

SOMMAIRE

INTRODUCTION	Page 1
Quelques informations pour une meilleure lecture ...	Page 14

Une progression en algèbre pour la classe de 6^{ème}

<u>Thème 1</u> : Commutativité et associativité de l'addition	Page 15
<u>Thème 2</u> : Lien entre addition et soustraction	Page 19
<u>Thème 3</u> : La soustraction	Page 22
<u>Thème 4</u> : Associativité de la multiplication	Page 24
<u>Thème 5</u> : La division euclidienne	Page 26
<u>Thème 6</u> : Le quotient	Page 28
<u>Thème 7</u> : Multiplier un nombre par une fraction	Page 32
<u>Thème 8</u> : Les expressions littérales	Page 34
<u>Thème 9</u> : L'égalité	Page 38

Trois situations-clés en classe de 6^{ème}

<u>Situation 1</u> : Redécouvrir la technique de la division de deux entiers	Page 40
<u>Situation 2</u> : « Partage de cakes »	Page 44
<u>Situation 3</u> : « Les poignées de main »	Page 47

Une progression en algèbre pour la classe de 5^{ème}

<u>Thème 1</u> : Organiser les calculs	Page 52
<u>Thème 2</u> : La distributivité	Page 56
<u>Thème 3</u> : Introduction des lettres	Page 63
<u>Thème 4</u> : Les écritures fractionnaires	Page 64
<u>Thème 5</u> : Les nombres relatifs	Page 73
<u>Thème 6</u> : Travail sur les égalités	Page 89
<u>Thème 7</u> : Equations	Page 93

Trois situations clés pour la classe de cinquième

<u>Situation 1</u> : « Le 4 x 4 »	Page 103
<u>Situation 2</u> : Echanger des programmes de calcul	Page 107
<u>Situation 3</u> : Tester une égalité en utilisant les notions de périmètre et d'aire d'un rectangle.	Page 111

PRÉFACE

Avec cette nouvelle brochure consacrée aux « Entrées dans l'algèbre en 6^e et en 5^e », le groupe didactique de l'IREM d'Aquitaine ouvre un nouveau chantier, déjà entrepris en géométrie, de propositions d'organisation de l'enseignement des mathématiques au Collège. Il poursuit ainsi son remarquable travail qui consiste à fournir aux professeurs des outils, toujours d'une grande richesse, afin de les aider dans leurs difficiles tâches quotidiennes.

Les brochures du groupe didactique de l'IREM, consacrées jusqu'à ce jour à la géométrie en 6^e et au cycle central, ainsi qu'aux « activités », conjuguent deux exigences majeures que les professeurs de mathématiques sont désormais en droit d'attendre, mais que ne satisfont toujours pas nombre de manuels du commerce ou d'articles qui paraissent dans les revues professionnelles. Ces exigences constituent encore les piliers de cette nouvelle brochure.

Elles s'appuient sur la théorie didactique, développée depuis une trentaine d'années en France et à travers le monde, et pour laquelle Guy Brousseau, un de ses pères fondateurs et qui a aussi été un illustre représentant des travaux de l'IREM de Bordeaux, a récemment reçu la première médaille internationale Félix Klein. La théorie est ici utilisée pour concevoir et analyser *a priori* des séquences d'enseignement. Ces exigences s'appuient ensuite, et toujours grâce à la théorie didactique, sur l'expérimentation et l'observation des séances passées dans les classes, pour analyser *a posteriori* et retoucher ce qui a été initialement conçu.

Cette brochure sur les débuts de l'algèbre – est-il devenu honteux d'utiliser le mot « algèbre », qui est banni des programmes de Collège ? – dans la continuité des précédentes, revendique ces deux types d'analyses, malheureusement étrangères à la logique dominante. L'immédiateté – « être réactif » face aux changements de programme afin de « se positionner favorablement sur le créneau du marché » des manuels – et l'empirisme – confier la tâche d'écrire pour les professeurs et leurs élèves à quelques rédacteurs dont « l'expérience » de professeur constitue le seul viatique plus ou moins bien inspiré –, entachent trop souvent certains manuels et articles à visée professionnelle, et sont les pires ennemis d'une transposition didactique à l'issue de laquelle faire des mathématiques prendrait encore du sens pour les élèves.

À l'opposé, on notera que le système que modélise l'algèbre est, dans cette brochure, tout d'abord identifié, analysé et distingué selon les cas : grandeur, nombre, inconnue, variable, instrumentalité et sémiotité du symbole « = », etc. Cette distinction s'inscrit dans une progressivité raisonnée et assumée des apprentissages. De même, relèvera-t-on la volonté de choisir des problèmes « pour lesquels un savoir algébrique va se révéler *utile, fonctionnel* », « un savoir nouveau dont ils [*les élèves de Collège*] doivent *éprouver la pertinence* ». Cette

brochure, dans la lignée des précédentes, opère ainsi une rupture fondamentale avec l'absence de motivation du savoir mathématique en tant qu'ensemble de réponses à des questions, en permettant de placer les élèves dans des situations à fort potentiel a-didactique. Absence de motivation caractéristique de l'enseignement actuel des mathématiques, et que l'on éprouve en consultant la majorité des « activités » ouvrant les chapitres des manuels. Situation attristante qui conduit à enseigner des mathématiques dénuées de sens pour nombre d'élèves et qui, répétée tout au long de l'enseignement secondaire, contribue à nourrir le désintérêt des étudiants pour des études supérieures scientifiques.

Aussi, par exemple, un des thèmes de la brochure proposé en 6^e est-il significativement intitulé, au risque de choquer : « *propriété* de la soustraction ». À travers l'usage d'une technique qui s'appuie sur cette propriété, les élèves rencontrent et éprouvent la facilité calculatoire qu'elle procure pour résoudre des types de tâches relevant des positifs. Ce thème entre en résonance avec celui qui ouvre sur les relatifs en 5^e ; **Z** apparaît alors aux élèves comme produit d'une construction vécue obéissant à des raisons rencontrées, éprouvées et résolues, parce que s'appuyant sur leurs connaissances anciennes. Cette démarche préside de même au développement du thème des rationnels. C'est ainsi que sont parallèlement menées l'étude de l'algèbre et la nécessité de l'évolution des systèmes de nombres (**Z** et **Q** à ce niveau), à travers la résolution de certaines équations algébriques classiques, pour compléter la possibilité de certains calculs. On retrouve en ce point la satisfaction de deux contraintes fondamentales, d'ordre didactique et épistémologique. La seconde, qui relève au niveau éducatif de la vigilance envers la nature et la qualité du savoir mathématique enseigné, n'apparaît plus artificielle et gratuite quand elle est convenablement articulée à la première.

On aura compris que cette brochure s'adresse en premier lieu aux professeurs ; souhaitons que, s'ils s'en inspirent, les rédacteurs de futurs manuels éprouvent l'honnêteté de la citer, ainsi que ses auteurs. Avant de laisser au lecteur le plaisir de la découvrir et, espérons-le, de s'en servir dans son enseignement au Collège, il est encore nécessaire, afin d'éviter de fâcheux dérapages lors de son utilisation, de formuler quelques mises en garde.

Cette nouvelle brochure de l'IREM d'Aquitaine, comme les précédentes, s'appuie, on l'a dit, sur une pensée rationnelle issue de la didactique des mathématiques. Aussi ne peut-on sans courir à l'insatisfaction, voire à l'échec, l'utiliser comme bon nous semble, selon son humeur ; certaines précautions doivent être prises pour prévenir un usage inapproprié qui engagerait à lui adresser des reproches infondés car relevant alors d'une mauvaise utilisation personnelle.

La première mise en garde relève des contraintes temporelles. Contre l'idée erronée qui voudrait que l'enseignement proposé occupe trop de temps, et risque alors de compromettre l'enseignement complet du programme, deux éléments de réalité sont opposables. Le premier, faut-il le rappeler, tient en ce que cet enseignement a été testé sans dommage – tout au contraire ! – dans les classes des auteurs de la brochure ; chose assez rare pour être soulignée. Le second tient dans un fait didactique qui relève de l'évidence, même s'il est souvent oublié dans le feu de la pratique enseignante, et qui veut que le temps passé dans une authentique activité mathématique soit du temps d'apprentissage gagné par les élèves. Ce qui évite à la fois le piétinement de la classe lors des rencontres ultérieures avec un savoir nouveau, le retour en arrière lorsque le professeur, après la correction d'un contrôle raté, se voit contraint de ré-enseigner, par diverses formes, ce qui n'a pu être appris. Ce qui évite enfin de consacrer trop de temps à la correction d'exercices, parce qu'ils ne jouent plus leur fonction de « s'exercer » mais remplissent celle « d'apprendre » ce qui n'a pu l'être.

La seconde mise en garde porte sur l'attitude qui consisterait à vouloir modifier, pour y apporter sa touche personnelle, les activités proposées sans réfléchir attentivement aux conséquences de ces changements. Est-ce pour autant que, se soumettant à cette contrainte, la liberté du professeur en serait altérée ? Sûrement pas, tant elle peut s'exercer dans divers domaines non pris en compte dans cette brochure ; le premier, parmi bien d'autres comme la conception des exercices et devoirs, consistant à mettre en œuvre et gérer les situations proposées, ainsi que les imprévus inhérents à toute relation humaine. Les situations d'enseignement, même instruites et bâties à partir de la théorie didactique, n'échappent pas à cette règle relevant de la contingence, de l'inattendu ; c'est d'ailleurs l'une des raisons qui fondent la nécessité de la fonction enseignante, et qui garantissent sa pérennité contre tout risque de substitution par de quelconques logiciels d'enseignement.

Rentrer dans l'algèbre en 6^e et 5^e grâce à la brochure que le groupe didactique de l'IREM d'Aquitaine met à la disposition des professeurs de mathématiques est à ce prix. Mais le coût de cet outil mérite d'être payé, tant l'enseignement de l'algèbre au niveau du Collège apparaît aujourd'hui délicat, source de nombreux échecs pour les élèves et leurs professeurs, et tant les documents de qualité en direction des professeurs restent encore trop rares dans ce domaine.

Yves Matheron
IUFM de TOULOUSE
IREM de MARSEILLE
Membre de la Commission inter-IREM Didactique

Introduction

Nous sommes partis d'un constat : il est très difficile d'amener nos élèves de collège à utiliser des lettres dans un calcul, pour résoudre un problème et ils font beaucoup d'erreurs persistantes en calcul littéral. Pourquoi ?

Dire que le savoir arithmétique fait obstacle à l'acquisition de l'algèbre est certes une des réponses à cette question mais cela ne nous dit pas pour autant comment construire nos séquences en classe.

Nous avons observé de façon aussi précise que possible les difficultés de nos élèves en algèbre. Nous avons constaté que les élèves de quatrième et troisième ne sont pas assez familiarisés avec l'utilisation des lettres et les techniques de calcul que cela nécessite.

Mais il nous est apparu que le savoir algébrique ne se manifeste pas seulement par une habileté dans l'emploi de lettres dans un calcul mais aussi par la compréhension de la structure des ensembles de nombres.

Nous pensons donc que l'entrée dans « l'esprit » de l'algèbre doit commencer dès la sixième.

Nous vous proposons une progression sur les deux premières années de collège qui est composée de situations-problèmes et de « petits exercices » que nous avons expérimentés dans nos classes.

Notre objectif est de construire une progression cohérente, de la sixième à la troisième, pour aider les élèves à faire de l'algèbre.

Ce qui est important pour un apprentissage graduel de l'algèbre, c'est autant les situations-problèmes qui ne permettent pas de résoudre toutes les difficultés ni de surmonter tous les obstacles, que l'accumulation et l'enchaînement des exercices qui vont aider les élèves à se familiariser petit à petit avec l'utilisation des lettres pour résoudre des problèmes.

Nous voulons ainsi mettre en place, progressivement, des énoncés référents qui serviront ensuite, en cas de difficulté dans un calcul algébrique, de point de repère pour comprendre et corriger les erreurs.

I- Analyse des difficultés des élèves :

1) Les différents statuts de la lettre en mathématiques

Dans le projet d'accompagnement des programmes paru en janvier 2006, l'attention des professeurs est attirée sur différents statuts des lettres.

- Dans l'ensemble des mathématiques et souvent dans le cadre géométrique

La lettre est utilisée pour distinguer une dimension (longueur, largeur, hauteur...) dans les formules de calcul de périmètre, d'aire, de volume, ou bien pour désigner des objets géométriques simples (points, droites, cercles, angles...). Dans le domaine algébrique, la lettre sert à donner un nom à une expression numérique ou littérale. La lettre dans ce type de situation est un outil de désignation.

- Dans le calcul algébrique
 - la lettre est considérée comme un nombre inconnu dans la résolution des équations.

- avec la nécessité de transformer des expressions littérales, les lettres prennent alors le statut d'indéterminée (par exemple en 5^{ème} l'identité de la distributivité).

- Dans le cadre fonctionnel

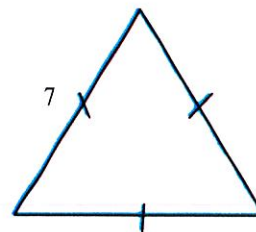
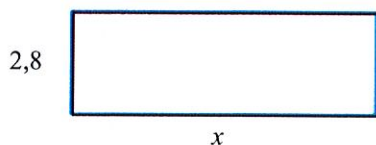
En 3^{ème} dans l'étude des fonctions affines, la notion de variable est abordée. Il faut parfois transformer la variable en inconnue pour chercher sa valeur quand l'image d'un nombre est donnée.

- Dans le cadre des équations et des fonctions, le professeur utilise des paramètres dans l'énoncé de propriétés générales. Par exemple quand il est conduit à faire écrire aux élèves une relation de la forme $y = ax + b$, a et b sont des paramètres et x et y des variables.

Dans la pratique de nos élèves les statuts des lettres sont-ils aussi clairement différenciés ? L'habileté à passer d'un statut à l'autre est-elle prise en charge ?

Prenons un exemple parmi les exercices que nous proposons en 5^{ème}.

Pour quelle valeur de x ce rectangle et ce triangle ont-ils le même périmètre ?



Ce que peuvent faire les élèves :

$$\begin{aligned} (2,8 + x) \times 2 &= 3 \times 7 & (L_1) \\ 5,6 + x \times 2 &= 21 & (L_2) \\ x \times 2 &= 21 - 5,6 & (L_3) \\ x \times 2 &= 15,4 & (L_4) \\ x &= 15,4 : 2 & (L_5) \\ x &= 7,7 & (L_6) \end{aligned}$$

Dans cet exemple, la désignation de l'inconnue par une lettre est prise en charge par la consigne.

Des élèves substituent dans la formule du périmètre d'un rectangle x et 2,8 à L et λ , pour écrire la ligne (L₁). Jusque là, x n'est qu'une simple désignation d'une longueur.

Ils doivent comprendre que cette expression ne permet pas pour autant de calculer le périmètre du rectangle et admettre que celui-ci se présente sous la forme d'une expression littérale, qui pour beaucoup d'élèves n'est pas un résultat. En effet, un résultat est la plupart du temps un nombre et pour les élèves $(2,8 + x) \times 2$ n'en est pas un.

Ensuite, pour passer de la ligne (L₁) à la (L₂) l'élève doit procéder à une **transformation d'écriture : développement utilisant la distributivité**.

Dans l'égalité $(2,8 + x) \times 2 = 5,6 + x \times 2$ la lettre x joue le rôle d'indéterminée car ce sont deux expressions égales pour tout nombre x .

Cette égalité n'est pas écrite. La substitution se fait d'une ligne à l'autre dans la disposition verticale communément utilisée dans la résolution des équations.

Dans la suite du travail, la lettre x a le statut d'inconnue, que l'on cherche en utilisant les définitions de la différence $5,6 + (x \times 2) = 21$ est une « addition à trou » où $x \times 2$ joue le rôle du « trou » puis du quotient $x \times 2 = 15,4$ est un « produit à trou » où x est le « trou ».

La confrontation des productions entre élèves leur permet de comprendre que dans cet exercice, on peut éviter les transformations d'écritures en utilisant le demi-périmètre. Une plus grande variété de productions peut être obtenue avec un côté du triangle égal à 6, ce qui fait un demi-périmètre pair. C'est un choix selon le niveau de la classe (6^{ème} ou 5^{ème}, classe « forte » ou « faible »).

2) Difficultés pour d'autres signes que les lettres :

Pour le calcul algébrique, les lettres ne sont pas les seuls signes qui posent problème aux élèves:

1. Le signe \times (multiplié) est enlevé souvent trop tôt, alors que les élèves oublient encore qu'ils doivent rétablir mentalement ce signe \times implicite dans les expressions algébriques.
2. Le signe $-$ est un signe triple :
 - a. le signe de soustraction comme dans $7-2$,
 - b. le signe prédicatoire pour un nombre négatif comme dans (-3) de sorte que dans $7-(-3)$ il y a deux signes $-$ successifs avec deux significations différentes.
 - c. le signe pour dire « opposé » comme dans $(-x)$ qui veut dire opposé de x sans savoir si x lui-même est positif ou négatif.
3. La simplification d'écriture des relatifs peut se comprendre de deux façons selon que les signes $+$ et $-$ sont opératoires ou prédicatoires :

Par exemple : $(-6) + (-2)$ devient $-6 - 2$

- soit en passant par $(-6) - (+2)$ et on enlève les parenthèses et le signe $+$ de $(+2)$. Le premier signe restant est prédicatoire, alors que le deuxième est opératoire.
- soit directement $-6 - 2$ en enlevant les parenthèses et le signe $+$ de l'addition de sorte qu'il ne reste plus que des signes prédicatoires.

Ou encore : $(+6) + (-2)$ devient $6 - 2$

- soit en passant par $(+6) - (+2)$ et retrait des signes $+$, le $-$ restant est opératoire.
- soit en passant par $+6 - 2$ avec retrait des parenthèses et du signe d'addition puis $6 - 2$ avec retrait du premier $+$, le $-$ restant est prédicatoire.

La deuxième méthode nous paraît à proscrire absolument car ces écritures qui n'ont plus de signes opératoires sont incompréhensibles.

A la fin de l'apprentissage les écritures $x + (-2)$ et $x - 2$ doivent pouvoir se substituer l'une à l'autre selon les besoins sans poser de problèmes pour transformer par exemple $-3(x - 2)$ en $-3x + 6$.

Il y a deux méthodes pour faire cette transformation

- en passant mentalement par $-3 [x + (-2)] = (-3) \times x + (-3) \times (-2) = -3x + 6$
- en utilisant la distributivité par rapport à la soustraction
 $-3(x - 2) = (-3) \times x - (-3) \times 2 = -3x - (-6) = -3x + 6$

Cette deuxième méthode deviendra très difficile à mettre en œuvre en quatrième pour développer par exemple $(x - 3)(x - 4)$. Il sera alors beaucoup plus efficace de transformer ce calcul en $(x + (-3))(x + (-4))$.

2. La division euclidienne, à la différence des trois autres opérations, n'a pas de signe dans l'ensemble des décimaux relatifs. A l'école élémentaire les élèves peuvent avoir vu certains signes de division dans \mathbb{N} comme deux points (:) ou deux points avec un trait au milieu, ou même une petite potence. Mais la division n'est pas une opération comme les autres. Pour un couple de deux entiers (dividende et diviseur) elle ne fournit pas un seul résultat (le quotient) mais deux résultats (le quotient et le reste) et pour les décimaux les deux résultats dépendent de l'approximation demandée. En revanche le trait de fraction indique toujours le quotient exact.

Dans les traits de fraction superposés leur tailles respectives et la place du signe = éventuel interviennent.

3. Le signe = présente deux difficultés.

a) Il n'est pas orienté de gauche à droite comme c'est souvent le cas à l'école élémentaire quand il indique le résultat d'un calcul arithmétique.

b) Il y a plusieurs sortes d'égalités :

- les égalités qui sont toujours vraies.

Dans ce cas elles peuvent être trouvées par des transformations d'écriture, l'expression trouvée est alors un résultat. Le signe = est orienté de gauche à droite. Par exemple, quand on a $3(x + 6)$ et que l'on écrit $3(x + 6) = 3x + 18$.

La substitution d'une expression à l'autre pour faire avancer un calcul est un jeu à apprendre.

- les égalités qui sont éventuellement vraies pour certaines valeurs des lettres qui y figurent.

Dans ce cas elles sont données ou elles traduisent un énoncé qui, lui, est donné. Elles prennent le nom d'équations, et le traitement de l'égalité est différent.

3) Difficultés pour la maîtrise de l'écriture algébrique et des structures.

Examinons les difficultés des élèves lors d'un exercice de développement en quatrième et tentons d'en tirer des indications sur ce qu'il faudrait enseigner avant pour que les élèves soient plus performants dans ce genre d'exercices.

Consigne : Développer et réduire l'expression $(4x + 5)(2x - 3)$

- Reconnaître qu'il s'agit d'un produit, le signe \times étant absent

$$(\dots)(\dots) = (\dots) \times (\dots)$$

- Savoir utiliser la double distributivité

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

- Connaître la signification de $4x$ le signe multiplié étant absent

$$4x = 4 \times x$$

- Savoir transformer une soustraction en addition

$$2x - 3 = 2x + (-3) \text{ ou pour la réduction, } 10x + (-12x) = 10x - 12x$$

- Savoir réduire une expression de la forme $4x \times 2x$.
Ce qui implique de savoir manipuler l'**associativité et la commutativité de la multiplication** $4x \times 2x = 4 \times x \times 2 \times x = (4 \times 2) \times (x \times x)$
- Connaître la **notation** $x \times x = x^2$
- Savoir **multiplier des nombres relatifs** (plus à nouveau la commutativité et l'associativité de la multiplication)
 $4x \times (-3) = 4 \times (-3) \times x = (-12) \times x$ ou encore pour $5 \times (-3) = -15$
- Savoir **interpréter le signe -**, soit comme un **signe de soustraction**, soit comme le **signe de l'opposé**, soit comme une **multiplication par (-1)**, pour
 $+(-12) \times x = +(-12x) = -12x$
- Connaître la **priorité des opérations** pour distinguer les différents termes de la réduction
 $(4x \times 2x) + (4x \times (-3)) + (5 \times 2x) + (5 \times (-3))$
- Utilisation de la **distributivité simple** pour mettre x en facteur commun
 $-12x + 10x = x \times (-12 + 10)$
- Savoir qu'on ne réduit pas $8x^2 + 10x$ ou $10x - 15$ (**factorisation**)
- Savoir **additionner des nombres relatifs**
 $-12x + 10x = (-12 + 10) \times x = (-2) \times x = -2x$

Voici deux productions d'élèves :

A.

$$\begin{aligned}
 & (4x+5)(2x-3) \\
 & = 4x \times 2x + 4x \times (-3) + 5 \times 2x + 5 \times (-3) \\
 & = 8x^2 + -4x + 10x + -15 \\
 & = 14x^2 + -15 \\
 & = 14x^2 - 15
 \end{aligned}$$

D.

$$\begin{aligned}
 & (4x+5)(2x-3) \\
 & = 4x \times 2x + 4x \times (-3) + 5 \times 2x + 5 \times (-3) \\
 & = 8x + (-12x) + 10x + (-15) \\
 & = -30x + (-15)
 \end{aligned}$$

Pour la majorité des élèves ce n'est pas la double distributivité qui pose problème, ils savent développer, ce qu'ils ne savent pas faire, c'est la réduction.

