"Mais que disons-nous de l'essence ?"

Jean AYMES
Limoges

À quelles conceptions de la discipline nous référons-nous comme professeurs de mathématiques ? L'exploration de cette question a fourni la matière d'un atelier lors des *Journées d'Albi*. Depuis quelques années, mon attention a été attirée sur ce sujet en étudiant les réponses de professeurs stagiaires en IUFM au questionnaire suivant :

Questionnaire aux professeurs stagiaires.

Avis de recherche… problème en mathématiques

1) *Les mathématiques sont….*
2) *Donner deux exemples typiques de ce qu'on fait en mathématiques.*
3) *D'après vous, un problème en mathématiques, c'est quoi ?*
4) *Donner un exemple de problème en mathématiques.*
5) *Vous est-il arrivé d'en proposer à vos élèves ?*
   - *Si vous en avez proposé, pourquoi ?*
   - *Si vous n'en avez pas proposé, pourquoi ?*

En partant du regard des jeunes professeurs, essayons de situer quelques conceptions comme références pour dégager des éclairages pour la pratique.

Un échantillon de réponses… pour situer un contexte

Dix huit réponses pour chacune des questions ont été regroupées en repérant chacun des professeurs stagiaires par un numéro de question en question. On peut à la fois comparer les réponses pour chaque question ou suivre pour chacun des professeurs ses propres réponses aux diverses questions.

1) Les mathématiques sont…

1- une science exacte.
2- un grand exercice de réflexion, l’amour de l’abstrait, passionnantes.
3- une science exacte.
4- un outil de réflexion.
5- une capacité de réflexion, un état d’esprit logique.
6- une science exacte qui permet de résoudre beaucoup de problèmes liés au « monde » en général (économie, astronomie…), qui permet de développer le sens du raisonnement.
7- une source de réflexion et de raisonnement, une philosophie de la vie car les mathématiques sont une des rares « choses » dont on soit sûr (2 + 2 fera toujours 4 !).
8- une science, donc un des moyens d’appréhender le monde, bien que leur spécificité soit une capacité à se détacher du dit monde, devenant auto-générées.
9- un outil qui permet de modéliser, de mesurer, de calculer.
10- un monde permettant à l’élève d’en découvrir l’utilité, puis la richesse.
11- un domaine de connaissances spécifiques, qui se suffit à lui-même.
12- un délire cohérent de l’esprit… Un jeu : bataille de neurones.
13- langage, raisonnement, réflexion, jeux.
14- dérivables, continues, divergentes…
15- une science vivante, en relation avec tous les autres domaines de la connaissance.
16- l’expression et l’outil de la rationalisation inhérente à notre société (depuis les Grecs) (le processus de rationalisation), ça sert à comprendre le monde.

Ils ont dit...

Nous allons égrener, en bas des pages, dix-huit déclarations de mathématiciens à propos de nos questions. De qui sont ces citations ? Nous vous le dirons à la fin.

***1 :** La mathématique est, dans la vie courante, la servante des sciences et des techniques. Aux mathématiciens on demande de résoudre des problèmes concrets…*

… la situation change. Les mathématiciens contestent leur subordination. Ils se « libèrent ». Ils inven-

17- une discipline dans laquelle on se pose des problèmes, des questions, qu'il faut résoudre à l'aide de quelques connaissances de base. Plus le temps passe et moins nos élèves font de mathématiques : ils appliquent bêtement leur cours.
18- une science exacte.

2) Donner deux exemples typiques de ce qu'on fait en mathématiques

1- des démonstrations, du calcul littéral.
2- construction d'une démonstration, appliquer des théorèmes à la vie courante.
3- du calcul.
4- des calculs, des démonstrations.
5- des calculs, des résolutions de problèmes.
6- algèbre, géométrie.
7- découvrir et apprendre des résultats mathématiques, mettre en application ses connaissances pour chercher à résoudre le problème donné.
8- étude d'un problème venu de la physique, biologie, à l'aide des outils mathématiques, étude de problèmes internes aux mathématiques : théorème de Fermat par exemple.
9- résoudre des exercices, des problèmes, raisonner.
10- aider à la construction de la structure logique de la pensée, apprendre à connaître et utiliser l'abstraction.
11- application de techniques, de procédures de calcul, raisonnement, analyse.
12- raisonner, construire (les bases du délire suivant).
13- rechercher des preuves (math. pures), faire des calculs (math. appli.).
14- des mathématiques, des mathématiques appliquées.
15- essayer de résoudre des problèmes par des essais afin de faire des conjectures, démontrer.
16- on étudie les résolutions de problèmes anciens, on étudie des techniques qui permettent de modéliser des situations de physique, biolo., économie…
17- une partie théorique, exercice.
18- algèbre, géométrie.

---

tent leurs propres problèmes. Ils jouent des jeux gratuits dont ils composent eux-mêmes les règles.
2 : *… créer de nouveaux objets et de nouvelles méthodes dont le caractère abstrait est indispensable pour résoudre des problèmes. On ne peut pas comprendre les mathématiques d'aujour-*

3) D’après vous, un problème en mathématiques, c’est quoi ?

1- deux types : c’est une question que l’on doit résoudre avec des outils mathématiques, c’est un exercice à questions enchaînées.
2- (un arbre), des hypothèses à mettre en relation à l’aide d’outils (propriétés, théorèmes) pour aboutir à certains résultats.
3- c’est un exercice, petit ou pas, qui nécessite une réflexion et une recherche pour pouvoir le terminer.
4- c’est une question qui aboutit à une recherche et qui débouche soit sur une conjecture, soit sur une démonstration.
5- c’est une question posée pour laquelle on a tous les éléments nécessaires à sa résolution.
6- on a une situation donnée « juste ce qu’il faut », et on demande d’arriver à un résultat, sans guider les élèves, en utilisant la démarche (qui n’est pas directe) qu’ils veulent (quelque fois, il peut n’y en avoir qu’une).
7- c’est basé sur un énoncé dont les outils à utiliser n’apparaissent pas du premier coup.
8- c’est soit une symbolisation d’un problème externe aux maths. soit une question interne aux maths.
9- c’est un exercice (souvent plus long que d’habitude) qui permet de « mélanger » plusieurs notions étudiées dans des parties du cours différentes.
10- un problème en mathématiques consiste en un énoncé permettant de réfléchir et d’aller plus loin que ce qui est vu en cours.
11- une difficulté rencontrée dans l’apprentissage. Une suite de questions enchaînées pour arriver à un résultat « nouveau » ou intéressant.
12- une question sans réponse (dont la découverte de la réponse est à la portée de celui à qui elle est posée… en général) (si la réponse est donnée, la démontrer = convaincre autrui).
13- une question entraînant un raisonnement non trivial.
14- d’après moi cela dépend des élèves. Élève A : un « truc » vachement pénible. Élève B : c’est rigolo. Élève C : c’est motivant, intéressant car il faut réfléchir et parfois même se « surpasser ».
15- c’est une question nécessitant pour sa résolution soit un travail de

d’hui si l’on n’a pas au moins une idée sommaire de leur histoire…
L’essentiel est dans les relations existant entre objets, souvent les mêmes pour des objets qui paraissent très différents, il faut les exprimer d’une façon qui ne tienne pas compte des appa-

recherche par essais, conjectures, test de validité, soit pouvant se découper en plusieurs questions.

