Un anneau de Moebius développable

Jean-Pierre Truong

Moebius & Co

Qui n'a pas déjà réalisé un anneau de Moebius en collant les extrémités d'un ruban de papier après l'avoir tordu une fois ?

En mathématiques, l'anneau de Moebius est un exemple important de surface ne possédant qu'une seule face (voir *Les aventures d'Anselme Lanturlu* de Jean-Pierre Petit [3] et [4]). C'est pour beaucoup une curiosité, comme la bouteille[1] de Klein [1] ou encore le slip[1] de Moebius [1]. Il existe en fait plusieurs variétés [4] d'anneaux de Moebius, selon que l'on torde plus ou moins le ruban (d'un nombre impair de demi-tours). Nous allons juste nous intéresser à l'anneau classique qui ne présente qu'un seul demi-tour. Outre sa construction en papier, un tel anneau de Moebius est représenté par les équations paramétriques [1] suivantes :

$$\left.\begin{aligned} x &= (r + \lambda \cos\alpha) \cos 2\alpha \\ y &= (r + \lambda \cos\alpha) \sin 2\alpha \\ z &= \lambda \sin \alpha \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

où r est un réel positif, le paramètre α décrit $[0\ ,\ \pi[$ et le paramètre λ décrit $[-l, l]$ où $0 < l < r$.

C'est une portion de surface décrite par un segment de longueur $2l$ qui fait le tour d'un cercle de rayon r centré en O en se retournant d'un demi-tour. Notons que suivant le sens de rotation effectué, on obtient deux sur-

1 Comme le vrai, mais beaucoup moins pratique car il n'a qu'une face!

faces qui sont l'image l'une de l'autre dans un miroir (figures dites énantiomorphes).

La figure 1 en est une représentation dans un repère orthonormé (O, x, y, z) pour $r = 1$ et $l = 0{,}4$.

On identifie implicitement cette représentation avec l'anneau de Moebius réalisé avec un bout de ruban (voir figure 2).

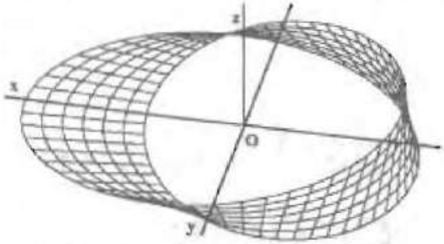

figure 1 : représentation de l'anneau de Moebius représenté par l'équation paramétrique (1) avec $r = 1$ et $l = 0{,}4$ (surface non développable)

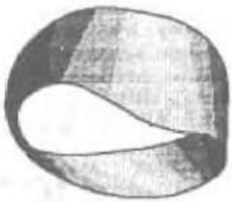

figure 2 : dessin de l'anneau de Moebius réalisé avec un ruban de papier (surface développable)

2 - Comment, ils ne sont pas pareils ?!

Les deux anneaux sont topologiquement identiques, mais une comparaison plus attentive montre que la correspondance est loin d'être évidente. En réalité, on démontre qu'on ne peut pas déplier et aplanir après l'avoir coupé, l'anneau de Moebius de la figure 1 ! Il se passe la même chose que pour une sphère : des plis, des déchirures ou des déformations apparaissent quand on tente de rendre planes de telles surfaces, alors que l'anneau réalisé avec du papier peut (évidemment ?) retrouver, après un coup de ciseaux la forme initiale du ruban. Il est légitime de croire qu'il existe donc plusieurs types différents d'anneaux de Moebius pour une même variété, en plus du fait qu'ils peuvent être énantiomorphes. En géométrie des surfaces réglées, on dit que l'anneau de Moebius représenté par la construction de papier est (selon toute vraisemblance) une surface développable, tandis que l'autre anneau ne l'est pas.

La discussion pourrait se terminer sur cette constatation pas complètement justifiée, mais pour tenter de la démontrer, on pourrait se poser la question intéressante suivante [2] : "Peut-on trouver une équation d'un anneau de Moebius qui ait la propriété d'être développable comme le modèle en papier ?"

