

Les problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la solution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de "beaux problèmes"...si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions qui sont à envoyer à l'adresse suivante (réponse à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO
21 rue Juliette Dodu,
75010 PARIS.

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N° 240 (Jean-Pierre RAUCOULES et Pierre AYMARD, Albi)

De combien de manière peut-on décomposer un entier S en somme d'entiers naturels (non nuls) consécutifs ?

ÉNONCÉ N° 241 (Christian GAUTIER, Versailles)

Soit ABC un triangle, G son centre de gravité et I le centre de son cercle inscrit. A quelle condition (IG) est-elle perpendiculaire à un côté ?

ÉNONCÉ N° 242 (Gérard LAVAU, Fontaine-lès-Dijon)

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 et f une isométrie vectorielle de E . Montrer que le vecteur :

$$Z = u \wedge f(u) + v \wedge f(v) + w \wedge f(w)$$

ne dépend pas de la base orthonormée (u, v, w) , directe ou non, choisie.

voilà ?
immédiat avec les coord.

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N°222 (J.P.FRIEDELMEYER, Strasbourg)

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, le nombre

$$x_n = \frac{1}{\left(2 \cos \frac{2\pi}{9}\right)^n} + \frac{1}{\left(2 \cos \frac{4\pi}{9}\right)^n} + \frac{1}{\left(2 \cos \frac{8\pi}{9}\right)^n} \text{ est un entier naturel égal à :}$$

$$x_n = \sum_{0 \leq p \leq [n/3]} (-1)^p 3^{n-3p} \frac{n}{n-2p} C_{n-2p}^p.$$

SOLUTION de M. BAUVAL (Versailles) et A. BAUVAL (Toulouse).

$$\rightarrow x_n = \frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n}, \text{ où } a, b, c \text{ sont de la forme } \alpha + \frac{1}{\alpha} \text{ avec } \alpha^6 + \alpha^3 + 1 = 0.$$

Les réels a, b, c sont donc les racines du polynôme $X^3 - 3X + 1$. \rightarrow On en déduit d'une part, les premières valeurs de x_n :

$$(1) \quad x_0 = 3, x_1 = 3, x_2 = 9$$

d'autre part, la relation de récurrence :

$$(2) \quad x_n - 3x_{n+2} + x_{n+3} = 0.$$

Posons $F = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n$. En multipliant (2) par t^{n+3} et en sommant sur n , onobtient : $t^3 F - 3t(F - x_0 - x_1 t) + (F - x_0 - x_1 t - x_2 t^2) = 0$, ce qui, compte

$$\text{tenu de (1), donne : } F = \frac{3 - 6t}{1 - 3t + t^3}.$$

$$\rightarrow \frac{1}{1 - 3t + t^3} = \sum_{q=0}^{\infty} (3t - t^3)^q = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^q (-1)^p 3^{q-p} C_q^p t^{q+2p}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left(\sum_{0 \leq 3p \leq n} (-1)^p 3^{n-3p} C_{n-2p}^p \right), \text{ d'où :}$$

$$x_n = 3 \sum_{0 \leq 3p \leq n} (-1)^p 3^{n-3p} C_{n-2p}^p - 6 \sum_{0 \leq 3p \leq n-1} (-1)^p 3^{n-1-3p} C_{n-1-2p}^p$$

$$= \sum_{0 \leq 3p \leq n} (-1)^p 3^{n-3p} C_{n-2p}^p \left(3 - 2 \frac{n-3p}{n-2p} \right)$$

$$= \sum_{0 \leq p \leq \lfloor n/3 \rfloor} (-1)^p 3^{n-3p} \frac{n}{n-2p} C_{n-2p}^p$$

Autres solutions

Jean Marc BRESLAW (St Denis de la Réunion), Didier CART (Epinal), Marie-Laure CHAILLOUT (Sarcelles), François COUCHOT (Caen), Jacques DAUTREVAUX (St André), M. DELEHAM (Reims), Edgard DELPLANCHE (Créteil), Robert FERRÉOL (Paris), Michel GARITTE (Armentières), Jacques LEGRAND (Biarritz), René MANZONI (Le Havre), Serge PAICHARD (Laval), Alain PICHEREAU (St Yrieix), Marguerite PONCHAUX (Lille), Pierre RENFER (Ostwald), Jean-Paul ROUX (Unieux), M. VIDIANI (Fontaine lès Dijon)

...plus deux tentatives de solution qui n'ont pas abouti du fait d'une erreur dans l'énoncé initial. Ce n'était pas une faute de frappe, mais une erreur de calcul, elle a fait l'objet d'un erratum, mais trois ou quatre lecteurs en ont été sérieusement gênés, je les prie de m'en excuser.