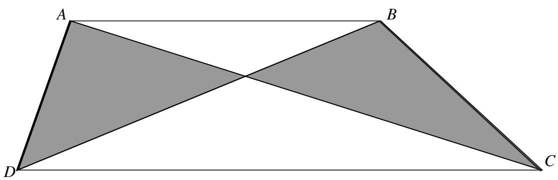
16- une question abstraite que l'on se pose, c'est-à-dire posée interne aux mathématiques.

17- une question que l'on pose aux élèves et pour les aider on leur pose des questions intermédiaires qui s'enchaînent.

18- une « série » de questions enchaînées.

4) Donner un exemple de problème en mathématiques.

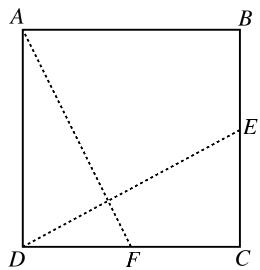
1-



Soit ABCD un trapèze. Les deux triangles grisés ont-ils la même aire ?

2- la droite d'Euler, montrer que l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit à un triangle sont alignés dans un rapport.

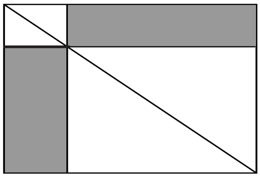
3-



rences, ces objets dont on fait l'étude sont « abstraits ».
***3 :** … découvrir l'aptitude de l'homme à s'engager dans un mouvement théorique pour résoudre de façon très pratique les problèmes qui se présentent… produire une sorte d'inversion de*

(AE) ⊥ (BF) ? ABCD carré, E milieu de [BC], F milieu de [DC]. Pas d'indication sur la méthode, le chapitre correspondant.

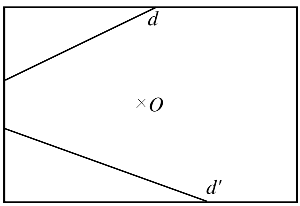
4-



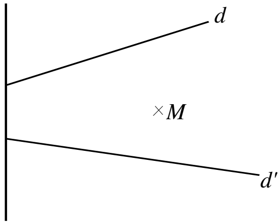
Compare les aires grisées (ex. de problème posé en 6[e]).

5- un rectangle a pour périmètre 80 m. Sa longueur est le triple de sa largeur. Calculer l'aire du rectangle.

6- problème de construction : construire deux points A et B, A ∈ d, B ∈ d' tel que O soit milieu de [AB] (sans faire de tracé en dehors du cadre)



7-



rôles : le jeu théorique de la compréhension et de l'explication doit devenir plus captivant, plus épanouissant que l'obtention de la solution dont la recherche avait initié le jeu.
4 : *En devenant rigoureuse, la Science mathématique prend un caractère artificiel qui*

Tracer la droite passant par M et l'intersection de d et d'.

8- si l'on ajoute 4 au côté d'un carré, celui-ci double d'aire. Trouver le côté du carré.

9- la quadrature du cercle.

10- en 6ᵉ : partir d'un énoncé « compliqué » de description d'une figure et aboutir à des calculs d'aire simples.

11- l'équivalence entre les divers registres de langages dans une liste de questions enchaînées (pour changer de registre et) pour trouver une « formule ». Par exemple comment calculer le prix T.T.C. directement en 5ᵉ.

12-

13- nombres constructibles.

14- $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x^n + y^n = z^n$ n'admet pas de solution pour $n \geq 3$.

15- soit un point G, construire un triangle ABC dont G est le centre de gravité.

16- $\sqrt{2}$ est-il rationnel ?

17- problème de géométrie, problème de mise en équation.

18- problème de mise en équation.

5) Vous est-il arrivé d'en proposer à vos élèves ?

1- oui, afin de leur faire voir l'utilité de la démonstration (ou preuve), dans des questions enchaînées pour qu'ils se servent des questions précédentes.

2- oui, parce qu'un problème est plus riche que des exercices, met en

frappera tout le monde ; elle oublie ses origines historiques, on voit comment les questions peuvent se résoudre, on ne voit plus comment et pourquoi elles se posent.
La logique et l'intuition ont chacune leur côté nécessaire. Toutes deux sont indispensables. La

œuvre plus de connaissances, fait apparaître une progression, regroupe des étapes, fait appel à la logique.

3- oui, en groupe prédéterminé, cela permet aux élèves de regrouper leurs connaissances et de s’en servir avec intelligence.
4- oui, cela est très formateur.
5- oui, pour la mise en équation de problème de 4e, pour la préparation du Tournoi Mathématique du Limousin.
6- oui, pour développer le sens, la capacité de raisonnement des élèves.
7- oui, pour voir leurs réactions sur un énoncé contenant peu de données, s’ils savent travailler en groupes, émettre, admettre des critiques et réfléchir davantage que sur un exercice. classique et sans aide.
8- oui, ?
9- oui, je propose des problèmes en devoir à la maison ou à la fin d’un devoir pour voir si les élèves sont capables d’analyser un exercice qui n’est pas une application directe du cours.
10- oui, voir question 3 ; les problèmes posés le sont plutôt lors de devoirs à la maison.
11- oui, pour les forcer à faire une progression dans le raisonnement, enchaîner les questions.
12- oui, plus motivant que les exercices chiants, demande de réfléchir au lieu d’appliquer (bêtement).
13- oui, en classe les problèmes sont souvent un enchaînement de questions (pas besoin de réfléchir !).
14- oui, j’estime que c’est la raison d’être des mathématiques. Elles sont nées, les mathématiques, parce que les gens se sont posé des problèmes.
15- oui, afin de tester leurs capacités de recherche, leur imagination.
16- oui, pour leur montrer l’étendue des techniques en mathématiques.
17- oui, pour qu’ils apprennent à réinvestir des résultats qu’ils viennent de démontrer.
18- oui, au programme ; problème rapportant à une situation « extra-mathématique ».

Si, pour les uns, les mathématiques sont utiles et pratiques, elles contribuent à la construction de la personne, de l’esprit. Pour d’autres, elles sont

logique qui peut seule donner la certitude est l’instrument de la démonstration ; l’intuition est l’instrument de l’invention.

5 : *Nous distinguons donc ici l’intuition de la déduction certaine en ce qu’on conçoit en celle-ci* abstraites, théoriques et déductives, interviennent parfois selon la modélisation, ou bien procèdent d'une construction, d'une conceptualisation. D'autres encore les conçoivent selon la résolution de problèmes, ou les apparentent à un jeu ou tout simplement une discipline, plus amplement une science, un langage… *Le propos ici est de confronter et de discuter quelques aspects dominants parce qu'ils renvoient à nos manières d'enseigner les mathématiques.*

Quatre réponses… pour point de départ

Parmi plus d'une centaine, quatre réponses peuvent être tout particulièrement relevées en ce qu'elles constituent des points de vue typiquement exemplaires d'une diversité :

Réponse 1 aux quatre premières questions :

1) un ensemble de méthodes et d'outils qui permettent de résoudre des problèmes de la vie courante (ou non)
2) on peut faire des exercices d'entraînement qui permettront d'assimiler l'utilisation d'un outil (par exemple l'étude des fonctions) ou bien résoudre un problème d'optimisation qui nécessitera l'emploi de l'étude des fonctions
3) un grand exercice qui a un but précis
4) un problème d'optimisation

Réponse 2 aux quatre premières questions :

1) des formes de raisonnements basées sur un modèle comprenant des définitions, des règles, des axiomes
2) exemple 1 : on fait des constructions ; exemple 2 : on fait des mesures
3) une question dont la réponse n'est pas évidente et qui nécessite l'emploi de mécanismes de preuve reconnus valides
4) le triangle ABC de côtés AB = 3, AC = 4 et BC = 5 est-il rectangle ?