2 Question soulevée en 1987 par R. Boudet et P. Casal, professeurs à l'Université d'Aix-Marseille I.

Pour celui qui s'essaie à deviner une équation qui réponde à cette question, le problème paraît rapidement insoluble. De même, si on tente de trouver l'équation de l'anneau de papier en utilisant des outils du calcul variationnel, avec par exemple, des considérations d'énergies potentielles élastiques (proportionnelles à la courbure moyenne) associées aux anneaux de Moebius, le problème prend une telle proportion qu'une résolution analytique est vraisemblablement impossible. Et même, si tant est qu'une résolution numérique soit techniquement faisable, le résultat fourni sera-t-il forcément exploitable ? Rien n'est moins sûr…

Néanmoins une telle solution existe vraiment et on peut exhiber une équation d'un anneau de Moebius qui soit développable. L'exposé suivant propose une manière peu classique pour trouver une telle équation.

4. Un anneau de Moebius développable

Le raisonnement déductif dont on connaît la toute puissance qui a permis de dresser l'édifice mathématique sur des résultats solidement établis, peut malgré tout, parfois être inopérant dans certains cas (très rares ?). Ici dans notre cas, les hypothèses sont tellement faibles que suivre le jeu déductif revient à vouloir rechercher toutes les solutions, sans être capable d'en exhiber une seule : "Qui trop embrasse mal étreint".

Une autre manière de faire, moins classique, est de traiter le problème à l'envers, quitte à fournir une étude qui devra être complétée. C'est-à-dire partir d'une ou de plusieurs parties de solutions qui peuvent simplifier, voire répondre à la question. Cette pratique peut s'appliquer à la résolution de problèmes physiques [5] réputés très complexes. Pour en donner une image mathématique plus claire, c'est un peu comme si, pour une équation différentielle, on connaissait une forme générale d'une solution. Le problème devient alors pratiquement évident.

Dans notre cas, il existe des surfaces simples qui sont développables : le cylindre, le cône, etc.... Et effectivement, on peut facilement reconstruire un anneau de Moebius développable à partir de portions de cônes, et voilà la question résolue !

Une construction possible est la suivante. On a besoin de trois portions de cônes disposées comme l'indique la figure 3 ci-dessous. Les sommets sont placés sur un triangle S_1 S_2 S_3 quelconque, de sorte que les droites supports des côtés du triangle soient aussi des génératrices des trois cônes. Il y a là très peu de contraintes sur le choix de ces cônes, ce qui donne un nombre infini de configurations possibles ayant la propriété d'être développable !

Néanmoins, pour ne pas faire de plis, les raccordements devront être tels que les tangentes soient alignées, ce qui est toujours possible (on pourrait

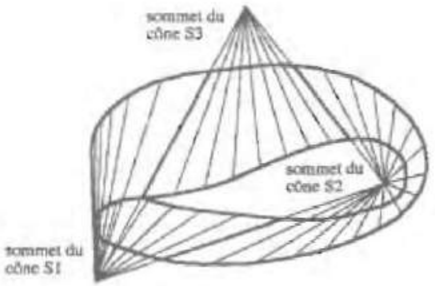

figure 3 : exemple de reconstruction d'un anneau de Moebius développable à l'aide de trois portions de cône de commets S1, S2, S3 raccordés entre eux.

aussi avoir le raccordement des courbures, etc....).

L'équation d'un cône n'étant pas remarquablement difficile à obtenir, on ne poussera pas l'étude jusqu'à exhiber une équation des anneaux de Moebius obtenus. Ceci sera laissé au soin de ceux qui en ressentiront la nécessité.

5. Un anneau de Moebius encore plus vrai !

L'ensemble des solutions étant infini (en fait, il est même de dimension infinie), on se propose de braquer notre attention sur des cas plus intéressants.

Nous allons maintenant inverser le problème : "Peut-on former de tels anneaux de Moebius formés de trois portions de cônes, à partir d'un ruban rectangulaire ?'".

La réponse est encore affirmative !

