Conférence du Lundi 27 octobre

Approches mathématiques de la notion de complexité

G. RAUZY

Gérard RAUZY est professeur à l'Université de la Méditerranée.
Docteur ès Sciences Mathématiques, il a dirigé à sa fondation, en 1992, le Laboratoire de Mathématiques Discrètes (unique "Unité Propre" du CNRS en mathématiques, en France) aujourd'hui devenu l'Institut de Mathématiques de Luminy. Participe aux activités de l'IREM d'Aix-Marseille depuis de nombreuses années.
Domaines de prédilection : arithmétique, systèmes de numération, dynamique symbolique, théorie des langages et automates, informatique théorique.

0 - Introduction

$$\sqrt{2} = 1{,}414\,235\,623\,730\,95\ldots$$
$$\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,79\ldots$$

En base 8 (octets)

$$\sqrt{2} = 1{,}324\,047\,463\,177\,167\ldots$$
$$\pi = 3{,}110\,375\,524\,210\,264\ldots$$

"$\sqrt{2}$" est-il plus (ou moins) simple que "π" ?

1 - Retour aux définitions

En apparence, "$\sqrt{2}$" a une définition plus simple que "π". On peut se donner des approximations successives.

$$(1{,}4)^2 = 1{,}96 \qquad\qquad (1{,}5)^2 = 2{,}25$$

Donc

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$

etc.

Par contre, " π " est défini de manière plus complexe.

C'est, par exemple, le rapport de la circonférence au diamètre.

On montre que tout polygone inscrit a un périmètre inférieur au périmètre de la circonférence et que tout polygone circonscrit a lui, un périmètre supérieur.

Prenant des carrés ou des octogones, on obtient les encadrements successifs

$$2\sqrt{2} < \pi < 4$$
$$4\sqrt{2-\sqrt{2}} < \pi < 8\left(\sqrt{2}-1\right).$$

....

La méthode d'Archimède partant ainsi du triangle équilatéral, passait à l'hexagone régulier, puis au dodécagone régulier, et ainsi de suite, en doublant chaque fois le nombre de côtés.

Pourquoi doubler ? Parce que le théorème de Pythagore permet le calcul effectif des longueurs des côtés en le ramenant à celui de racines carrées progressivement emboîtées, et comme on l'a vu pour $\sqrt{2}$ ceci est possible par encadrements successifs.

Tripler à chaque fois le nombre de côtés aurait conduit à résoudre une succession d'équations cubiques (ce qui n'est guère plus difficile a priori, puisqu'il ne s'agit ici que d'encadrements).

Mais Archimède et ses contemporains avaient ainsi par duplications itérées un procédé de calcul "géométrique" et en outre (on le sait) la trisection de l'angle n'est pas résoluble au moyen de la règle et du compas...

Il reste cependant qu'à ce stade des algorithmes de calcul,

" $\sqrt{2}$ " **semble plus simple que** " π ".

2 - Divisions

Posons $\qquad x = \sqrt{2} - 1$

alors $$x = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{2+x}$$

Par itérations successives, ceci fournit un procédé de calcul de x :

De x > 0, on déduit de la formule précédente que $x < \frac{1}{2}$

et repartant de ce résultat que $$x > \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

puis à nouveau que $$x < \frac{1}{2+\frac{2}{5}} = \frac{5}{12}$$

et ainsi de suite...

Le procédé consiste donc à ajouter 2 au résultat précédent et à en prendre l'inverse. Il nous fournit une suite d'encadrements :

$x > 0$
$x < 0{,}5$
$x > 0{,}4$
$x < 0{,}416...$
$x > 0{,}413...$
$x < 0{,}41428...$
....

Il conduit en quelques opérations à connaître les quatre premières décimales de x, donc aussi de $\sqrt{2}$. On peut chercher à le généraliser.

Le nombre irrationnel le plus "simple", de ce point de vue, est le "nombre d'or" $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Remarquons que si l'on partait d'un nombre rationnel, le processus s'arrêterait (algorithme d'Euclide).