Réponse 3 aux quatre premières questions :

1) une matière qui doit apprendre à réfléchir (mathématiques collège et lycée) ; un outil de modélisation pour certains (pas au niveau lycée)
2) mathématiques lycéennes : étude de fonction, ex : $f(x) = x - \text{In}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$; problèmes de géométrie (pas beaucoup) : démontrer des alignements de

un mouvement ou une certaine succession, tandis que dans celle-là il n'en est pas de même ; et qu'en outre pour la déduction une évidence actuelle n'est pas nécessaire comme pour l'intuition, mais plutôt qu'elle reçoit en un sens sa certitude de la mémoire. D'où il résulte qu'au sujet des

points par exemple.
3) c'est quelque chose de plus long qu'un exercice qui a pour objet de démontrer un résultat
4)… (pas de réponse)

Réponse 4 aux quatre premières questions :
1) les outils qui me permettent d'exercer mon métier !
2) des démonstrations ; de la géométrie
3) essayer de résoudre une situation concrète de tous les jours grâce aux maths
4) … (pas de réponse)

Parmi plusieurs dizaines de réponses, ces quatre points de vue dégagent à gros traits une vision des mathématiques dans ses rapports à la vie courante plus ou moins opposée à une intervention de la théorie. Le regard porté sur les problèmes fait en outre question : on ne parvient pas toujours à décrire cette notion, ou alors les points de vue sont très divers, souvent sans correspondance forte avec les déclarations précédemment faites. La notion de problème est-elle ambiguë ? par sa durée, sa liaison avec les connaissances, son degré de guidage, recouvre-t-elle des formes si variées qu'il est impossible d'en dessiner les contours ?

Surtout, un mot est assez régulièrement mis en avant pour décrire les mathématiques… le mot « outil ». Faut-il l'entendre comme une réduction de la vision des mathématiques dans l'utilitarisme ? ou bien peut-il être compris dans une acception dont la nature reste à préciser ? peut-être à enrichir ?

Depuis tout ce qui a été tenté pour améliorer l'enseignement des mathématiques notamment à travers recherches et réformes depuis deux décennies, un principe semble être admis « il faut faire manipuler les élèves ». Un certain empirisme s'est installé, mais on ne sait pas encore trop où il va, et on a l'impression qu'il ne conduit pas à un corps de connaissances aussi clairement défini qu'autrefois. Le statut intellectuel des mathématiques est-il stabilisé dans le cadre scolaire ? Le pourquoi de leur apprentissage est-il clair ? Dans le mouvement provoqué dans l'enseignement des mathématiques, plutôt que d'opposer des doctrines - « mathématiques modernes et formelles » d'un côté, « discipline de service » de l'autre - pourquoi ne pas tenter de prendre en compte les enjeux multiples auxquels pourrait répondre cette activité humaine que l'on appelle les mathématiques ?

---

propositions, qui sont la conséquence immédiate des premiers principes, on peut dire, suivant la manière différente de les considérer, qu'on les connaît tantôt par intuition, tantôt par déduction ; mais les premiers principes eux-mêmes ne peuvent être connus que par intuition ; et au contraire

Plusieurs « indices » ailleurs

Plusieurs « indices » peuvent nous montrer ce qui apparaît comme de l'incertitude, peut-être une perte de sens qui atteint nos pratiques courantes.

Indice 1 : le point de vue des jeunes étudiants non-scientifiques

Prenons le point de vue des jeunes étudiants non-scientifiques suivant une UV de Sensibilisation aux Carrières de l'Enseignement, issus des bacs A1, A2, B et D majoritaires, quelques G2, G3, rarement de C (*Cahiers Pédagogiques* n° 299, décembre 1991). Dans un questionnaire qui leur proposait un choix de réponses (science, technique, structure, outil, théorie, langage, jeu), ils répondent que les mathématiques sont une science (46 sur 81), un langage(39 sur 81), un outil(36 sur 81), une technique(13 sur 81), une structure(10 sur 81). Cela donne à penser que la discipline n'est science que pour les trois cinquièmes de ces jeunes !

L'article évoqué signale, entre autres, la profonde méconnaissance du caractère vivant et actuel des mathématiques. Ceci oblige à constater qu'après l'école, le collège, le lycée, il reste en définitive un regard bien vague…

Indice 2 : des lycéens scientifiques donnent une définition

Des lycéens scientifiques en terminale… interrogés sur ce qu'est une fonction répondent par exemple :

- une opération mathématique qui à tout x défini associe une autre valeur (notée y) en fonction de x
- une relation entre deux nombres inconnus mais que l'on peut connaître suivant certaines valeurs
- quelque chose qui à tout x pour lequel elle est définie associe une et une seule image
- représentée par un polynôme ou binôme de n'importe quel degré qui permet d'associer à chaque x choisi, son image, c'est-à-dire f(x)
- une symétrie qui à un élément unique de l'ensemble de départ associe un élément unique de l'ensemble d'arrivée
- l'expression analytique de l'image de y par rapport à x
- un outil mathématique qui à un nombre associe un nombre et un seul

Les fonctions interviennent dans tout l'enseignement du collège au lycée :

les conséquences éloignées ne peuvent l'être que par déduction.

***6 :** Le triangle, lui, intervient un peu partout : la reconstitution des champs inondés par le Nil dans l'Égypte ancienne, le percement d'un tunnel à travers l'île de Samos dans l'Antiquité* on les utilise beaucoup à partir de la troisième, on en étudie et on ne parvient semble-t-il qu'assez mal à forger une définition précise… Sur cette notion, ou d'autres, à quoi veut-on parvenir ?

Indice 3 : un âge d'or… imaginaire

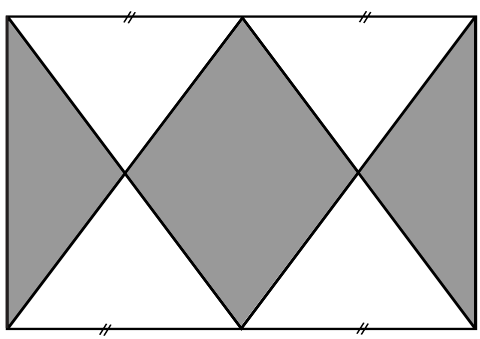
Les difficultés des élèves en algèbre sont préoccupantes. Prenons l'exemple des calculs associés à l'utilisation des « quantités conjuguées » en classe de première. Le savoir algébrique vient de la structure de l'ensemble des nombres de la forme $a + b\sqrt{g}$, $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ et $g \in \mathbb{N}^*$. Peut-on prétendre que pour comprendre et résoudre ces exercices, il est nécessaire de savoir que les nombres de forme $a + b\sqrt{g}$, $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ et $g \in \mathbb{N}^*$ sont les éléments d'un corps que le fait que l'inverse d'un nombre de ce corps peut s'écrire à partir de l'expression conjuguée de ce nombre est un théorème ? Ces exercices ne seraient alors que des applications immédiates du cours ?