Pour passer de la 3^{ème} à la 4^{ème} ligne, l'élève A ajoute $-4x + 10x$ il trouve $6x^2$ qu'il ajoute à $8x^2$. Ce qui explique $14x^2$ à la ligne suivante.

L'élève D oublie le carré dans la réduction de $4x \times 2x$, il trouve $8x$ puis il commet une autre erreur en ajoutant $8x + (-12)x + 10x$ et il trouve $8 + (-12) + 10 = -30$.

On peut voir quelle est la complexité, d'un tel travail, dès que l'on veut expliciter toutes les propriétés qui sont nécessaires pour le réaliser. Outre la double distributivité, de nombreuses propriétés sont sollicitées.

En particulier, la commutativité et l'associativité de l'addition et de la multiplication sont très utiles, ainsi que le passage de la soustraction de relatifs à l'addition dans les deux sens.

Il paraît donc évident qu'il faudra travailler ces propriétés dès la sixième et cinquième, dans le domaine numérique d'abord, afin qu'elles puissent servir de point d'appui pour comprendre les calculs algébriques.

Comment les difficultés repérées ci dessus sont-elles traitées dans la progression que nous proposons ?

Nous avons conçu une progression en faisant certains choix didactiques et en mêlant des situations-problèmes et des exercices ciblés qui ne sont pas des exercices d'application.

II- Exemples de choix didactiques et d'exercices ciblés :

1) Deux exemples de choix didactiques

a) En sixième et en cinquième, nous gardons systématiquement les signes \times et même jusqu'en troisième, nous ne forçons pas les élèves à les enlever s'ils les jugent utiles. L'essentiel étant de préserver le sens donné à l'expression.

b) Dans le thème sur les nombres relatifs, nous essayons de simplifier au maximum les questions de changement de statut du signe $-$, en proposant des écritures simplifiées dès le départ. Lors de l'introduction des relatifs nous n'écrivons pas $(+3)$ mais directement 3.

2) Quelques exercices entrant dans la conception des leçons

a) Pour l'utilisation des lettres et leur statut

En sixième, les élèves sont déjà familiarisés avec les **lettres comme désignation** dans les formules de périmètre et d'aire d'un rectangle par exemple.

Dans l'expression $(L + \lambda) \times 2$, L désigne la longueur et λ la largeur du rectangle. On remarquera que les lettres utilisées sont les initiales des grandeurs désignées, ce qui donne aux lettres un caractère d'abréviation, faiblement algébrique. Pour l'aire d'un rectangle, on rencontrera souvent $L \times \lambda$ et rarement $a \times b$. **Nous essayons de varier les lettres utilisées.**

Dans le domaine géométrique, il est nécessaire de pratiquer en sixième des activités incitant les élèves à désigner par des lettres les sommets des figures, ce qu'ils ne font pas spontanément.

Nous avons essayé d'aller un peu plus loin dans l'utilisation des lettres en 6^{ème}. Dans les activités algébriques que nous proposons et dont voici un exemple (exemple 2), la lettre a un statut un peu particulier, qui n'a pas été répertorié dans la classification qui précède.

La lettre désigne un nombre que l'on ne connaît pas, mais que l'on ne cherche pas, ce n'est donc pas une inconnue à proprement parler. Ce n'est pas non plus une variable car il ne change pas.

Ce n'est pas non plus un paramètre ni une indéterminée, car elle ne peut pas prendre n'importe quelles valeurs, mais on ne s'intéresse pas au domaine de définition. On peut le rapprocher de ce que l'on appelle « nombre généralisé ». On a pu se convaincre de la solution d'un problème en faisant des essais avec plusieurs exemples numériques : la lettre, qui remplace n'importe quelle valeur convenable pour le problème, permet de démontrer que la solution est correcte dans le cas général.

Il s'agit d'exprimer des grandeurs en désignant les nombres que l'on ne connaît pas à l'aide de lettres.

Exemple 1 : Sachant que $a + b = 124$, sans remplacer chacune des lettres a et b par un nombre particulier, trouver combien vaut par exemple :

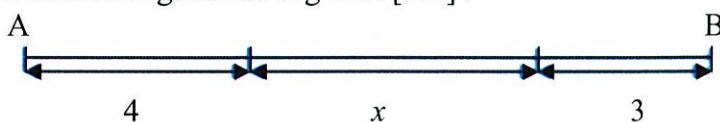
$$b + a \quad a + 76 + b \quad a + a + b + b$$

Puis l'exercice inverse : on sait que c et d sont deux nombres dont la somme est 215. Ecrire les nombres suivants sous la forme d'une expression utilisant les lettres c et d et éventuellement d'autres nombres :

$$430 \quad 220 \quad 100 \quad 43 \quad 215000.$$

Exemple 2 :

- Exprimer à l'aide de x la longueur du segment $[AB]$.



- Exprimer le périmètre d'un carré de côté a de plusieurs façons possibles

Les élèves s'amuse beaucoup à trouver quantité d'écritures comme :

$a \times 4$; $a \times 2 \times 2$; $2 \times (a + a)$; $(8 \times a) \div 2$; $(5 \times a) - (1 \times a)$ et beaucoup d'autres qui s'éloignent de plus en plus du support géométrique : cela devient un jeu d'écritures.

Le but de l'exemple 2 est de conduire les élèves à produire de petites preuves utilisant l'algèbre : deux écritures différentes représentent le même nombre quand on peut les ramener à une même forme simple par des transformations ; En sixième, on utilise la définition de la multiplication par un entier comme une addition répétée puisqu'on ne dispose pas de la distributivité. Quand une écriture est fautive, on teste l'égalité avec une valeur particulière.

Le but de ces deux derniers exercices est aussi d'habituer les élèves à considérer qu'une réponse comportant des lettres est un résultat au même titre qu'un nombre.

Cependant, on voit cet obstacle surgir de nouveau régulièrement jusqu'en troisième. Certains élèves remplacent volontiers $2x + 3$ par $5x$. En effet $5x$ se présente en un seul morceau et « ressemble » donc plus à un résultat que $2x + 3$, expression dans laquelle figure un signe d'opération.

En cinquième, la distinction entre les différents statuts des lettres est amorcée plus clairement.

- Dans la leçon sur la distributivité, les élèves rencontrent l'expression $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$ où les lettres ont un statut d'indéterminées. Ils sont amenés, dès la cinquième à manipuler des identités de la forme $5 \times (x + 2) = 5 \times x + 5 \times 2$ par exemple.

- Que ce soit en sixième ou en cinquième, nous proposons la résolution de petites équations, $a + x = b$ ou $a \times x = b$ en sixième et $a \times x + b = c$ en cinquième, mais la résolution se fait par une méthode arithmétique, en s'appuyant sur la définition d'une différence et d'un quotient. La lettre a bien là un statut d'inconnue, par contre ce statut reste le même tout au long de la résolution. Nous avons vu plus haut qu'en 5^{ème} nous proposons des exercices où le statut des lettres change en cours de calcul, mais il faut que le professeur soit bien conscient de cette difficulté.

b) Pour travailler sur l'égalité

En sixième et cinquième, nous proposons un cadre où figurent plusieurs nombres, mais chacun avec plusieurs écritures différentes (en 6^{ème} il peut s'agir d'écritures de décimaux, en 5^{ème} d'écritures de rationnels) voir pages 37 ou 85 . La première question posée est : combien y a-t-il de nombres dans ce cadre? Il s'agit de savoir que plusieurs écritures sont possibles pour un même nombre et que certaines sont plus utiles que d'autres pour répondre à telle ou telle question.

De plus, dès la cinquième, nous distinguons clairement les égalités qui sont toujours vraies, que nous nommons identités, de celles qui le sont pour certaines valeurs seulement et que nous nommons équations. Nous avons aussi une situation-problème intitulée « Tester une égalité ».

Pour travailler sur l'aspect procédural des expressions algébriques, on propose de remplacer des lettres par des valeurs dans une formule, mais aussi pour l'aspect structural, de produire des expressions littérales ou numériques. Par exemple, en cinquième, nous demandons aux élèves d'écrire eux mêmes, à partir d'exemples numériques, l'égalité de la distributivité.

III- Types de situations-problèmes intervenant dans la conception de nos leçons.

Il s'agit de choisir des problèmes pour lesquels un savoir algébrique va se révéler utile, fonctionnel. Pour les élèves de collège c'est un savoir nouveau dont ils doivent éprouver la pertinence. Nous devons trouver des situations d'enseignement adaptées à cet objectif. Chaque situation doit contenir un problème que les élèves vont pouvoir tenter de résoudre plus ou moins complètement avec leurs connaissances et dont la solution experte sera algébrique. La situation est constituée du problème lui-même et de ce qui l'accompagne éventuellement, ce qui permet au professeur de le transmettre aux élèves (matériel, consigne, organisation de la classe pour la résolution puis la validation ...)

Nous avons repéré dans les documents ordinaires en usage pour ces débuts de l'algèbre deux catégories de problèmes:

1) ceux dont la solution experte consiste à établir une formule. Les lettres auront alors le statut d'indéterminée qui évoluera vers celui de variable, une formule pouvant toujours engendrer une fonction d'une ou plusieurs variables. Les autres lettres dans la formule seront remplacées par des nombres ou bien auront le statut de paramètres . Par exemple la formule qui donne l'aire d'un rectangle en prenant un côté a fixe et l'autre x variable conduit à une fonction de la forme $x \rightarrow ax$.

2) ceux dont la solution experte consiste à résoudre une équation (éventuellement inéquation) à une inconnue (en 4^{ème}) ou un système (en 3^{ème}). La lettre aura alors le statut d'inconnue au moment de l'écriture de l'équation, même si, comme nous l'avons vu plus haut dans un

exemple, le statut de la lettre va changer lors des manipulations algébriques des membres de l'équation.

Une autre façon de classer ces différents problèmes est la suivante:

A) des problèmes internes aux mathématiques, par exemple conjecturer et établir un résultat arithmétique, trouver ou manipuler une formule de géométrie.

B) des problèmes dits « concrets » qui se réfèrent rarement à une autre discipline, le plus souvent à une « réalité » complètement modélisée dans le texte du problème. La situation consiste alors simplement à proposer aux élèves un texte écrit de quelques phrases. Ce sont les problèmes classiques très nombreux dans les manuels de 4^{ème} et 3^{ème}.

Dans ce cas **B**, les connaissances dont les élèves vont avoir besoin en premier lieu sont des connaissances de la vie courante à accorder avec la modélisation proposée qui repose souvent sur des hypothèses simplificatrices implicites. Ils doivent construire une représentation mentale des relations entre les données à partir de l'évocation qui est faite par le texte. C'est une difficulté déjà rencontrée à l'école élémentaire pour les petits problèmes arithmétiques classiques et une contrainte pour l'enseignant: les relations entre les données ne doivent pas être trop complexes. Au collège, beaucoup d'entre nous ont constaté qu'à moins de compliquer les problèmes au risque de les rendre peu utilisables, ceux qui se trouvent dans les manuels usuels peuvent être résolus par les élèves avec les connaissances et savoirs dont ils disposent : arithmétique, langage courant. Cela pourrait ne pas être gênant, mais :

- soit la solution des élèves est arithmétique, et n'est pas tellement plus difficile à trouver et à communiquer que la solution algébrique visée.
- soit la solution des élèves, bien qu'ayant la même structure qu'une solution algébrique, est écrite sans utiliser les lettres. Si nécessaire le langage courant les remplace : les indéterminées ou les inconnues sont désignées par des périphrases, sans que cela gêne la compréhension.

Dans les deux cas le professeur peut manquer l'objectif visé, puisque la nécessité d'un savoir nouveau ne s'impose pas, ce savoir ne se révélant pas plus pertinent que l'ancien. C'est une difficulté de taille dans la construction des situations d'enseignement en algèbre. Comment faire un choix assez judicieux montrant l'avantage des lettres pour désigner les indéterminées, les inconnues et les variables ?

Explicitons où réside la difficulté dans la construction des situations en nous référant aux deux classifications des problèmes faites ci-dessus **1** et **2** et **A** et **B** qui se croisent en **1A** et **1B**, **2A** et **2B** :

1) Problèmes où l'enseignant vise la recherche d'une formule

La situation de type **1B** que nous décrivons en l'appelant « Les poignées de mains », proposée en 6^{ème} ou 5^{ème}, illustre bien notre propos ci-dessus (voir page 47). Chercher une formule permet de prévoir combien de poignées de mains seront échangées selon le nombre de personnes car la question est posée pour 2 personnes, puis 3, puis 4, puis 25, puis 628. Mais les élèves y arrivent très bien sans trouver la formule en disant en conclusion de leur recherche : « Chaque personne doit serrer la main à toutes les personnes sauf à elle-même. Donc le nombre de poignées de main données par chacune est égal au nombre de personnes moins une. Je multiplie ce nombre par le nombre de personnes et je divise par deux car sinon je compte tout en double ».

Ils énoncent en même temps le programme de calcul quelque soit le nombre de personnes et sa justification. En désignant par n le nombre de personnes, la formule $n(n-1)/2$ serait plus performante que ces phrases s'il fallait fournir un programme de calcul à un calculateur étranger au problème et chargé seulement d'effectuer ce calcul plusieurs fois. Mais ici la solution attendue doit contenir outre les résultats des calculs, le programme de calcul et sa justification. Ainsi globalement cette solution produite par certains élèves n'est pas plus longue qu'une solution qui commencerait par : soit n le nombre de personnes.....¹

Dans les problèmes de type 1A les élèves peuvent aussi contourner l'usage de l'algèbre. Voici un exemple dans le cadre géométrique où la conjecture peut s'établir sans recourir à une formule: Que dire des bissectrices de deux angles adjacents supplémentaires ? La dévolution du problème se fait très bien en demandant aux élèves de tracer deux angles adjacents supplémentaires avec des mesures données, puis recommencer avec d'autres mesures. Dans tous les cas il semble bien que l'angle des bissectrices soit droit aux imprécisions de mesure près. Comment s'en convaincre ? Les élèves de 6^{ème} expliquent très bien en français qu'en ajoutant deux moitiés d'angles dont la somme est 180° on obtient la moitié de 180° soit 90° . La distributivité est un modèle implicite pour l'action ou la preuve que les élèves utilisent sans avoir besoin de le formuler avec des lettres.

D'autre part, il faut veiller à ce que la recherche d'une solution au problème soit « motivante » pour les élèves, soit parce qu'elle suscite un doute, soit parce qu'elle permet d'avancer dans le cours.

C'est pour cela que nous introduisons dans notre progression des exercices de type 1A ou 1B où il s'agit seulement d'appliquer une formule et non de la trouver et d'autres où la production de la formule est imposée.

D'autre part nous donnons aussi des situations de type 1A, au niveau 5^{ème} :

Par exemple voici une situation où les élèves seront amenés à prendre eux-mêmes l'initiative d'introduire les lettres pour répondre à la question posée et c'est la seule que nous ayons trouvée dans laquelle certains élèves vont utiliser spontanément les lettres, et encore faut-il que l'enseignant ait préparé le terrain avec la progression que nous donnons. Il s'agit d'une situation de communication dans laquelle un programme de calcul écrit en français est fourni à l'émetteur qui doit le transmettre sans utiliser de mots. Le récepteur doit reconstituer le texte initial en français.

Pour entrer dans l'algèbre, il faut que les élèves s'approprient un nouveau langage qu'ils ne peuvent inventer. Une situation de communication est bien le type de situation le mieux adapté à l'apprentissage d'un nouveau langage. La contrainte de cette communication impose d'abandonner le français. Les élèves vont avoir recours à des signes (point d'interrogation, case blanche, lettres...) . Le professeur pourra alors présenter les lettres comme les signes utilisés dans la culture.

¹ Ce fait est analogue à ce qui peut se passer en arithmétique (Cours élémentaire). J'ai 16 billes noires. J'ajoute des billes rouges et j'ai maintenant 25 billes en tout. Combien de rouges ont été ajoutées ? La solution d'un élève peut être : je cherche le nombre que je dois ajouter à 16 pour arriver à 25. Et l'élève trouve 9 en ajoutant 4 (de 16 à 20) et 5 (de 20 à 25), procédé de l'« addition à trou ». Si l'enseignant change plusieurs fois le nombre de billes (b) et le nombre de noires (n) en demandant le nombre de rouges (r), l'élève peut continuer à appliquer son programme de calcul sans se référer à la soustraction. La nécessité d'utiliser une calculatrice conduit à poser $25 - 16$, premier pas vers l'algèbre $b = n + r$ et $r = b - n$. A une époque, les signes $+$ et $-$ n'étaient pas des signes utilisés en arithmétique, mais seulement en algèbre (voir Chevallard- Petit x n°5 p 51 à 94) . (suite de la note 1 de la page précédente)

On peut constater à cette occasion les difficultés que les élèves éprouvent à écrire correctement des expressions littérales traduisant un programme de calcul.

On peut voir que :

- Les lettres n'apparaissent pas systématiquement, on trouve des symboles comme : « ? », « ! » ou « ... »
- Les élèves éprouvent le besoin de décrire ce que la lettre va représenter, d'où apparaissent en début du message des précisions comme : « x ? » ou des listes (1,2,3,...etc.)
- La gestion des parenthèses est difficile. Il est donc nécessaire de travailler la priorité des opérations dans le domaine numérique
- Plusieurs productions utilisent un calcul par ligne, c'est pourquoi, en cinquième nous proposons de travailler sur des problèmes numériques où il est demandé d'écrire la solution en une seule ligne, sous forme d'une expression numérique, pour préparer à la compréhension et l'écriture d'expressions littérales.
- Les élèves écrivent des suites d'égalités fausses.

2) Problèmes de premier degré où l'enseignant vise la résolution d'une équation

Il est fréquent que les problèmes **2B** dont la solution experte consiste en la résolution d'une équation ou d'un système puissent se résoudre sans cela.

Problème : 119 billes sont partagées inégalement entre Pierre et Jean. Pierre en a 27 de plus que Jean. Trouver la part de chacun.

a- Solutions arithmétiques

Elles consistent à faire une hypothèse, la tester puis la corriger : choisir deux nombres en conservant une contrainte et en ajuster ensuite pour satisfaire l'autre. Ce sont des solutions tout à fait expertes qui se rapprochent des méthodes dites « de fausse position » et dans lesquelles s'engagent des élèves de l'école élémentaire (Cours Moyen) et du collège.

Solution arithmétique avec respect de la contrainte sur l'écart égal à 27

Par exemple je suppose que les parts sont 50 et 77. La somme est 127, il y a 8 billes en trop ($127 - 119$) à ôter également sur les deux, d'où la solution $50 - 4$ et $77 - 4$.

Pour le choix de la « fausse solution » de départ il n'est même pas besoin de tenir compte de l'ordre de grandeur en visant une somme voisine de 119. Très souvent les élèves envisagent deux nombres dont la somme est inférieure à 119, simulant une séparation des 119 billes en deux tas inégaux satisfaisant à la contrainte et répartissant ensuite également le surplus. On peut prendre deux nombres quelconques du moment que la différence est 27. Par exemple 1 et 28 la somme est 29. Il reste 90 billes à répartir ($119 - 29$) d'où la solution $1 + 45$ et $28 + 45$.

Solution arithmétique avec respect de la contrainte de la somme 119

D'autres élèves divisent la somme en deux parts à peu près égales : 60 et 59 par exemple. Ce qui importe est de satisfaire la contrainte de la somme. L'écart est de 1 alors qu'il doit être de 27.

Il reste à diviser $27 - 1$ en 2 parts égales soit 13. Enlever 13 au petit nombre : on trouve 46.

Ajouter 13 au plus grand.

Etant moins expert dans l'une comme dans l'autre des méthodes, certains envisagent successivement plusieurs hypothèses, en corrigeant progressivement et non en un seul coup. Tous peuvent trouver ainsi. Le seul obstacle à franchir est d'avoir l'audace d'abandonner provisoirement une des deux contraintes. Si on envisage plusieurs essais, se rapprocher dès le premier essai de l'ordre de grandeur des solutions imposé par l'autre contrainte est intéressant, car cela limite le nombre d'essais.

b- Les élèves peuvent donner aussi une solution pré-algébrique sans lettres.

Certains manuels ou enseignants leur demandent de représenter les parts de chacun par des segments de manière à favoriser la solution suivante que peu d'élèves trouvent seuls (surtout à l'école élémentaire) : Si j'enlève 27 à la somme, j'obtiens deux fois la part la plus petite qui est donc :

$(119-27) \div 2$. On peut dire que l'élève a choisi comme inconnue la plus petite part et que son raisonnement se rapproche de la résolution de l'équation, mais sans lettre.

$$x + (x + 27) = 119 \quad \text{soit} \quad 2x = 119 - 27 \quad \text{soit} \quad x = (119 - 27) : 2$$

Avec le même raisonnement on peut commencer à trouver la plus grande part avec

$$(119 + 27) \div 2$$

Comme dans la résolution du problème des poignées de mains, les lettres ne sont pas apparues, les relations se sont exprimées dans le langage courant. Cette solution est tout à fait convaincante et aussi simple que celle dans laquelle on désigne l'inconnue par des lettres. D'ailleurs dans ce problème des partages inégaux, la vraie difficulté algébrique est de choisir une des deux inconnues (la part de Pierre ou celle de Jean) et d'exprimer l'autre en fonction de ce choix. Si les élèves ont vaincu cette difficulté, peut-on dire que, même s'ils ont utilisé le langage courant et non des lettres, ils ont fait de l'algèbre ? Oui sans aucun doute. Mais peu le font.

Ceux qui veulent utiliser les lettres, peut-être en voulant répondre à l'attente implicite du maître, prennent deux inconnues comme ce problème y conduit et écrivent un système

$$x + y = 119 \quad \text{et} \quad y = x + 27.$$

A partir de là ils sont bloqués car ils ne trouvent pas la façon de résoudre le système. Certains risquent alors de penser que s'ils s'étaient lancés dans des hypothèses successives tenant compte d'une seule contrainte avec corrections pour satisfaire à l'autre, ils seraient arrivés au résultat. D'où la phrase qu'on entend beaucoup : « dès que je mets des lettres je ne sais pas faire » renforçant l'obstacle de l'entrée dans l'algèbre, les lettres se révélant plus nuisibles qu'utiles.

Dans notre prochain travail sur les équations en 4^{ème} et sur les systèmes en 3^{ème} nous donnerons d'autres exemples de solutions d'élèves qui sont soit purement arithmétiques, soit pré-algébriques sans lettres.

IV- En résumé sur le contenu de ce travail

Pour que l'usage des lettres arrive dans la classe lors de la résolution de problèmes, les élèves doivent avoir déjà rencontré les lettres dès la 6^{ème} dans des exercices où le maître demandera de les utiliser explicitement. Il y a peu de chances qu'ils inventent ce procédé spontanément. Il faut l'avoir fréquenté comme une connaissance qu'ils pourront alors peut-être mobiliser à l'occasion d'un problème.

L'accumulation et l'enchaînement des exercices proposés, fournit de nombreuses occasions de se familiariser petit à petit avec l'utilisation des lettres.

L'analyse des difficultés en algèbre nous indique quelles sont les notions qu'il faut travailler dans le domaine numérique dans les petites classes, afin qu'elles deviennent disponibles comme outils pour l'algèbre en quatrième et troisième car ne pas craindre d'utiliser des lettres n'est pas la seule condition pour entrer dans l'esprit de l'algèbre.