Remarques

Jean-Pierre BRESLAW et Pierre RENFER préfèrent faire appel au développement en série entière de $\text{Log}(1 - 3x + x^3)$ qu'à celui de $\frac{1}{1 - 3X + X^3}$.

Jean-Paul ROUX, en réitérant autant que nécessaire la relation de récurrence, dénombre les trajets permettant d'atteindre x_n à partir des seules premières valeurs x_0, x_1 et x_2 .

M. VIDIANI teste sur son ordinateur les trois modes de calcul : somme des puissances n -ièmes, relation de récurrence et formule à démontrer. De loin, c'est la relation de récurrence qui est la plus longue, mais on peut supposer que la somme des puissances n -ièmes est la moins précise (il ne l'utilise que jusqu'à 10). La formule à démontrer donne le résultat (de 46 chiffres) en à peine une seconde pour $n = 100$. Mais il semble que la machine ait des problèmes de rangement : elle met plusieurs secondes, même pour les petites valeurs de n , à retrouver les valeurs qu'elle vient de ranger pour appliquer la formule de récurrence!

Marie-Laure CHAILLOUT remarque que les deux transformations $x = 1/X$ et $x = 1 - X$ transforment l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ en $X^3 - 3X^2 + 1 = 0$ (et réciproquement!). Effectivement,

$$\frac{1}{2 \cos \frac{2\pi}{9}} = 1 - 2 \cos \frac{4\pi}{9}, \text{ etc.}$$

M. DELEHAM signale que seul $\frac{1}{2 \cos \frac{4\pi}{9}}$ a un module supérieur à 1, de

sorte que, sauf pour $n = 0$ et $n = 2$, x_n est l'entier le plus proche de

$$\left(\frac{1}{2 \cos \frac{4\pi}{9}}\right)^n. \text{ Par ailleurs, } \frac{1}{2 \cos \frac{4\pi}{9}} \text{ est voisin de } y = \frac{7936 + 190\sqrt{6979}}{2755 + 66\sqrt{6979}}$$

Pour quelles valeurs de n , x_n est-il l'entier le plus voisin de y^n ?

D'autre part, il cherche à généraliser le problème de la somme des puissances n -ièmes des racines de l'équation $x^m = ax^{m-1} - 1$ qu'il écrit

$$\sum (-1)^p \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_m a^{n-mp} \text{ avec } \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_m = \sum_{j=0}^{n-m-j} \begin{bmatrix} n-m-j \\ p-1 \end{bmatrix}_m$$

$$\text{et } \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_m = \begin{cases} 0 & \text{si } m < 0 \\ m & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n > 0 \end{cases}.$$

Remarquons que l'équation admet au plus trois racines réelles (quels que soient a et m), et que le problème peut être résolu par la méthode de M. et A. BAUVAL: si $n < m$, la somme des puissances n -ièmes des racines vaut m pour $n = 0$ et a^n pour $1 \leq n \leq m$, car tous les polynômes symétriques élémentaires des racines (hormis la somme et le produit des racines) sont nuls. Dès

lors, la méthode ci-dessus conduit à: $\sum x_n t^n = \frac{m - (m-1)at}{1 - at + t^m}$ d'où

$$\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_m = \left(\frac{n}{n - (m-1)p}\right) \mathbf{C}_{n-(m-1)p}^p \text{ qui vérifie bien la relation de récurrence.}$$

Celle-ci peut d'ailleurs s'écrire plus simplement:

$$\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} n-1 \\ p \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} n-m \\ p-1 \end{bmatrix}_m. \text{ Et c'est sous cette forme que Jacques DAU-}$$