Suffirait-il de théoriser pour maîtriser ?

La période des programmes des années 70, avec l'accent mis sur l'axiomatisation, peut-elle être encore nostalgiquement évoquée ? Peut-on dire qu'un savoir et la notion de théorème d'algèbre se sont perdus depuis ? Dans ces programmes, jamais l'étude des structures n'est parvenue à dégager comme un résultat de cours l'étude de l'extension quadratique du corps des rationnels.

Indice 4 : il suffirait de voir…

Examinons un exercice :



grecque, la triangulation géodésique quand, à l'époque de la Révolution française, on mesurait le méridien terrestre. La méditation sur le triangle et la somme de ses angles est à la base des géométries non-euclidiennes, qui à leur tour fondent la relativité générale, et on pourrait ainsi conti-

Dans la figure ci-dessus, l'aire de la région laissée en blanc est 6 cm².
Quelle est l'aire de la région hachurée ?

A) 3 cm²   B) 4 cm²   C) 6 cm²   D) 9 cm²   E) 12 cm²

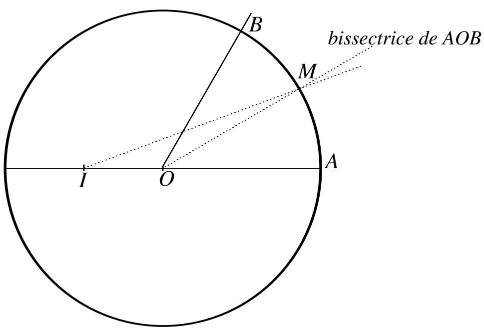
Tiré du Kangourou 96, il a été posé dans toutes les versions collège de cette compétition. Ainsi présenté tend-t-il à laisser penser que la figure est un rectangle ? Est-elle union de deux carrés ? Le problème est-il implicitement (?) donné hors de ce cadre suggéré par le regard de l'œil ? Ou bien veut-on des « kangourous » plus libres quant à ce que tend à imposer le dessin, aptes à bondir avec la vue de l'esprit vers d'autres quadrilatères ?

Par ailleurs après ces quatre indices, ce qui relie, articule ou oppose concret et abstrait (?) est-il interrogé par un brin d'étymologie en ce qui concerne les termes « géométrie », ou même « calcul » ? Tout un pan des mathématiques provient-il de la « mesure de la Terre », un autre trouve-t-il sa source dans la manipulation combinatoire des cailloux ? Comment les mathématiques sont-elles liées à la réalité ?

Trois conceptions de référence

Principalement trois conceptions philosophiques peuvent être rappelées comme éléments de références.

• Dégageons la première d'un petit problème.



Un cercle de centre O étant donné, avec deux points A et B de ce cercle,

nuer longtemps. Ce que les mathématiciens appellent un groupe, une variété, une probabilité, est extrêmement général et s'applique à une foule d'objets d'autres sciences ou d'autres pratiques. Ainsi ce qui apparaît spécifique aux mathématiques, c'est la non-spécificité de leur champ d'ap-

on détermine un angle au centre AOB. Les milieux I et M respectifs du rayon symétrique de [OA] par rapport à O et de l'arc AB déterminent l'angle AIM.

A-t-on 3(AIM) = AOB ?

Ce qui a l'apparence d'une vérité si on s'en tient à l'observation, à la mesure au rapporteur, au compas, ne tient pourtant pas. La trisection est impossible à la règle et au compas dans la géométrie d'Euclide. Ce que les instruments montrent, l'esprit ne s'accorde pas à le penser. Cet écart entre apparence et vérité signale d'une certaine manière la conception des mathématiques de Platon. Là, les objets mathématiques ne sont ni physiques, ni matériels ; ils sont définis, avec des propriétés définies ; ils sont immuables, de nature abstraite, idéaux ; le mathématicien ne peut que découvrir, il n'invente pas ; les vérités sont connaissables a priori, indépendamment des observations.

Voyons une deuxième conception.

En mathématiques depuis à peu près un siècle, on trouve des énoncés comme :

- *P étant un ensemble.*
  D est une famille de parties propres de P
  $(\forall\ d\ d \in D)\ (\forall\ A\ A \in P \text{ et } A \notin D)\ (\forall\ d'\ d' \in D)\ (\forall\ d''\ d'' \in D)$

$$\left\{\begin{array}{l} (d \cap d' = \varnothing) \\ (d \cap d'' = \varnothing) \\ A \in d' \\ A \in d'' \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad d' = d''$$

- *Définition :*
  Un idéal (bilatère) A d'un anneau R est un sous-ensemble non vide A de R tel que :

$$(i)\ (x, y) \in A\text{x}A \Rightarrow x\text{-}y \in A$$
$$(ii)\ x \in R \text{ et } y \in A \Rightarrow xy \in A \text{ et } yx \in A$$

La formalisation des mathématiques a été rendue nécessaire et a été produite pour surmonter les paradoxes surgis au cours du XIX^e^ siècle. Que le premier énoncé soit celui de l'axiome d'Euclide ne fait que rappeler ce qui s'est joué dans la révision qu'a connue la géométrie durant le siècle. Gilbert Arsac a rappelé dans sa conférence inaugurale des Journées Nationales de Lyon ce qu'Hamilton disait à ce propos : « *aucune personne intelligente et de*

---

plication… Les mathématiques sont peuplées de sortes de fantômes du monde réel. Mais, dans ce monde de fantômes, elles classent, rassemblent, découvrent de nouveaux rapports, élaborent des rapports de dépendance, élaguent, simplifient, créent au besoin des formes nouvelles.

bonne foi ne peut douter de la vérité des propriétés principales des droites parallèles, telles qu'elles ont été avancées par Euclide dans ses Éléments, voici deux mille ans ». Cayley parle dans le même sens : « *Le deuxième axiome d'Euclide (l'axiome des parallèles) ne nécessite aucune démonstration, constitue une partie de notre notion de l'espace, de l'espace physique de notre expérience* ».

L'autre énoncé, définition de la notion d'idéal, oblige à dire que cette notion est formalisée dans le cadre de la résolution de problèmes comme l'équation en entiers non nuls $x^n + y^n = z^n$. Des propriétés, apparentées au caractère factoriel de ce qui allait devenir un siècle plus tard l'anneau, qu'Euler avait crues intuitivement évidentes, se sont trouvées démenties. Alors, si les évidences d'un sens trop intuitif sont à suspecter, c'est la conception formaliste des mathématiques telle que proposée par Hilbert qui est soulignée. Là, il n'y a pas d'objets mathématiques ; les mathématiques consistent en axiomes, définitions et théorèmes… en des formules dépourvues de signification ; tout système est arbitraire… créé par le mathématicien.

Troisième point de vue

Mais dans un troisième point de vue, en examinant les contours de la découverte mathématique, la recherche d'explications ne fait-elle pas naître un autre regard sur les mathématiques ? Peut-on admettre une part de doute ? Ce doute est notoirement fréquent pour l'élève en classe. « *Que devins-je quand je m'aperçus que personne ne pouvait m'expliquer comment il se faisait que : moins par moins donne plus (- x - = +) ? C'est une des bases fondamentales de la science qu'on appelle " algèbre ".* » comme l'évoque Stendhal dans l'autobiographie *La vie d'Henri Brulard* de 1835. Ce doute rapproche-t-il le chercheur et l'élève ?