Ainsi,

$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113}$$
$$\frac{113}{16} = 7 + \frac{1}{16}$$

Par contre, si au départ $x = \pi - 3$ (= 0,1415926...), on a :

$$\frac{1}{x} = 7 + y \quad \text{où} \quad y = 0{,}062\,513\,305\ \ldots$$
$$\frac{1}{y} = 15 + z \quad \text{où} \quad z = 0{,}996\,594\,415\ \ldots$$
$$\frac{1}{z} = 1 + t \quad \text{où} \quad t = 0{,}003\,417\,222\ \ldots$$

etc.

On en déduit des encadrements successifs de $\pi - 3 = x$

$$x > 0$$
$$x < \frac{1}{7} = 0{,}142\ \ldots$$
$$x > \frac{15}{106} = 0{,}141\,50\ \ldots$$
$$x < \frac{16}{113} = 0{,}141\,592\,0\ldots$$

Remarquons là encore, une convergence rapide : la deuxième valeur approche $\pi - 3$ avec deux décimales exactes, la troisième avec quatre, la quatrième avec six.

Cependant, la suite des valeurs 7, 15, 1 ... obtenues par ces divisions successives ne semble pas obéir à une règle "simple".

En fait, dans l'état actuel de nos connaissances, aucun algorithme autre que celui de retour à la définition n'est connu.

3 - Fractions continues

Soit maintenant, un nombre x quelconque (compris entre 0 et 1). Nous pouvons procéder comme précédemment, c'est-à-dire, écrire :

$$\frac{1}{x} = a + y \quad \text{où } a \text{ est entier et } y \text{ compris entre 0 et 1}$$
$$\frac{1}{y} = b + z \quad \text{où } b \text{ est entier et } z \text{ compris entre 0 et 1}$$
$$\frac{1}{z} = c + t \quad \text{où } c \text{ est entier et } t \text{ compris entre 0 et 1}$$

etc.

Nous obtenons ainsi deux suites :

- $(x, y, z, t, \ldots)$ de nombres compris entre 0 et 1
- $(a, b, c, \ldots)$ d'entiers strictement positifs.

Le processus s'arrête (exemple de 16/113) si l'on est parti d'un nombre x rationnel, car l'un des nombres de la première suite est 0, et l'on ne peut plus dès lors effectuer la division. Sinon, il continue indéfiniment.

La suite des entiers $(a,b,c,...)$ obtenus forme ce que l'on nomme le développement de x en fraction continue. On écrit ainsi :

$$\sqrt{2}-1=(2,\ 2,\ 2,.)$$
$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=(1,1,1,\ldots)$$
$$\frac{16}{113}=(7,16) \qquad =(7,15,1)$$
$$\pi-3=(7,15,1,...)$$

et pour prendre en compte la partie entière :

$$\sqrt{2}-1=(1;2,\ 2,\ 2,\ldots)$$
$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=(1;1,1,1,\ldots)$$
$$\frac{16}{113}=(3;7,16) \qquad =(3;7,15,1)$$
$$\pi=(3\ ;7,15,1,..)$$

On a vu alors comment former une suite de fractions à partir de la suite $(a,b,c,...)$, et l'on peut montrer qu'elles approchent le nombre réel considéré assez rapidement et même en constituent les « meilleures approximations » en un sens très précis.

Par contre, cela ne donne un procédé effectif de calcul d'un nombre x que si l'on connaît déjà un algorithme (autre que celui qui consiste à partir du nombre lui-même,...) pour calculer les entiers successifs entrant dans son développement.

On a vu que cela était vrai pour $\sqrt{2}$, ce l'est aussi pour $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ comme on l'a suggéré, et de manière plus générale pour tout nombre quadratique, c'est-à-dire racine d'un polynôme du second degré à coefficients entiers en vertu du théorème de Lagrange.

Cela est encore vrai pour « l'autre nombre de l'analyse », le nombre e dont le développement est : (2 ;1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,...), mais comme nous l'avons dit, on ne connaît, à l'heure actuelle, aucun algorithme de ce type pour π.

Du point de vue des fractions continues, on serait donc tenté de dire :

$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ **est plus simple que** $\sqrt{2}$, **lui-même plus simple que** π.

