Quelques modèles peu connus

Conférence de Pierre JULLIEN

Conférence du dimanche 26 octobre

Pierre JULLIEN est professeur d'Université en retraite. Ancien élève de l'ENS Ulm, spécialiste de combinatoire, il fut, en 1971, le premier directeur de l'IREM de Grenoble puis, en 1982, le premier chef de la MAFPEN de l'académie d'Aix-Marseille et, en 1991, le premier directeur de l'IUFM, dans la même académie.

En janvier 1996, lorsque j'ai accédé au libre travail, j'ai fait, pour mon plaisir, une conférence intitulée "*A quoi servent les mathématiques*". A la sortie, André Bonnet, qui fut un de mes élèves avant de devenir un de mes collègues, me demanda si j'acceptais de répéter ce que je venais de dire pour une conférence plénière aux journées de l'APMEP d'octobre 1997. Evidemment j'ai répondu oui. Cependant, compte tenu de la différence de public, j'ai changé le titre : "*Quelques modèles peu connus*" et un peu le contenu pour essayer de ne pas trop vous ennuyer.

Depuis toujours l'homme a souhaité comprendre dans quel monde il vit et, héritier de ses prédécesseurs, il fabrique des modèles pour expliquer et exploiter l'univers qui l'entoure.

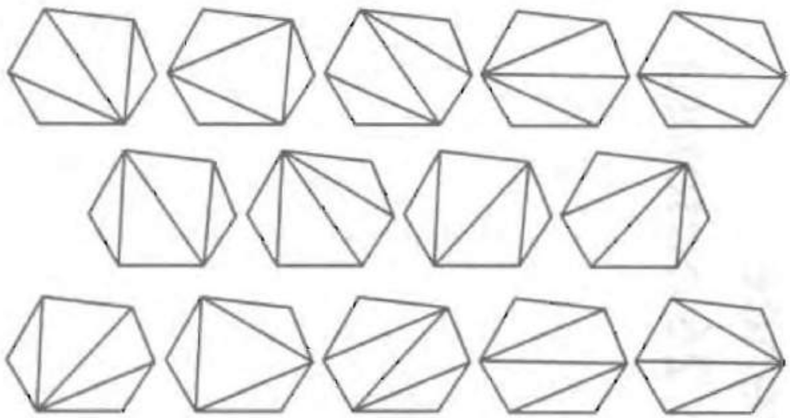
Le sens que j'attribue ici au mot "modèle", correspond au fait que l'on s'intéresse simultanément à deux situations qui se ressemblent plus ou moins, l'une pouvant permettre d'interpréter l'autre mais pas nécessairement. En tout cas, j'ai toujours en arrière pensée une sorte de réciprocité, en ce sens que si M est un modèle de S je considère que S est aussi un modèle de M.

Il est commun de dire qu'un modèle est bon lorsqu'il reflète au mieux la situation initiale. En ce sens, les meilleurs modèles sont ceux où il y a isomorphisme entre la situation et le modèle. On pourrait penser que ça ne sert à rien puisqu'il n'y a rien de moins ni rien de plus dans le modèle que dans la situation. En fait cela peut servir pour passer d'une situation peu familière à une situation qui l'est plus.

Plutôt que de parler de modèle, on peut alors parler de représentation.

Voici un premier exemple, où il sera en fait plus question de représentations que de modèles :

De combien de manières peut-on partager en triangles un polygone convexe à n côtés par des diagonales qui ne se coupent pas ?