Pourquoi ne pas inscrire cette quête de sens dans la conception développée par Lakatos dans son essai sur la logique de la découverte mathématique ? Là, les mathématiques se développent par la critique et la correction de théories, par problèmes, conjectures, démonstrations, réfutations. Les énoncés de théorèmes, les concepts qui y figurent sont forgés à travers la recherche de preuves.

Ces trois conceptions - par objets idéaux séparés de l'observation, par système arbitraire dépourvu de signification, par preuves et réfutations - traver-

7 : *L'essentiel de l'activité scientifique consiste à poser des questions, mettre en œuvre des outils pour les résoudre et évaluer les résultats obtenus au regard des problèmes posés. Les théories mathématiques ne sont donc pas des fins en soi, mais sont au service d'une efficacité accrue* *sent à la fois nos propres conceptions sur la discipline et notre pratique des mathématiques. Lesquelles sont présentes dans nos enseignements ? Auxquelles se rapportent-ils plus ou moins ? S'agit-il de rapports exclusifs ou nuancés ?*

L'enchevêtrement des conceptions est fréquent. En cela, les paradoxes à l'occasion ne manquent pas. En guise d'illustration et d'aliment à la réflexion, proposons dix-huit déclarations de mathématiciens autour de la question qui nous occupe. On les trouve égrenées au fil des bas de pages…

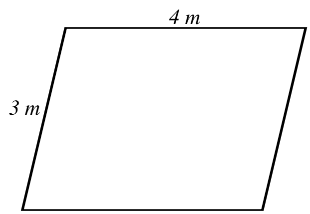
Trois pétitions personnelles

Après cette recension impressionniste, peut-on n'en rester qu'à un fouillis de points de vue hétérogènes ou contradictoires ? Les propos des scientifiques ne correspondent pas toujours à ce que nous savons de leur rôle dominant dans l'élaboration des mathématiques. Ils nous signalent combien la nuance, la richesse du regard comptent. Les points de vue philosophiques nous aident à définir des repères. Cela ne se traduit pas aussi simplement dans l'enseignement… évidemment. Tentons d'engager une prise de position en ce qu'elle essaie de dire et de coordonner les points de vue, parmi les plus importants, pour la formation des élèves.

Première pétition : La résolution de problèmes comme vecteur de sens

Il n'y a pas de mathématiques sans problèmes. La notion de problème fonde une définition de la discipline en affirmant que faire des mathématiques c'est résoudre des problèmes. Parmi d'autres, prenons trois exemples :

- ***problème 1 :*** pour bêcher un jardin, Maurice met deux heures, Jean met trois heures. Combien de temps mettent-ils en travaillant ensemble ?
- ***problème 2 :*** quelle est l'aire de ce parallélogramme de côtés 3 et 4 mètres ?



dans la résolution de problèmes, que ces problèmes soient issus des mathématiques ou de tout autre domaine.

8 : *Quoique la Mathématique, selon son étymologie, signifie seulement Discipline, elle mérite*

• ***problème 3 :*** un ballon est gonflé de sorte que le volume de ce ballon augmente au taux de 100 cm^3 par seconde ; à quelle vitesse le rayon augmente-t-il lorsque le volume est 1 000 cm^3 ?

Chacun d'eux, à l'expérience, fait surgir des rôles essentiels de la résolution de problèmes.

• Le **premier problème** proposé à des lycéens (!) donne lieu à une assez grande variété d'approches ; c'est un rôle très important :

N°1

Ne sachant que faire, ils s'y mettent assidûment ! Au bout d'une heure, Maurice en a bêché la moitié et Jean le tiers, ce qui fait les cinq sixièmes du jardin. Il reste un sixième pour finir. La durée cherchée, disons t, vérifie 1 + t/6 = t…

N°2

Courageux et stakhanovistes, ils sont décidés à travailler longtemps. Pour Maurice, en deux, quatre, six heures, un, deux, trois jardins sont bêchés et pour Jean, en trois, six heures, un, deux jardins. Ce que voyant en six heures à deux, cinq jardins sont retournés. Et alors pour un seul…

N°3

Comme ils ont des envies infinies, ils savent qu'au bout d'une heure, il reste un sixième du jardin. Logiques (?), au bout d'un sixième d'heure, il va rester un trente-sixième à faire, au bout d'un trente-sixième d'heure, il restera un deux cent-seizième d'heure (six au cube pardi). Etc. *Il ne leur reste qu'à calculer une somme d'un nombre infini de nombres : $1 + 1/6 + (1/6)^2 + (1/6)^3 + (1/6)^4$… ou somme d'une suite géométrique de raison r = 1/6 soit 1/(1-r)*

N°4

Avec des compétences d'économistes… La productivité de Maurice Pm = S/2, celle de Jean Pj = S/3. Ici S représente l'aire du Jardin. On les compare : 2Pm = 3Pj. Pendant la durée de travail commune, t pour venir à bout du jardin, Maurice bêche Sm = t.Pm et Jean bêche Sj = t.Pj. S = Sm + Sj, de là 3t.Pm = 2t.Pj = 6Pm. Donc évidemment t = 6/5.

Vous trouvez ça obscur ? Mais l'économie pourtant…

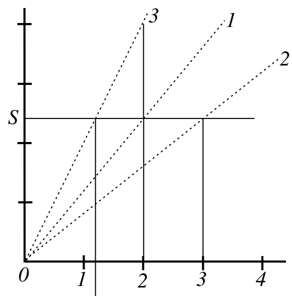
néanmoins le nom de Science mieux qu'aucune autre, puisque ses principes sont connus sans expérience, et ses propositions démontrées avec une telle évidence, qu'il n'est pas possible d'en douter. On l'enseignait autrefois aux enfants avant la Philosophie, et c'est pour cela qu'Aristote

N°5

Pour faire vite, ils sont physiciens « mécanistes ». Maurice un demi-jardin par heure (S/2) et Jean un tiers par heure (S/3). Telles sont leurs vitesses de travailleurs. S'ils travaillent t heures : (t.S/2) + (t.S/3) = S (t/2 + t/3) = 1

N°6

Un jour, quelqu'un a dit : « Rien ne vaut un bon dessin ! » *L'un des chercheurs s'est inspiré de la boutade.*



La ligne 1 représente le travail de Maurice en fonction de sa durée, la ligne 2 celui de Jean et la ligne 3 cumule les deux actions. On n'est pas loin de lire 1,2 heure pour le travail à faire.

N°7

Quelques chercheurs proposent 2,5 comme durée pour ce travail. Ils ont probablement fait la moyenne des durées… Mais le travail d'équipe ce n'est pas de couper la poire en deux !

• Avec le **deuxième problème**, Marc Legrand dans l'article *Mathématiques, mythe ou réalité*, *Repères IREM* n^{os} 20 et 21, met en relief le « *manque de réalisme de ce savoir mathématique* » qui conduit une majorité d'étudiants (!) à une aire de 12 m^2. Il n'y a pas de prise sur la situation pour mobiliser une initiative conduisant à envisager des déformations du parallélogramme, à penser la famille des parallélogrammes assujettis aux conditions posées. En définitive, la formulation de nos problèmes n'est-elle pas trop sté-

---

la nomme la Science des Enfants.

9 : *La géométrie est importante par elle-même et par l'initiation qui en est faite aux enfants. C'est le premier exemple d'un modèle mathématique lié directement à la réalité, le premier* réotypée ? Les questions ne sont-elles pas trop systématiquement bien posées ?