Il faut avoir travaillé sur les autres signes notamment sur l'égalité, sur les structures des ensembles de nombres en particulier la structure de \emptyset et sur l'écriture en une seule ligne d'expressions numériques. C'est indispensable pour commencer à faire de l'algèbre et cela peut démarrer dès l'école primaire et la 6^{ème}.

Nous menons un travail sur les opérations utilisant des nombres relatifs, addition, soustraction et passage de l'une à l'autre, simplifications d'écriture.

Nous visons à habituer les élèves à une certaine dextérité dans les transformations d'écriture, pour cela est prévu un travail sur les propriétés des opérations, commutativité et associativité de l'addition et de la multiplication, distributivité, le rôle du « zéro » et du « un », l'usage des parenthèses. Nous faisons aussi un travail sur les fractions.

Ces savoirs sont tout autant algébriques qu'un savoir sur le calcul littéral ou la résolution des équations.

Ceci explique que notre brochure sur l'algèbre se présente en quatre parties :

Deux parties pour chaque niveau :

- des exercices qui nous ont paru indispensables pour énoncer des propriétés ou manipuler les structures ou les outils algébriques en précisant aux enseignants, grâce aux bilans à écrire sur le cahier des élèves, comment nous avons conçu une progression selon les niveaux. Ces activités peuvent s'intégrer dans différents chapitres tout au long de l'année.
- des situations d'enseignement permettant aux élèves de se charger du problème et d'avoir une véritable activité algébrique dès la sixième. Certaines de ces situations que nous avons placées en 6^{ème} dans notre progression, peuvent également être utilisées en 5^{ème} si les élèves ne les ont pas déjà vues.

Nous abordons ainsi certaines activités numériques des programmes, mais pas de façon exhaustive. Nous traitons seulement celles qui nous ont paru liées aux structures algébriques car notre objectif, dans cette brochure est l'enseignement de l'algèbre et non l'ensemble des activités numériques de la 6^{ème} et de la 5^{ème}. Les liens avec l'apprentissage de l'algèbre sont à chaque fois signalés par un « petit soleil ».

La classe de 4^{ème} marque un tournant dans l'apprentissage de l'algèbre avec la double distributivité et la résolution d'équations du type $ax + b = cx + d$. Elle fera l'objet avec la classe de troisième qui en est la continuité, d'une brochure séparée qui est à paraître prochainement.

Quelques informations pour une meilleure lecture ...

Pour chaque niveau, la brochure se décompose en deux parties.
Dans la première partie, nous présentons un enchaînement de situations pour enseigner l'algèbre en 6^{ème} et 5^{ème}. Parmi ces situations, certaines, incontournables, nécessitaient un développement particulier. Nous les avons détaillées dans la deuxième partie.



Par exemple, le symbole *2^{ème} partie p 40*, accompagnant le résumé de la situation renvoie donc à la deuxième partie de la brochure.

Nous avons mis en italique toutes les remarques sur les objectifs, le déroulement, les divers prolongements des situations présentées.

Les consignes à donner aux élèves sont encadrées, par exemple :

Calculer le plus vite possible, sans poser d'opérations et sans utiliser la calculatrice :
 $61 + 37 + 39$; $8 + 33 + 2 + 17$; $5,2 + 3,7 + 4,8 + 1,3$ etc ...

Nous avons distingué deux types de bilans :

- ceux que nous avons appelés « A retenir », qui sont à écrire dans le cahier de cours et doivent être appris par les élèves.

Ils sont écrits dans une police différente du reste de la brochure, par exemple :

A retenir :

On ne modifie pas une somme de plusieurs nombres en changeant l'ordre des termes et en les regroupant comme on veut.

exemple :


$$3,5 + 12 + 6,5 + 88 = (3,5 + 6,5) + (12 + 88) = 10 + 100 = 110$$


- ceux que nous avons simplement appelé « bilan de l'étape ... » qui sont en fait souvent des conclusions intermédiaires, par exemple :

Bilan de l'étape 2 :

On ne modifie pas une différence en ajoutant ou en soustrayant le même nombre aux deux termes de la différence.

$$235 - 17 = (235 + 3) - (17 + 3) \text{ et } 7,5 - 4,2 = (7,5 - 0,5) - (4,2 - 0,5)$$

Le symbole  précède les remarques (écrites en italique gras) qui permettent de faire le lien, pas toujours évident, entre le contenu des situations proposées, les énoncés qui en font le bilan et leur utilité pour l'apprentissage de l'algèbre, par exemple :

 *Cette connaissance est utile par la suite pour, par exemple, réduire des expressions du type : $2x + 5 + 3x + 7$.*

Première partie : Une progression en algèbre pour la classe de 6^{ème}

Nous abordons l'algèbre en 6^{ème} au travers de différents thèmes qui seront traités tout au long de l'année scolaire : propriétés des opérations, calcul littéral...

En sixième les équations sont le plus souvent présentées sous forme d'opérations à trous mais parfois nous faisons le choix de désigner l'inconnue par une lettre.

Dans certaines activités la lettre peut aussi avoir le statut d'indéterminée et les élèves sont amenés à écrire des identités (comme par exemple quand on remplace l'écriture d'un périmètre de la forme $(3 \times x) + 2 + (3 \times x) + 2$ par l'expression $(6 \times x) + 4$).

Thème 1 : commutativité et associativité de l'addition :

Il est important de travailler la commutativité et l'associativité de l'addition et de la multiplication en vue de préparer les élèves à la simplification d'expressions littérales du type : $3 + x + 4 = x + (3 + 4) = x + 7$ ou $3x \times 2 = 3 \times 2x = 6x$ abordées en 5^{ème}.

Ce vocabulaire n'est évidemment pas à communiquer aux élèves.

Etape 1 :

Calculer le plus vite possible , sans poser d'opérations et sans utiliser la calculatrice :
 $61 + 37 + 39$; $8 + 33 + 2 + 17$; $5,2 + 3,7 + 4,8 + 1,3$ etc ...

A retenir :

On ne modifie pas une somme de plusieurs nombres en changeant l'ordre des termes et en les regroupant comme on veut.

exemple :

$$3,5 + 12 + 6,5 + 88 = (3,5 + 6,5) + (12 + 88) = 10 + 100 = 110$$



Cette connaissance est utile par la suite pour, par exemple, réduire des expressions du type : $2x + 5 + 3x + 7$.

Etape 2 :

En sixième il est important que les élèves rencontrent, peut-être pour la première fois, des écritures où le signe « = » n'est plus uniquement l'annonce du résultat d'un calcul. L'activité suivante a un triple objectif :

- trouver des couples-solutions de l'équation $a + b = 124$ et montrer un problème qui n'a pas, comme le croient souvent les élèves, une solution unique,
- utiliser la commutativité et l'associativité de l'addition mises en évidence à l'étape 1,
- utiliser le caractère substitutif de l'égalité : ici chaque fois que l'on rencontre $a + b$ on le remplace par 124.

Consigne 1 : Deux nombres ont une somme égale à 124. Quels peuvent être ces deux nombres ?

Après un court moment de recherche, la mise en commun permet de constater que plusieurs solutions sont possibles. Cependant certains élèves ont du mal à imaginer une autre solution que $62 + 62 = 124$. Les solutions entières sont évidemment proposées en premier ; si les élèves n'y pensent pas d'eux-mêmes, le professeur demande si c'est possible avec des nombres décimaux. La classe se met alors d'accord pour dire qu' « il y a autant de possibilités que l'on veut », il y en a une infinité. Le professeur propose alors de désigner par a et b deux nombres dont la somme sera toujours 124 comme ceux de la liste précédente. Le professeur sollicite l'écriture : $a + b = 124$.

Le professeur peut proposer 123 à la place de 124. Cela peut faciliter le passage aux nombres décimaux.

Consigne 2 : Sachant que $a + b = 124$, sans remplacer chacune des lettres a et b par un nombre particulier, trouver la valeur de chacune des expressions suivantes :

$$\begin{array}{cccccc} b + a & a + 76 + b & 25 + b + 75 + a & 7,4 + a + b + 2,6 & a + a + b + b & \\ (a + b) \times 10 & a + a + b + a + b + b & & b + a + a & & \end{array}$$

Si quelques élèves rencontrent des difficultés pour comprendre la consigne, on peut corriger les trois premières expressions dans un premier temps et laisser ensuite chercher les autres. La dernière expression est intéressante et laisse la plupart des élèves perplexes. Lors de la mise en commun on peut obtenir des réponses du type : « on ne peut pas savoir », « ça dépend de la valeur de a », « le résultat est entre 124 et 248 ». On n'obtient pas la réponse $124 + a$ car pour les élèves un résultat doit être un nombre et cette conception fait obstacle bien au delà de la sixième, cependant le professeur peut inciter la classe à écrire cette forme littérale.

Consigne 3 : On va faire maintenant l'exercice inverse : on sait que c et d sont deux nombres dont la somme est 215. Ecrire les nombres suivants sous la forme d'une expression utilisant les lettres c et d et éventuellement d'autres nombres.
430 220 100 43 215000.

Les élèves proposent entre autres les écritures suivantes :

$$430 = (c + d) \times 2 = (c + d) + 215 = (c + d) + (c + d) = c + d + c + d$$

$$220 = c + d + 5 = c + 2 + d + 3 = (c + d) + (10 : 2)$$

$$100 = (c + d) - 115 = c + 85 + d - 200$$

$$43 = (c + d) - 172 = (c + d) : 4 = (c + d) - 215 + 43$$

$$215000 = (c + d) \times 1000 = 1000 \times (c + d) = (c + d) \times (2000 : 2)$$

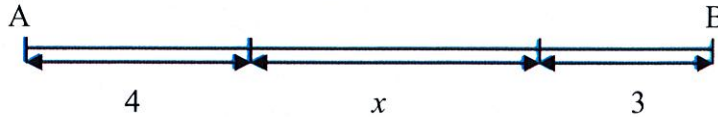
La mise en commun et la validation des différentes propositions devient presque un jeu et certains élèves s'ingénient à trouver des solutions de plus en plus compliquées ! Ils en redemandent !

Etape 3 :

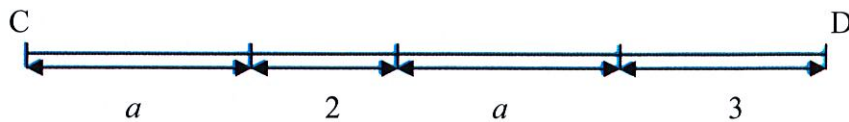
L'objectif de cette étape est double. Il s'agit tout d'abord d'utiliser avec des lettres les propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition que l'on vient de voir dans le domaine numérique.

Mais aussi les élèves rencontrent ici pour la première fois des exercices où le résultat est une expression littérale et non un nombre. Ils doivent comprendre que dans un résultat, il peut rester des lettres et des signes opératoires.

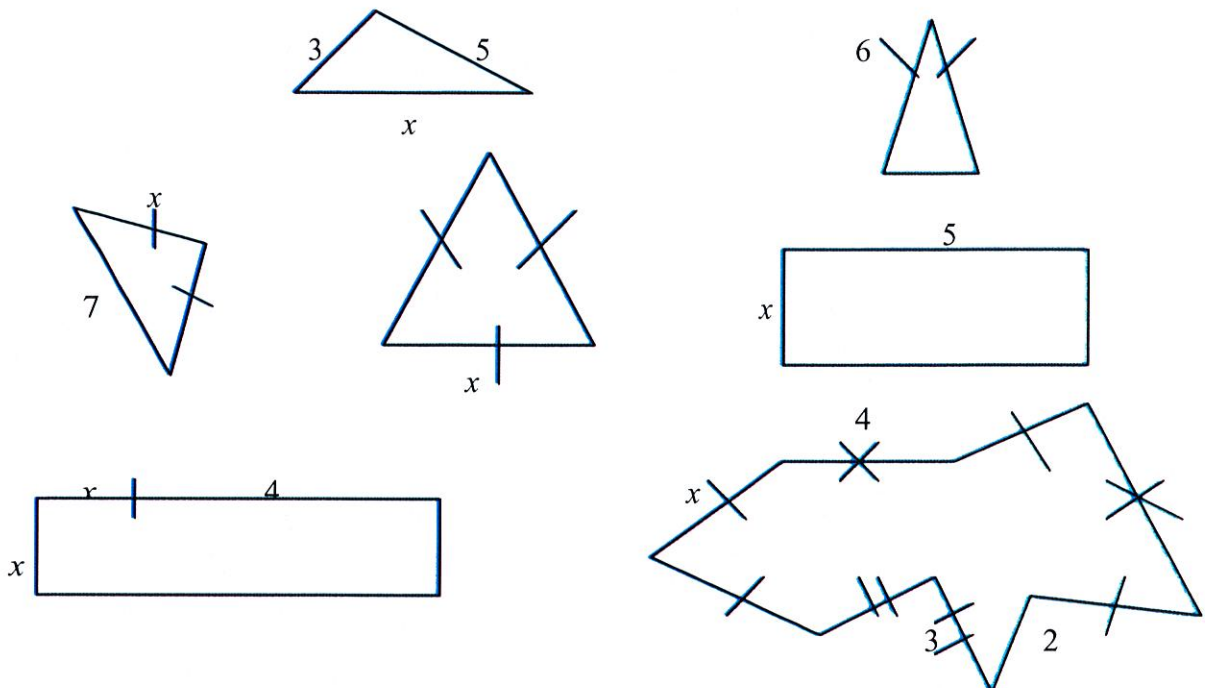
- 1) Exprimer à l'aide de x la longueur du segment $[AB]$.



- 2) Exprimer à l'aide de a la longueur du segment $[CD]$.



- 3) Exprimer à l'aide de x les périmètres des figures suivantes :



Bilan de l'étape 3 :

Exprimer une quantité en fonction de x , c'est en donner une écriture contenant la lettre x , des opérations et des nombres connus.

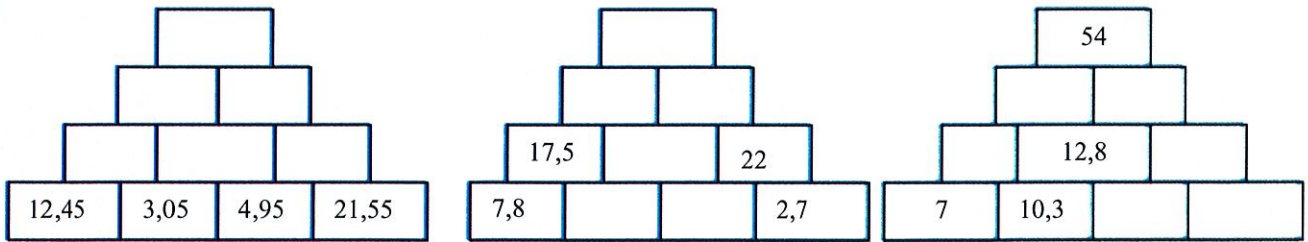
Il s'agit donc de trouver des programmes de calcul et de travailler sur leur équivalence pour déterminer si les solutions proposées par les élèves sont justes ou fausses. Dans chaque exercice, il y aura diverses expressions dans la classe. Par exemple pour le périmètre du second rectangle $x + 4 + x + x + 4 + x$ ou $(2 \times x) + 4 + (2 \times x) + 4$ et des expressions erronées. Il faudra discuter pour savoir lesquelles sont justes et lesquelles sont fausses et pour cela transformer les expressions de façon à se ramener à l'une qui aura été reconnue comme juste.

Thème 2 : Lien entre addition et soustraction

Nous amorçons ici le travail sur les équations et nous préparons également l'introduction des relatifs. En effet ils seront présentés en cinquième comme solution d'équations du type $3 + \dots = 1$ qui, en sixième, n'ont pas de solution.

Etape 1 :

Pyramides de sommes : compléter les pyramides suivantes :



La première pyramide est utilisée pour initier les élèves au procédé (chaque case contient la somme des deux nombres qui sont dans les cases de dessous).

Les deux autres pyramides permettent d'écrire des égalités à trou du type : $7,8 + \dots = 17,5$ et de donner la définition de la différence .

A retenir :

Pour compléter l'égalité $7,8 + \dots = 17,5$
on calcule $17,5 - 7,8$,
on trouve 9,7 qui est le nombre manquant.
 $7,8 + \underline{9,7} = 17,5$
9,7 s'appelle la différence de 17,5 et de 7,8.



Utile pour résoudre des équations du type $a + x = b$.

Etape 2 :

- On sait que $512 + 247 = 759$, quel est le résultat de $759 - 512$ et de $759 - 247$?
- On sait que $475 - 238 = 237$. Quelles sont les opérations utilisant les mêmes nombres et dont on peut trouver le résultat sans faire aucun calcul.

On peut donner les deux questions en même temps ou les faire l'une après l'autre.

A la question b), les élèves trouvent facilement l'addition car c'est la méthode qu'ils utilisent souvent pour vérifier leur soustraction. L'écriture de l'addition leur permet ensuite de trouver la deuxième différence.

A retenir :
A partir de l'addition $512 + 247 = 759$, on peut écrire deux soustractions :
 $759 - 512 = 247$ et $759 - 247 = 512$

Etape 3 :

Compléter les égalités :

$25 - \dots = 13$
 $\dots - 36 = 54$
 $\dots - 12,5 = 43,2$
 $75,3 - \dots = 27,8$

Contrairement aux additions à trous où la procédure est toujours la même, il faut envisager deux cas selon la position du nombre manquant.

A retenir :

- *Pour compléter l'égalité $\dots - 12,5 = 43,2$, on calcule $43,2 + 12,5 = 55,7$. $55,7$ est le nombre manquant.*
- *Pour compléter l'égalité $75,3 - \dots = 27,8$, on calcule $75,3 - 27,8 = 47,5$. $47,5$ est le nombre manquant.*



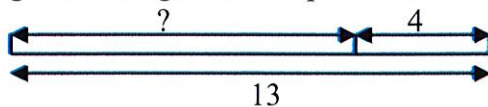
Utile pour résoudre des équations du type : $x - a = b$ ou $a - x = b$.

Etape 4 : Dans cette étape, il s'agit d'exprimer une longueur à l'aide d'une différence, de commencer à travailler la transformation $a - b - c = a - (b + c)$ dans des cas simples, et d'habituer les élèves à exprimer une longueur en fonction de x en utilisant une différence. Par exemple : $AM = 10 - x$.

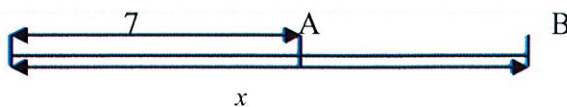


Utile pour mathématiser des problèmes de géométrie.

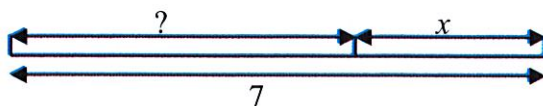
1) Trouver la longueur du segment noté par un « ? » :



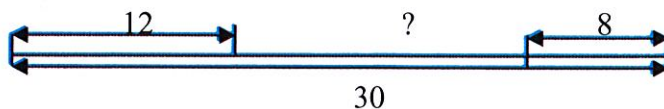
2) Exprimer à l'aide de x la longueur du segment [AB] :



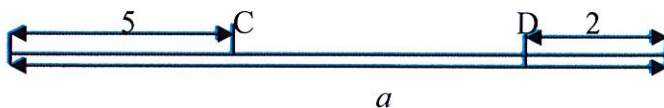
3) Trouver la longueur du segment noté par un « ? » :



4) Trouver la longueur du segment noté par un « ? » :

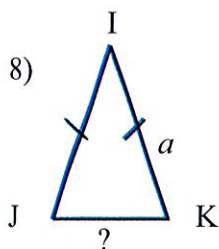


5) Exprimer à l'aide de a la longueur du segment $[CD]$:

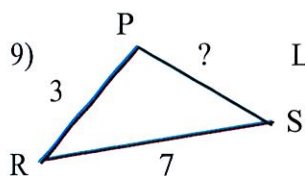


6) Je pense à un nombre, je lui ajoute 7,5 et je trouve 15,7. Quel est ce nombre ?

7) Un nombre diminué de 3,7 est égal à 12,9. Quel est ce nombre ?

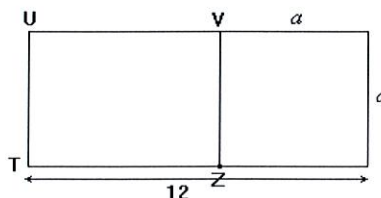


Le périmètre du triangle IJK est de 12. Exprimer à l'aide de a la longueur JK.



Le périmètre de RPS est a . Exprimer la longueur PS à l'aide de a .

10) Exprimer à l'aide de a le périmètre de UVZT.



Thème 3 : La soustraction

1) Une propriété de la soustraction

Ici est abordée l'identité $(a + c) - (b + c) = a - b$ avec $a > b$ (cette formule n'est pas donnée aux élèves) pour aider au calcul mental et pour travailler les égalités. En effet ce sera une nouvelle occasion de faire évoluer le statut du signe « = ».

Dans les égalités du type $235 - 17 = (235 + 3) - (17 + 3)$, le signe « = » ne fonctionne pas comme l'annonce du résultat d'un calcul. Il donne une nouvelle écriture du même nombre dont l'utilisation dans le calcul permet d'éviter la retenue.

Ce travail permet également d'introduire les calculs sur les nombres relatifs :

$$5 - 7 = (5 - 5) - (7 - 5) = 0 - 2 = -2.$$

Etape 1 :

On donne $739 - 567 = 172$.
Peut-on prévoir le résultat de

$749 - 577$
 $739 - 577$
 $749 - 567$
 $750 - 568$
 $729 - 557$?

Dans l'étape 1, le professeur demande aux élèves de déduire des résultats qui ne sont pas toujours les mêmes.

Bilan de l'étape 1 :

Lorsqu'on augmente le premier terme d'une différence, le résultat augmente d'autant.
Lorsqu'on augmente le deuxième terme d'une différence, le résultat diminue d'autant.

Etape 2 :

On donne $58,2 - 25,7 = 32,5$
Peut-on prévoir le résultat de

$158,2 - 125,7$
 $58,3 - 25,8$
 $58 - 25,5$
 $58,5 - 26$
 $52,5 - 20$?

Inventez d'autres égalités.
Peut-on écrire une phrase qui résume ce qui se passe dans ces cinq égalités ?

Au contraire à l'étape 2, les résultats sont tous les mêmes.

Bilan de l'étape 2 :

On ne modifie pas une différence en ajoutant ou en soustrayant le même nombre aux deux termes de la différence.

$$235 - 17 = (235 + 3) - (17 + 3) \text{ et } 7,5 - 4,2 = (7,5 - 0,5) - (4,2 - 0,5)$$

On peut également faire le lien entre cette propriété et la technique de la soustraction à retenue . Lorsqu'on effectue $82 - 37$ en posant l'opération, l'utilisation de la retenue revient à calculer $(82 + 10) - (37 + 10)$.

C'est un bon moyen de réviser cette technique sans recourir à des exercices systématiques.



Ce type d'écriture donne un autre statut au signe « = » qui n'annonce plus le résultat d'un calcul.



Les égalités du type $(a + c) - (b + c) = a - b$ vont nous permettre d'introduire les nombres négatifs.