On n'a aucun élément de comparaison avec π, non plus d'ailleurs qu'avec des nombres de définition « plus simple » tels les racines cubiques d'entiers...

4 - Questions

Nous avons évoqué deux méthodes de calcul de $\sqrt{2}$, c'est-à-dire des chiffres successifs de son développement en une base donnée.

En ce qui concerne π, nous n'en avons donné qu'une seule, celle des polygones inscrits et circonscrits. Il en existe bien d'autres, et le calcul des décimales de π a suscité (et continue de le faire) de nombreux travaux de mathématiciens ou d'informaticiens (voir à ce sujet « *Le fascinant nombre* π » de Jean-Paul Delahaye - Bibliothèque pour la Science - Diffusion Belin).

Une question se pose aussi bien pour les décimales de $\sqrt{2}$ que pour celles de π : ***sont-elles réparties « au hasard »*** ?

Il faut donner un contenu à cette question (sinon, la réponse immédiate serait évidemment : non !).

Précisons donc : le chiffre 0, par exemple, apparaît-il avec la fréquence 1/10, le bloc 37 avec la fréquence 1/100, le bloc 691 avec la fréquence 1/1000, etc. ?

La réponse est que l'on n'en sait rien.

On ne sait même pas, par exemple, si le chiffre 0 apparaît une infinité de fois dans l'un ou l'autre des développements. À titre d'anecdote, signalons que le bloc 0123456789 figure à la 17 387 594 880ième place.

Remarquons aussi que cette question de répartition statistique dépend de la base dans laquelle on se la pose : cela pourrait être vrai en base 10 et faux en base 8.

On peut ainsi construire des nombres dont le développement en base 3 par exemple, suit statistiquement les critères d'un tirage au sort indépendant et équiprobable mais pour lesquels il n'en est rien en base 2.

5 - Calculs

Nous avons évoqué l'existence de multiples procédés de calcul pour les décimales de π (il en est de même pour celles de $\sqrt{2}$). Le développement de l'informatique a mis en évidence le fait qu'il y a des algorithmes plus ou moins efficaces.

Le temps $T(n)$ du calcul de la n-ième décimale par tel algorithme est-il asymptotiquement plus, ou moins, long que celui relatif à tel autre ? Par temps de calcul évidemment, on entend, en faisant abstraction de la machine utilisée, le nombre d'opérations élémentaires à effectuer.

Cela soulève un autre problème, celui de la « gestion » des résultats intermédiaires et de leur « stockage provisoire ».

Quand on effectue une « multiplication à la main », à la mode actuelle par exemple, on écrit des lignes de chiffres sur autant de colonnes (au moins) que le multiplicateur en comporte. On peut les effacer progressivement en cours de calcul...

Jusqu'à une période récente, calculer la 1 000 000 - ième décimale de $\sqrt{2}$ ou bien de π exigeait le calcul des 999 999-ièmes décimales précédentes.

Et puis la surprise est venue grâce à une formule découverte en 1996, par Bailey, P.B. Borwein, Plouffe.

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+3} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right)$$

Au moyen de cette formule, on peut calculer le n-ième chiffre en base 16 du développement de π, sans avoir à calculer les $n-1$ chiffres précédents.

Je voudrais souligner l'importance de ce résultat.

Non pas tant en regard du problème particulier qu'il permet de résoudre (et qui après tout est mineur), mais plutôt parce qu'il constitue une illustration remarquable de ce qu'est la recherche mathématique.

Cette formule est relativement simple à démontrer. Elle utilise la définition de l'arc-tangente et son expression comme intégrale d'une fraction rationnelle : disons qu'elle peut constituer un problème de DEUG. Elle aurait pu être inventée au siècle dernier.

Mais personne jusque là (y compris d'ailleurs l'un de ses auteurs) ne pensait qu'une telle formule existait ! Maintenant, bien sûr, on se pose la question : y en a-t-il d'autres semblables, en d'autres bases ou bien avec d'autres nombres que π ?

Un champ de « possible » s'est ainsi ouvert.

Depuis, d'autres formules pour d'autres nombres ont été trouvées, mais aucune en ce qui concerne $\sqrt{2}$.