TREVAUX, Edgard DELPLANCHE et Robert FERRÉOL l'ont étudiée, dans notre cas particulier où $m = 3$, en cherchant dans un premier temps la

solution de l'énoncé 222 sous la forme $x_n = \sum (-1)^p \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} 3^{n-3p}$, en prou-

vant à l'aide de la relation de récurrence que $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-3 \\ p-1 \end{bmatrix}$ puis en

démontrant que, compte tenu des valeurs initiales, $\left[\begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right] = \frac{n}{n-2p} \mathbf{C}_{n-2p}^p$.
 Robert FERRÉOL se ramène à un vrai triangle de Pascal en posant $B_n^p = \left[\begin{matrix} n+2p \\ p \end{matrix} \right]$, qui vérifie bien $B_n^p = B_{n-1}^p + B_{n-1}^{p-1}$ mais dont les valeurs initiales ne sont pas les mêmes que dans le triangle de Pascal™ authentique... il ne reste plus qu'à parachever l'étude de tous les vrais-faux triangle de Pascal !

Il cherche en outre une parenté entre la formule du présent énoncé et les formules classiques concernant les suites de Fibonacci et de Lucas :

$$\left(2 \cos \frac{\pi}{5} \right)^n + \left(2 \cos \frac{3\pi}{5} \right)^n = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n}{n-p} \mathbf{C}_{n-p}^p$$

et
$$\frac{\left(2 \cos \frac{\pi}{5} \right)^{n+1} - \left(2 \cos \frac{3\pi}{5} \right)^{n+1}}{\sqrt{5}} = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathbf{C}_{n-p}^p$$

ÉNONCÉ N° 223 (Igor CHARIGUINE, Moscou)

On inscrit dans un cercle (Γ) le trapèze $ABCD$, de bases $[AD]$ et $[BC]$. Le cercle inscrit dans le triangle ACD a pour rayon r et est tangent à (AD) en M . Montrer que le cercle tangent aux segments $[AM]$ et $[BM]$ et au cercle (Γ) a, lui aussi, pour rayon r .

SOLUTION (d'après Jacques BOUTELOUP, Rouen).

Observons la figure (1) suivante :

Il est clair que $OI^2 + IM^2 = OL^2 + LM^2$, car $LI^2 = OI^2 - OL^2 = LM^2 - IM^2$.

J étant sur la bissectrice de \widehat{LME} , le triangle LJM est isocèle, de sorte que $OJ^2 = OI^2 + r^2$ et si l'on a $OI^2 = R^2 - 2Rr$, alors, $OJ = R - r$ si bien que le cercle de centre J et de rayon r est tangent à (EM) , à (LM) et au cercle de centre O et de rayon R .

En fait, la figure (1) n'est qu'un détail de la figure (2) de l'énoncé : O est le centre du cercle (Γ) circonscrit au triangle ACD , donc au trapèze $ABCD$, I , le centre du cercle inscrit, $OI^2 = R^2 - 2Rr$ n'est autre que la relation d'Euler, et il suffit de prouver que la droite (LM) passe par B pour achever notre démonstration : le cercle de centre J et de rayon r sera bien tangent à $[AD]$, à $[BM]$ et à (Γ).