2) Problèmes de recherche :

- 1) Dans une papeterie, Marlène , Sophie et Aïcha ont acheté les mêmes articles. Le tableau ci-dessous donne les quantités et les montants des achats. Calcule le prix d'un feutre, d'un cahier et d'un stylo .

	Marlène	Sophie	Aïcha
Cahiers	5	2	5
Feutres	3	4	5
Stylos	4	4	4
Montants en euros	13,20	7,40	14,20

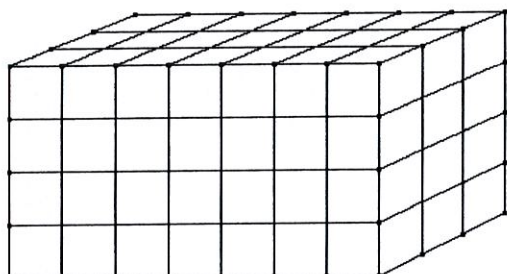
- 2) Dans une papeterie, Alain achète 2 cahiers et 4 feutres et paie 9 . Dans la même papeterie Betty achète 1 cahier et 3 feutres et paie 5,20 . Quel est le prix d'un cahier , d'un feutre ?

Les élèves comparent les différences de prix et les articles correspondants.

Thème 4 : associativité de la multiplication

Nous faisons le choix d'insister sur le produit de plusieurs facteurs car c'est peut-être une des premières fois que les élèves rencontrent des multiplications de plus de deux nombres.

Etape 1 :



Le professeur dispose en classe un pavé droit obtenu par l'assemblage de cubes identiques avec 7 cubes sur la longueur, 3 sur la largeur et 4 sur la hauteur.

Il demande aux élèves de calculer le nombre de cubes contenus dans le pavé droit .

Le professeur donne aux élèves des pavés construits avec des cubes, analogues à celui présenté dans la consigne afin de faciliter la dévolution du problème et d'éviter les difficultés et les confusions liées à la représentation en perspective. Si le professeur n'a pas de cubes , il peut se procurer des morceaux de sucre cubiques ou non. Le problème n'est pas de travailler avec des cubes mais de dénombrer des pavés.

L'utilisation de ces pavés sera également intéressante lors de la validation puisque les élèves pourront les démonter et vérifier ainsi leurs résultats .

Dans la classe apparaissent trois solutions :

Dans un premier temps elles sont écrites avec deux lignes de calcul chacune, le professeur demande aux élèves de les écrire sur une seule ligne.

On obtient : $(7 \times 4) \times 3$; $(7 \times 3) \times 4$; $(3 \times 4) \times 7$.

On observe alors que dans ce produit, l'ordre des facteurs n'a pas d'importance et on choisit de l'écrire $7 \times 3 \times 4$ en n'utilisant plus de parenthèses . On peut alors écrire : $(7 \times 4) \times 3 = (7 \times 3) \times 4 = (3 \times 4) \times 7$ On demande aux élèves d' admettre qu'il en est de même pour tout autre produit.



En demandant aux élèves d'écrire le calcul en une seule ligne on prépare le travail en algèbre .

Etape 2 :

a) Un épicier passe commande de 5 casiers qui contiennent 36 ananas chacun . Chaque ananas coûte 2 . Combien doit-il payer ?

Les élèves écrivent :

$$5 \times 36 = 180$$

$$180 \times 2 = 360$$

Certains écrivent le calcul sur une seule ligne : $(5 \times 36) \times 2$. La plupart de ceux-ci calcule en respectant l'ordre mais d'autres n'hésitent pas à regrouper les facteurs :

$$5 \times 36 \times 2 = (5 \times 2) \times 36 = 10 \times 36 = 360$$



On peut sans hésiter dire que les élèves qui proposent cette solution font de l'algèbre. Ils utilisent alors une propriété de la multiplication pour optimiser leur solution. En effet, calculer 5×36 a du sens du point de vue du problème, par contre calculer 5×2 n'en a plus.

Une fois les différentes solutions exposées, on propose aux élèves le deuxième problème :

b) Quel le prix de 4 packs de 24 bouteilles à 0,25 la bouteille ?

Un plus grand nombre d'élèves a l'idée de regrouper 4 et 0,25. Un élève a même trouvé du sens à ce calcul en disant que : « Calculer le prix de 4 packs de 24 bouteilles revient à calculer le prix de 24 packs de 4 bouteilles », raisonnement que l'on pourrait également appliquer au premier problème.

Etape 3 :

Calculer le plus vite possible, sans poser d'opérations et sans utiliser la calculatrice
 $5 \times 3,7 \times 2$; $0,25 \times 57 \times 4$ etc. ...

Etape 4 :

Sur le mur d'une salle de bains, on a posé 8 rangées de 15 carreaux de côté 12 cm. Quelle est l'aire de la surface carrelée ?

On trouve dans la classe deux démarches différentes :

Méthode 1 :

$$12 \times 12 = 144$$

$$144 \times 15 = 2160$$

$$2160 \times 8 = 17280$$

Méthode 2 :

$$15 \times 12 = 180$$

$$8 \times 12 = 96$$

$$180 \times 96 = 17280$$

Ce qui amène à faire comme bilan : $[(12 \times 12) \times 15] \times 8 = (12 \times 15) \times (12 \times 8)$

A retenir :

On ne modifie pas un produit de plusieurs nombres en changeant l'ordre des facteurs et en les regroupant comme on veut.

$$\text{exemple : } [(12 \times 12) \times 15] \times 8 = (12 \times 15) \times (12 \times 8)$$



Très utile pour transformer l'écriture $(3x) \times 2$ en $6x$ ou $(3x) \times (2x)$ en $6x^2$ mais aussi pour calculer des expressions du type : $3\sqrt{5} \times 4\sqrt{5}$ ou pour développer $2(2x - 3)(3x + 1)$.

Thème 5 : la division euclidienne



2^{ème} partie p 40

Situation 1: « Redécouvrir la technique de la division de deux entiers »

La situation permet de réactiver la division et les techniques opératoires spontanées des élèves puis la technique usuelle.

On demande aux élèves de retrouver la place de nombres dans un tableau dont la première colonne est composée des multiples de 7. La méthode la plus rapide consiste à diviser les nombres proposés par 7 mais les élèves ne reconnaissent pas forcément un problème relevant de la division et retrouvent alors le lien entre la technique de la division des entiers et la multiplication ou la soustraction .

Exercices :

1- A partir de $12 \times 17 + 15 = 219$, peut-on trouver le quotient de 219 par 17 et de 219 par 12 ?

2- Je range des œufs dans 45 boîtes de 6. Je ne veux que des boîtes entièrement remplies. Combien avais-je d'œufs au départ sachant qu'il peut m'en rester une fois que j'ai rempli les 45 boîtes ?

À retenir :

Quand on divise un entier (le dividende) par un entier (le diviseur) on peut écrire :

$$\text{dividende} = (\text{diviseur} \times \text{quotient}) + \text{reste}$$

avec $\text{reste} < \text{diviseur}$

ou $a = (b \times q) + r$ avec $r < b$

Le professeur choisit de donner ou non l'expression littérale.

a	b
r	q

Situation 2 :

Cette situation permet de retrouver le diviseur d'une division euclidienne lorsqu'on connaît le dividende , le quotient et le reste.

Dans le troisième exercice, le professeur demande aux élèves de trouver le diviseur de la division euclidienne qui a pour dividende 274, pour reste 10 et pour quotient 11. Dans ce cas calculer le quotient de 274 par 11 donne le résultat par excès mais cette méthode n'est plus valable dans le quatrième exercice où il faut revenir à la définition de la division euclidienne.



Utile pour faire la différence entre le quotient exact (thème 6) et le quotient de la division euclidienne .

En 6^{ème} A le professeur de math distribue équitablement 238 bonbons aux 27 élèves de sa classe. Combien de bonbons aura chaque élève ? Combien en restera-t-il au professeur ?

En 6^{ème} B le professeur de math distribue équitablement des bonbons aux 28 élèves de sa classe. Chaque élève obtient 12 bonbons et il en reste 17 pour le professeur. Combien le professeur avait-il de bonbons avant la distribution ?

En 6^{ème} C le professeur de math distribue équitablement 274 bonbons aux élèves de sa classe. Chaque élève obtient 11 bonbons et il en reste 10 pour le professeur. Combien y a-t-il d'élèves en 6^{ème} C ?

En 6^{ème} D le professeur de math distribue équitablement 348 bonbons aux élèves de sa classe. Chaque élève obtient 13 bonbons et il en reste 23 pour le professeur. Combien y a-t-il d'élèves en 6^{ème} D ?

Thème 6: Le quotient

On travaille les équations du type $a \times x = b$ ($a \neq 0$) où la solution est $\frac{b}{a}$.

Au préalable, dans les chapitres précédents qui ne figurent pas dans cette brochure, les élèves ont placé des nombres décimaux et des fractions sur une droite graduée.

Situation 1 :

Etape 1 : Compléter les égalités suivantes lorsque cela est possible :

a) $4 \times \dots = 20$

b) $\dots \times 7 = 7$

c) $16 \times \dots = 432$

d) $15 \times \dots = 48$

e) $5 \times \dots = 2$

f) $\dots \times 2 = 1$

g) $0 \times \dots = 3$

h) $3 \times \dots = 4$

Les élèves n'ont pas de difficultés particulières pour répondre aux deux premières. Le c) a été choisi de sorte que les élèves soient amenés à poser la division mais on reste avec des nombres entiers. Le d) permet le passage aux décimaux. Le e) et le f) permettent de revoir que la multiplication n'agrandit pas toujours.

Une discussion s'installe dans la classe pour la dernière. Certains proposent 1,3 ; 1,33 ; 1,333 etc. ... propositions disqualifiées à chaque fois par le calcul de $3 \times 1,3$; $3 \times 1,33$; $3 \times 1,333$ etc. ...

Des élèves proposent alors 1,334 que l'on écarte de la même façon.

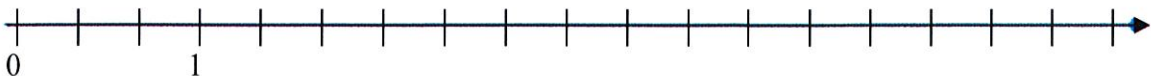
On montre alors que le résultat ne peut pas être un nombre décimal en travaillant sur la partie décimale puisqu'il n'y a aucun nombre autre que zéro dont le produit par 3 se termine par 0.

Parfois, quelques rares élèves proposent alors d'écrire $3 \times (4 \div 3) = 4$.

Aucun élève de nos classes ne nous a encore proposé d'écrire $3 \times \frac{4}{3} = 4$. Cette constatation est normale puisque la fraction en tant que quotient doit être vue au collège.

Plutôt que de donner directement la solution, le professeur propose alors aux élèves l'étape 2 dont le but est de discuter de la nature de $4 \div 3$.

Etape 2 : Une puce se déplace sur la droite graduée ci-dessous en faisant des bonds de longueur $\frac{4}{3}$. Au bout de combien de bonds tombe-t-elle pour la première fois sur un nombre entier et quel est ce nombre ?



En s'appuyant sur le schéma les élèves ont l'idée que la solution du problème précédent peut s'écrire $\frac{4}{3}$. Le professeur peut le prouver en écrivant :

$$3 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

Les élèves trouvent alors la solution de l'étape 1. On leur demande alors de reprendre les égalités à trou de l'étape 1 et les compléter à l'aide d'une fraction. On retrouve alors différentes écritures pour un même nombre.

$$5 = \frac{20}{4} \quad 1 = \frac{7}{7} \quad 0,4 = \frac{2}{5} \quad 0,5 = \frac{1}{2}$$

A retenir :

- Pour compléter $16 \times \dots = 48$, on divise 48 par 16.
Le quotient est $\frac{48}{16} = 3$ qui est le nombre manquant .
- Pour compléter $15 \times \dots = 48$, on divise 48 par 15.
Le quotient est $\frac{48}{15} = 3,2$ qui est le nombre manquant .
- On ne peut pas compléter $3 \times \dots = 4$ avec un nombre décimal.
Le nombre manquant est le quotient $\frac{4}{3}$. On a $3 \times \frac{4}{3} = 4$.



Utile pour résoudre des équations du type $a \times x = b$ mais aussi celles du type

$$\frac{a}{x} = b .$$

A Retenir

a désignant un nombre

$$\frac{a}{a} = 1 \text{ avec } a \neq 0 \quad \frac{a}{1} = a$$

Exercices :

1- Le triple d'un nombre est égal à 29,4. Quel est ce nombre ?

1) Existe-t-il un nombre qui multiplié par 6 donne 7 ?

Situation 2 : « égalité de quotients » (d'après Ermel 6^{ème})

Etape 1 :

Compléter l'égalité à trous : \times 3 = de trois façons différentes.

Le professeur, lors du bilan, écrit au tableau quelques égalités proposées par les élèves.

On obtient par exemple :

$$2 \times 3 = 6$$

$$3 \times 3 = 9$$

$$4 \times 3 = 12 \text{ etc}$$

Etape 2 :

Compléter l'égalité à trous : \times 2,8 = de trois façons différentes.

On recommence le même travail qu'à l'étape 1 avec 2,8.

Les élèves trouvent les étapes 1 et 2 faciles. Il est inutile d'y passer beaucoup de temps mais elles sont indispensables pour l'étape 3 .

Etape 3 :

Compléter l'égalité à trous : \times $\frac{4}{3}$ = de trois façons différentes.

Les élèves trouvent facilement $3 \times \frac{4}{3} = 4$ qui est une reprise de la situation 1 mais la plupart s'arrête là et n'écrit qu'une égalité.

En fait , comme dans les étapes précédentes, ils mettent un nombre dans le premier membre et essaient de deviner le résultat du produit de ce nombre par $\frac{4}{3}$.

Par exemple, ils cherchent le résultat de $6 \times \frac{4}{3}$. Le professeur intervient et guide le calcul en

écrivant : $6 \times \frac{4}{3} = (2 \times 3) \times \frac{4}{3} = 2 \times \left(3 \times \frac{4}{3} \right) = 2 \times 4 = 8$.

On peut alors compléter une deuxième égalité et les élèves s'aperçoivent alors qu'il suffit de multiplier les deux membres par un même nombre :

$$\begin{array}{ccc} 3 \times \frac{4}{3} = 4 & & \\ \times 2 \downarrow & & \downarrow \times 2 \\ 6 \times \frac{4}{3} = 8 & & \end{array}$$

Il refait ensuite la même chose en changeant le coefficient multiplicateur.

L'associativité de la multiplication permet de prouver que ces égalités sont vraies.

On revient alors sur les étapes 1 et 2 pour écrire :

$$3 = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \dots \text{ et } 2,8 = \frac{28}{10} = \frac{5,6}{2} = \dots$$

Ce retour aux étapes précédentes permet aux élèves de trouver pour chacune des égalités qu'il a écrites dans l'étape 3, un quotient égal à $\frac{4}{3}$.

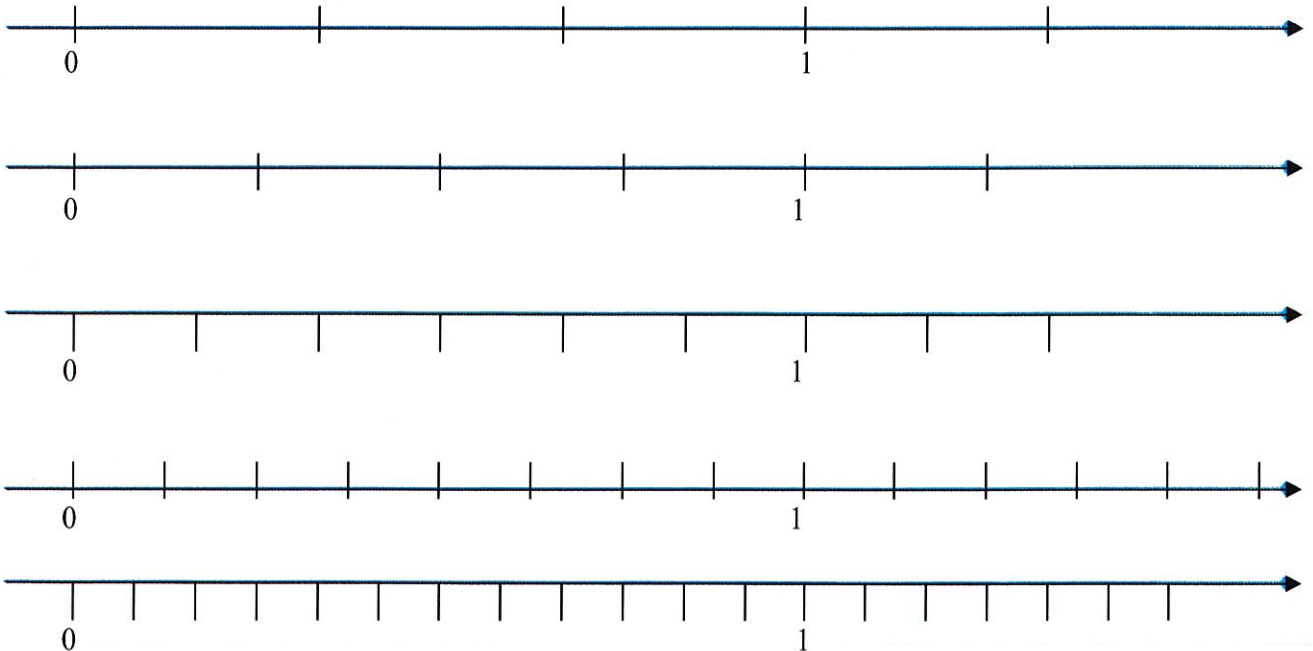
On écrit alors:

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{20}{15} = \dots$$

A retenir :

En multipliant ou en divisant le numérateur et le dénominateur par un même nombre, on obtient une fraction égale.

Exercice : Le professeur distribue aux élèves une fiche sur laquelle se trouvent des droites différemment graduées à l'aide de fractions mais dont l'unité est la même.



1) Choisir la droite graduée qui convient pour placer facilement les nombres : $\frac{4}{3}, \frac{8}{6}, \frac{16}{12}$.

Que remarques-tu ? Explique.

2) Placer $\frac{3}{4}$ et chercher toutes les fractions égales à $\frac{3}{4}$ qui apparaissent sur la feuille.

Ces exercices permettent de revenir sur les fractions égales sous l'aspect du partage de l'unité et de renforcer la propriété.

Cette fiche de droites graduées sera réutilisée en cinquième pour comparer et ajouter des fractions.

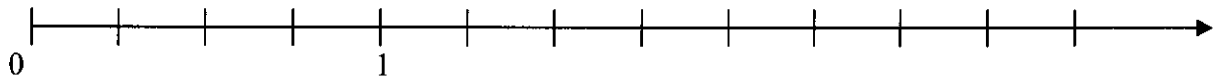
Thème 7 : Multiplier un nombre par une fraction

On sait déjà que pour compléter une égalité du type : $3 \times \dots = 10$, on divise 10 par 3, on sait aussi que ce nombre n'a pas d'écriture décimale et se note : $\frac{10}{3}$. On peut donc écrire :

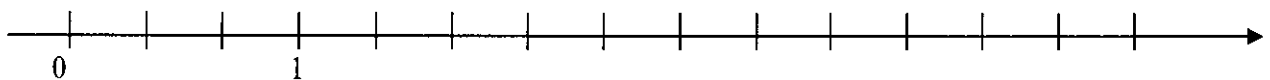
$3 \times \frac{10}{3} = 10$. Reste donc à voir les produits du type $a \times \frac{b}{c}$, avec c non nul et où a est différent de c et à montrer que $\frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b} = a \times \frac{c}{b}$.

Étape 1 :

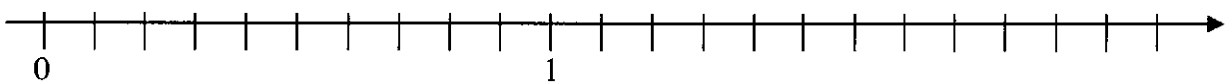
1) Sur la droite graduée, placer les points d'abscisses $\frac{1}{4}$; $3 \times \frac{1}{4}$; $4 \times \frac{1}{4}$ et $7 \times \frac{1}{4}$.



2) Sur la droite graduée, placer les points d'abscisses $\frac{4}{3}$; $2 \times \frac{4}{3}$; $3 \times \frac{4}{3}$;



3) Sur la droite graduée, placer les points d'abscisses $\frac{2}{5}$; $\frac{4}{10}$; $2 \times \frac{2}{5}$; $4 \times \frac{2}{5}$



On demande à chaque fois de donner une écriture fractionnaire de

$$3 \times \frac{1}{4} ; 7 \times \frac{1}{4} ; 2 \times \frac{4}{3} ; 2 \times \frac{2}{5} ; 4 \times \frac{2}{5}.$$

On écrit alors en bilan :

Bilan de l'étape 1 :

$$3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad 7 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \quad 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \quad 2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5} \quad 4 \times \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$$



2^{ème} partie p 44

Etape 2 : Situation : « le partage de cakes » .

Cette situation permet dans une première partie de retrouver les différents sens de la fraction $\frac{3}{4}$ et dans une deuxième partie d'aborder la notion de fraction d'une quantité. Dans la première partie, on demande aux élèves de partager trois cakes de forme rectangulaire en quatre parties égales. Dans la deuxième partie, on demande aux élèves de calculer la taille de chacune des parts .

A retenir :

- Différents sens de la fraction $\frac{3}{4}$:

$$\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \text{ de } 3$$

- Voici différents moyens de calculer les trois quarts de 9 :

$9 \times 3 = 27$	$9 \div 4 = 2,25$	$\frac{3}{4} = 0,75$
$27 \div 4 = 6,75 = \frac{9 \times 3}{4}$	$2,25 \times 3 = 6,75 = \frac{9}{4} \times 3$	$0,75 \times 9 = 6,75 = \frac{3}{4} \times 9$

On obtient donc : $\frac{3}{4} \times 9 = \frac{9 \times 3}{4} = \frac{9}{4} \times 3 = \text{« les trois quarts de neuf »}$.



Utile pour résoudre des équations comme $\frac{3}{4} \times x = 7$ que l'on peut remplacer par

$\frac{3 \times x}{4} = 7$ puis par $3 \times x = 28$, utile aussi pour transformer $\frac{x}{4}$ en $\frac{1}{4} x$.

Thème 8 : Les expressions littérales

Pour l'initiation aux écritures littérales les programmes préconisent d'appliquer une formule dans une situation familière à l'élève. Dans ces cas là, l'élève ne voit pas forcément la nécessité de l'usage d'une expression littérale par rapport à une phrase (voir l'exposé de la situation des poignées de mains développée dans la deuxième partie de cette brochure).

Il nous a donc semblé plus intéressant et plus utile de travailler les lettres en terme d'inconnues et d'indéterminées plutôt qu'en terme de désignations.

De ce fait ce thème n'est pas un chapitre en soit mais doit être repris tout au long de l'année : lors du travail sur le périmètre, les aires, les angles etc ...