π serait-il donc plus simple que $\sqrt{2}$?

6 - Compression des données

Revenons sur la question du hasard. Intuitivement, cela signifie que tout est imprévisible et que du « passé » d'une suite, on ne peut rien en inférer sur « l'avenir ».

Mais les situations peuvent être mixtes. Il peut y avoir une part de hasard mais aussi des contraintes dues au passé.

Un des plus simples schémas en est le schéma markovien : « l'avenir ne dépend du passé que par le présent »

Ainsi, disons en français, si l'on coupe une phrase à un endroit donné et que l'on cherche à prévoir la lettre qui suit, on peut soit lui attribuer une probabilité tenant compte des fréquences d'apparition de lettres ("e" est plus fréquent que "s", lui-même plus fréquent que "a", ... - n'évoquons pas G.Pérec -), soit analyser plus finement en tenant compte de la dernière lettre lue : si par exemple, cette dernière lettre est "q", il y a beaucoup de chances que la lettre suivante soit "u", à moins que ce ne soit un caractère de ponctuation pouvant apparaître après le mot "cinq" ou le mot "coq".

On pourrait raffiner encore et considérer les deux dernières lettres du texte déjà écrit : après par exemple le groupe "ll", il n'est pas possible en français d'avoir un troisième "l".

Par un artifice mathématique qui consiste à remplacer les lettres par des diagrammes, ceci se ramène à un schéma markovien.

Cette part de contrainte dans un texte (ou un son ou une image...) est prise en compte quand il s'agit de la transcrire en vue d'une retransmission de manière à en minimiser le coût (il ne faut pas ici prendre cette notion de coût en un sens seulement financier, mais considérer que le disque compact, le fax, la télé numérique, en temps réel... ne sont possibles que grâce à une telle économie).

Tenir compte des contraintes pour condenser une information relève de ce que l'on nomme la compression de données.

Expliquons sur un exemple, la méthode de Ziv-Lempel (utilisée dans une commande Unix).

Nous partons de la suite :

abaababaabaababaababaabaababa...

Nous lisons cette suite de gauche à droite.
Au départ, nous n'avons encore rien lu, cette situation sera notée (0).
Puis, nous lisons le début d'un mot, c'est-à-dire la lettre "a".
N'ayant rien lu jusque là, nous créons un nouveau mot : le mot "a".

Sa date de naissance est 1 et nous écrivons : (1) = (0)a
Nous lisons maintenant la lettre suivante "b".
Aucun mot déjà lu ne commence ainsi. Le mot "b" est ainsi créé, sa date de naissance est 2 et nous écrivons : (2) = (0)b
Continuons :
"a" a déjà été lu, poursuivons la lecture, "aa" n'a pas encore été lu, nous lui attribuons donc la date de naissance 3 et écrivons : (3) = (1)a
etc.

Cela revient à découper la suite initiale de la manière suivante

a b aa ba baa baab ab aab aba abaa baba....

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

(1)	=	(0)a
(2)	=	(0)b
(3)	=	(1)a
(4)	=	(2)a
(5)	=	(4)a
(6)	=	(5)b
(7)	=	(1)b
(8)	=	(3)b
(9)	=	(7)a
(10)	=	(9)a
(11)	=	(4)b

....

Le procédé de compression consiste à coder la suite initiale sous la forme

(0)a(0)b(1)a(2)a(4)a(5)b(1)b(3)b(7)a(9)a(4)b...

avec bien sûr des notations plus économiques.

Supposant que la "source" (le schéma, comme nous l'avons dit) soit markovienne, il a été démontré qu'il conduisait à la possibilité optimale de compression (F. Blanchard). Ce rapport limite qui exprime la quantité de hasard et la quantité de déterminisme s'exprime par un nombre appelé entropie.

7 - La suite de Champernowne

Une approche expérimentale de la part d'aléatoire existant dans la suite des chiffres de $\sqrt{2}$ ou de π consiste donc à effectuer un test du type Ziv-Lempel : si une compression significative apparaissait sur, disons le premier million de chiffres, on pourrait envisager que dans leur succession, il y ait quelque chose de markovien (plus contraignant que le simple tirage indépendant avec équiprobabilité). On n'observe rien de tel, ce qui ne prouve rien d'ailleurs.