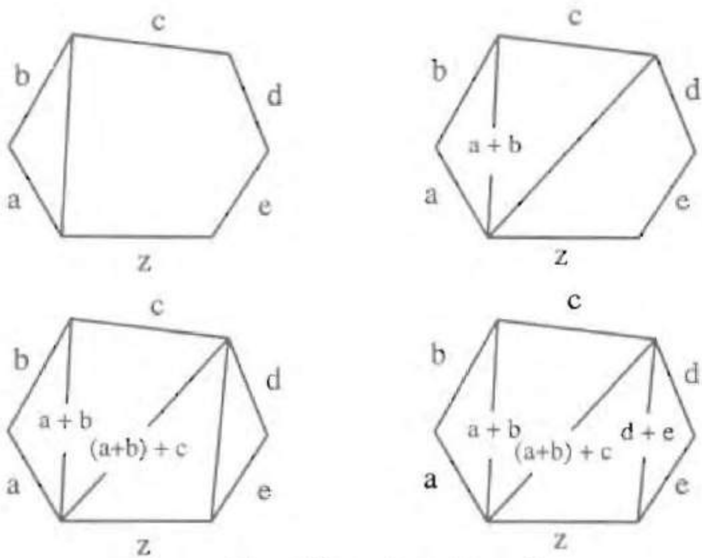


Déjà nous pouvons réfléchir sur l'article indéfini un. Cet article indéfini sous entend que la réponse est indépendante du polygone choisi. Effectivement c'est le cas parce que, pour ce qui nous intéresse ici, tous les polygones convexes à n cotés sont isomorphes entre eux ; chacun est modèle de tous les autres. Encore est-il bon de s'en assurer. Ce que l'on oublie souvent.

Première étape :

Etablissons un isomorphisme entre un partage en triangles et une formule. Désignons par z une arête du polygone, par a, b, c, ... les autres prises dans le sens des aiguilles d'une montre et convenons que dans un triangle une diagonale non désignée correspond à l'écriture formelle de la somme des cotés déjà désignés. De proche en proche, nous désignons toutes les diagonales et établissons une formule

z = "la somme des deux côtés du triangle auquel elle appartient".



$$z = ((a + b) + c) + (d + e)$$

Ainsi nous modélisons les partages du polygone par des formules. Il n'est pas difficile de constater qu'il y a bijection entre l'ensemble des partages et celui des formules parenthésées comprenant n – 2 signes + et les n – 1 lettres a, b, c, … dans l'ordre alphabétique.

Deuxième étape :

Passons de l'écriture parenthésée à celle postfixée (où U+V devient +UV)

((a + b) + c) **+** (d + e) devient **+** (+ (+ ab)c)(+ de) puis **+ +** + abc + de

$$((a + b) + c) + (d + e) \quad \text{devient} \quad + + + a\,b\,c + d\,e$$

Là encore il y a bijection entre les deux ensembles d'écritures où les secondes se caractérisent par le fait qu'il y a n – 2 signes + et n – 1 lettres dans l'ordre alphabétique, de telle sorte qu'en lisant de gauche à droite le nombre de signes + reste au moins égal au nombre de lettres, sauf à la fin.

Troisième étape :

Du fait que les lettres a, b, c, .., apparaissent toujours dans le même ordre autant toutes les désigner par x.

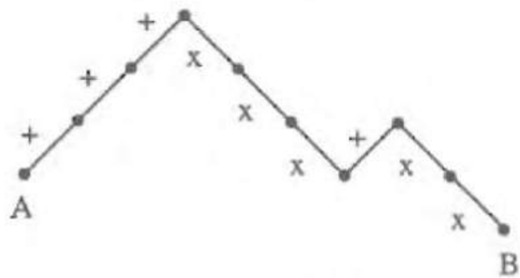
$$+ + + a\,b\,c + d\,e \quad \text{devient} \quad + + + x\,x\,x + x\,x$$

Là aussi il y a bijection entre les deux ensembles de formules

Quatrième étape :

Passons de ces écritures à des graphes représentatifs

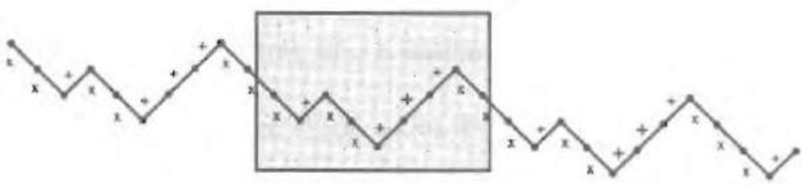
+ + + X X X + X X



Dans un quadrillage, partant d'un point A et progressant vers la droite, nous montons de 1 s'il s'agit d'un signe plus et descendons de 1 s'il s'agit d'une lettre x. Nous obtenons un graphe qui se caractérise par le fait que l'extrémité B a pour coordonnées relatives $(2n-3, -1)$ par rapport à A et que ce graphe est entièrement "au dessus" de AB.

Cinquième étape :

Passons au schéma circulaire, en accolant indéfiniment le schéma à lui même qui est alors caractrisé par n'importe quelle tranche de longueur $2n-3$.