Avec un support perceptif (calcul de périmètres et de longueurs), on travaille des égalités du type $(4 \times x) + (3 \times x) = 7 \times x$; $x + (5 \times x) = 6 \times x$ etc uniquement avec des coefficients de x entiers naturels. On pourra ainsi justifier les résultats obtenus en écrivant :

$$(4 \times x) + (3 \times x) = (x + x + x + x) + (x + x + x) = 7 \times x .$$



2^{ème} partie p 47

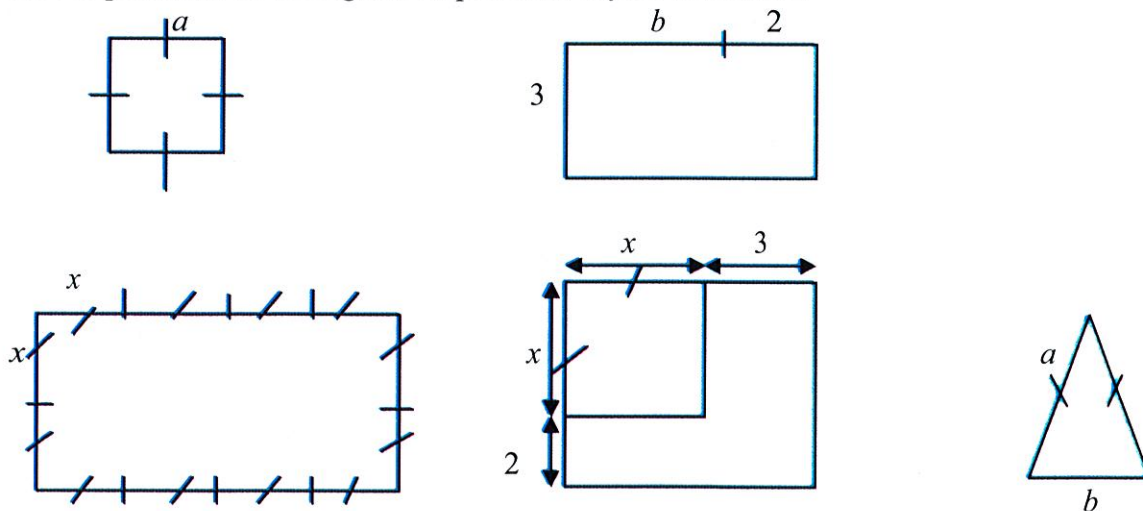
Situation 1 : « Les poignées de mains »

Il s'agit dans cette situation de trouver le nombre de poignées de mains échangées dans un groupe contenant un grand nombre de personnes. On commence avec cinq personnes en mimant la scène dans la classe puis on demande aux élèves le nombre de poignées de mains échangées si les 628 élèves du collège se saluaient. Les élèves travaillent par groupe de deux. Ils élaborent différentes stratégies qui leur permettent de généraliser un résultat constaté sur des petits nombres.

Cette situation n'a pas pour objectif l'introduction d'une formule littérale puisque les élèves arrivent à formuler le résultat au moyen d'une phrase et de façon tout aussi performante qu'en utilisant des lettres. Elle permet cependant de montrer que l'on peut utiliser des lettres pour écrire une formule, ce qui est plus court et permet de résoudre d'autres questions (équations, ...)

Exercices :

1) Ecrire le périmètre de ces figures de plusieurs façons différentes



Lorsqu'on demande aux élèves d'écrire le périmètre du carré de côté a de plusieurs façons différentes, ils se prennent au jeu et proposent :

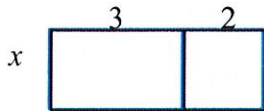
$$\begin{array}{lll}
 a \times 2 + a + a & (a \times 8) \div 2 & a \times 4 \\
 (a \times 2) \times 2 & a + a + a + (a \times 1) & (a \times 4) \times 1 \\
 2 \times a + (a \times 2) & (a \times 5) - a & a + a + a + a \\
 (a \times 24) - (a \times 20) & (a \times 3) + a & (a \times 3) + (a \times 1) \\
 (a \times 2,5) + (a \times 1,5) & (a \div 4) \times 16 &
 \end{array}$$

Si des élèves font des propositions fausses, on leur montre leurs erreurs en remplaçant a par une ou plusieurs valeurs.

En réduisant les écritures, on obtient $4 \times a$. Par exemple, on peut justifier que $a \times 3 + a = 4 \times a$ en écrivant $a \times 3 + a = a + a + a + a = a \times 4$.

Ce travail est à reprendre en 5^{ème} pour utiliser la distributivité. On pourra alors écrire : $a \times 3 + a = a \times (3 + 1) = a \times 4$.

2) Ecrire l'aire de ce rectangle de plusieurs façons différentes.



3) On appelle p le prix d'un stylo.

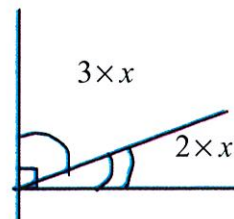
- Un cahier coûte 1 de moins que le stylo. Exprimer le prix du cahier à l'aide de p .
- Une trousse coûte 4 de plus que le stylo. Exprimer le prix de la trousse à l'aide de p .
- Une pochette de crayons de couleur vaut le triple du prix du stylo. Exprimer le prix de la pochette à l'aide de p .
- Un cartable vaut cinq fois plus cher que le stylo. Exprimer le prix du cartable à l'aide de p .
- Un feutre vaut le double du prix du stylo. Exprimer le prix du feutre à l'aide de p .
- Une gomme vaut la moitié du prix du stylo. Exprimer le prix de la gomme à l'aide de p .
- Un crayon à papier vaut quatre fois moins cher que le stylo. Exprimer le prix du crayon à papier à l'aide de p .



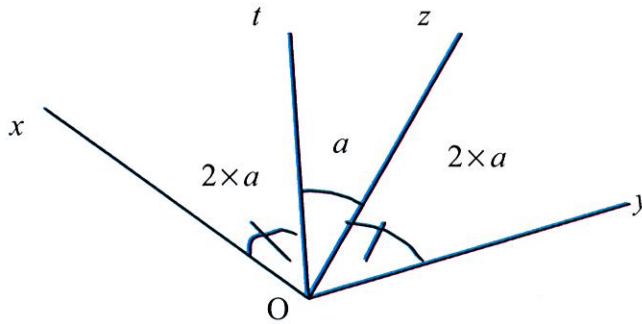
Cet exercice permet d'amorcer le travail sur la mise en équation.

4) (d'après Hachette 5/5 6^{ème})

Déterminer la valeur de x dans la figure ci-contre :



5)



On sait que $\widehat{xOy} = 150^\circ$. **Calculer** la valeur de a .

Que peut-on en déduire pour l'angle \widehat{yOt} ?

Nous vous présentons ci-dessous des productions d'élèves. Cet exercice avait été posé en contrôle.

n°6) La valeur de a est 30°
 et l'angle \widehat{yOt} est un angle droit.

$150 : 5 = 30$. a vaut 30° , l'angle \widehat{yOt} est un angle droit.

$150 : 5 = 30$ La valeur de a est de 30.

On peut déduire de l'angle \widehat{yOt} que c'est un angle droit parce que comme a vaut 30 on fait $(30 \times 2) + 30 = 90$.

$$6a = 150 : 5 = 30$$

$$a = 30$$

$$60 + 30 + 60 = 150^\circ$$

$$\widehat{yOt} = 90^\circ, \text{ il est droit car } 60 + 30 = 90^\circ$$

$$(2 \times a) + (2 \times a) + a = 150^\circ$$

$$5 \times a = 150^\circ$$

$$a = 150^\circ : 5$$

$$a = 30^\circ$$

Exercice n°6

$$(2 \times a) + (2 \times a) + a$$

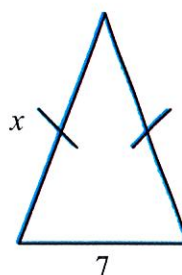
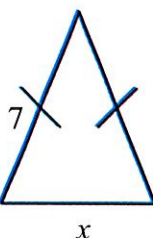
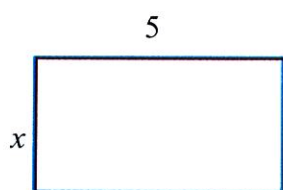
$$5 \times a$$

$$5 \times a = 150^\circ$$

$$150^\circ : 5 = 30^\circ$$

La valeur de $a = 30^\circ$

6) Le périmètre de toutes ces figures est 24 cm. Retrouver à chaque fois la valeur de x .



7) Bissectrices d'angles supplémentaires.

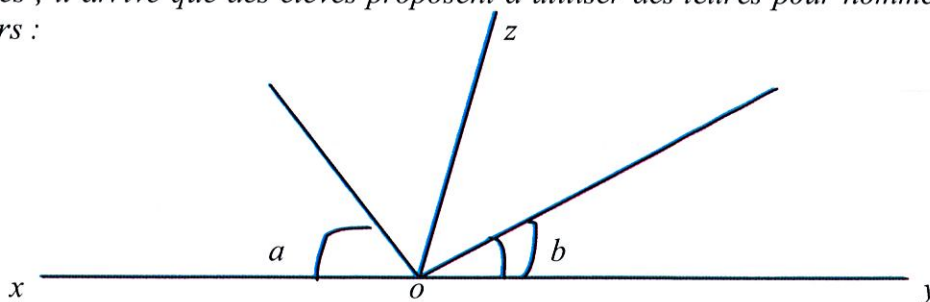
Tracer un angle plat $\hat{x}Oy$. Tracer une demi-droite $[Oz)$ et tracer les bissectrices des angles $\hat{x}Oz$ et $\hat{z}Oy$. Que peut-on dire de ces bissectrices ?

Un débat s'installe dans la classe car du fait de l'imprécision du dessin, pour certains les bissectrices sont perpendiculaires alors que pour d'autres c'est loin d'être le cas.

Certains élèves disent alors qu'il faut « faire un calcul pour être sûr ».

Des élèves expliquent que puisque cela fait 180° et qu'on divise chaque angle en deux, on trouve 90° . Ce raisonnement demeure obscur pour la majorité des élèves.

Lorsqu'on pose cet exercice en fin d'année dans une classe qui a eu l'habitude de rencontrer des lettres, il arrive que des élèves proposent d'utiliser des lettres pour nommer les angles, on a alors :



$$a + a + b + b = 180$$

certains élèves écrivent alors $a + b + a + b = 180$ soit $a + b = 90$

ou alors $(2 \times a) + (2 \times b) = 180$ qu'ils n'hésitent pas à transformer en $2 \times (a + b) = 180$ et donc $a + b = 90$.

Thème 9 : L'égalité

Il nous paraît essentiel de travailler dès la sixième le statut du signe « = ». Il s'agit d'habituer les élèves à ne plus le considérer comme l'annonce du résultat.

Lors de la résolution de problèmes arithmétiques, les élèves font fréquemment l'erreur d'écrire des égalités fausses du type $3 + 2 = 5 \times 4 = 20$. On a donc régulièrement l'occasion de travailler la signification du signe « = ». Outre la possibilité de montrer que l'égalité $5 = 20$ est fausse, le professeur peut inciter les élèves à écrire les calculs sur une seule ligne $(3 + 2) \times 4 = 20$. Le recours systématique à ce genre d'écriture permet d'éviter cette erreur et nous paraît être une entrée obligée dans l'algèbre.

Il faut aussi travailler la transitivité de l'égalité et apprendre aux élèves à choisir, parmi plusieurs propositions, l'écriture d'un nombre la mieux adaptée au problème posé.

Situation 1 :

a) Souligne avec une même couleur les écritures d'un même nombre.

$7 + \frac{5}{10}$	le double de 37,5	$7,5 \times 10$	$\frac{15}{2}$		
sept dizaines et cinq unités	07,050	le triple de 2,35	$(7 \times 10) + 5$	$\frac{75}{10}$	
$\frac{705}{100}$	$\frac{57}{10} + \frac{18}{10}$	la somme de 2,89 et 4,16	la moitié de 150	$705 : 100$	
25×3	$7 + \frac{5}{100}$	sept unités et cinq centièmes	$150 : 20$		
sept cent cinq centièmes					

b) Combien y a-t-il de nombres différents dans cette liste ?

Cette situation est à faire à la fin du travail sur les nombres décimaux.

Dans la plupart des cas, les élèves reviennent à l'écriture décimale (il y a ici trois nombres : 7,5 ; 7,05 et 75) et par transitivité retrouvent les écritures d'un même nombre .

Quand il s'agit de compter les nombres différents, certains élèves trouvent trois nombres dans l'écriture $7 + \frac{5}{10}$. Pour d'autres, 7 n'est pas compté comme un nombre mais comme un

chiffre... Il est alors nécessaire de faire le point avec la classe. En faisant l'analogie avec des mots formés d'une seule lettre le professeur explique qu' il existe aussi des nombres écrits avec un seul chiffre et que 1 , 2 , 3 9 sont des nombres qui servent aussi à compter.

Il faut ensuite revenir sur le fait que $7 + \frac{5}{10}$ est un nombre .

Le but est aussi de travailler le vocabulaire : le double , le triple etc...

Cette situation permet aussi de faire du calcul mental la calculatrice n'étant pas autorisée.

Pour présenter le bilan du b) , on peut écrire une suite d'égalités : $7 + \frac{5}{10} = \frac{15}{2} = \frac{75}{10}$. Les élèves sont étonnés qu'il n'y ait en fait que trois nombres dans cette liste .

Situation 2 :

Combien y a-t-il de nombres écrits sur la feuille ?

$$\begin{array}{cccc} \frac{21}{9} & 3 \times \frac{4}{3} & \frac{28}{10} + \frac{12}{10} & \frac{35}{15} \\ \frac{70}{50} & 1 + \frac{4}{10} & 7 \times \frac{1}{3} & \frac{72}{52} \\ & & 7 \times \frac{2}{10} & 14 \times \frac{2}{7} \end{array}$$

Cette situation est à proposer à la fin du travail sur les fractions.

On a choisi $\frac{72}{52}$ pour avoir l'occasion de rencontrer l'erreur habituelle :

$$\frac{72}{52} = \frac{70+2}{50+2} = \frac{70}{50} = \frac{7}{5}.$$

Certains élèves disent aussi que $\frac{70}{50} = \frac{7}{5}$ « car on enlève le zéro » et donc $\frac{72}{52} = \frac{7}{5}$ « car on enlève le 2 ».

Certains élèves trouvent 16 nombres différents. Pour ceux-là, lorsqu'on écrit $\frac{21}{9}$, il y a deux nombres 21 et 9. On retrouve alors l'erreur évoquée à la situation précédente.

Après discussion, il ressort qu'il y a au plus 10 nombres.

Le professeur incite alors tous les élèves à reprendre leur recherche pour répondre correctement à la question.

Il y a en fait quatre nombres différents.

Cette situation permet de travailler la transitivité notamment pour prouver que $\frac{21}{9} = \frac{35}{15}$ puisqu'ils sont tous les deux égaux à $\frac{7}{3}$.

Elle permet aussi de faire le bilan sur le travail du quotient.

Exercices:

1) Trouver des écritures différentes de 1,25.

On retrouve le même type de travail que celui que nous proposons au thème 8 sur les expressions littérales quand il s'agit d'écrire de plusieurs façons le périmètre de figures données.

2) Compléter : $\frac{4}{7} = \frac{12}{\dots} = \frac{\dots}{35}$

Les élèves ont parfois quelques difficultés à compléter le numérateur de la dernière fraction car ils ont tendance à vouloir passer directement de $\frac{12}{21}$ à $\frac{20}{35}$ sans revenir à $\frac{4}{7}$. Le statut du signe « = » est encore une fois en jeu.

Deuxième partie :
Trois situations-clés en classe de 6^{ème}.

Redécouvrir la technique de la division de deux entiers.

L'objectif est de retrouver comment la technique usuelle de la division se construit à l'aide de la multiplication et de la soustraction. Pour cela on utilise la résolution d'un problème qui n'est pas reconnu par les élèves de 6^{ème} comme un problème relevant de la division.

Les problèmes reconnus comme relevant d'une division sont des problèmes de partages, calcul du nombre de parts ou de la valeur d'une part ou des problèmes d'échange. (J'échange 10 billes contre 1 bonbon, j'ai 354 billes, combien aurais-je de bonbons ?)

Au lieu de revoir **la technique de la division comme un algorithme imposé, dont la justification a été oubliée, ou jamais comprise,** ce problème permet aux élèves seuls de retrouver cette justification.

On travaille donc ici, simultanément la technique de la division et le sens.

La division est une notion difficile, pour un certain nombre d'élèves de 6^{ème}, la seule division connue est la division par 2. Pour compléter une addition à trous, ceux là peuvent proposer d'effectuer une division, en effet il s'agit de partager un total en deux parties, ils oublient qu'elles ne sont pas égales.

Il est fréquent de constater combien le mot division fait peur, au point de bloquer tout apprentissage.

Certains élèves disent : « Moi, les divisions, je n'y ai jamais rien compris, je ne saurais jamais les faire » et ils refusent d'essayer.

C'est un problème motivant, un jour une élève m'a dit : « aujourd'hui, madame, le problème, c'était bien, au moins ça changeait de : maman va au marché »

PROBLEME 1

Voici un tableau où figure un nombre entier dans chaque case.

On travaille sans calculatrice.

0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16		

- 1) Dans quelle colonne et dans quelle ligne va t-on trouver le nombre 75 ?
- 2) Dans quelle colonne et dans quelle ligne va t-on trouver le nombre 348 ?
- 3) Dans quelle colonne et dans quelle ligne va t-on trouver le nombre 1857 ?

Remarques sur l'énoncé du problème :

On peut aussi proposer le tableau suivant :

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16			

Si on prend ce tableau, le reste de la division donne bien la colonne, mais le quotient ne donne pas la ligne, il faut ajouter 1.

De plus, sur une même ligne, on trouve des nombres correspondants au même quotient, sauf le dernier qui correspond au quotient augmenté de 1. Par exemple : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 correspondent au quotient 0 et 7 au quotient 1.

Certains élèves ayant eu l'idée d'utiliser la division pour résoudre le problème, trouvaient 49 comme quotient pour 348 et les autres plus nombreux qui avaient tâtonné trouvaient 348 sur la 50^{ème} ligne.

La division était donc considérée comme ne donnant pas le bon résultat. Alors que l'objectif du problème est de montrer son efficacité.

Si on prend l'autre tableau, la ligne est bien donnée par le quotient. Si des élèves utilisent la division pour résoudre le problème, ils auront donc la bonne réponse.

Par contre, le second tableau donne correctement la colonne par le reste de la division, pour le premier, il faut ajouter 1 : si le reste est 0, le nombre est dans la première colonne.

On peut alors proposer le premier tableau, en numérotant les lignes, $L_0, L_1, L_2, L_3 \dots$ et les colonnes C_0, C_1, C_2, \dots

Les stratégies des élèves :

On donne les trois questions en même temps, par contre, il est utile de faire un bilan partiel, après 348.

Les élèves évoquent rapidement à l'oral, les différentes méthodes qu'ils ont trouvées. Cela évite aux plus faibles de prolonger indéfiniment le tableau, faute d'autres idées.

Certains élèves recherchent d'abord la colonne : ils remarquent que 70 est dans la colonne C_0 .

D'autres malgré la façon dont est formulée la question cherchent d'abord la ligne : ils trouvent 70 dans la ligne L_{10} .

1) Le nombre 75 a été choisi pas trop grand, car certains élèves peuvent **continuer le tableau**, jusqu'à placer effectivement 75 dans la 10^{ème} ligne et la 6^{ème} colonne.

0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18		
	22					
	29					
	...					

2) Certains élèves pensent **qu'il s'agit d'un tableau de proportionnalité** (dès qu'il y a un tableau, c'est un réflexe !¹), ils disent des choses du genre : 15 est à la 3^{ème} ligne et à la 1^{ère} colonne et $75 = 15 \times 5$ donc 75 sera à la 15^{ème} ligne et à la 5^{ème} colonne. Leur solution est aussitôt démentie par ceux qui ont placé 75 dans le tableau

3) D'autres voient que **pour passer d'une ligne à l'autre, il faut ajouter 7 :**

$$7 + 7 = 14 ; 8 + 7 = 15 ; 9 + 7 = 16 ; 10 + 7 = 17 ; \dots$$

Ils essaient donc d'ajouter 7, pour compléter une des colonnes afin de se rapprocher de 75.

Ce procédé est encore relativement long pour 75, mais devient presque impossible à réaliser pour 348.

¹ Les élèves croient que le professeur attend d'eux un calcul de proportionnalité, chaque fois qu'il y a un tableau. C'est un effet de **contrat didactique** entre professeur et élève.

- 4) Certains élèves voient que **dans la première colonne, ce sont les nombres de la table de 7** qui figurent, ils peuvent donc compléter facilement cette colonne, au moins jusqu'à 70, ce qui suffit pour placer 75. Pour 348, ça se complique, car alors les multiples de 7 ne sont pas connus, il faut les calculer. On voit de nombreuses erreurs de calcul.
- 5) Pour aller plus vite, pour 348, certains élèves pensent à **ajouter 14 ou 35 ou 70 pour sauter plusieurs lignes à la fois**, en prenant modèle sur le procédé 3.
- 6) Finalement, certains pensent à **se rapprocher de 348 par des multiples de 7** : le nombre obtenu se trouvant alors dans la première colonne.
Ils essaient 7×20 , ... puis $7 \times 50 = 350$
Il suffit alors de reculer de 2 cases pour trouver 348, à la 49^{ème} ligne, et la 6^{ème} colonne.

Le professeur peut demander ici aux élèves d'évoquer oralement les méthodes qu'ils ont utilisées. Cela permet de relancer l'activité de ceux qui en sont encore à compléter le tableau.

- 7) Pour 1857, le dernier procédé est adopté car considéré comme le plus rapide.
Il faudra encore **l'optimiser en choisissant convenablement les essais à effectuer**.
On essaie 7×100 puis $7 \times 200 = 1400$
Il reste à avancer de $1857 - 1400 = 457$
On essaie alors $7 \times 60 = 420$
Il manque $457 - 420 = 37$
On fait alors $7 \times 5 = 35$
On est arrivé à $1400 + 420 + 35 = 1855$, qui est un multiple de 7 et donc se trouve dans la première colonne. Il suffit d'avancer de 2 cases pour placer 1857.

La taille des nombres choisis, allant croissant, cela oblige les élèves à remettre en cause leurs procédés, pour les rendre plus performants.

Au début tous les élèves, même les plus faibles, peuvent démarrer, ensuite ils peuvent appliquer les procédés trouvés par des élèves plus astucieux.

On voit petit à petit apparaître le lien entre la multiplication et la division et même dans le dernier procédé, on peut voir le rôle de la soustraction et du reste.

Certains élèves finissent par se rendre compte qu'ils auraient pu faire une division pour trouver le résultat. Le professeur demande alors à un élève de poser la division de 1857 par 7 au tableau et on peut faire le parallèle entre les nombres qui apparaissent à gauche de la potence et les calculs que l'on vient de faire.

$$\begin{array}{r}
 1857 \\
 - 1400 \\
 \hline
 457 \\
 - 420 \\
 \hline
 37 \\
 - 35 \\
 \hline
 2
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad \begin{array}{r}
 7 \\
 265
 \end{array}
 \quad \text{ou} \quad
 \begin{array}{r}
 1857 \\
 457 \\
 37 \\
 2
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad \begin{array}{r}
 7 \\
 265
 \end{array}$$

correspondent à

$$\begin{array}{ll}
 7 \times 200 = 1400 & \text{Reste } 457 \\
 7 \times 60 = 420 & \text{Reste } 37 \\
 7 \times 5 = 35 & \text{Reste } 2
 \end{array}$$

On retrouve les mêmes nombres.