Ayant appliqué un tel test à des suites génétiques, la constatation est la même : là encore on n'observe rien. On sait bien que de telles suites ne sont pas "au hasard" et la plupart des mutations sont létales, mais la différence ou si l'on préfère, le signal noyé dans le bruit, sont à chercher ailleurs.

Nous allons maintenant donner l'exemple d'une suite qui, bien qu'obtenue par un algorithme relativement simple, présente toutes les propriétés statistiques d'une suite aléatoire. On la nomme la suite de Champernowne.

Une parenthèse : à l'époque, on savait que presque toutes les suites (plus exactement presque tous les nombres - au sens de la mesure de Lebesgue - dont elles représentent le développement décimal) satisfont à ces propriétés statistiques ; le problème était d'exhiber explicitement un exemple.

Il consiste à écrire dans l'ordre les entiers successifs :

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23...

Par simple comptage, on montre que chaque bloc de chiffres apparaît avec la bonne fréquence. Ce qui est beaucoup moins simple à montrer par contre, est que le nombre dont le développement décimal est la suite de Champernowne est un nombre transcendant.

8 - Qu'en est-il de la comparaison entre $\sqrt{2}$ et π ?

La question initiale de la plus ou moins grande complexité d'un nombre par rapport à un autre n'a guère de sens, comme nous l'avons constaté au fil de l'exposé, ou plutôt dépend du point de vue auquel on se place : développements dans diverses bases, développement en fraction continue, et d'autres que nous n'avons pas évoqués...

Ce qui prend un sens par contre, est de cerner une notion de plus ou moins grande complexité pour une suite de nombres entiers.

Si une telle notion était bien définie, on pourrait alors se poser des questions en quelque sorte "internes" du type : le développement de π est-il plus simple en base 8 qu'en base 10 ?

Or, il existe une telle définition due à Kolmogorov et Chaitin :

La complexité d'une suite est la longueur du plus court programme permettant de la calculer.

Bien entendu, "programme" a ici une signification bien précise. Disons seulement que cela met en jeu la "machine de Turing".

Le problème de cette définition est qu'elle n'est pas effective et ne peut l'être pour des raisons logiques.

En gros, la situation est la suivante :
Un programme est une suite finie de 0 et de 1.
On rentre dans la "machine" un entier n, elle commence à fonctionner et si elle s'arrête, elle fournit le n-ième terme de la suite.
Seulement, savoir si elle s'arrête est en général un problème indécidable !

Remarquons en outre que cette définition ne fait pas intervenir le temps de calcul (au point que justement les problèmes naissent parce qu'il peut être infini...).

Signalons aussi que les obstructions logiques à la décidabilité tiennent dans une certaine mesure à une auto-référence, c'est-à-dire de programmes qui "parlent " d'eux-mêmes. Un exercice favori en informatique théorique est ainsi de construire un programme dont l'exécution consiste à l'effacer...

Nous allons ici illustrer cette notion d'auto-référence par quelques suites ainsi définies et voir que les problèmes deviennent assez rapidement très "complexes".

9 - Auto-référence

Considérons tout d'abord la suite :

2 2 1 1 2 1 2 2 1 2 2 1 1 2 1 1 2 2 1 2 1 1 2 1 2 2 ...

Elle est formée de "1" et de "2", mais on voit qu'il n'y a jamis plus de deux "1" ou deux "2" consécutifs. Inscrivons au dessous la longueur des "plages" consécutives de "1" et de "2" :

22 11 2 1 22 1 22 11 2 11 22 1 2 11 2 1 22 ...

2 2 1 1 2 1 2 2 1 2 2 1 1 2 1 1 2 ...

Nous retrouvons la même suite, ce qui n'est pas étonnant puisque c'est précisément pour cela que nous avons construit la suite initiale.