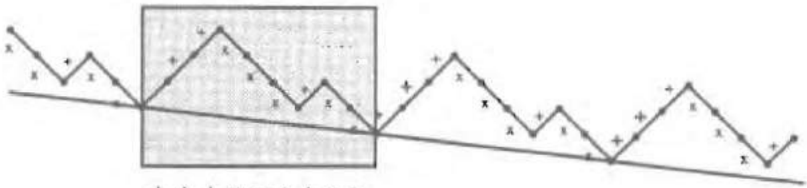
x x + x x + + + x

Dernière étape :

Ainsi nous sommes passés de l'écriture postfixée à l'écriture circulaire en considérant que le dernier symbole d'un mot précède le premier. Le mot +++xxx+xx est équivalent aux huit autres mots obtenus par permutations circulaires

x+++xxx+x	xx+++xxx+	+xx+++xxx	x+xx+++xx
xx+xx+++x	xxx+xx+++	+xxx+xx++	++xxx+xx+

Le dernier schéma nous permet de vérifier que par ces étapes successives nous avons associé de manière bijective un mot circulaire de n – 2 signes + et n-1 lettres x à un partage d'un polygone à n côtés en triangles par des diagonales qui ne se coupent pas. En effet, il n'y a qu'une droite AB qui laisse le schéma entièrement au dessus d'elle.



+ + + x x x + x x

Enfin pour répondre à la question posée "Combien y en a-t-il ?", la réponse est simple. Il suffit de s'intéresser aux mots formés de n – 2 signes + et n – 1 lettres x, qui sont en nombre C(2n-3,n-1) et du fait que n – 2 et n – 1 sont premiers entre eux les classes des mots circulaires considérés comprennent toutes 2n – 3 éléments.

D'après le principe du berger la réponse est C(2n – 3,n – 1) / (2n – 3).

C'est bien 14 pour n=6.

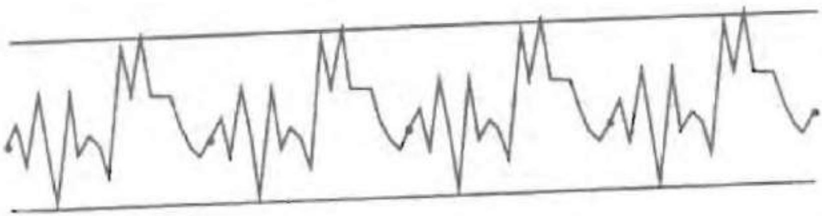
Attention : A un mot circulaire on peut associer de manière univoque une suite infinie périodique mais à une suite infinie périodique on peut associer une infinité de mots circulaires selon que l'on referme après une, deux, trois ou n périodes. Pour qu'il y ait unicité, il est nécessaire de préciser la longueur du mot.

L'idée d'associer à une formule un graphique infini pouvait servir à résoudre le premier exercice du Concours Général 1997 dont je rappelle l'énoncé :

Exercice I

On a placé un jeton sur chaque sommet d'un polygone régulier à 1997 côtés. Sur chacun de ces jetons est inscrit un entier relatif, la somme de ces entiers relatifs étant égale à 1. On choisit un sommet de départ et on parcourt le polygone dans le sens trigonométrique en ramassant les jetons au fur et à mesure tant que la somme des entiers inscrits sur les jetons ramassés est strictement positive.

Peut-on choisir le sommet de départ de façon à ramasser tous les jetons ? Si oui, combien y a-t-il de choix possibles ?

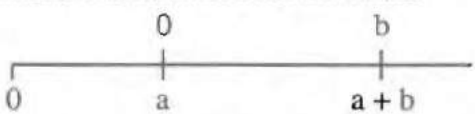


Il suffisait, ayant numéroté les jetons de 1 à 1997, de faire le graphique des sommes cumulées et de le poursuivre indéfiniment (en fait au plus une fois). Il apparaissait alors une "tangente" inférieure au graphique. Le point de contact indiquant le numéro du jeton par lequel il faut terminer. Ce numéro est unique parce que 1 et 1997 sont premiers entre eux. La "tangente" supérieure correspond à la solution au cas où on aurait eu à ramasser les jetons dans l'autre sens.

J'ai pris le premier exemple un peu copieux pour rappeler l'importance des isomorphismes et montrer un parcours où l'on passe par des concepts variés géométriques, formels, infinis, finis, ...

Voici maintenant une classe de modèles obtenus par transports de structure.

Quand j'étais petit il existait des plumiers qui servaient de règle à additionner. Par translation d'une règle mobile le long d'une règle fixe, on construit une machine à additionner. C'est bien connu.



Un peu plus tard, j'ai utilisé, sur le même principe une règle à multiplier. Ces règles sont tombées en désuétude depuis l'avènement des calculettes. J'ai bien peur que l'on n'en parle plus aux élèves alors qu'elles sont un bon exemple de transport de structure.