On peut alors constater que le quotient de la division indique la ligne, 1857 est à la 265^{ème} ligne et le reste donne la colonne, 1857 est à la 3^{ème} colonne.

Bilan :

Diviser 1857 par 7 revient à se rapprocher le plus près possible de 1857 par des multiples de 7.

Le multiple de 7 le plus proche de 1857 est $7 \times 265 = 1855$. Pour atteindre 1857, il faut rajouter 2.

On a $1857 = 7 \times 265 + 2$

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ & \mathbf{q} \\ \mathbf{r} & \end{array} \quad a = (b \times q) + r \text{ avec } r < b$$

On peut proposer ensuite le problème2, qui permet de réinvestir ce que l'on vient de voir. Pourtant beaucoup d'élèves vont recommencer les tâtonnements, ceux qui auront fait la division correctement iront plus vite.

PROBLEME 2

Sur une autre planète, poussent des fleurs géantes. Je cueille une marguerite qui a 6376 pétales et je l'effeuille, en disant pour le premier pétale « je t'aime » puis pour le deuxième « un peu », pour le troisième « beaucoup », pour le quatrième « passionnément » pour le cinquième « à la folie » et pour le sixième « pas du tout ». Au septième pétale, je recommence à « je t'aime ».

Sur quel mot vais-je m'arrêter, lorsque j'aurai effeuillé les 6376 pétales ?

Remarque : On a choisi le nombre 6376, pour avoir un quotient dont un des chiffres est 0.

Il ne faut pas choisir un nombre de pétales trop simple, afin que les élèves qui font la division aillent effectivement plus vite que ceux qui recommencent à tâtonner.

Il suffit de trouver le reste de la division pour savoir sur quel mot on va tomber, le quotient ne joue ici aucun rôle dans la solution.


On peut donc dire : au 6000^{ème} pétale, je suis à « pas du tout », au 6300^{ème} pétale, aussi, ainsi qu'au 6360^{ème} et au 6372^{ème}. Il reste donc 4 pétales à effeuiller, je reprends à « je t'aime », on va donc arriver à « passionnément ». Ou bien faire la division, dont le reste est 4 et le quotient 1062.

Situation 2 : «Partages de cakes.»

Niveau 6^{ème} : Pour introduire la multiplication d'un entier par une fraction

Cette situation s'inscrit dans une progression sur les fractions et les décimaux dont vous avez un aperçu rapide à la page suivante.

Niveau 5^{ème} : Révision sur les fractions, peut servir d'introduction à la somme d'un entier et d'une fraction (voir prolongement)

Pré requis : ▪ Notion de fraction dans un partage 

▪ Egalité de fractions dans des cas simples $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$

▪ Statut de quotient de l'écriture fractionnaire $\frac{9}{4}$

Objectifs : ▪ Différents sens d'une fraction traduisant un partage

$\frac{3}{4}$ c'est 3 unités partagées en 4 ou bien $3 \times \frac{1}{4}$.

▪ Différentes façons de calculer une fraction d'une quantité

Remarque : Cette situation ouvre en même temps les objectifs 1 et 2 avec des points de vue différents selon les élèves. Il faudra faire un bilan précis pour bien distinguer ces points de vue et dissocier les différents points acquis.

Organisation : Les élèves travaillent individuellement, ils disposent d'une feuille blanche sur laquelle sont reproduites plusieurs bandes de papier rectangulaires identiques de 1cm sur 9 cm, de ciseaux et de colle. Calculatrice autorisée.

Etape 1 : Chaque bande de papier représente un cake. Tous les cakes sont identiques. Vous êtes 4 invités et vous voulez partager équitablement un cake entre vous quatre.

- Expliquez sur la feuille réponse comment vous réalisez le partage en utilisant des dessins, des phrases, des découpages, des calculs...
- Collez sur la feuille réponse les parts de chacune des quatre personnes.
- Ecrivez comment on peut désigner la part d'une personne à l'aide d'une fraction.
- Quelle est la longueur d'une part ?

Déroulement : Cette étape est d'abord destinée à s'assurer que tous les élèves ont bien compris ce que l'on attend d'eux.

Le professeur passe dans les rangs et incite les élèves à bien montrer sur la feuille réponse comment ils font pour réaliser le partage. Il dit aux élèves que certains vont passer au tableau et qu'il faudra savoir expliquer ce que l'on a fait.

Si des élèves coupent les bandes en quatre de diverses façons, le professeur fait référence à la situation concrète que l'on est en train de modéliser, un cake se coupe en tranches. De cette façon :



Et non , 

ou bien 

Les dimensions des bandes de papier ont été choisies afin d'éviter le plus possible ce problème.

Stratégies attendues : On fera une brève mise en commun au tableau pour cette première étape.

Les élèves nomment une part $\frac{1}{4}$, ils calculent la longueur d'une part en divisant 9 par 4, ils trouvent 2,25 ou 2,2 pour ceux qui mesurent au millimètre près, ou bien ils plient la bande en 4. C'est pourquoi on a choisi 4 parts, le calcul de la longueur n'est pas obligatoire.

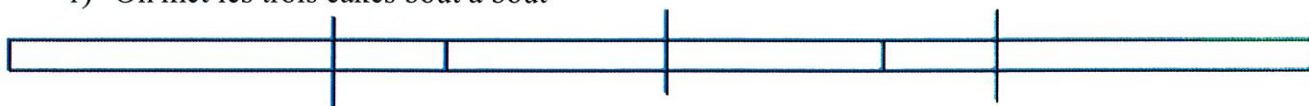
Etape 2 : Même consigne mais vous avez **trois cakes** à partager entre quatre personnes

Stratégies attendues : Ces stratégies différentes sont données à la classe lors de la mise en commun au cours de laquelle des élèves exposent leur méthode au tableau.

Le professeur sélectionne les productions qu'il souhaite voir exposées en observant les élèves pendant qu'ils travaillent.

Plusieurs méthodes pour faire les découpages suivant les élèves :

1) On met les trois cakes bout à bout

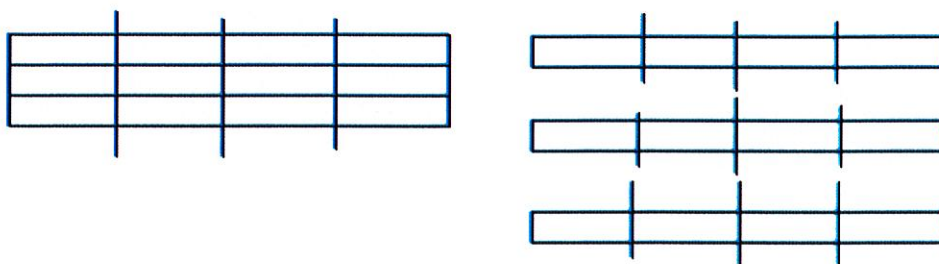


Ce partage s'accompagne des calculs de la longueur d'une part : $9 \times 3 = 27$ $27 : 4 = 6,75$

Et la part d'une personne est notée : $\frac{3}{4}$ ou $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{4}$ (de trois gâteaux)

La proposition de noter $\frac{1}{4}$ la part d'une personne conduit les élèves à préciser qu'il s'agit d'un **quart de trois gâteaux par comparaison avec l'étape 1** ou il s'agissait d'un **quart d'un gâteau**.

2) On met les cakes les uns sous les autres ou on les coupe séparément.



Ce partage s'accompagne des calculs : $9 : 4 = 2,25$ $2,25 \times 3 = 6,75$

Et la part d'une personne est notée : $\frac{3}{4}$ ou $3 \times \frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{12}$ (de trois gâteaux)

On reconnaît que $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ et on précise à nouveau que c'est $\frac{3}{12}$ **de trois gâteaux** par référence à l'étape 1.

Souvent des élèves évoquent $\frac{3}{4} = 0,75$. On peut demander alors comment retrouver 6,75 en utilisant 0,75 et 9 ?

On a alors $0,75 \times 9 = 6,75 = \frac{3}{4} \times 9$. Ce résultat étonne certains élèves.

- Le professeur suggère alors de représenter sur une graduation les deux calculs $\frac{3}{4} \times 9$ et $\frac{9}{4} \times 3$. Les élèves peuvent alors se convaincre visuellement que ces deux calculs donnent le même résultat.

Cette représentation ne peut se faire que si l'on multiplie une fraction par un nombre entier, c'est plus difficile pour une fraction multipliée par un décimal, mais pour multiplier un quotient quelconque par un nombre, on est obligé d'admettre que l'on peut étendre le procédé.

- En écrivant le bilan des deux premières méthodes sous la forme d'expressions, on obtient :

Les trois quarts de 9 = $\frac{9}{4} \times 3 = \frac{9 \times 3}{4}$, en utilisant la commutativité de la multiplication, le

professeur peut écrire : $\frac{9 \times 3}{4} = \frac{3 \times 9}{4} = \frac{3}{4} \times 9 =$ les trois quarts de 9.

Le dernier résultat est ainsi justifié d'une autre façon.

À retenir :

- Différents sens de la fraction $\frac{3}{4}$: $\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ de 3 = $3 \div 4$

- Voici différents moyens de calculer les trois quarts de 9 :

$9 \times 3 = 27$	$9 \div 4 = 2,25$	$\frac{3}{4} = 0,75$
$27 \div 4 = 6,75 = \frac{9 \times 3}{4}$	$2,25 \times 3 = 6,75 = \frac{9}{4} \times 3$	$0,75 \times 9 = 6,75 = \frac{3}{4} \times 9$

On obtient donc : $\frac{3}{4} \times 9 = \frac{9 \times 3}{4} = \frac{9}{4} \times 3 =$ « les trois quarts de neuf ».

Prolongements : Si on est en 5^{ème} on peut exploiter l'écriture $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ que l'on peut laisser de côté en 6^{ème}. On peut aussi exploiter cette écriture dès la 6^{ème} suivant le niveau de la classe.

On pourra faire une étape 3 avec 7 cakes ou 11 cakes.

On obtient $\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4} = 7 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ de 7

$\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4} = 11 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ de 11

Situation 3 : «Les poignées de mains. »

Niveau : 6^{ème} ou 5^{ème}

Problème : trouver combien de poignées de mains échangent 628 personnes qui se rencontrent et qui se saluent toutes.

Objectifs :- mettre en place un procédé pour transférer ce que l'on a constaté sur des petits nombres à un nombre plus grand

- chercher à se convaincre de la validité d'une solution en raisonnant
- introduire une lettre pour écrire une formule

Nous avons expérimenté plusieurs fois la résolution de ce problème en classe et les démarches des élèves ont souvent été différentes. La nature du problème que certains qualifieraient de « problème ouvert » permet des démarrages variés. Les stratégies changent aussi beaucoup selon les coups de pouce que le professeur donne. Cependant nous avons toujours observé que les élèves n'introduisent pas d'eux mêmes une formule littérale pour donner la solution du problème. Cette activité ne vise donc pas l'écriture d'une formule par les élèves seuls, mais le professeur peut les y conduire à la fin en mettant en évidence le rôle de la formule comme programme de calcul (pour cela il doit faire varier le nombre de personnes). Il peut aussi utiliser l'aspect fonctionnel de la formule en faisant chercher un antécédent c'est à dire le nombre de personnes connaissant le nombre de poignées de mains.

Déroulement :

Dévolution du problème : Le professeur demande à quatre élèves de venir au tableau et de se serrer la main comme s'ils se rencontraient un matin. Il demande ensuite à la classe combien de poignées de mains ont été échangées. La classe se met vite d'accord pour répondre qu'il y en a eu 6.

Le professeur demande ensuite : « Et si les 628 élèves du collège se saluaient le matin, combien de poignées de mains échangent-ils ? » Les élèves sont alors effrayés par l'ampleur de la tâche et le professeur les autorise à chercher par groupe de deux.

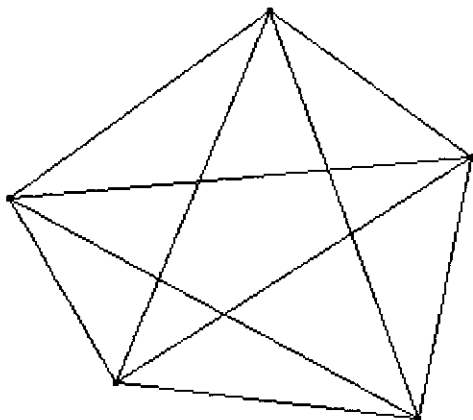
Différentes stratégies apparaissent :

- essais avec des petits nombres
- schémas
- utilisation de crayons et de stylos pour figurer les personnes
- élaboration de tableaux
- raisonnement
- ...

Première idée :

Certains élèves, influencés par la mise en scène des poignées de mains qu'ils viennent de voir, font des schémas pour se représenter la situation avec des petits nombres :

Le schéma aide les élèves à formuler de façon explicite le raisonnement suivant :



Chaque personne est reliée aux quatre autres. Si on comptait 5×4 poignées de mains, deux personnes se seraient saluées deux fois ; donc on doit diviser par 2.

Ce raisonnement est aussi fait par des élèves qui ne font pas de schémas et qui imaginent : une personne ne se saluant pas elle-même, on calcule 5×4 et ayant ainsi compté 2 fois chaque poignée de main on doit diviser par 2.

La généralisation de ce calcul permet d'obtenir :

$$(628 \times 627) : 2 = 393756 : 2 = 196878$$

Certains élèves décrivent le procédé de calcul avec une phrase : *on prend le nombre, on le multiplie par le nombre qui est juste avant et on divise le résultat par deux.*

Si ceci n'est pas de l'algèbre, on n'en est pas très loin avec ce que l'on appellera un programme de calculs qui montre son efficacité si le calcul doit être fait plusieurs fois pour des nombres de personnes différents.

Pour transmettre ce programme de façon plus rapide, la formule pourra s'écrire ainsi :

$$N = [n \times (n-1)] : 2 \text{ ou } N = \frac{n \times (n-1)}{2}$$

Il est bien difficile pour un élève d'écrire une formule littérale quand il n'est pas capable d'écrire le calcul numérique en une seule ligne. C'est pourquoi, nous proposons de travailler cet objectif dès la classe de sixième.

En effet, l'élève qui en resterait à :

$$628 \times 627 = 393756$$

$$393756 : 2 = 196878$$

aura beaucoup de mal à écrire la formule avec les lettres. En revanche, celui qui écrit le calcul en une seule ligne peut plus facilement imaginer que le « 628 » a le même rôle que le « n ». Il reste cependant la difficulté importante de remplacer le « 627 » par « n - 1 ». En effet les élèves disent souvent que *si le nombre s'appelle « n » le nombre qui est juste avant s'appelle « m »* ! Pour contourner cette difficulté un collègue a un jour décidé d'appeler « a » le nombre de personnes, il s'est trouvé des élèves pour lui dire que l'entier précédent s'appelait « z » !

Deuxième idée :

Les élèves qui représentent les personnes par des crayons procèdent de deux façons différentes :

-les personnes arrivent successivement les unes après les autres, et la personne qui arrive en dernier salue celles qui sont déjà là. On obtient alors, pour 6 personnes par exemple, le calcul : $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ (la sixième personne arrivée salue les 5 autres et ne se salue pas elle même).

-d'autres élèves imaginent les 6 personnes réunies et partant tour à tour après avoir salué les autres. Ils obtiennent alors le calcul : $5 + 4 + 3 + 2 + 1$.

On obtient ainsi une illustration de la méthode de calcul de la somme des n premiers entiers en les écrivant successivement dans l'ordre croissant puis décroissant :

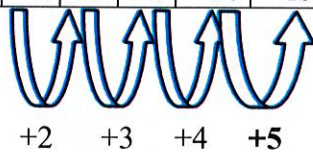
$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\ + S &= 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2 \times S &= 6 + 6 + 6 + 6 + 6 \\ 2 \times S &= 5 \times 6 \\ 2 \times S &= 30 \\ S &= 30 : 2 \\ S &= 15 \end{aligned}$$

Les différentes stratégies trouvées par les élèves sont évidemment intéressantes à exposer et à exploiter avec le groupe-classe et, même si les élèves n'utilisent pas de formule pour résoudre le problème avec 628 personnes il est très formateur de la leur faire écrire.

Si des groupes sont bloqués et ne démarrent pas le professeur peut leur conseiller d'essayer avec de petits nombres de personnes et (ou) de faire un tableau et de comprendre ce qui s'y passe. Arrivent alors d'autres idées :

Troisième idée :

Nombre de personnes	2	3	4	5	6	...
Nombre de poignées de mains	1	3	6	10	15	...



Les élèves arrivent à donner du sens à ce **+5** : « si les 5 premières personnes se sont déjà saluées, quand la sixième personne arrive elle salue les 5 qui sont là ».

Mais cette méthode ne permet pas de trouver pour 628 personnes car il faudrait connaître le nombre pour 627 personnes et le tableau serait beaucoup trop long à remplir !

Quatrième idée : autre vision

Nombre de personnes	2	3	4	5	6	...
	↓		+			
Nombre de poignées de mains	1	↻3	6	10	15	...

Ces élèves travaillent en dehors du contexte du problème et cherchent une logique dans la construction du tableau en examinant les nombres seuls:

$$4+6=10 \quad 5+10=15 \quad \dots$$

Mais comme les précédents ils ne trouvent pas pour 628 personnes.

Cinquième idée :

Certains élèves cherchent s'il s'agit d'un tableau de proportionnalité. En calculant les quotients des nombres de la deuxième ligne par les nombres de la première ligne ils concluent par la négative mais ils découvrent une logique dans la progression des « multiplicateurs » .

Nombre de personnes	2	3	4	5	6	...
	↓ ×0,5	↓ ×1	↓ ×1,5	↓ ×2	↓ ×2,5	
Nombre de poignées de mains	1	3	6	10	15	...

Les élèves remarquent que ce multiplicateur augmente toujours de 0,5 mais cette méthode ne permet pas de trouver le nombre correspondant à 628 car on ne connaît pas le multiplicateur qui correspond à 627 et ce serait trop long... Cependant des élèves remarquent que ce multiplicateur est toujours la moitié du nombre qui précède dans la ligne du dessus. Ce qui permet le calcul :

$$628 \times (627 : 2) = 628 \times 313,5 = 196878$$

Il n'y a aucune justification du résultat car les élèves sont restés au niveau d'une conjecture sur les nombres hors du contexte du problème.

L'écriture de la formule :

$$N = n \times \frac{n-1}{2} \text{ que l'on pourra rapprocher de } N = \frac{n \times (n-1)}{2}$$

permet de faire le lien avec le résultat trouvé par d'autres élèves.

Pour terminer, passage au point de vue fonctionnel :

En résumé, avec une écriture fonctionnelle où $N = f(n)$, les idées des élèves ont conduit à :

$$f(n) = \frac{n \times (n-1)}{2} \text{ (idée 1 avec justification)}$$

$$f(n) = n \times \frac{n-1}{2} \text{ (idée 5 sans justification)}$$

$$f(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n \text{ (idée 2 avec justification)}$$

$$f(n+1) = f(n) + n \text{ (idée 3 avec justification et idée 4 sans justification)}$$

Nous avons vu que les élèves trouvent d'abord l'expression du programme de calcul de l'image $f(n)$ sous la forme d'une phrase. On peut les convaincre que la formule est un procédé économique pour transmettre ce programme. Cependant la formule vue comme un simple programme de calcul reste encore une écriture assez figée. Pour insister sur l'intérêt

des lettres qui permettent de faire réellement de l'algèbre, l'enseignant peut demander de trouver le nombre de personnes si 55 poignées de mains ont été échangées. L'écriture d'une équation pour trouver n conduit à la solution alors que le programme de calcul sous forme de phrase ou une formule qui se contente de le traduire et donc sur laquelle on ne peut intervenir algébriquement est assez inefficace. On arrive à $n \times (n-1) = 110 = 11 \times 10$. C'est la seule décomposition possible de 110 en produit de deux entiers consécutifs donc $n = 11$.

Troisième partie : Une progression en Algèbre pour la classe de 5^{ème}

Thème 1 : Organiser les calculs.

L'objectif est de poursuivre le travail sur les propriétés des opérations en ajoutant les priorités opératoires et les calculs sur les quotients.

Situation1 : « le 4x4 »



4^{ème} partie
page 100

Cette situation développée dans la quatrième partie permet de faire un bilan sur les expressions numériques (l'usage des parenthèses que l'on ne met plus autour des multiplications, les règles de priorités...) et permet d'arriver à une généralisation avec des lettres.

Il s'agit d'écrire les nombres entiers de 0 à 10 en utilisant 4 fois le nombre 4 .

A Retenir : règles de priorités

- 1- *Dans une suite de calculs, il faut d'abord effectuer les calculs entre parenthèses.*
- 2- *Dans une suite de calculs sans parenthèses, il faut effectuer les multiplications et les divisions avant les additions et les soustractions. On dit que les multiplications et les divisions sont prioritaires sur les additions et les soustractions.*
- 3- *Si la suite de calculs sans parenthèses ne comporte que des additions et des soustractions, on effectue les calculs dans l'ordre de la gauche vers la droite.*

On peut ajouter :

- 4- *Si la suite de calculs sans parenthèses ne comporte que des multiplications et des divisions, on effectue les calculs dans l'ordre de la gauche vers la droite.*

Il est important de proposer des exercices dans lesquels l'élève doit numéroter ou repérer les opérations selon l'ordre de priorité et rédiger les calculs sans écrire d'égalités fausses.

Exercice : Calculer $A = 7,5 \times 4 + 6 \times 12$

$$A = 7,5 \times 4 + 6 \times 12$$

$$A = \begin{array}{ccc} (1) & (2) & (1) \\ 30 & + & 72 \end{array}$$

$$A = 102$$

Les élèves pourront écrire que

- lorsque la dernière opération est une addition le nombre est écrit sous la forme d'une somme
- lorsque la dernière opération est une multiplication le nombre est écrit sous la forme d'un produit.



L'objectif est de préparer les élèves à distinguer les expressions développées (somme) et factorisées (produit) qu'ils rencontreront en 4^{ème}.

Exercice : Indiquer si le nombre suivant est écrit sous la forme d'une somme ou d'un produit puis faire le calcul.

a) $2,5 \times 4 + 1$

b) $(5 + 1,8) \times 6$

Situation 2 :

Calculer à la main puis à la calculatrice :

$$\frac{48}{8+4}$$

$$\frac{12+32}{4}$$

$$\frac{120}{4 \times 5}$$

$$\frac{128 \times 3}{4}$$

Les élèves ne trouvent pas le même résultat à la main et à la machine.

Les calculs à la main sont souvent corrects mais ils en viennent à douter et à refaire les calculs car les résultats ne sont pas les mêmes avec la machine : quels calculs fait-elle ?

Ils peuvent le voir en écrivant les calculs en ligne et comprendre la nécessité de faire intervenir des parenthèses « sous-entendues ».

Ex : Si on tape $48 : 8 + 4$ la machine commence par diviser 48 par 8

$$\frac{48}{8+4} = 48 : (8 + 4)$$

$$\frac{12+32}{4} = (12+32) : 4$$

$$\frac{120}{4 \times 5} = 120 : (4 \times 5)$$

A Retenir : Dans une expression écrite sous forme fractionnaire, les parenthèses autour du numérateur et du dénominateur sont sous-entendues.