Le principe de construction en est simple :
- elle commence par "2"
- il y a donc une plage de deux "2"
- elle commence donc par "22"
- ce qui fait une seconde plage de deux "1", puisque les plages marquent l'alternance
- le premier de ces "1" indique que le terme suivant est "1" et le second que celui qui suit en vertu de l'alternance est "2"

Nous en sommes donc à des actions successives 2 2 1 1 qui impliquent le début de suite 22 11 2 1, qui va à son tour servir de référence pour une action permettant d'allonger la suite que nous construisons...

Mathématiquement, on peut la définir comme l'unique "point fixe" débutant par "2" de la transformation qui consiste pour une suite de "1" et de "2" à lui faire correspondre la suite obtenue en alternant les plages de "1" et de "2" avec des longueurs données par la suite initiale.

Cela peut sembler simple et en tout cas se programme aisément. Mais, on ne sait que très peu de choses sur la fréquence respective des "1" et des "2" (on ne sait pas démontrer qu'une telle fréquence existe).

Curieusement, si l'on se pose la même question avec des plages de longueurs 1 ou 3, c'est-à-dire si l'on considère la suite débutant par

333 111 333 1 3 1 333 111 333 1 333 1 ...

3 3 3 1 1 1 3 3 3 1 3 1...

on en explicite complètement la répartition statistique !

Donnons maintenant un autre exemple d'auto-référence. Il s'agit cette fois d'une suite de suites finies dont la liste commence par

1
1 1
2 1
1 2 1 1
1 1 1 2 2 1
3 1 2 2 1 1
....

Le passage d'une ligne à la suivante s'effectue en "lisant" cette ligne. Ainsi, en "lisant" 3 1 2 2 1 1, nous trouvons successivement un 3, un 1, deux 2, deux 1. La ligne suivante sera donc : 1 3 1 1 2 2 2 1.

On voit aisément que les seuls chiffres susceptibles d'apparaître sont 1, 2 et 3.

Contrairement à l'exemple précédent, on connaît beaucoup sur cette suite de suites finies ou si l'on préfère, de mots sur l'alphabet {1,2,3}

Désignons par exemple par $l(n)$ la longueur de la n-ième ligne : $l(1) = 1$, $l(2) = 2$, $l(3) = 2$, $l(4) = 4$, etc.

On peut alors montrer (Conway) qu'asymptotiquement $l(n) \sim C\,\theta^n$, où θ est un entier algébrique de degré 71, c'est-à-dire, racine d'un polynôme irréductible, à coefficients entiers, le coefficient du terme dominant étant 1 et de degré 71 !!!

A titre d'exercice, écrivons le texte suivant :
Dans cette phrase, il y a 1 "0", 1 "1", 1 "2", 1 "3", 1 "4", 1 "5", 1 "6", 1 "7", 1 "8", 1 "9".
Cette phrase est syntaxiquement correcte mais fausse puisqu'il y a par exemple 11 "1". Est-il possible d'en écrire une vraie ?

10 - Auto-similarité

Dans le paragraphe 6, nous avons considéré une suite commençant par a b a a b a b a a b a a b a b a a b a b a a b a a b a b a ... Remplaçons maintenant dans cette suite la lettre "a" par le mot "a b" et la lettre "b" par le mot "a". On voit qu'on obtient la même suite qui est donc un "point fixe" de cette substitution. En fait, on peut fabriquer une telle suite (appelée suite de Fibonacci) par une succession de tels remplacements :

a
a b
a b a
a b a a b
a b a a b a b a
....

Si l'on considère uniquement la longueur des mots obtenus, on obtient la suite des nombres de Fibonacci

$$\mathbf{F}_0 = 1$$
$$\mathbf{F}_1 = 2$$
$$\mathbf{F}_{n+2} = \mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{F}_n$$

Le rapport $\dfrac{\mathbf{F}_{n+1}}{\mathbf{F}_n}$ de deux nombres consécutifs de cette suite tend, lorsque n tend vers l'infini, vers le nombre d'or $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Cela mesure l'allongement du mot à chaque étape de sa construction et c'est en ce sens que nous pouvons parler d'auto-similarité de la suite de Fibonacci...

Il y a un sens plus précis basé sur une interprétation géométrique (elle est associée à une rotation sur la circonférence) qu'il serait trop long de développer ici.

