faut que j'y songe encore". Je souhaiterais que tout enseignant de mathématiques se dise : "L'enseignement de la géométrie : il faut que j'y songe encore".

Note : Tous les dessins géométriques de cet article ont été effectués avec le logiciel Cabri-géomètre ; les dessins correspondants à l'écran d'un ordinateur peuvent être manipulés. Les fichiers sont disponibles sur demande à l'auteur.

Références

ARSAC G., 1989, La construction du concept de figure chez les élèves de 12 ans, *Proceedings of the thirteenth Conference of the International Group for Psychlogy of Mathematics*, pp. 85-92, Editions GR Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, 46 rueSaint Jacques, 75005 Paris

ARSAC et al., 1992, *Initiation au raisonnement déductif au collège*, Presses Universitaires de Lyon, IREM de Lyon

BALACHEFF N., 1988, *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de collège*, Thèse d'état, LSD2 IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble

BARBIN E., 1991, The reading of original texts : how and why to introduce a historical perspective ? *For the Learning of Mathematics*, Vol. 11, n°2, pp.12-3

BERGUE Danielle, 1992, Une utilisation du logiciel "Géomètre" en 5ème, *Petit x*, IREM de Grenoble, n°29, pp. 5-13

BKOUCHE R., 1991, Variations autour de la réforme de 1902/1905, *Cahiers d'histoire & de philosophie des sciences*, N°34, pp.180-213

BOERO P., 1989, Mathematical literacy for all experiences and problems, *Actes de la treizième conférence internationale du groupe Psychology of mathematical education*, Editions GR Didactique, 46 rue Saint Jacques, 75 005 Paris, pp.62-76

BORGATO M.T. & PEPE L., 1988, Una memoria inedita di Lagrange sulla teoria delle parallele, *Bolletino di Storia delle Scienze Matematiche*, Vol. VIII, fasc. 1, pp. 307-22

BOURGUIGNON J.-P., 1993, Les géométries non euclidiennes 200 ans après Lobatchevski, *Bulletin de l'APMEP* n°389, 281-305

CAPPONI B., 1988, Mesure et démonstration. Un exemple d'activité en classe de quatrième, *Petit x*, IREM de Grenoble, pp.29-48

CHEVALLARD Y., 1992, Le caractère expérimental de l'activité mathématique, *Petit x*, IREM de Grenoble, n°30, pp. 5-15

CORDIER F. & CORDIER J., 1991, L'application du théorème de Thalès. Un exemple du rôle des représentations typiques comme biais cognitifs, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 11, n°1, pp. 45-64

DOUADY R., 1986, Jeux de cadres et dialectique outil - objet, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 7, n°2, pp. 5-31

DUVAL R., 1988, Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence, *Annales de didactique et de sciences cognitives* , Université Louis Pasteur et IREM, Strasbourg, Vol 1, pp. 57-74

EINSTEIN A. & INFELD L., 1936, *L'évolution des idées en physique*, traduction française, Champs, Flammarion, Paris

FISCHBEIN E., 1993, The theory of figural concepts, *Educational Sudies in Mathematics*, Vol.24 n°2, 139-162

de GROT C., PEIKERT R. & WUERTZ D., 1990, The optimal packing of ten equal circles in a square, *IPS Research Report* N° 90-12, IPS, ETH-Zentrum, CH -8092 Zurich

GUILLAUME P., 1937, L'appréhension des figures géométriques, *Journal de Psychologie*, XXXVième année, N° 9-10, pp. 675-710

HANNA G., 1990, Some pedagogical aspects of proof, in : Creativity, Thought and Mathematical Proof, *Interchange*, Vol. 21, N°1, pp.6-13

HERSHKOWITZ R., 1990, Psychological Aspects of Learning Geometry, in : *Mathematics and Cognition*, Nesher P. & Kilpatrick J. (eds.), Cambridge University Press, pp. 70-95

JOHSUA M.A. & JOHSUA S., 1989, Les fonctions didactiques de l'expérimental dans l'enseignement scientifique, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 8, n°3, pp. 231-66

KOYRE A., 1966, *Etudes d'histoire de la pensée scientifique*, Gallimard, Paris, 1973

KUHN T., 1970, *La structure des révolutions scientifiques*, Champs, Flammarion, Paris, 1983

LABORDE C., 1990, L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 9, n°3, pp.337-63

LABORDE C., 1992, Solving problems in computer based geometry environments : the influence of the features of the software, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 92/4, pp.126-33

LEGRAND M., 1990, Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 9, n°3, pp. 365-406

LEMONIDIS C., 1991, Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement de l'homothétie, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 11, n°2/3, pp. 295-324

LESH R., 1981, Applied Mathematical Problem Solving, *Educational Studies in Mathematics*, Vol.12. n°2, pp. 235-64

LOBATCHEVSKI N., 1837, *Nouveaux Principes de géométrie*, traduits du russe, Mémoires de la Société Royale de Liège, 3ème année, t.2, 1900

MESQUITA A.L., 1989, Sur une situation d'éveil à la déduction en géométrie, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 20 N°1, pp.55-77

MICHEL P.H., 1950, *De Pythagore à Euclide*, Société d'édition "Les Belles Lettres", Paris

MOLLARD M. & PAYAN Ch., 1990, Some progress in the packing of equal circles in a square, *Discrete Mathematics* , 84, pp. 303-7, North Holland

NANARD J., 1990, *La manipulation directe en interface homme-machine*, Thèse de doctorat d'état, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier

NOIRFALISE R., 1991, Figures prégnantes en géométrie ?, *Repères - IREM*, n°2, pp.51-8

PARZYSZ B., 1988, Knowing vs Seeing, Problems of the plane representation of space geometry figures, *Educational Studies in Mathematics*, 19.1, pp. 79-92

PIAGET J., 1973, *Introduction à l'épistémologie génétique : la pensée mathématique*, 2ème édition, PUF, Paris

ROBERT A. & TENAUD I., 1988, Une expérience d'enseignement de la géométrie en T.C, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 9, n°1, pp. 31-70

STRAESSER R., 1992, Didaktische Transposition - eine "Fallstudie" anhand des Geometrie-Unterrichts, *Journal für Mathematik-didaktik*, Jahrg. 13, Heft 2/3, pp. 231-52

THOM R., 1972, Modern Mathematics : does it exist ? in : Developments in Mathematics Education, *Proceedings of the 2. International Congress on Mathematical Education*, Howson G. (ed.), Cambridge University Press, pp. 194-209

VERGNAUD G., 1988, Frameworks and facts in the PME, *Proceedings of the sixth International Congress on Mathematical Education*, Hirst A.& K. (eds.), Janos Bolyai Mathematical Society, pp. 29-47

WHEELER D., 1990, Aspects of mathematical proof, in : Creativity, Thought and Mathematical Proof, *Interchange*, Vol. 21, N°1, pp.1-5

YERUSHALMI M. & CHAZAN D., 1990, Overcoming Visual Obstacles with the Aid of the Supposer, *Educational Studies in Mathematics*, 21.3, 1990