Situation 3 : « Une seule expression numérique » :

Résoudre le problème donné à votre groupe puis rédiger un message ne comportant aucun mot, utilisant uniquement les nombres de l'énoncé et le moins de caractères possibles pour permettre au groupe associé de trouver le nombre qui est la solution du problème.

Problème A : Trois enfants Max, Alex et Tom vont au restaurant avec leurs deux parents. Ils prennent un menu enfant à 3,5 chacun et leurs parents prennent en plus de leurs menus-adultes un café chacun à 1,2. L'addition indique pour l'ensemble 38,90. Combien coûte le menu-adulte pris par les parents ?

Problème B : « A la poste » Madame Serin veut timbrer 7 lettres à 0,50 chacune et 2 paquets identiques. Elle paye 12,50. Quel est le prix payé pour chaque paquet ?

La classe est partagée en un nombre pair de groupes. Une moitié des groupes est désignée par la lettre A, l'autre moitié par la lettre B. Deux groupes A_i et B_i sont appariés.

Les groupes A_i reçoivent le problème A , les groupes B_i reçoivent le problème B.

Chaque groupe cherche la solution de son problème et doit rédiger un message pour son groupe associé, respectant les contraintes de la consigne. Les élèves ne se déplacent pas. C'est le professeur qui assure la transmission des messages.

A_1	B_1
A_2	B_2
...	...
A_i	B_i

Le groupe qui reçoit le message doit faire le calcul indiqué. Puis les groupes A_i et B_i confrontent les résultats des calculs issus des messages et les solutions des problèmes. La mise en commun en classe entière permet de voir différentes expressions pour un même problème et de déterminer celles qui sont justes, répondent à la consigne et celle qui est la plus courte.

Contraintes sur les messages :

- « aucun mot » vise à obtenir une expression numérique.
- « Uniquement les nombres » du texte permet d'éviter les calculs intermédiaires. Selon les problèmes certains nombres peuvent être sous-entendus dans le texte.
- « le moins de caractères possibles » permet aux élèves de s'interroger sur la nécessité de certains signes (parenthèses utiles ou inutiles, égalités successives, lettres) et d'arriver à une seule expression la plus courte possible en utilisant les règles de priorité.

Les élèves au cours de leur recherche demandent souvent s'il est permis d'utiliser des lettres ou des parenthèses...La réponse est « Oui si vous pensez que cela n'allonge pas inutilement votre message. »

La mise en commun permet de trancher sur la meilleure expression possible.



L'objectif est d'obliger les élèves à utiliser une seule expression numérique.
Ce travail permet de préparer un des points importants de la classe de 4^{ième} : la mise en équation des problèmes, la difficulté pour les élèves étant d'écrire une seule expression traduisant l'énoncé d'un problème.

Certains élèves auront besoin que l'on explique comment on remonte les calculs des différentes étapes pour écrire une seule expression numérique.

Voici une démarche possible :

Exemple : situation 3 problème B

Énoncé :

Mme Serin veut timbrer 7 lettres à 0,50 chacune et 2 paquets identiques.

Elle paye 12,50

Quel est le prix payé pour chaque paquet ?

Résolution du problème en plusieurs étapes :

$7 \times 0,50 = 3,50$ L'affranchissement des 7 lettres coûte 3,50 .

$12,50 - 3,50 = 9$ L'affranchissement des deux paquets coûte 9

$9 : 2 = 4,50$ L'affranchissement d'un paquet coûte 4,50

Principe : L'expression permettant d'obtenir le résultat final ne doit contenir que des nombres figurant dans l'énoncé.

Reprenons les calculs précédents dans l'ordre inverse :

4,5 =		
9 : 2 =	2 : c'est le nombre de paquets 9 n'est pas dans l'énoncé	9 = 12,5 - 3,5
(12,5 - 3,5) : 2 =	12,5 : c'est ce qu'elle paye 3,5 n'est pas dans l'énoncé.	3,5 = 7 x 0,5
[12,5 - (7 x 0,5)] : 2	12,5 : c'est la somme qu'elle paye 7 : c'est le nombre de lettres 0,5 : c'est le prix du timbre pour une lettre 2 : le nombre de paquets	

L'expression cherchée est donc :

$$P = [12,5 - (7 \times 0,5)] : 2$$

$$P = (12,5 - 3,5) : 2$$

$$P = 9 : 2$$

$$P = 4,5$$

En reprenant les étapes, on obtient la rédaction correcte du calcul de l'expression.

Exercices :

1-A partir d'une expression numérique trouver l'énoncé d'un problème :

Invente un problème dont la solution s'obtient avec ce calcul :
 $200 - (45 + 38 \times 2)$

2- Problème avec plusieurs étapes de calculs à traduire en une seule expression numérique.

Une salle de cinéma contient 250 places. Le tarif est de 6,80 pour un adulte et 4,70 pour un enfant. Lors d'une séance, il y a 150 enfants ; toutes les autres places sont occupées par des adultes. Quelle somme la séance a-t-elle rapportée ?

Ecrire une seule expression numérique permettant de trouver la solution.

Thème 2 : La distributivité

Pour certains élèves, la manipulation de la distributivité avec des entiers est intuitive.

Ils l'ont utilisée à l'école primaire et en 6^{ième} en calcul mental, dans la technique de la multiplication et dans le calcul de périmètres de rectangles. D'autre part nous donnons en 6^{ième} une activité sur les bissectrices d'angles supplémentaires et même quelques réductions d'expressions algébriques simples.

L'objectif est ici de lui donner un statut de savoir scolaire pour qu'il devienne un outil de calcul ou de preuve.

Partie 1 : distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

Activités en classe : Par la confrontation des expressions écrites par les élèves on déduira dans chaque cas une égalité. On conservera sur un transparent les égalités obtenues de façon à faire ensuite le bilan (ces questions pouvant être traitées sur deux séances).

Etape 1 :

1. Résoudre chacun de ces deux problèmes de deux façons différentes :

- Une baguette coûte 0,61 euros . Le boulanger en vend 57 le matin et 43 l'après midi.
Combien a-t-il encaissé ce jour là pour la vente de ses baguettes?
- Une élève achète 5 stylos à 2,25 euros chacun et 5 cahiers à 0,75 euros chacun.
Combien va-t-elle payer ?

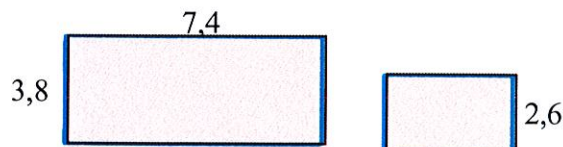
$$57 \times 0,61 + 43 \times 0,61 = (57 + 43) \times 0,61$$

$$5 \times 2,25 + 5 \times 0,75 = 5 \times (2,25 + 0,75)$$

Certains élèves confondent les deux solutions et deux présentations d'un même calcul, en une seule ligne ou sur deux lignes.

Le professeur les incite à donner du sens aux étapes des calculs pour distinguer les deux solutions. Pour le deuxième membre de l'égalité, dans le deuxième problème, cela revient à faire des lots (stylo + cahier) : démarche pas toujours naturelle pour les élèves.

2. Tracer les deux rectangles suivants et les découper. Calculer l'aire totale de ces deux rectangles (unité : cm)



Après le travail sur les aires fait en 6^{ème}, l'idée de rassembler les deux rectangles doit venir pour faciliter les calculs.

$$3,8 \times 7,4 + 3,8 \times 2,6 = 3,8 \times (7,4 + 2,6)$$

3. Comment peut-on calculer mentalement :

$$\begin{aligned} & 13 \times 1002 \\ & 43 \times 82,5 + 43 \times 17,5 \\ & 27 \times 13 + 13 \times 73 \end{aligned}$$

$$(43 \times 82,5) + (43 \times 17,5) = 43 \times (82,5 + 17,5)$$

$$27 \times 13 + 13 \times 73 = 13 \times (27 + 73)$$

$$13 \times 1002 = 13 \times (1000 + 2) = 13 \times 1000 + 13 \times 2$$

Nous ne demandons pas 13×1001 qui pose plus de problèmes pour écrire les égalités souhaitées, compte tenu de l'obstacle de l'écriture 13×1 quand 13 suffit.

4. Ecrire d'autres égalités du même genre avec des nombres de ton choix.

Ecrire une règle qui résume les 4 égalités obtenues.

(Le transparent avec les 6 égalités est projeté)

Certains élèves n'ont pas vraiment compris la structure de ces égalités. Ils proposent des égalités vraies mais d'une autre forme, voire des égalités fausses !

La plupart tente de faire des phrases parfois très maladroitement et finalement n'y arrivent pas.

La différence avec ce qui se passe pour la recherche d'une formule, par exemple dans la situation des poignées de main (6^{ème} partie 2 page 47), est qu'ici on ne se trouve pas dans la traduction d'une procédure, mais dans la traduction d'une égalité de deux formules qui diffèrent par leur structure. Il est possible de proposer aux élèves des exercices pour travailler spécifiquement sur la structure des expressions algébriques, par exemple, on donne plusieurs expressions, $3 \times x + 1$ ou $3 \times (x + 1)$ et on demande si c'est une somme ou un produit, comme on l'a fait pour des expressions numériques. Au niveau cinquième, la variété des expressions littérales que l'on peut proposer est limitée, c'est pourquoi nous ne faisons pas ce type d'exercices.

Le fait qu'ici les élèves n'arrivent pas à formuler la règle par une phrase est plutôt bénéfique car cela leur permet de voir l'intérêt des lettres qui leur viennent à l'idée pour remplacer les phrases, grâce au travail de familiarisation que nous avons fait auparavant.

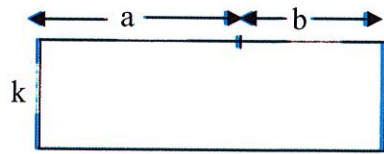
A Retenir : k, a, b désignent des nombres positifs.

On admet que :

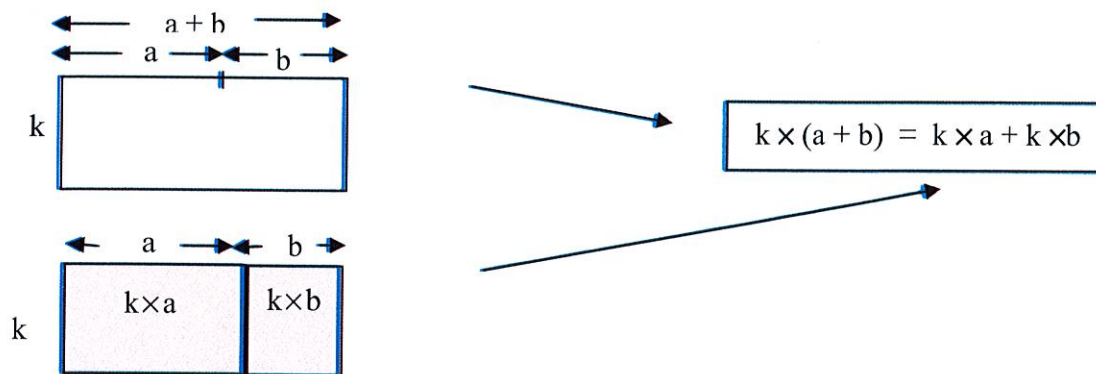
$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b \quad \text{et} \quad k \times a + k \times b = k \times (a + b)$$

Etape 2 : Illustration géométrique de l'identité:

Exprimer de plusieurs façons l'aire du grand rectangle



La séparation du rectangle en deux parties n'est volontairement pas tracée: Elle est à la charge des élèves.

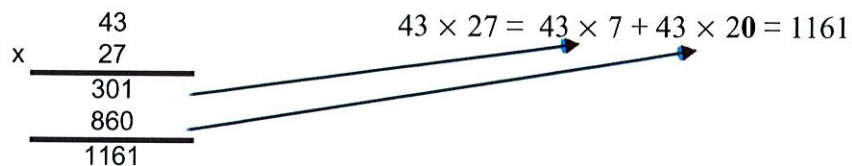
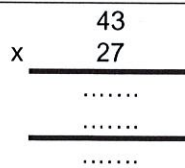


L'aire du grand rectangle est égale à la somme des aires des deux petits rectangles.

Exercice 1: La technique de la multiplication

Il est important de faire le lien entre la distributivité et la technique de la multiplication vue à l'école primaire puis en 6^{ème}

Compléter ce calcul.
Que représentent les deux résultats intermédiaires dans cette multiplication ?



Exercice 2

a) Calculer mentalement 43×101 .

Donner une règle permettant de multiplier un nombre quelconque par 101.

Les élèves peuvent écrire une phrase et même arriver à exprimer la règle à l'aide de lettres sous la forme :

$$x \times 101 = x \times (100 + 1) = x \times 100 + x \times 1 \quad \text{ou} \quad x \times 101 = x \times 100 + x$$

b) Calculer mentalement $30 \times 1,5$

Donner une règle permettant de multiplier un nombre quelconque par 1,5.

Les élèves réinvestissent le travail précédent. Il peut être intéressant de voir apparaître $\frac{1}{2}$ et l'utilisation

qu'il en est faite avec diverses écritures justes ou fausses, $x + \frac{1}{2}$ ou $x + \frac{1}{2} x$.

Partie 2 : distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction :

1. Résoudre un petit problème d'arithmétique :

Un collège achète 600 chaises à 20 € chacune.

Le magasin fait une remise de 2 € sur chaque chaise.

Calculer de deux façons différentes le coût du renouvellement de toutes les chaises au collège ?

Ecrire chaque calcul sous la forme d'une seule expression.

2. Calculer mentalement :

La machine à calculer de Marie est tombée en panne.

Aidez la à calculer mentalement :

- 17×99
- $7,13 \times 121 - 7,13 \times 21$

3. Comment résumeriez-vous la règle que l'on vient d'utiliser ?

Peut-on trouver une illustration géométrique ?

Les élèves font le lien avec l'identité précédente vue pour l'addition et la mise en commun permet d'écrire le bilan:

A retenir :

k, a, b désignent des nombres positifs ($a > b$).

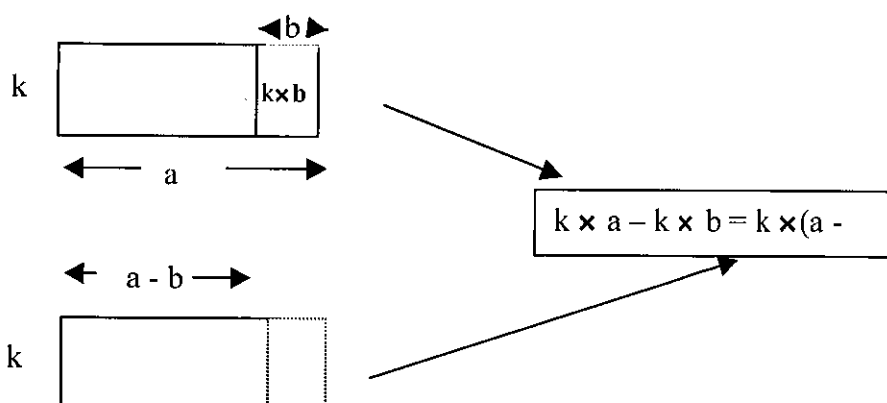
On admet que

$$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$$

et

$$k \times a - k \times b = k \times (a - b)$$

Illustration géométrique:



Question : Est-ce que la propriété précédente, vraie pour l'addition et la soustraction, est aussi vraie pour la multiplication ?

- Peut-on écrire :

pour tous les nombres a, b, k positifs $k \times (a \times b) = k \times a \times k \times b$?

Les élèves peuvent trouver des nombres pour lesquels cela est vrai : a ou $b = 0$ $k=1$ ou 0



L'utilisation d'un contre-exemple montre que l'affirmation est fautive. Ce type de raisonnement est un point important à retravailler régulièrement. Il est utilisé pour tester une égalité.

En utilisant la commutativité et l'associativité de la multiplication, les élèves peuvent voir que :

$$k \times a \times k \times b = k \times k \times a \times b = k^2 \times a \times b$$

Complément : Si on multiplie la largeur et la longueur d'un rectangle donné par deux que se passe-t-il ?

Exercices :

- Ecrire sous la forme d'un produit

$$2 \times x + 3 \times x$$

$$2,5 \times x + x$$

$$3 \times x + 3 \times y$$

$$3 \times 4 + 3 \times x$$

$$3 \times x + 15$$

$$3 \times x + 3$$

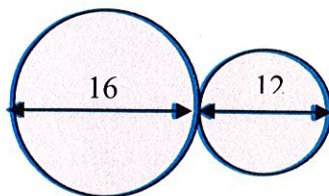
$$2,7 \times x + 3,8 \times x$$

$$7,2 \times x - 4,5 \times x$$

$$3 \times x - x$$

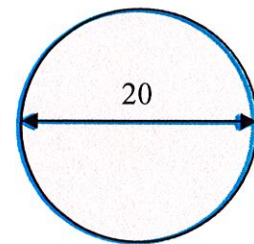
Il est utile de travailler ces expressions en prévisions de calculs d'aires (de rectangles ou de disques avec π ..)

- Comparaison des surfaces grises puis de leurs périmètres



$$A = 64 \pi + 36 \pi$$

$$P = 16 \pi + 12 \pi$$

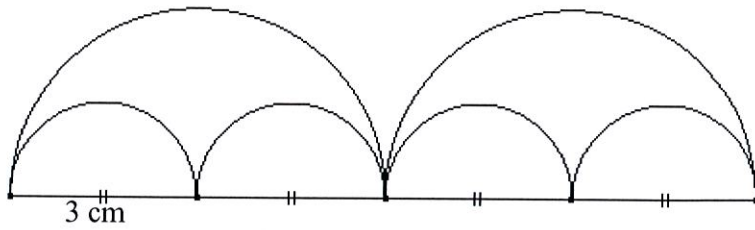


$$A = 100\pi$$

$$P = 20\pi$$

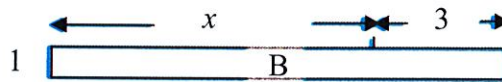
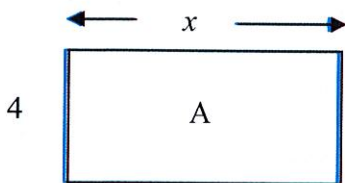
On retrouve une nouvelle fois des figures ayant même aire mais des périmètres différents

- Recherche du chemin le plus long :



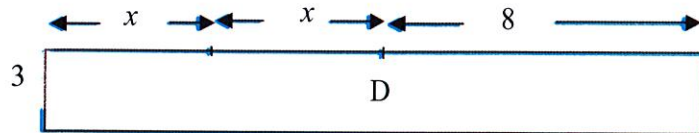
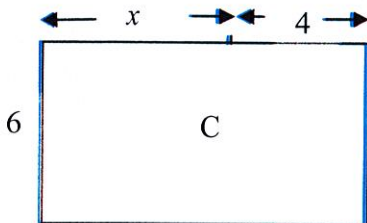
- A l'aide de x exprimer le périmètre du rectangle A
A l'aide de x exprimer le périmètre du rectangle B

Un élève pense que ces deux rectangles ont toujours le même périmètre pour n'importe quelle valeur de x . A-t-il raison ?



- A l'aide de x exprimer l'aire du rectangle C
A l'aide de x exprimer l'aire du rectangle D

Un élève pense que ces deux rectangles ont toujours la même aire pour n'importe quelle valeur de x . A-t-il raison ?



Thème 3 : Introduction des lettres.

Situation : Echanger des programmes de calcul



Cette situation dont le détail se trouve en annexe se compose de 2 parties :

4^{ème} partie
page 104

Partie 1 : Les élèves doivent échanger deux par deux un message traduisant le programme donné à chacun. Le groupe récepteur doit pouvoir reconstituer le programme.

Partie 2 : Le but est, cette fois, d'écrire le message le plus court possible (et d'arriver donc à une écriture algébrique du programme)

Les élèves peuvent en tirer le bilan suivant : « les lettres permettent d'écrire un programme de calcul ».

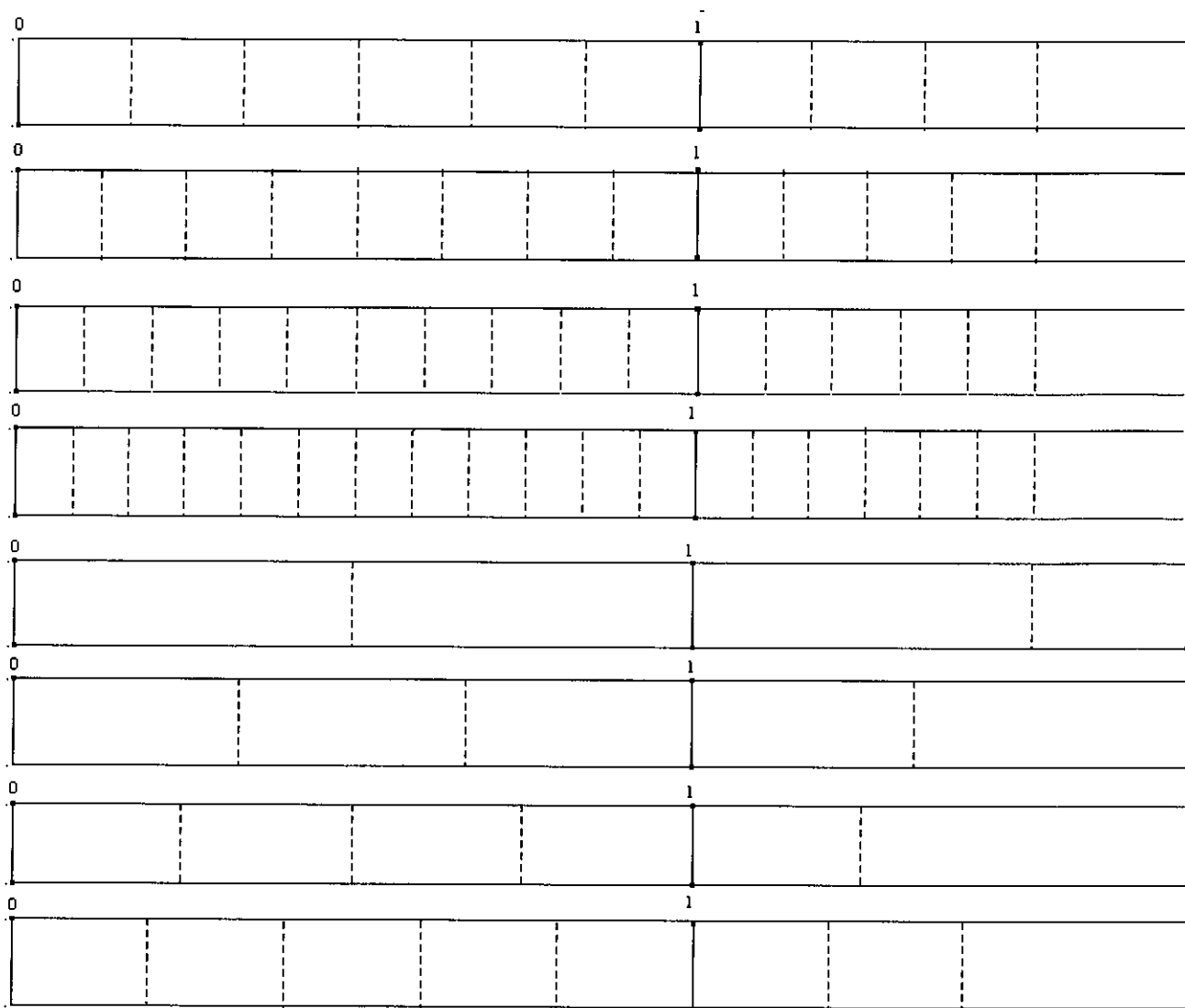
Au cours de ce travail certains élèves proposent de supprimer le signe \times de la multiplication pour obtenir une expression plus courte.