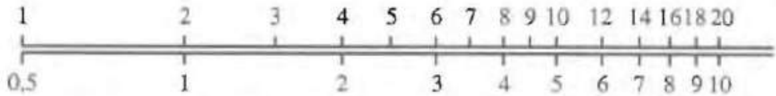
Le principe est très simple dans $\mathbb{R}^*$ on s'intéresse au logarithme tel que :

$$\log(uv) = \log(u) + \log(v)$$

et à sa réciproque l'exponentielle telle que

$$\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

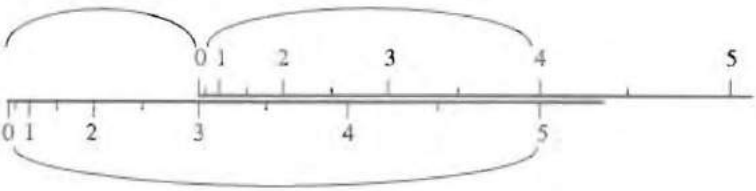
Ainsi si j'additionne les longueurs $\log(u)$ et $\log(v)$ je trouve la longueur $\log(uv)$. Il me suffit donc, pour une lecture directe du résultat d'une multiplication, de graduer la règle à additionner de manière logarithmique. En 0 j'écris 1, en 1 j'écris 10, en 2 j'écris 100, etc... partout en log (u) j'écris u.



Dans cette modélisation, ce qui importe est l'existence pour une opération binaire μ d'une application β telle que

$$\beta(\mu(u,v)) = \beta(u) + \beta(v)$$

C'est le cas pour l'opération hypoténuse où le carré (fonction β) est la somme des carrés. Nous pouvons donc construire des règles à calculer les hypoténuses en écrivant u au point d'abscisse u^2.

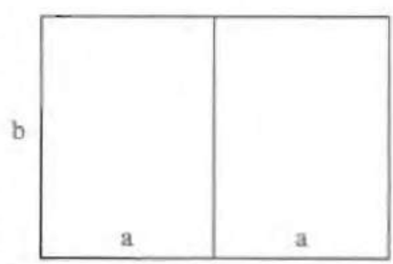


Ci-dessus nous pouvons lire que l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés de longueurs 3 et 4 a pour longueur 5.

De même pour calculer la résistance de deux résistances mises en parallèle où b est la fonction 1/i. Schéma à faire soi-même.

La feuille qui ressemble à sa moitié

Lorsque sont apparues les photocopieuses, les images ont pu être facilement reproduites. Les copies sont des modèles (actuellement très fidèles) des originaux. Rapidement ces machines ont pu réduire et agrandir et il a paru intéressant d'avoir une feuille de papier qui ressemble à sa moitié. C'est la feuille usuelle dite de format A4, de largeur 21 cm et de longueur 29,7 cm. Pourquoi ces mesures ?



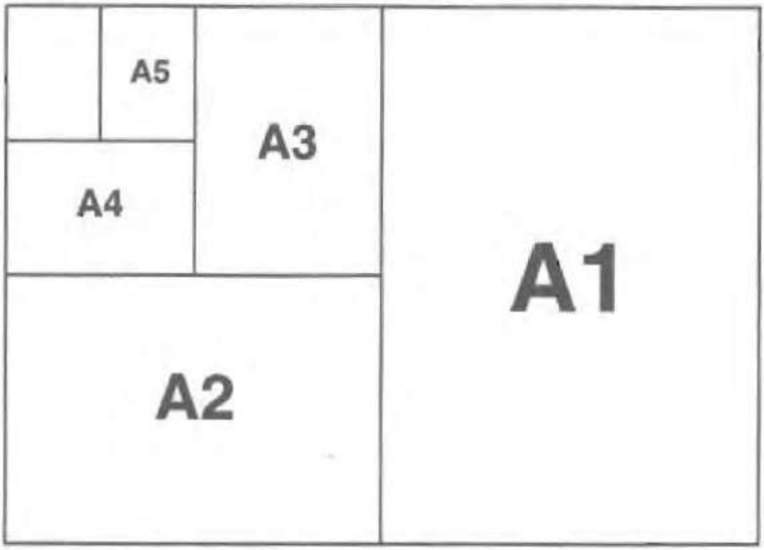
$$\frac{b}{a} = \frac{2a}{b}$$

$$b = a\sqrt{2}$$

D'une part, la similitude de la feuille avec sa moitié impose que la longueur et la largeur soient dans le rapport racine de deux. C'est effectivement le cas pour les dimensions citées.