Un exemple de patron de cet anneau de Moebius est représenté sur la figure 4 ci-dessous. Celui-ci est constitué d'un ruban rectangulaire où des points S1, S2 et S3 correspondants aux sommets des cônes ont été disposés de part et d'autre. Néanmoins ces points ne devront pas être pris de façon

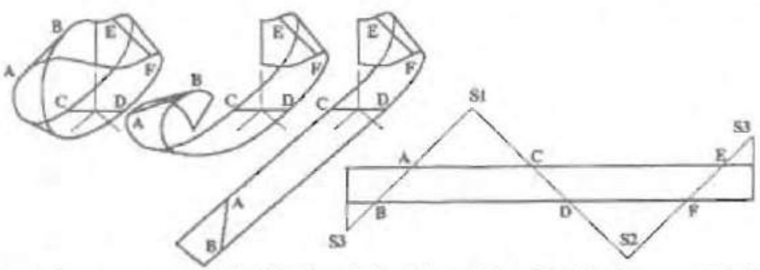

figure 4 : un anneau de Moebius formé de trois portions de cône de centre S1, S2 et S3, peut être construit à partir d'une bande rectangulaire semblable à celle correspondant au modèle en papier. Les points A, B, C, D, E, F, S1, S2 et S3 sont coplanaires sur l'anneau.

tout à fait quelconque : les deux points S3 - puisqu'ils seront confondus - devront être disposés de manière symétrique au niveau des bords du ruban afin de réaliser la continuité de l'anneau de Moebius et le triangle S1 S2 S3 doit être constructible (ce qui donne des conditions sur les angles et les longueurs). Il suffit alors de suivre les figures pour faire la construction. La forme de chacun des cônes étant pratiquement libre, il y a aussi une infinité d'anneaux de Moebius formés de trois cônes à partir de rubans rectangulaires.

Il existe donc une fonction qui permet de passer d'un anneau de Moebius ainsi formé à celui correspondant au pliage classique de la bande de papier, sans déformation, pli ni déchirure (déformation dite isométrique).

En réalité, bien qu'il soit développable, l'anneau de Moebius obtenu ne peut jamais être en tout point identique à celui qui correspond au modèle en papier. Il existe une certaine différence et nous laisserons la question ouverte.

Bien entendu, on peut aussi construire de la même manière beaucoup d'autres anneaux de Moebius développables, qui auraient la même propriété remarquable précédente (avec des cylindres, des hélicoïdes développables - surfaces engendrées par les tangentes à une hélice circulaire, etc....), mais ils ne seront certainement pas plus simples, bien qu'on puisse soupçonner que les configurations à base d'hélicoïdes développables sont probablement plus proches de l'anneau de Moebius correspondant au modèle en papier. Il reste donc encore des choses à voir de plus près...

6. Un anneau de Moebius encore plus petit !

Une des questions encore ouverte est de savoir quel est le ruban rectangulaire le plus court de largeur unité qui permette encore la construction d'un anneau de Moebius sans pli, déchirure ni déformation. Jusqu'à présent, on a réussi à montrer [1] qu'un ruban $L \times l$ tel que :

$$\frac{L}{l} = \sqrt{3}$$

est suffisamment long pour construire un tel anneau. Cette condition suffisante est facilement justifiable à l'aide des anneaux de Moebius précédents qui ont été formés à partir de trois portions de cônes. L'anneau de Moebius tend alors vers une surface constituée de trois triangles équilatéraux de côtés égaux à $\frac{2}{\sqrt{3}}$. La figure 5 montre le genre d'anneau "" plat" qui peut alors être obtenu.

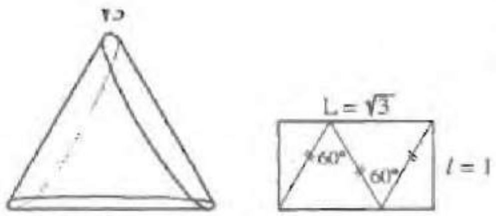

figure 5 : en prenant un ruban un peu plus long que le ruban de longueur $L = \sqrt{3}$ et de largeur unité (à droite), on peut construire un anneau de Moebius formé de trois portions de cônes.

Si on prend un ruban encore plus court, il semble impossible de construire encore un anneau de Moebius sans déformer ou déchirer ce ruban. On peut parvenir à s'y convaincre sans trop d'effort avec un ruban de papier. Mais est-ce vraiment impossible de réaliser un anneau de Moebius en deçà de cette limite apparente ?