• Le **troisième problème** posé à des terminales scientifiques met en évidence leur pouvoir mobilisateur de la notion de fonction, de la notion de dérivée. Ces notions qu'ils fréquentent depuis des mois, vont-ils les mobiliser pour résoudre ? Ou bien une telle question peut-elle servir, bien plus tôt, de point de départ pour construire la notion de dérivée ?

Ainsi, la résolution de problèmes paraît être un vecteur de sens parce que :

- il y a à découvrir, à trouver
- il y a à débattre, confronter ou partager, argumenter
- il y a à promouvoir des comportements, des démarches qui vont bien au-delà de la démonstration
- les problèmes sont fondateurs d'un besoin de construction rationnelle, d'un besoin de science, y compris dans ses aspects les plus formels
- ils sont la source et le critère des connaissances

Souvenons-nous d'un propos d'Évariste Galois : «... *la science est l'œuvre de l'esprit humain, qui est destiné plutôt à étudier qu'à connaître, à chercher qu'à trouver la vérité.* »

Ces idéaux de l'algèbre moderne appris à l'université, avons-nous suffisamment conscience qu'ils sont issus des problèmes posés par la résolution des équations algébriques ? Ces problèmes algébriques ont été eux-mêmes formulés sur le terreau des vieux problèmes géométriques : quadrature du cercle, duplication du cube, trisection de l'angle, etc… « *On ne peut pas comprendre les mathématiques d'aujourd'hui si l'on n'a pas au moins une idée sommaire de leur histoire* » ainsi que le dit Jean Dieudonné. Oui ! les problèmes font les mathématiques.

Deuxième pétition : La modélisation comme impératif de relation au réel

« *Lorsqu'il résout un problème en posant des équations, l'élève commence à s'habituer à relier des concepts mathématiques aux réalités* », Georges Polya met de la sorte l'accent sur le caractère tout à fait précoce en fait de la

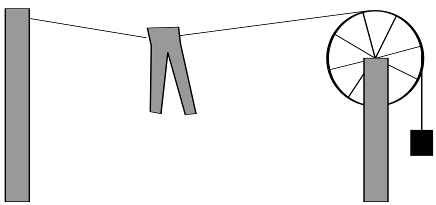
exemple de physique mathématique. J'y vois donc deux aspects : l'un est expérimental, et conduit à la manipulation et à l'observation ; l'autre consiste en de nombreuses séquences de raisonnements liés… Les mathématiques m'intéressent pour elles-mêmes, mais aussi parce démarche de modélisation pour l'élève. Elle est au cœur des relations avec la réalité, ce qui donne des mathématiques, peut-être, l'image la plus humaine à travers tout ce qui est fait pour « mathématiser ».

La modélisation comme impératif de relation des mathématiques au réel, ne peut guère être éludée :

- elle apporte une nouvelle lecture des situations, favorise compréhension, explicitation ou prédiction
- elle agit selon une liaison symétrique
  - par des concepts issus solidairement de situations
  - par des concepts adéquats comme représentations
- elle forge l'idée d'une vérité conditionnelle car toute modélisation est porteuse d'une certaine déformation. Chacun connaît cette histoire de celui qui cherchait ses clés sous un réverbère. Un passant lui demande : « *Est-ce bien ici que vous les avez perdues* ». « *Non, dit l'autre, je les ai perdues en face. Mais au moins ici on y voit !* » Manière… exagérée de signaler que tout modèle est approché !
- elle donc implique sa propre critique, l'exploration de son domaine de validité

À titre d'illustration, prenons la situation du blue-jean dans l'article de Marc Legrand déjà évoqué.

Ce blue-jean mouillé, suspendu sur ce fil à linge, pèse environ 3 kg.



Question : *La tension du fil (c'est à dire la valeur en kg du contrepoids C qu'il faudrait suspendre à son extrémité pour soutenir le blue-jean dans cette position) est-elle à votre avis plutôt de : 1,5 kg ; 3 kg ; 6 kg ; 20 kg ; 45 kg ; 100 kg ?*

L'assistance des professeurs de mathématiques à laquelle il a soumis la question s'est, dit-il, « brutalement enflammée ». Les réponses proposées

qu'elles constituent une sorte de témoignage de la manière dont fonctionne notre esprit, notamment de la manière de se convaincre et de convaincre les autres à travers un discours de communication, c'est la contribution des mathématiques à l'éducation globale, et pas du tout à sous-tendent une modélisation qu'il y aurait lieu de mettre en débat.

Dans le cas d'espèce, c'est la traduction du problème dans le domaine des vecteurs, avec l'étude d'un parallélogramme qui est en jeu. Cette intervention des mathématiques comme instrument théorique - parfois à distance surprenante de la situation - est une de leurs caractéristiques importantes. C'est un recours à un déplacement de sens pour percer le sens du problème. À travers les questions de nombres (relatifs, rationnels, complexes), avec l'édification de l'algèbre, à travers les géométries, les exemples sont nombreux. Ce recours à l'abstraction pour exprimer les situations n'est-il pas permanent ? Cette manière de perte de sens pour davantage de sens, d'un autre sens, est ce que nous avons la responsabilité de communiquer.

Un autre exemple a été donné par François Padilla, professeur au lycée de Decazeville, avec sa collaboration aux travaux des enseignants des sections de Chaudronnerie du lycée. La recherche des modèles destinés à prévoir le découpage et la mise en forme de tôles pour obtenir des tuyauteries à raccorder pour réaliser des turbines par un pliage selon des génératrices qu'il faut calculer. C'est un échange fructueux entre mathématicien et chaudronnier : l'un fournit le problème, l'autre propose une interprétation mathématique avec sa contribution en termes d'efficacité technique et économique. Le mathématicien avoue volontiers qu'il apprend : « *Grâce aux chaudronniers, j'ai appris à connaître des formes dont je n'avais pas la moindre idée ; j'ai appris le travail en équipe ; j'ai appris à regarder autrement les mathématiques… et aussi la chaudronnerie.* »

Troisième pétition : La généralisation comme dynamique

Au service de la résolution de problèmes, comme dans l'exercice de la modélisation, une part capitale de l'essence des mathématiques est dans leur pouvoir de généralisation. C'est la dimension théorique qui est ici défendue… en relation avec les moyens pris pour l'atteindre. Vues comme science de la contemplation, d'une certaine forme d'observation, les mathématiques y puisent leur capacité d'extension, leur profonde unité.

- la généralisation est porteuse d'efficacité, d'économie de pensée ; expérimentation et raisonnement s'articulent pour donner sens à l'activité scientifique ; problèmes et concepts sont associés dans son mouvement
- cette dimension souligne d'autant plus l'idée d'une certitude conditionnelle parce qu'elle donne à connaître des fondements plus authentiques,

l'éducation des seuls scientifiques.

10 : *… le mathématicien, quant à lui, peut parfaitement se sentir attiré, de façon brutale, par une question qui ne recoupe que de très loin ses travaux en cours. De ce point de vue, il agit en artis-*

plus essentiels

- la généralisation s'inscrit dans une genèse… et fait éviter le dogme
- ici est mis en valeur un discours à cohérence propre : l'accord sur les prémisses impose celui sur les conclusions
- la théorie est partout de l'école à l'université ; produits par généralisations successives, approfondis selon divers niveaux les concepts théoriques n'ont-ils pas un sens plus édifié ?