Nous nous appuyerons sur un autre résultat classique : si N est le point de

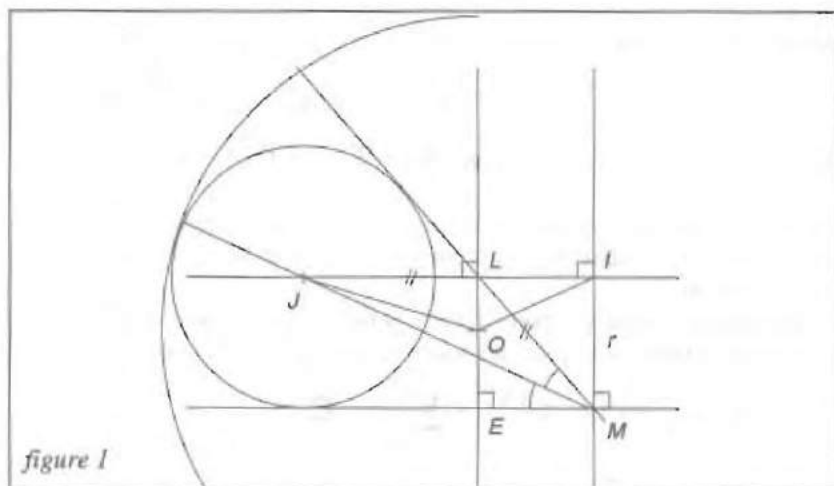


figure 1

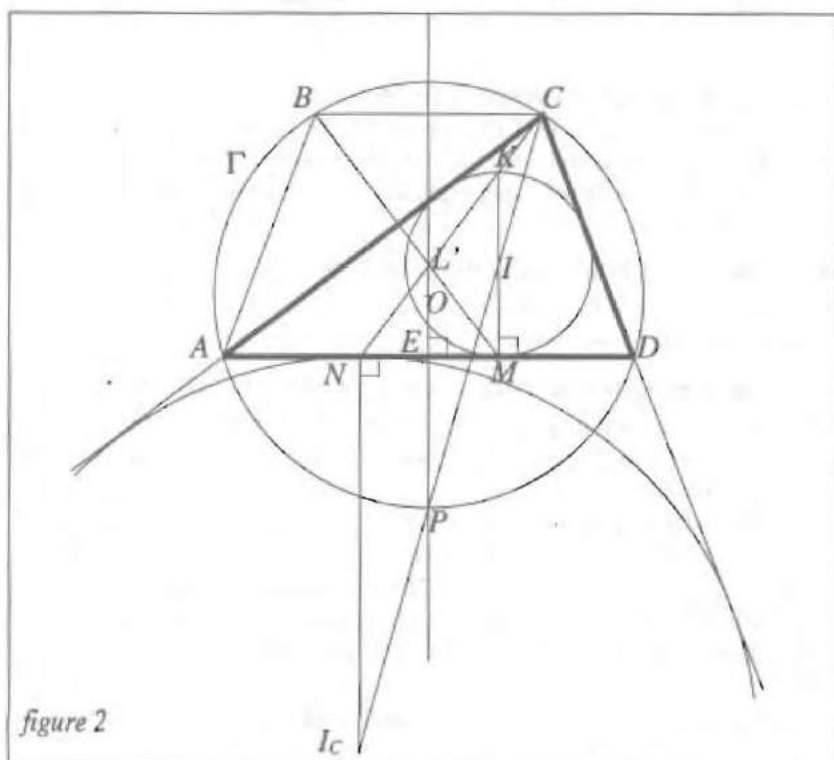


figure 2

contact avec $[AD]$ du cercle exinscrit au triangle ACD , dans l'angle \widehat{C} , alors, E est le milieu de $[MN]$. Donc la symétrie par rapport à la médiatrice de $[AD]$ transforme $[BM]$ et $[CN]$ et si l'on prouve que $[CN]$ rencontre cette médiatrice en L' tel que $EL' = r$ (donc que $L' = L$), alors B, L et M seront bien alignés. Or, les cercles exinscrit et inscrit sont homothétiques dans une homothétie de centre C , puisque leurs centres sont sur la même bissectrice de \widehat{C} . Cette homothétie transforme N en K qui appartient à (CN) , au cercle inscrit et à la droite (IM) , homothétique de (I_CN) . On a donc $KM = 2r$, et comme d'après Thalès, L' est le milieu de $[NK]$, $L'E = r$.

Ainsi s'achève la démonstration, sous réserve de supposer connus la relation d'Euler et le fait que E est le milieu de $[MN]$. Bien que ces résultats puissent être trouvés, par exemple, dans *La géométrie du triangle* d'Yvonne et René SORTAIS (Paris, Hermann, 1987), voici un aperçu de leur démonstration.

La bissectrice (CI) recoupant en P le cercle circonscrit (cf. figure 3), les angles \widehat{ACP} et \widehat{PCD} sont égaux à $\frac{\widehat{C}}{2}$, donc les cordes $[PA]$ et $[PD]$ sont égales à $2R \sin \frac{\widehat{C}}{2}$.