En topologie, pour faire appel à l'intuition, il faut en fait imaginer que les surfaces ont la possibilité de s'interpénétrer. L'intersection entre ces surfaces forme des courbes d'auto-intersection. Il n'est pas possible de passer directement d'une de ces surfaces à une autre en prenant une courbe d'auto-intersection, car ces courbes sont en fait des illusions induites par une représentation à trois dimensions. Dans un espace de dimension supérieure, ces courbes se volatilisent et les surfaces ne se recoupent plus. Notons qu'une bonne manière de penser ces courbes d'auto-intersection est proposée dans le livre [4] de J.P. Petit (page 44).

La réalisation d'un anneau de Moebius à partir d'un ruban de longueur L inférieure à $\sqrt{3}$ semble alors pouvoir se faire suivant la séquence présentée sur l'exemple de la figure 6 ci-dessous qui montre l'évolution de la construction de l'anneau avec celle correspondante de la courbe auto intersection en sous-titre.

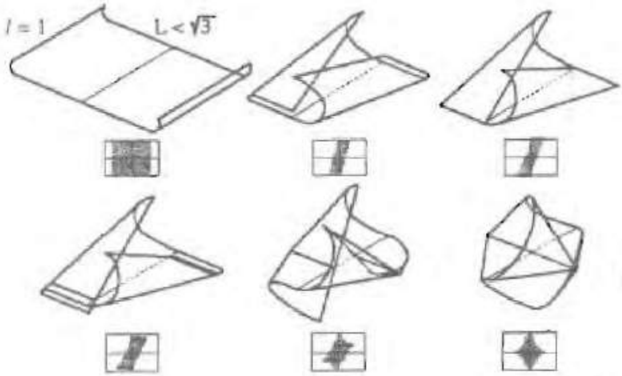

figure 6 : exemple de construction d'un anneau de Moebius de longueur L comprise entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ et de largeur unité. Sous chaque figure : courbes d'auto-induction (en gras) et section horizontale (en grisé).

La figure obtenue dont la limite apparente semble atteinte quand la longueur du ruban est égale à $\sqrt{2}$ est alors constituée de quatre portions de cônes et de deux losanges.

Mais peut-on aller encore plus loin ? Rien n'affirme que l'on ne puisse pas construire d'anneaux de Moebius avec des rubans rectangulaires encore plus courts !

La preuve : une autre construction similaire est possible si L est supérieur à 1... Il suffit d'essayer avec une feuille A4 en repliant suivant une diagonale avant de rapprocher les extrémités du papier suivant une portion de cône (ou de cylindre). On obtient alors une surface unilatère constituée de deux portions de cônes et deux surfaces triangulaires. Cette construction reste possible tant que le ruban initial n'est pas un carré.

7. Encore un problème ?

Mais s'agit-il encore véritablement d'anneaux de Moebius ?

Ces surfaces possèdent un ou deux points singuliers (sommets des cônes). Il serait souhaitable et légitime de penser qu'un anneau de Moebius ne possède pas de telles singularités. En fait, il faudrait s'interdire toute transformation du ruban créant des plis !

Dans ce cas, la question du plus petit anneau de Moebius redevient ouverte. Il est alors beaucoup plus délicat de dire s'il est possible ou non d'exhiber un anneau de Moebius à partir d'un ruban rectangulaire de largeur unité et de longueur L inférieure à $\sqrt{3}$, sans créer de singularités.

Un tel anneau n'existe peut-être pas, mais il faudrait pouvoir le montrer !

Références

[1] A. Bouvier, M. George et F. Le Lionnais : *Dictionnaire des Mathématiques,* p.480, 543 et 544. P.U.F., 1993.

[2] S. Hildebrandt et A. Tromba, *Mathématiques et formes optimales,* p. 88 à 89. L'univers des sciences. Ed. Belin pour Pour la Science, 1986.

[3] J.-P. Petit, *Les aventures d'Anselme Lanturlu - Le géométricon,* p.53-55. Ed. Belin pour Pour la Science, 1980.

[4] J.-P. Petit, *Les aventures d'Anselme Lanturlu - Le topologicon,* p.21-25, 41-71. Ed. Belin pour Pour la Science, 1985.

[5] J.-P. Truong, M.-L. Sentis, P. Delaporte, B. Forestier, O. Uteza et Y. Tassi, *Efficient acoustic wave damping in a high pulse repetition rate XeCl laser,* Ninth International Symposium on Gas Flow and Chemical Lasers, SPIE Volume 1810, p. 430-434, Crete, Greece, 1992.