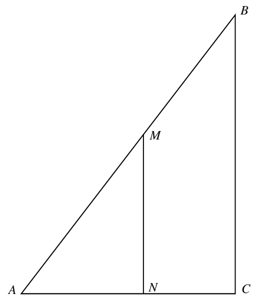
D'une certaine manière Jean Dieudonné a souligné cette progressivité de l'accès à l'abstraction : « *On ne peut développer avec fruit une théorie mathématique sous la forme axiomatique que lorsque l'étudiant s'est déjà familiarisé avec la question à laquelle elle s'applique, en travaillant pendant un certain temps sur la base expérimentale, ou semi-expérimentale, c'est-à-dire en faisant constamment appel à l'intuition.* »

On n'accède pas au concept de fonction d'un seul bond ! Pour l'élève de seconde elles commencent à fonctionner surtout comme formules. Ce qui dégage un premier niveau de connaissance. Il faut du temps, beaucoup de travail, un lot de problèmes significatifs pour faire évoluer cette première conception comme lien formulé entre deux variables jusqu'à la mise en valeur d'une relation d'un certain type entre deux ensembles. Il faut admettre des connaissances provisoirement intelligibles et leur potentiel de questions qui construisent du sens. Il faudra ensuite, d'une certaine manière, changer de point de vue, changer de sens. La démarche de généralisation fait son œuvre ici, des fonctions affines à des fonctions de plus en plus complexes. Cet exemple à propos des fonctions met en relief le rôle spécifique des **définitions** en mathématiques. Indispensables, il y a lieu de les situer dans un processus d'apprentissage. Les définitions engagent l'esprit dans une quête de sens ; les êtres mathématiques existent fondamentalement par les relations qu'ils ont entre eux. Il s'agit, finalement, de saisir combien chaque définition est un élixir… un élixir de sens !

Provisoires, certaines connaissances le sont de manière indispensable. Et c'est pour apprendre. Une illustration à partir du premier exercice de l'évaluation nationale à l'entrée en Seconde 1996.

---

te et non en scientifique… C'est que la mathématique, indispensable au monde technique, source par là même d'innombrables applications, est un art autant qu'une science, et surtout une discipline gratuite.



Sur la figure ci-dessus, ABC est un triangle, M est un point du segment [AB] tel que AM = 13 et MB = 10. N est un point du segment [AC] tel que AN = 8 et NC = 6.
Claude s'interroge : « les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?»
Quel théorème peut-on lui conseiller d'utiliser ?…

Il s'agit bien sûr du théorème de Thalès dans son expression contraposée ; il ne s'agit pas du théorème réciproque. On sait que cette distinction fait difficulté pour bon nombre des élèves de troisième. Faut-il renoncer parce que c'est difficile ? Faut-il renoncer parce qu'on ne dispose pas de la notion formalisée de contraposée («pas ou plus de logique dans le programme ») ? Le codage de l'item proposé par le cahier de la Direction de l'Évaluation et de la Prospective propose d'inclure le recours à la réciproque dans les réponses exactes. Faut-il interpréter cette acceptation de l'erreur comme une incitation à la confusion dans l'enseignement en troisième ?

Il semble au contraire souhaitable de poser et de résoudre sans formalisme des questions de ce type en quatrième, en troisième plus encore un peu dans le sens de cette familiarisation dont parle Jean Dieudonné. C'est par toute la réflexion ainsi provoquée que la formation au raisonnement (… à la logique) sera promue, qu'un sens sera construit. Accompagner ces interrogations de propositions pour mettre en relief la distinction entre le théorème et sa réciproque est nécessaire : n'est-ce pas en s'adressant à des théorèmes dont la réciproque n'est pas vraie que l'on pourrait par exemple éclairer davantage la différence à faire ? Le « tout homme est mortel » de notre traditionnelle terminale peut aussi bien être remplacé par une illustration géographiquement plus proche. Puisque « tout habitant de Limoges est habitant de la Haute-Vienne » ; alors que peut-on

11 : *Pour autant que les mathématiques se rapportent à la réalité, elles ne sont pas certaines, et pour autant qu'elles sont certaines, elles ne se rapportent pas à la réalité. La parfaite clarté sur le sujet n'a pu devenir bien commun que grâce à cette tendance en mathématiques qui est* affirmer pour une personne n'habitant pas la Haute-Vienne ? Des exemples dans le cadre mathématique sont évidemment possibles… sans préalable théorique, l'essentiel n'est-il pas de s'inscrire dans un processus de généralisation ?

La confusion - l'erreur tolérée - dans le codage tend à faire entendre qu'il ne s'agit pas d'une compétence exigée en fin de troisième et pourtant la présence de l'exercice dans cette évaluation nationale signale l'importance de ces questionnements au collège.

À noter que l'item était aussi destiné à repérer un recours au théorème de Pythagore : les auteurs de l'exercice ont voulu voir si les élèves sont sensibles à l'allure de la figure qui semble partir d'un triangle rectangle… ce qui ramène à la fonction des codages, des hypothèses à propos d'une figure. Elle est de la sorte distinguée d'un dessin.

Ces considérations n'habitent-elles pas maints domaines de l'enseignement : c'est parce qu'il est tendu vers l'accès à la généralité que le professeur va organiser son parcours d'enseignement autour de niveaux d'approfondissement successifs, sachant taire maintenant tel niveau de rigueur pour le reconsidérer à travers une nouvelle problématique… il ne s'agit pas d'épuiser toute la richesse d'une notion dès la première rencontre… ce serait à vrai dire insensé ! Dans cette optique, évoquons encore une question.

À propos de la notion de démonstration… au cœur de l'essence :

- elle est primordiale dans la formation des élèves… et agit comme une seconde mémoire par les liens tissés entre les concepts
- il n'y a rien à démontrer s'il n'y a aucune tension doute-opinion. La rigueur est souvent évoquée comme une qualité impérative. Elle n'est pas un absolu, elle ne peut se définir en dehors des raisons qui la font exiger. Que disons-nous de ces raisons ?
- si dans la classe on admet, fait-on assez pour qu'admettre et réfléchir… réfléchir et admettre aillent ensemble ? Par exemple admettre est-il un acte suffisamment conscient ? Admis, un théorème est-il éprouvé dans ses hypothèses pour en tester la sensibilité ? Ces tests engagent une recherche de contre-exemples qui est souvent d'une richesse immense.
- l'application des résultats est-elle suffisamment variée pour en asseoir la portée ?
- expliquer, démontrer ou prouver ne sont pas tout à fait du même ordre.

connue sous le nom d'axiomatique.

***12 :** Pour les divers auteurs, les mathématiques ne sont pas une théorie achevée, un texte existant quelque part à découvrir, un langage sophistiqué, un ensemble de règles du jeu, un moyen*

Conclusion

En forme de conclusion, d'autres raisons encore de sortir d'un enfermement entre l'utilitaire et le passif ; ceci emprunte à l'article *Mathématiques et formation* de Jean Pierre Kahane, *Petit x* n° 40 :

• à travers certaines valeurs :

- ***éducatives :*** l'importance de parier sur l'intelligence des jeunes… osons donc poser des problèmes ! Leur disponibilité n'en sera que mieux sollicitée.
  Ce pari implique un apprentissage à mieux poser les problèmes, notamment à travers la manière singulière de « penser le monde » qui est celle des mathématiques. Ici les raisonnements, les principes logiques de tous ordres apparaissent avec une densité plus grande que partout ailleurs.
- ***sociales :*** de quelles richesses humaines et sociales sommes-nous porteurs comme enseignants de mathématiques ? quel est le rôle d'un professeur de mathématiques dans un pays démocratique ?
- ***culturelles :*** les mathématiques sont vivantes, actuelles et présentes… savons-nous suffisamment manifester cette actualité et cette présence ? par exemple en tentant de montrer un peu les problèmes d'aujourd'hui, les interventions d'aujourd'hui.