Cela n'explique ni 21 ni 29,7. En fait si la feuille ressemble à sa moitié elle ressemble aussi à son double, au double de son double, etc.

Le A4 est la moitié du A3 ; le A3 est la moitié du A2 ; etc. Vous le savez



Ce schéma illustre un partage d'une feuille A0.

En fait la norme internationale est établie de telle sorte que le format A0 corresponde à une feuille de un mètre carré.

Cette feuille a pour dimensions, en centimètres, 118,9 et 84,1. Le nombre 1,1892... est la racine de racine de 2 (la racine quatrième de 2).

De moitié en moitié voici les dimensions des feuilles des différents formats.

format	longueur	largeur	nombre
A0	118,9	84,1	1
A1	84,1	59,4	2
A2	59,4	42	4
A3	42	29,7	8
A4	29,7	21	16
A5	21	14,8	32
A6	14,8	10,5	64

Dans la dernière colonne figure pour un format donné le nombre de feuilles qui recollées donneraient A0. Ces nombres sont les puissances successives de deux.

Ainsi, en cinquième ligne, on trouve $16 = 2^4$ Ce nombre 4 est le logarithme à base 2 de 16. Pédagogiquement, nous avons là une première approche du concept de logarithme.

Rien ne nous empêche d'aller au delà de A0 et de parler de A-1, A-2, etc.

Voici une feuille de format A-1. J'ai calculé que, si l'artiste CRISTO voulait emballer la terre avec une feuille de papier, il lui en faudrait une de format A-49.

Merci de le contrôler, vous n'êtes pas obligés de me croire sur parole !

En plus du format on précise souvent le grammage. Dire que le papier est du 80 g c'est dire qu'une feuille de papier de format A0 pèse 80 g. Ainsi nous pouvons en déduire les poids successifs des feuilles de différents formats

Format	A0	A1	A2	A3	A4
Poids	80 g	40 g	20 g	10 g	5 g

L'intérêt concret de savoir cela est de pouvoir retrouver le poids d'une ramette de 500 feuilles : 2,5 kg ou d'un carton de 6 ramettes : 15 kg ou encore de savoir que pour que mon envoi ne pèse pas plus de 20 g il suffit d'une enveloppe légère et au plus trois feuilles usuelles.

Avec les formats en A on parle aussi des formats en B tels B 4 ou B5. Les feuilles ont la même forme mais B 0 mesure 1 mètre et 141,4 cm.

Etre de la même génération

Lorsque nous employons le mot même dans une phrase telle que "Jacques et Maria ont le même poids" le mathématicien voit une fonction : la fonction poids qui à chaque individu associe un nombre, son poids exprimé en kilos. Partant de là cette fonction induit une relation d'équivalence "avoir même poids" qui en quelque sorte est une égalité si l'on ne retient rien d'autre que le poids. Jacques et Maria sont pareils quant au poids.

Ce schéma est très fréquent. Souvent où il y a le mot même il y a égalité quant à un critère. Souvent mais pas toujours. Sans aucun contexte, comment interpréter la phrase "Jacques et Maria ont la même voiture" ? Ont-ils une seule voiture en commun ou en ont-ils une chacun ? S'ils en ont une chacun ce n'est pas la même, ...

Un jour, où je réfléchissais sur l'usage du mot même, je cherchais une situation relativement non ambiguë comme la précédente mais différente du premier cas. Je me suis arrêté sur l'expression "être de la même génération", qui apparemment pourrait ne pas induire une relation d'équivalence, selon le modèle retenu. Etre de la même génération, c'est plus large qu'avoir le même âge. Une première idée est de dire : être de la même génération c'est avoir moins de cinq ans d'écart. Cette modélisation répondait à ma recherche. En effet, si Abel, Béatrice et Claude ont respectivement 26, 29 et 33 ans alors Abel et Béatrice sont de la même génération, Béatrice et Claude également mais pas Abel et Claude.

J'aurais pu en rester là mais, en réfléchissant sur le sens commun de l'expression être de la même génération qui induit l'idée d'une culture commune, d'un mode de vie proche (que sais-je encore ?), j'ai souhaité aller plus loin et en suis venu à l'idée que ce serait mieux de penser en rapport d'âge plutôt qu'en différence d'âge.