Par ailleurs, les bissectrices intérieures (qui se coupent en I) et extérieures (qui se coupent en I_C)

des angles \widehat{A} et \widehat{D} étant perpendiculaires, A et D sont sur le cercle de diamètre $[II_C]$ dont le centre, équidistant de A et D , ne peut être que P . Le fait que E est le milieu de $[MN]$ s'en déduit par projection de I, P, I_C sur $[AD]$. Mais on a

aussi $PI = PA = 2R \sin \frac{\widehat{C}}{2}$, alors

que $IC = r / \sin \frac{\widehat{C}}{2}$.

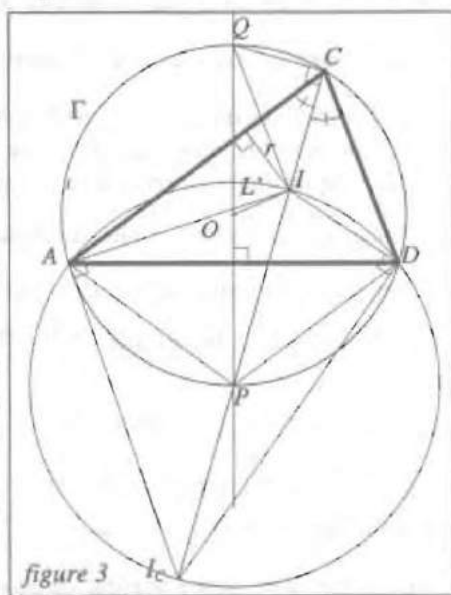


figure 3

Or, $IP \cdot IC = 2rR = -\vec{IP} \cdot \vec{IQ} = -(OI^2 - R^2)$ d'où la relation d'Euler.

Autres solutions

Jean-Marc BRESLAW (St Denis de la Réunion), Edgard DELPLANCHE (Créteil), Jacques LEGRAND (Biarritz), R. MANCEAU (Paris), René MANZONI (Le Havre), Charles NOTARI (Montaut), Serge PAICHARD (Laval), Marguerite PONCHAUX (Lille), R. RAYNAUD (Digne), André VIRICEL (Villers lès Nancy).

ÉNONCÉ N°224 (François LO JACOMO, Paris).

Montrer que, quels que soient a et b , entiers non nuls, et pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe u et v entiers tels que $\left| \exp\left(\frac{2}{a}\right) - \frac{u}{bv+1} \right| \leq \frac{\varepsilon}{u^2}$

SOLUTION de l'auteur.

Je n'ai pas reçu de réponse à cet énoncé, et pourtant l'étude des approximations diophantiennes (approximation des nombres irrationnels par des rationnels) est bien utile pour vraiment saisir le concept même de «nombre entier».

C'est à ce sujet en effet que Peter Gustav LEJEUNE-DIRICHLET a pour la première fois utilisé le **principe des tiroirs** : si l'on place $n+1$ objets dans n tiroirs, un tiroir au moins contiendra au moins deux objets. Si, pour un entier C donné, je place dans les C intervalles $\left[\frac{k-1}{C}, \frac{k}{C}\right]$ ($1 \leq k \leq C$) les $(C+1)$ parties décimales de qx ($0 \leq q \leq C$), deux d'entre elles au moins seront dans le même intervalle, ce qui, par différence, fournit un entier $w \leq C$ tel que, pour un entier u donné, $|wx - u| < 1/C$, prouvant ainsi que pour tout irrationnel x , il existe une infinité de rationnels $\frac{u}{w}$ tels que $\left|x - \frac{u}{w}\right| < \frac{1}{w^2}$ (1).

Pour certains irrationnels, on ne peut pas faire beaucoup mieux : par exemple, pour $\sqrt{2}$, du fait que $\left|\sqrt{2} - \frac{u}{w}\right| \left|\sqrt{2} + \frac{u}{w}\right| \geq \frac{1}{w^2}$ on ne peut pas trouver de rationnel $\frac{u}{w}$ tels que $\left|\sqrt{2} - \frac{u}{w}\right| < \frac{1}{3w^2}$.

Mais pour d'autres, on peut, pour tout $\varepsilon > 0$, trouver un rationnel (donc : une infinité de rationnels) $\frac{u}{w}$ tels que : $\left|x - \frac{u}{w}\right| < \frac{\varepsilon}{w^2}$ (2)

Pour certains, il est même possible de trouver, pour un $\varepsilon > 0$ donné, une infi-

nité de rationnels $\frac{u}{w}$ tels que $\left| x - \frac{u}{w} \right| < \frac{1}{w^{2+\epsilon}}$ (3) et le théorème de ROTH (1955), précisant un résultat plus élémentaire de LIOUVILLE (1844), permet d'affirmer que de tels x sont obligatoirement transcendants (ne sont racines d'aucune équation à coefficients entiers).