• des mathématiques enseignées pour tous

- par leurs qualités d'universalité, avec la volonté d'en permettre la compréhension à tous les hommes
- comme un sport universel, accessible à tous les enfants
- comme une science vivante, dont le mouvement, dans ses grandes lignes doit pouvoir être saisi par tous les citoyens
- dans la continuation d'une longue histoire, l'annonce d'une histoire future qui intéresse tous les êtres humains à venir.

Quant à l'apprentissage des mathématiques, plus conscients du pourquoi, pouvons-nous alors mieux savoir comment procéder ?

de démonstration… Les mathématiques sont une œuvre humaine, elles sont construites petit à petit et laborieusement, elles sont en perpétuelle évolution, et surtout, elles sont construites en réponse à des problèmes.

Éléments bibliographiques

Pourquoi les maths ? Nicolas Rouche, conférence aux journées nationales APMEP de Loctudy, 1987

Pour un renouvellement de l'enseignement des mathématiques au Collège, cahier APMEP, janvier 1985

Ces problèmes qui font les mathématiques (la trisection de l'angle), Jean Aymes, brochure APMEP n° 70

Classe de seconde : un outil pour des changements, brochure APMEP n° 79

L'universalité des mathématiques, Gilbert Arsac, conférence inaugurale des journées nationales APMEP de Lyon, octobre 1991

Faire des mathématiques : le plaisir du sens, Rudolph Bkouche, Bernard Charlot, Nicolas Rouche, édition Armand Colin

La démonstration mathématique dans l'histoire, Commission inter-IREM Histoire et Épistémologie des Mathématiques, 1989, édition IREM de Besançon et IREM de Lyon

Épistémologie des mathématiques, Jean-Pierre Clero, édition Nathan

L'univers mathématique, Philip J. Davis, Reuben Hersh, édition Gauthier-Villars

Que fait un mathématicien pur et pourquoi ?, Serge Lang, Revue du Palais de la Découverte volume 10 n° 94, janvier 1982

Faire des maths : grands problèmes de géométrie et de l'espace, Serge Lang, revue du Palais de la Découverte volume 12 n° 114, janvier 1984

Preuves et réfutations, Imre Lakatos, *Essai sur la logique de la découverte mathématique*, édition Hermann, 1984

Faire des maths, c'est quoi pour vous ? Catherine Berdonneau, article dans Cahiers Pédagogiques n° 299, décembre 1991

Parcours mathématiques pour le lycée, Bernard Vinter, Maurice Lachaud, Jean Aymes, CRDP de Midi Pyrénées

L'aspect moderne des mathématiques, Lucienne Félix, Librairie scientifique Albert Blanchard, 1957

Pourquoi des mathématiques à l'école ?, Roland Charnay, ESF éditeur, 1996

Problématiques au lycée : supplément au Bulletin APMEP n° 401

Bac mathématiques horizon 2000 : supplément au Bulletin APMEP n° 414

Ils ont dit… (suite)

13 : À travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves peuvent prendre conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique : identifier un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une argumentation, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus et évaluer leur pertinence en fonction du problème posé.

***14 :** Si on n'avait pas trouvé les formes modulaires dans la nature, on ne les aurait jamais imaginées.*

***15 :** De plus en plus, les mathématiques apparaissent comme la science qui étudie les relations entre certains êtres abstraits définis d'une manière arbitraire, sous la seule condition que ces définitions n'entraînent pas de contradiction. Il faudrait toutefois ajouter, pour ne pas risquer de confondre les mathématiques, ni avec la logique, ni avec des jeux tels que le jeu d'échecs, que ces définitions ont été tout d'abord suggérées par des analogies avec des objets réels ; tel le cas pour la ligne droite, pour le cercle, pour le corps solide de la mécanique rationnelle, etc. Mais les nombres imaginaires, les nombres transfinis, bien d'autres êtres mathématiques, sont de pures créations de l'esprit humain. Elles sont justifiées par le fait qu'elles ont permis de résoudre plus facilement des problèmes que se posaient les mathématiciens ou les physiciens, et d'éclaircir les difficultés qu'ils avaient rencontrées.*

***16 :** … un tissu complexe et foisonnant fait de conjectures, d'hésitations, d'impairs, de modèles concurrents, d'intuitions fulgurantes et aussi de moments d'axiomatisation et de synthèse.*

***17 :** M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question de système du monde.*

***18 :** Il s'agit d'entrer dans un monde nouveau, que la vérité a choisi pour se manifester, alors que l'évidence du quotidien couvre une profonde insignifiance… l'émergence d'une vision intérieure dont les objets paraissent finalement plus réels, en tout cas plus intéressants, que ceux de l'expérience commune… les mathématiciens sentent une vie interne des objets mathématiques et leur recherche n'est qu'une inlassable méditation sur celle-ci.*

Voici les auteurs des dix-huit citations égrenées au bas de nos pages…

1 • Hubert Reeves, 1990, Malicorne, réflexions d'un observateur de la nature, Seuil
2 • Jean Dieudonné, 1987, Pour l'honneur de l'esprit humain, Hachette
3 • Marc Legrand, 1995, Repères IREM n° 21
4 • Henri Poincaré, 1905, La valeur de la science, Flammarion 1970
5 • René Descartes, Œuvres et lettres, La Pléiade, Gallimard 1970
6 • Jean Pierre Kahane, 1993, Mathématiques et formation, Petit x n° 40
7 • Jean Louis Ovaert, 1978, bulletin APMEP n° 317
8 • Ozanam, 1691, Dictionnaire mathématique ou idée générale des mathématiques
9 • André Lichnerowicz, 1973, La crise des mathématiques modernes, numéro spécial Sciences et Avenir
10 • André Warusfel, 1973, La crise des mathématiques modernes, numéro spécial Sciences et Avenir
11 • Albert Einstein, cité par Françoise BALIBAR dans EINSTEIN, la joie de la pensée, Gallimard
12 • Aline Robert et Jacqueline Robinet, 1989, à propos des auteurs du bulletin vert APMEP, dans Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement, IREM Paris VII
13 • Programmes de collège, 1996, en son préambule les mathématiques au collège
14 • Yves Hellegouarch, lors d'une conférence sur l'histoire du théorème de Pierre de Fermat
15 • Émile Borel, La définition en mathématiques, Les Grands Courants de la Pensée Mathématique, Cahiers du Sud, 1948, Réédition Gabay 1998, cf Bulletin APMEP n° 415
16 • Amy Dahan-Dalmedico et Jeanne Peiffer, Routes et Dédales, Seuil
17 • C.G.J. Jacobi, lettre à Legendre, 2 juillet 1830
18 • Ivar Ekeland, L'expérience mathématique, Études, mars 1989, n° 370/3