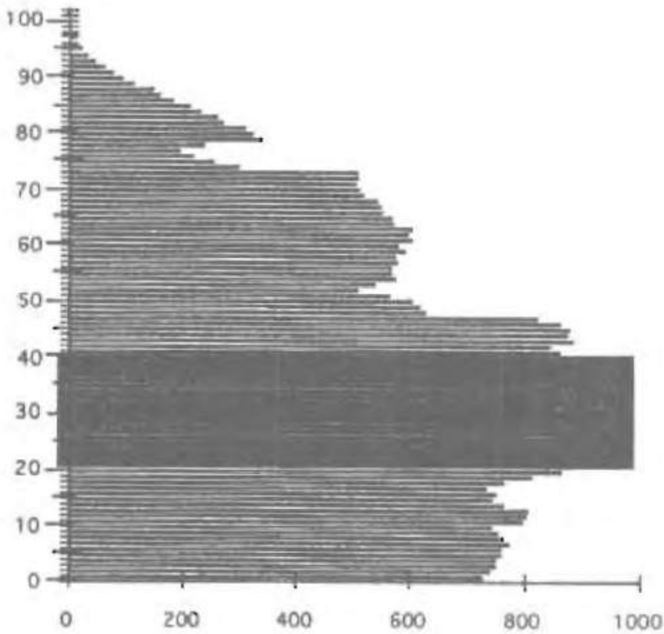
L'idée m'est venue de dire qu'être de la même génération c'est être dans un certain rapport d'âge, disons entre deux tiers et trois demis ou plutôt entre 0,7 et 1,4 (ce sont les rapports de la photocopieuse pour passer d'un format au format moitié ou inversement). Ainsi sont de la même génération d'un enfant de 10 ans ceux de 7 à 14 ans mais sont de la même génération de celui de 14 ans ceux de 10 à 20 ans. La génération de quelqu'un de 40 ans ce sont ses contemporains qui ont entre 28 et 56 ans.

La génération s'élargit avec l'âge. Petit à petit nous entrons dans la génération de nos parents. C'est en ce sens que ce modèle me satisfait assez. Il est exact que nous nous rapprochons de nos parents, que nous partageons avec eux un passé commun que nous ne partageons pas avec nos enfants.

En admettant ce modèle (très frustre) on peut calculer qui est en France actuellement dans la génération la plus nombreuse. Ce ne sont pas les plus âgés car leurs aînés ont souvent disparu. Ce sont les personnes de 50 ans (42% de l'ensemble de la population).

Ce calcul me conforte dans l'idée que ce sont les personnes de 45 à 55 ans qui devraient exercer les plus hautes responsabilités car ce sont elles qui sont le plus proches du plus grand nombre. Je n'ai rien contre les plus âgées qui pourraient être très utiles comme conseillers mais pas comme pilotes.

Evidemment, ce modèle n'est qu'un modèle qui possède son champ d'application certainement limité géographiquement et socioculturellement. Dans bien des circonstances, je suis plus proche de ma petite fille de 10 ans (trois générations d'écart au sens du modèle) que d'un amérindien de mon âge.



Un théorème d'Arrow

Un autre exemple que je vous soumets est relatif à la mathématique des votes. Tout le monde a vaguement entendu parler de Marie, Jean, Antoine, Nicolas de Caritat, marquis de CONDORCET (1743-1794) qui repose au Panthéon depuis 1989. Au moment de la révolution française, il avait étudié le problème de dégager une opinion collective à partir d'opinions individuelles et proposé une solution dont il s'est aperçu qu'elle ne convenait pas dans tous les cas. C'est-à-dire qu'il avait mis en évidence un obstacle de nature purement mathématique, connu de nos jours sous le nom d'effet Condorcet.

Voici un exemple, pour mieux comprendre :

Un jury est composé de 60 personnes et doit classer trois projets A, B, C. Dans un vote chacun exprime son ordre de préférence (sans ex æquo). Six cas sont possibles et les résultats sont ceux indiqués dans le tableau ci-contre :

		A>B	A>C	B>C
A > B > C	23	23	23	23
A > C > B				
B > A > C	2	– 2	2	2
B > C > A	17	– 17	– 17	17
C > A > B				
C > B > A	18	– 18	– 18	– 18
		– 14	– 10	24

La règle avancée par Condorcet est de classer X > Y si le choix X > Y est majoritaire dans le jury.

D'où les totaux dans les trois colonnes de droite.