Mais le plus simple des nombres transcendants usuels, e , n'en fait même pas partie !

$$\forall \frac{u}{w} \in \mathbb{Q}, \left| e - \frac{u}{w} \right| > \frac{1}{w^2(4 + \text{Log } w)}$$

En fait, grâce aux propriétés fondamentales de la fonction exponentielle, on peut expliciter les meilleures approximations diophantiennes (les «réduites») de e (voir par exemple l'énoncé 171 dans *les 200 premiers problèmes de l'A.P.M.E.P.*, vol.III, p.162-165) - et cela vaut tout autant pour $\exp(2/a)$ quel que soit l'entier $a \geq 1$. On prouve ainsi que e (et $\exp(2/a)$) vérifie la relation (2) sans vérifier (3).

Mais, le résultat à démontrer va un peu plus loin : parmi les réduites de

$\exp(2/a)$ vérifiant $\left| \exp\left(\frac{2}{a}\right) - \frac{u}{w} \right| < \frac{\epsilon}{w^2}$ il doit y en avoir une (donc une infini-

mité) dont le dénominateur est congru à 1 modulo b et ce, quel que soit l'entier b . Si l'on remarque qu'il n'y en a pas nécessairement dont le dénominateur soit divisible par b , ni congru à 2 modulo b ... que parmi toutes les

fractions $\frac{u}{w}$ telles que $\left| e - \frac{u}{w} \right| < \frac{3}{u^2}$, aucune n'a un dénominateur w pair, ni

divisible par 3, ni par 5, ni congru à 2, 3, 4 ou 5 modulo 7, on voit que ce résultat est assez puissant.

Considérons tout d'abord la suite de polynômes $P_n(x)$ définie par : $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = 1 + x$

$$\text{et } \forall n \geq 1 \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x^2}{(2n-1)(2n+1)} P_{n-1}(x) \quad (4)$$

On montre par récurrence que pour tout $n \geq 1$

$$P'_n(x) - P_n(x) = -\left(\frac{x}{2n-1}\right) P_{n-1}(x)$$

$$\left(\text{car } P'_{n+1}(x) - P_{n+1}(x) = -\left(\frac{x}{2n+1}\right) \left(P_n(x) + \frac{x}{2n-1} \left(\frac{-x}{2n-3} P_{n-2}(x) \right) \right) \right),$$

de sorte que la fonction $f_n(x) = P_n(-x)e^x - P_n(x)e^{-x}$ vérifie quant à

elle : $f_n(x) = \int_0^x \frac{-t}{2n-1} f_{n-1}(t) dt$ et donc, par récurrence sur $n \geq 0$,

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f_n(x)| \leq \frac{A}{q_n^2} \times \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (5)$$

où A est tel que, sur $[0, 1]$, $|f_0(t)| \leq At$ (ce qui permet d'amorcer la récurrence : on peut prendre $A = e - \frac{1}{e}$) et $q_n = \prod_{1 \leq k \leq n} (2k-1)$. Par ailleurs, toujours

par récurrence sur $n \geq 2$, la relation (5) entraîne :

$$\forall x \in [0, 1], \quad P_n(-x) \geq \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P_n(x) \leq 4 - \frac{2}{2n-1} < 4.$$

Or, pour $x = 1/a$, la majoration (5) peut s'écrire :

$$\left| \exp\left(\frac{2}{a}\right) - \frac{P_n(1/a)}{P_n(-1/a)} \right| \leq \frac{B}{2n+1} \left(\frac{1}{a^n q_n}\right)^2, \quad B \text{ étant un majorant de } \frac{A \exp(1/a)}{a P_n(-1/a)}$$

(on peut prendre $B = 3(e^2 - 1)$), alors que la relation de récurrence (4) permet de démontrer que $P_n(1/a)$ et $P_n(-1/a)$ ont le même dénominateur $a^n q_n$.