11 - Prédictibilité

Nous allons adopter une autre approche de la complexité, en essayant de concrétiser l'idée suivante :

Une suite est d'autant plus complexe qu'elle est imprévisible.

Comment cerner cette notion ?

Nous "regardons" au travers d'une fenêtre les mots de longueur n apparaissant dans cette suite et nous faisons une prédiction sur la lettre qui suit.

Par exemple, sur la suite de Fibonacci, regardons dans une fenêtre de largeur 4.

| abaa | babaabaababaababaabaababa... : "abaa" apparaît suivi de la lettre "b"

a | baab | abaabaababaababaabaababa....: "baab" apparaît suivi de la lettre "a"

ab | aaba | baabaababaababaabaababa... : "aaba" apparaît suivi de la lettre "b"
etc.

Nous avons ainsi cinq mots qui apparaissent : abaa, baab, aaba, abab, baba Sur ces cinq mots, quatre d'entre eux sont nécessairement suivis d'une lettre bien déterminée : "abaa" suivi de "b", "baab" suivi de "a", "abab" suivi de "a", "baba" suivi de "a".

Par contre, le mot "aaba" peut être suivi de "a" ou de "b", à cause des deux fenêtres

ab | aaba | baabaababaababaabaababa ...
abaabab | aaba | ababaababaabaababa ...

De manière très générale, on peut montrer pour la suite de Fibonacci que le nombre de mots lus dans une fenêtre de largeur n est égal à $n + 1$, et qu'un seul de ces mots est prolongeable de deux façons.

12 - Fonction de complexité

Au sens du paragraphe précédent, la suite de Fibonacci est très prévisible puisque seul un mot de longueur n est prolongeable de deux manières.

De manière générale, pour une suite quelconque, nous introduisons une fonction $p(n)$ comptant le nombre de mots apparaissant dans une fenêtre de largeur n. Elle mesure en quelque sorte la complexité. Plus exactement, sa croissance indique l'incertitude dans la prédiction de la lettre suivante.

Ainsi, dans la suite de Champernowne, $p(n) = 2^n$ tandis que dans celle de Fibonacci $p(n) = n + 1$.

Il y a totale incertitude dans la suite de Champernowne et presque totale incertitude dans celle de Fibonacci.

13 - Suites sturmiennes

La fonction de complexité d'une suite est évidemment croissante.
Si pour un entier n a lieu l'égalité $p(n) = p(n + 1)$, chaque mot de longueur n ne peut être prolongé que d'une seule façon et la suite est donc périodique à partir d'un certain rang.

A part ces suites, les suites les plus "simples" au regard de la fonction de complexité sont donc celles, s'il en existe, pour lesquelles $p(n) = n + 1$.

De telles suites sont appelées sturmiennes. Nous avons affirmé que la suite de Fibonacci en est un exemple. Citons-en un autre de nature très différente.

Nous écrivons dans l'ordre naturel des entiers, les puissances de 2 et celles de 3 :

2, 3, 4, 8, 9, 16, 27, 32, 64, 81, 128, 243, 256, 512, 729, 1024,...

mais nous ne retenons dans cette suite que le fait qu'un nombre est puissance de deux ou bien de trois. Nous écrivons "a" pour les premières et "b" pour les secondes, ce qui donne abaababaababaaba... Cette suite est sturmienne.

On peut établir un lien étroit entre les suites sturmiennes et les rotations sur la circonférence ou bien les trajectoires de billard.

Nous ne donnerons pas de conclusion à cette histoire en train de se faire. Disons seulement que les suites dont la fonction de complexité est très peu croissante sont de plus en plus étudiées actuellement, ainsi que les représentations géométriques que l'on peut en donner.

L'auteur de ces lignes pensait, depuis nombre d'années, que les suites de complexité $2n + 1$ étaient toutes susceptibles de telles représentations (rotations sur un tore ou échange de trois intervalles).

Un chercheur (S. Ferenczi) du même laboratoire a fourni récemment un contre-exemple à cette conjecture.

Quelle meilleure conclusion pourrions-nous donner ?