Ainsi majoritairement, on trouve B > A, C > A et B > C. L'ordre retenu par le jury est B > C > A.

Cette règle est appelée procédure majoritaire des comparaisons par paires. Si elle avait été retenue pour les élections présidentielles, c'est Raymond BARRE qui aurait été élu en 1988.

En effet, regardons ce qu'il s'est passé, à l'époque :

Présidentielles de 1988

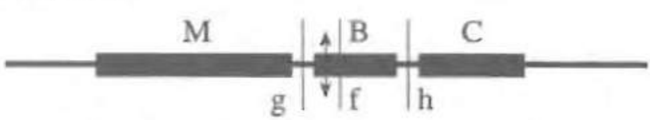
Premier tour, 24 avril 1988

BARRE	5 035 144
BOUSSEL	116 874
CHIRAC	6 075 160
JUQUIN	639 133
LAGUILLER	606 201
LAJOINIE	2 056 261
LE PEN	4 376 742
MITTERRAND	10 381 332
WAECHTER	1 149 897
Total	**30 436 744**

Second tour, 8 mai 1988

CHIRAC	14 218 970
MITTERRAND	16 704 279
Total	**30 923 249**

En effet, si nous considérons que les opinions politiques se situent grosso modo sur un axe gauche droite comme un continuum, alors Raymond BARRE était préféré à François MITTERRAND (repère g) et à Jacques CHIRAC (repère h).



Mais cette règle n'avait pas cours, la dichotomie s'est faite selon le repère f en faveur de François MITTERRAND.

Reprenons le premier exemple, où les membres du jury qui donnent leur préférenc'e au projet C se divisent sur les projets A et B.

		A>B	A>C	B>C
A > B > C	**23**	23	23	23
A > C > B				
B > A > C	**2**	− 2	2	2
B > C > A	**17**	− 17	− 17	17
C > A > B	**9**	9	− 9	− 9
C > B > A	**9**	− 9	− 9	− 9
		4	− 10	24

Ici majoritairement, on trouve A > B, C > A et B > C.

On tourne en rond : A est meilleur que B, qui est meilleur que C, qui est meilleur que A. Voilà ce que l'on appelle l'effet Condorcet.

Après Condorcet, d'autres mathématiciens se sont intéressés à la mathématique des votes. en particulier un dénommé ARROW, qui s'est posé la question de trouver les règles qui marchent.

Il s'agit du même problème :

Dans une assemblée de votants chacun exprime sa préférence sur des projets A,B, ... Z par un ordre total sans ex æquo (état de l'opinion), trouver les règles qui permettent dans tous les cas de dégager un ordre total sur les objets (opinion collective), selon les contraintes suivantes :

- axiome d'universalité : il n'y a pas d'opinion collective interdite par la règle ;
- axiome de cohérence : si à partir d'un premier état de l'opinion la règle fait apparaître que U a été préféré à V et que dans un deuxième état (on a revoté suite à un apport d'informations complémentaires) ceux qui préfèrent U à V maintiennent cette préférence et d'autres l'expriment, alors la règle donne à nouveau U est préféré à V. Ceci quels que soient U et V a priori.

Ces deux axiomes vous paraissent tout-à-fait légitimes. Le second correspond à un minimum de suite dans les idées.

Ces règles ont pour conséquences que si tout le monde classe A en premier alors la règle classe A en premier. Si A retire sa candidature et chacun des votants retire A sans changer son classement alors la règle retire A sans changer son classement. Etc.

Le ***théorème d'ARROW*** (1947) est le suivant :

les seules règles qui satisfont les deux axiomes ci-dessus sont celles qui consistent à prendre comme opinion collective l'opinion d'un seul.

Autrement dit, de manière un peu provocatrice, la vraie démocratie c'est la dictature et, de manière plus simple, c'est le système présidentiel.

Le problème alors est de choisir le président. Comment ?

Personnellement je connais ce théorème, qui ne fait partie d'aucun programme scolaire ou universtaire officiel, depuis une trentaine d'années. Je n'ai pas été surpris de voir que certains systèmes se sont présidentialisés. Moi-même, en tant que directeur de l'IUFM (nommé et non pas élu), j'ai essayé d'être un dictateur éclairé et ne vois de solution démocratique que dans la limitation de la durée des mandats. Cinq ans me paraît être une bonne dose. C'est ce que personnellement j'ai fait trois fois dans ma carrière.

Propagation de la rumeur

J'avais inventé ce modèle d'un point de vue purement didactique, pour faire comprendre à mes étudiants le concept de modèle.