Mieux : si l'on écrit $P_n(1/a) = \frac{u_n}{a^n q_n}$ et $P_n(-1/a) = \frac{w_n}{a^n q_n}$, la relation (4)

$$\begin{aligned} \text{entraîne : } u_{n+1} &= a(2n+1)u_n + u_{n-1}, & \text{avec } u_0 &= 1 \text{ et } u_1 = a+1 \\ w_n &= a(2n+1)w_n + w_{n-1}, & \text{avec } w_0 &= 1 \text{ et } w_1 = a-1 \end{aligned}$$

et l'on a donc $\left| \exp\left(\frac{2}{a}\right) - \frac{u_n}{w_n} \right| \leq \frac{C}{2n+1} \times \frac{1}{u_n^2}$, C étant un majorant de

$B P_n^2(1/a)$, par exemple, $C = 16B = 48(e^2 - 1)$.

Toujours est-il que $\frac{C}{2n+1}$ tend vers zéro lorsque $n \rightarrow +\infty$, si bien que $\exp(2/a)$ vérifie bien la relation (2). Pour achever notre démonstration, il reste à prouver que parmi ces fractions $\frac{u_n}{w_n}$ que l'on vient de déterminer, une infinité ont un dénominateur congru à 1 modulo b et ce, quel que soit l'entier b .

Considérons les triplets $T_n \in (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^3$ définis par: $T_n = (\bar{n}, \bar{w}_n, \bar{w}_{n+1})$ avec $\bar{n} = n \pmod{b}$, $\bar{w}_n = w_n \pmod{b}$ et $\bar{w}_{n+1} = w_{n+1} \pmod{b}$.

Comme T_n ne peut prendre que b^3 valeurs distinctes, d'après l'incontournable principe des tiroirs, on peut trouver deux entiers n et n' ($0 \leq n \leq n' \leq b^3$) tels que $T_n = T_{n'}$. Mais la relation de récurrence: $w_{n+1} = a(2n+1)w_n + w_{n-1}$ est encore vraie modulo b , et elle entraîne que si $T_n = T_{n'}$, $T_{n+1} = T_{n'+1}$ et $T_{n-1} = T_{n'-1}$, d'où, $\forall j \in \mathbb{Z}$ ($j \geq -n$), $T_{n+j} = T_{n'+j}$. En particulier, si $m = n' - n > 0$, $T_0 = T_m$ et même, par récurrence sur k : $\forall k \geq 0$, $T_0 = T_{km}$ donc, en particulier, $\bar{w}_{km} = \bar{w}_0 = 1$ ou encore $w_{km} = bv_k + 1$ pour une infinité d'indices km , ce qui achève la démonstration.

Pour les petits malins qui s'intéresseraient au cas où a est négatif, signalons que le résultat reste vrai car les arguments invoqués pour w_n s'appliquent également à u_n .

Notons toutefois que la suite w_n peut être prolongée pour $n < 0$ au moyen de la même relation de récurrence, et qu'elle vérifie alors $w_{-n} = -w_{n-1}$, donc, par exemple $w_{-1} = -1$. En outre, $T_0 = T_m$ entraîne que m est divisible par b . On peut donc trouver une infinité d'indices n divisibles par b , tels que $w_n \equiv 1 \pmod{b}$ et $w_{n-1} \equiv -1 \pmod{b}$. Mais ceci ne vaut pas pour u_n , car $u_{-n} = u_{n-1}$.

Par ailleurs, la fraction $\frac{u_n}{w_n}$ définie ci-dessus n'est pas toujours irréductible, mais comme nous n'avons pas exigé que $\frac{u}{bv+1}$ soit irréductible, cela n'a pas d'importance; toutefois, si l'on rajoutait la condition que u et $bv+1$ soient premiers entre eux, le résultat serait encore vrai, car la relation de récurrence entraîne:

$$u_n w_{n+1} - u_{n+1} w_n = u_n w_{n-1} - u_{n-1} w_n = \pm 2$$

donc seul 2 peut diviser u_n et w_n : si a est pair, u_n et w_n sont toujours impairs, mais si a est impair, ils sont impairs pour n pair et pairs sinon. Donc au moins pour n pair, u_n et w_n sont premiers entre eux, et il y a une infinité d'indices pairs parmi les T_{km} .