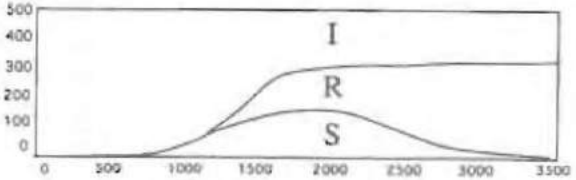
On considère une population P de n individus, on choisit une unité de temps et on prend comme hypothèse qu'à chaque instant entier deux individus se rencontrent et se parlent. A l'instant 0 un seul individu connait une nouvelle extraordinaire que nous appelons "la rumeur" qu'il s'empressera de diffuser à l'occasion des prochaines rencontres à venir mais il s'arrêtera lorsqu'il rencontrera quelqu'un qui la connait déjà.

Plus formellement, considérons que P comprend trois classes disjointes d'individus :

- S : les sachants actifs (ils connaissent la rumeur et continuent à la propager) ;
- R : les sachants inactifs (ils connaissent la rumeur et ne la propagent pas) ;
- I : les ignorants (ils ne connaissent pas la rumeur).

Les rencontres sont tirées au sort selon des tirages indépendants où toutes les paires ont la même probabilité d'apparaître. La rumeur se propage lorsqu'un sachant actif rencontre un ignorant ; le premier reste sachant actif et l'autre le devient. Dans tous les autres cas elle ne se propage pas. Par contre tout sachant actif qui rencontre un sachant (actif ou inactif) devient sachant inactif.

Le diagramme ci-contre montre l'évolution dans le temps des effectifs des trois populations



L'exemple montré ici, bien que particulier, reflète bien la généralité. Au début, tant que l'unique individu qui connait la rumeur n'est pas tiré au sort, il ne se passe rien. Puis peu à peu le nombre des sachants actifs augmente avant qu'il apparaisse deux sachants inactifs, lors de la première rencontre de deux sachants actifs. Dès lors les deux populations S et R augmentent jusqu'à ce que S stagne airant de décroître. Alors S diminue inexorablement malgré parfois quelques petits sursauts jusqu'à s'éteindre. Il est remarquable qu'à ce moment là il reste encore des ignorants, en nombre non négligeable.

Sur plusieurs simulations, la rumeur s'éteint au bout d'un temps de l'ordre de 7n à 8n pour n entre 100 et 500. A la fin le nombre d'ignorants est de l'ordre de n/5. La courbe S apparaît toujours très symétrique. Au moment où le nombre des sachants actifs est maximum les trois sous populations sont à peu près égales en nombre (n/3).

Evidemment un tel modèle est très critiquable, notamment :

- le fait de ne faire qu'une rencontre à chaque temps d'horloge ;
- le fait d'imposer qu'à la première rencontre d'un sachant actif avec un sachant il devienne inactif (sous le prétexte : " tout le monde le sait, il ne vaut plus la peine d'en parler " ;
- etc.

On peut sophistiquer plus ou moins le modèle mais je pense que dans la mesure où un sachant actif devient à terme inactif(en fonction de l'évolution du processus) le schéma sera de même nature et il restera toujours des ignorants lorsque la rumeur se sera éteinte d'elle même.

Paradoxe

Parfois une mathématisation insuffisante nuit à la solution d'un problème. Il existe dans le commerce des paires de dés, dont les faces comportent des chiffres permettant de visualiser les quantièmes du mois en les juxtaposant tels :

0	1	,	0	2	,	0	3	, ...,	3	1

Si l'on cherche à construire de tels dés, le raisonnement suivant montre que cela est impossible. En effet, il est nécessaire de marquer un chiffre 1 sur chacun des deux dés pour pouvoir représenter 11. De même, il est nécessaire de marquer un chiffre 2 sur chacun des deux dés pour pouvoir représenter 22. De plus, il est nécessaire de marquer un chiffre 0 sur chacun des deux dés pour pouvoir représenter les neuf nombres de 01 à 09 car, un dé n'ayant que six faces, un seul zéro ne suffirait pas. Ainsi nous disposons, au départ, de douze faces ; nous en utilisons six pour marquer deux fois 0, deux fois 1 et deux fois 2 ; il en reste six disponibles pour marquer les sept chiffres manquant (de 3 à 9). C'est donc impossible mais je vous répète que ces dés existent dans le commerce. Peut-être en avez-vous déjà vu ?