On accepte et on institutionnalise cette suppression à ce moment là, mais on précise aux élèves qu'ils peuvent continuer à écrire les signes \times s'ils le souhaitent.

Thème 4 : Les écritures fractionnaires

1) Somme de fractions

On distribue aux élèves la fiche suivante :



Etape 0 :

Placer sur les bandes toutes les fractions égales à $\frac{3}{4}$, puis toutes celles qui sont égales à $\frac{3}{2}$.

Cette étape préliminaire a un double but : familiariser les élèves avec les bandes et revenir sur l'égalité de fractions.

Il est essentiel de revenir sur l'égalité de fractions pour comprendre les étapes suivantes. Cette notion aura pu aussi être revue auparavant sous d'autres formes.

Les élèves remarquent que des fractions égales correspondent à des longueurs égales sur des bandes différentes. Cette remarque va leur servir pour l'étape suivante.

Etape 1:

Ajouter les fractions $\frac{3}{4} + \frac{5}{8}$

Expliquer comment on peut vérifier le résultat en utilisant les bandes.
On peut éventuellement découper.

Les élèves proposent de placer les fractions $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{8}$ sur les bandes. Ils se heurtent à un double problème, les parts sont de taille différentes et ne se trouvent pas sur la même bande.

En utilisant l'étape précédente, certains pensent à reporter la fraction $\frac{6}{8}$ sur la bande graduée en huitièmes à partir de l'origine.

Deux stratégies sont alors possibles :

- *Ils comptent les parts superposées. Elles ont toutes la même taille. Le résultat est donc $6 + 5 = 11$ huitièmes.*
- *Ils rajoutent au bout des six huitièmes, cinq autres huitièmes et comptent la longueur totale.*

On retrouve ici deux usages d'une fraction, l'abscisse sur une droite graduée et la mesure de la longueur d'un segment.

D'autres élèves, découpent deux morceaux de papier de longueur $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{8}$ puis les collent bout à bout afin de les présenter sur les bandes. C'est sur la bande graduée en huitièmes que le total va tomber sur une graduation, $\frac{11}{8}$. Ces élèves n'ont pas transformé $\frac{3}{4}$ en $\frac{6}{8}$ pour trouver le résultat. C'est lors de la mise en commun qu'ils vont comprendre pourquoi le résultat est $\frac{11}{8}$.

Etape 2 :

Ajouter $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ et vérifier le résultat à l'aide des bandes.

Pourquoi l'étape 2 ?

Bien que le programme demande de se limiter en cinquième à l'addition de deux fractions dont un des dénominateurs est un multiple de l'autre, nous pensons qu'il est bon d'aborder le cas de dénominateurs quelconques mais simples.

En effet, après avoir pratiqué l'addition dans le cas proposé par les programmes, de nombreuses fois, les élèves se fabriquent une règle : « le dénominateur commun entre deux fractions est le plus grand des deux dénominateurs ». Cette règle valable en cinquième va faire obstacle quand on voudra généraliser en quatrième.

Nous pensons que l'effort demandé pour comprendre ce qu'est réellement le dénominateur commun, si on s'en tient à des nombres simples, n'est pas trop important pour des élèves de cinquième : autant le faire tout de suite.

Remédier est plus difficile que construire des connaissances, la première rencontre peut être décisive, car elle sera marquante.

Certains élèves disent que trouver un dénominateur commun, c'est comme mettre les fractions dans la même unité : les parts étant de même taille, on peut les ajouter.

A Retenir :

Pour ajouter deux fractions, on les remplace par des fractions de mêmes dénominateurs. On ajoute les numérateurs et on garde le dénominateur commun. Le dénominateur commun est un multiple des deux dénominateurs des fractions de départ.

Exercices :

Ces exercices sont inspirés du travail de Guy et Nadine Brousseau.

Leur intérêt est de montrer la fraction comme un quotient de deux nombres, ce n'est pas le même statut que dans les activités précédentes où les fractions avaient le statut de mesure ou d'abscisse sur une droite graduée.

On a deux tas de feuilles d'épaisseurs différentes.

Dans le premier tas, l'épaisseur de 23 feuilles superposées est de 3 mm.

Dans le deuxième tas, l'épaisseur de 69 feuilles superposées est de 7 mm.

1. Quelle est l'épaisseur d'une feuille dans chaque tas ?
2. On superpose une feuille du premier tas avec une du second tas. Quelle est l'épaisseur de la nouvelle feuille ainsi obtenue ?
3. 20 feuilles mesurent 9mm dans un troisième tas et dans un quatrième, 30 feuilles mesurent 13 mm.
Mêmes questions.

Deux stratégies sont possibles :

- Les élèves écrivent que l'épaisseur de la feuille est $\frac{3}{23} + \frac{7}{69}$ et ils utilisent ce qui précède.
- Ils raisonnent de la façon suivante : il faudrait le même nombre de feuilles de chaque sorte : 69 feuilles. Pour les feuilles du premier tas, cela fera une épaisseur de $3 \times 3 = 9$ mm, à laquelle on rajoute une épaisseur de 7 mm pour les feuilles du deuxième tas. Cela fait donc 16 mm.

La réponse est donc $\frac{16}{69}$.

- Beaucoup d'élèves proposent pour l'épaisseur d'une feuille

$3 : 23 \approx 0,1304\dots$
Certains font $23 : 3$.

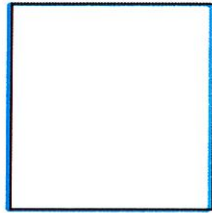
Il faut alors revenir sur le statut de nombre de $\frac{3}{23}$. Est-ce que $23 \times 0,1304 = 3$? (voir 6^{ème} thème quotient)

La troisième question permet de traiter le cas où les dénominateurs ne sont pas des multiples l'un de l'autre. Le dénominateur 60 est facile à trouver, il peut aussi y avoir 300, 600, ...

Nous avons volontairement choisi des épaisseurs de feuilles non décimales, pour être certains que l'écriture fractionnaire serait incontournable.

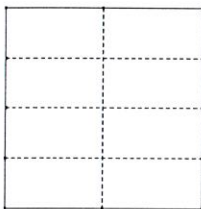
2) Produit de fractions :

Etape 1 :

<p>Le carré ci-contre a pour côté 1 . Tracer à l'intérieur du carré , un rectangle de dimensions $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$.</p> <p>Combien vaut l'aire de ce rectangle ?</p>	
--	---

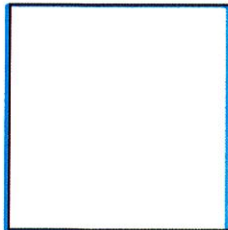
Les élèves écrivent le produit : $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$.

La plupart se rend compte que le résultat de ce produit doit être $\frac{1}{8}$ grâce au découpage du carré :

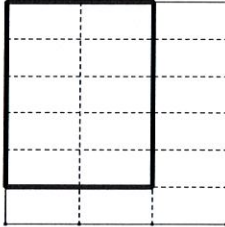


On écrit alors $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Etape 2 :

<p>Le carré ci-contre a pour côté 1 . Tracer à l'intérieur du carré , un rectangle de dimensions $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{6}$.</p> <p>Combien vaut l'aire de ce rectangle ?</p>	
--	--

En référence à l'étape 1 pour laquelle le quadrillage du carré est naturel, les élèves pensent à appliquer cette méthode ici. Sinon ils ne quadrillent pas forcément la partie blanche et ne peuvent pas répondre à la question. Ils obtiennent alors une figure analogue à celle-ci :



On peut alors écrire :

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{18}$$

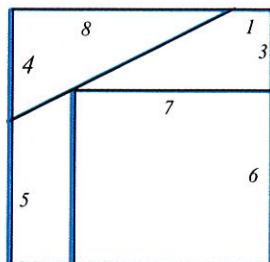
A Retenir :

Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

3) Fractions de fractions :

Situation : « Un puzzle » inspirée d'une situation de Guy Brousseau.

L'enseignant répartit ses élèves en groupes de 4 élèves et donne à chaque groupe les 4 pièces **découpées** du puzzle carré suivant (l'unité est le centimètre):



Etape 1 : Voici quatre pièces d'un puzzle

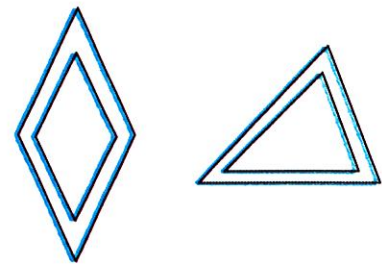
1. Reconstituer le puzzle carré.
2. Agrandir le puzzle pour que le côté qui mesure 4 cm sur le puzzle de départ mesure 5 cm sur le puzzle agrandi.
3. Chaque élève du groupe dessine une pièce du puzzle agrandi.

Les élèves doivent dessiner chacun une pièce du puzzle, ils procèdent de différentes façons selon les groupes. Ils discutent des différentes méthodes et se mettent d'accord sur une méthode pour leur groupe.

Première idée :

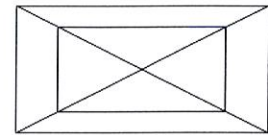
L'idée de rajouter 1 cm à chaque côté des morceaux du puzzle est émise dans de nombreux groupes. Elle est mise en défaut en défaut par la reconstruction du puzzle : les pièces agrandies ne se juxtaposent pas correctement du fait des angles non conservés avec cette stratégie.

Dans le même genre d'idée un élève a pensé à rajouter une bande de largeur constante (1/2 cm) autour de chaque pièce. Cet agrandissement est tout à fait valable pour les triangles ou losanges, de façon générale avec les figures dont les bissectrices sont concourantes comme les polygones réguliers ou les triangles mais évidemment pas pour toutes les pièces du puzzle.



La superposition des pièces agrandies et des pièces d'origine est un moyen de vérification souvent utilisé par les élèves pour savoir si elles ont la même forme.

Pour le rectangle, les diagonales doivent être les mêmes, ce qui attire l'attention sur le fait que la bande autour, n'est pas de largeur constante.



Autres idées :

- Ajouter $\frac{1}{4}$ de leur longueur à chaque côté. Cette fois on n'ajoute pas le même nombre mais cet agrandissement fonctionne puisqu'il revient à multiplier par $1 + \frac{1}{4}$ c'est à dire $\frac{5}{4}$ qui est le « coefficient d'agrandissement ». C'est pourquoi il arrive que certains pensent parfois à multiplier les mesures par 1,25 sans utiliser de tableau de proportionnalité.
- Les élèves des différents groupes pensent en général à la conservation des angles droits mais pas à la conservation des autres angles. L'enseignant pourra revenir sur la question de l'agrandissement et leur faire préciser qu'obtenir une forme identique signifie que les angles sont conservés.
- Certains pensent à la proportionnalité. La pièce triangulaire a des mesures qui s'y prêtent facilement. Pour les autres pièces ils utilisent le coefficient de proportionnalité : quotient de 5 par 4

On cherche le nombre qui multiplié par 4 donne 5. $4 \times \frac{5}{4} = 5$

4	7
5	?

Coup de pouce pour ceux qui seraient perdus.

Si 4 devient 5, que devient 8 ? Pour cela on peut même imaginer utiliser deux pièces identiques pour mieux visualiser.

Remarque : agrandir est imprécis comme vocabulaire. On parle d'agrandir une photo mais aussi d'agrandir une maison : la signification n'est pas du tout la même puisque dans le dernier cas cela revient à rajouter un morceau.

Bilan : Pour agrandir une figure, on multiplie toutes les longueurs des côtés par un même nombre.

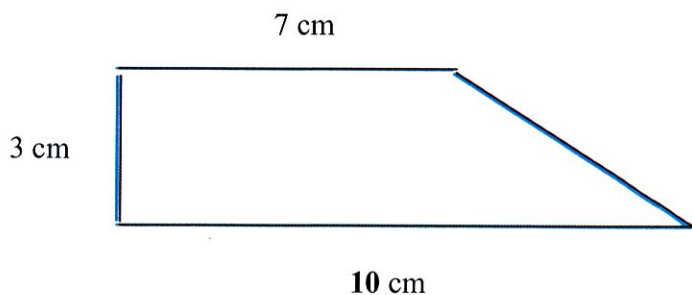
Si « 4 devient 5 » on multiplie les dimensions par $\frac{5}{4} = 1,25$

Etape 2 :

« Une première pièce... »

Cette fois, on ne possède qu'une pièce d'un puzzle.

Dessiner une nouvelle pièce de forme identique pour que le côté qui mesurait 10 cm à l'origine ne mesure plus que 4 cm sur la nouvelle pièce.



Les élèves doivent penser à multiplier par $\frac{4}{10}$, c'est à dire 0,4. S'il font l'inverse (avec $\frac{10}{4}$) ils se rendent vite compte qu'il y a un problème de dimensions.

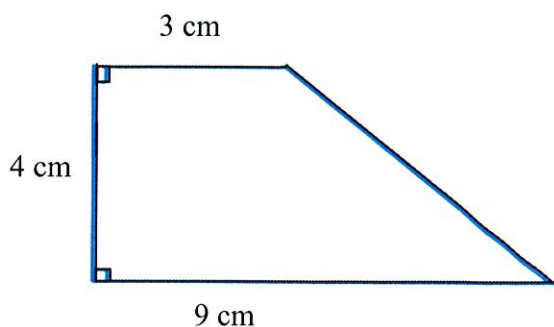
Une remarque importante apparaît dans la classe :

Bilan : Si on multiplie par une fraction supérieure à 1 : on agrandit.
Si on multiplie par une fraction inférieure à 1 : on réduit.

Etape 3 :

« Une deuxième pièce »

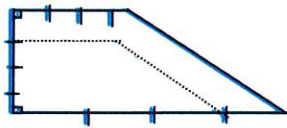
On considère à nouveau une pièce d'un puzzle. Construire la pièce de forme identique dont les dimensions sont les $\frac{3}{4}$ des dimensions de cette pièce. Expliquer votre méthode.



Les élèves ont donc à calculer les $\frac{3}{4}$ de chacune des dimensions données. Selon les groupes on verra apparaître les différentes méthodes pour multiplier par une fraction :

$$\frac{3}{4} \times 9 = \begin{array}{l} \rightarrow \frac{3 \times 9}{4} \\ \rightarrow \frac{9}{4} \times 3 \\ \rightarrow 0,75 \times 9 \end{array}$$

On peut voir également chez certains élèves l'idée suivante : les côtés principaux sont partagés en 4 morceaux de même longueur et l'élève en prend trois pour former la nouvelle pièce.

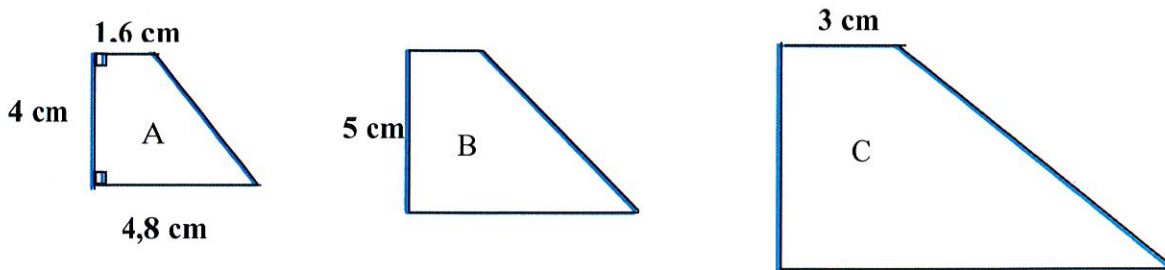


Bilan : Prendre les $\frac{3}{4}$ d'une dimension c'est multiplier la dimension par $\frac{3}{4}$.

Etape 4 :

« Agrandir puis agrandir encore ... »

On agrandit la pièce A et on obtient la pièce B.
Puis on agrandit la pièce B et on obtient la pièce C (dessins réalisés au tableau)



- Construire les pièces A, B, C en vraie grandeur sur votre cahier. Indiquer les dimensions de chaque pièce.
- Expliquer de différentes façons comment l'on passe des dimensions de la première pièce à celles de la dernière.

On peut trouver comme explication

- on multiplie les dimensions par $\frac{3}{1,6}$
- on multiplie les dimensions par $\frac{5}{4}$ puis $\frac{3}{2}$

- on multiplie les dimensions par $\frac{7,5}{4}$

On a $\frac{7,5}{4} = \frac{3}{1,6} = \frac{3}{2} \times \frac{5}{4}$

Bilan : Prendre les $\frac{5}{4}$ puis les $\frac{3}{2}$ c'est prendre les $\frac{5}{4}$ des $\frac{3}{2}$ et cela revient à calculer $\frac{5}{4} \times \frac{3}{2}$

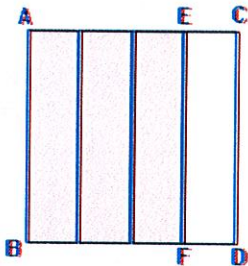
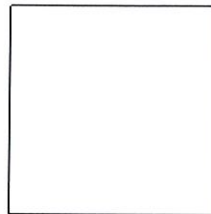


La structure algébrique des nombres rationnels est utile dans de nombreux chapitres en particulier celui concernant les équations avec les différents problèmes de mise en équation. Prendre une fraction d'une fraction n'est pas explicitement indiqué dans le programme. Cependant cette connaissance est utile.

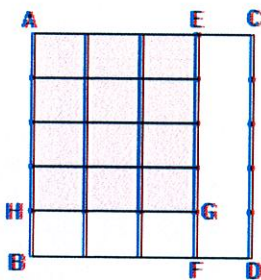
Illustration avec l'aire d'un rectangle :

Voici un carré dont l'aire sert d'unité.

On va prendre les $\frac{4}{5}$ des $\frac{3}{4}$ de ce carré.

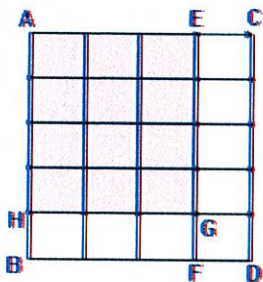


1. Le professeur montre le dessin suivant : Quelle fraction de l'aire du carré représente l'aire du rectangle ABFE ?



2. Le professeur montre alors le dessin suivant : Quelle est l'aire du rectangle AEGH ?

Les élèves doivent prolonger les traits du quadrillage pour partager le carré en parts égales. Ils trouvent $\frac{12}{20}$.



3. On retrouve d'une autre manière le résultat précédent :

Les $\frac{4}{5}$ des $\frac{3}{4}$ du carré, c'est un rectangle d'aire $\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{12}{20}$.

Thème 5 : Les nombres relatifs

1) Les différents contextes d'emploi des nombres relatifs

a) Un regard sur l'histoire :

Si les chinois utilisaient les négatifs et les règles de calcul de l'addition pour les besoins de la comptabilité, dès le I^{er} siècle, il a fallu attendre en occident la fin du XIX^{ème} siècle pour que les négatifs prennent le statut de nombres, avec la construction formelle de l'ensemble des nombres relatifs (Hankel 1867).

Les nombres négatifs sont apparus en occident au XV^{ème} siècle avec les travaux de Nicolas Chuquet. Mais les scientifiques refusaient l'existence de quantités négatives, qu'ils qualifiaient de nombres « moindres que rien » (Carnot 1803).

Le contexte dans lequel sont apparus les nombres négatifs est celui des équations où ils seront longtemps utilisés comme auxiliaires de calcul. Les données et les résultats sont positifs, mais la résolution impose le passage par des nombres négatifs.

Ainsi, l'histoire nous montre bien que les nombres négatifs sont apparus, non pour une modélisation du monde réel, mais par nécessité interne aux mathématiques.

b) Les différents contextes d'emploi :

Ils sont de trois types :

▪ contextes concrets :

- recettes et dépenses
- gains et pertes
- températures
- altitudes
- chronologie
- ascenseur

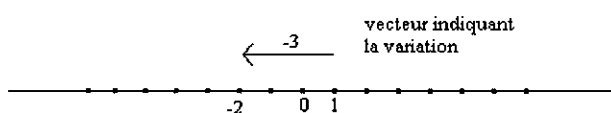
Dans ce genre de situations, le nombre relatif peut avoir deux significations différentes.

Il peut traduire :

- un état : il fait -3°C ou l'année de naissance d'un personnage est -50 av JC.
- une variation : la température a baissé de 3°C ou l'ascenseur est descendu de 3 étages.

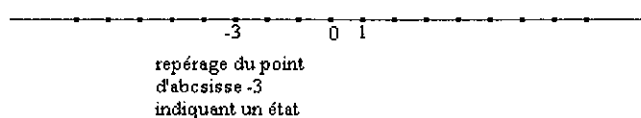
▪ contexte de repérage sur une droite :

1)



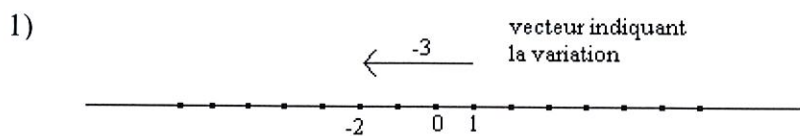
-3 est une variation

2)



-3 est un repère indiquant un état

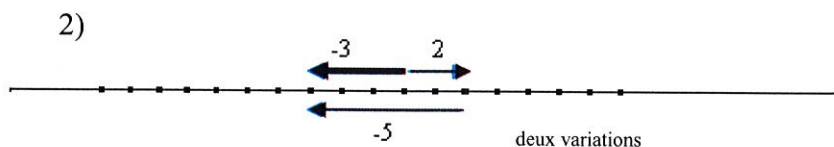
Dans les calculs, un même nombre relatif peut traduire des situations différentes :



$$(+1) + (-3) = (-2)$$

état variation état

Dans ce calcul, les nombres relatifs ont des statuts différents.



$$2 + (-5) = -3$$

Ce calcul fait le bilan de deux variations.
Les nombres relatifs ont le même statut.

Pour introduire l'addition, il est certainement préférable de travailler seulement avec des variations. On ne manipule que des nombres qui ont le même statut.

• **contexte interne aux mathématiques:**

On est dans un milieu purement mathématique.

- a) on résout des équations
- b) on énonce les règles de l'addition ou de la soustraction de deux nombres relatifs

Ceci nous amène à penser qu'il peut être judicieux d'introduire les nombres relatifs par des équations.

Cependant, le contexte concret permet de construire des images mentales variées, donc nous proposons en fait un double mode d'introduction.

En effet, l'image de la translation peut permettre de comprendre l'addition mais peut se révéler constituer un obstacle pour l'introduction de la multiplication.

Conclusion :

Aucun mode d'introduction ne peut à lui seul, permettre d'atteindre tous les buts recherchés. Il est donc important de varier les situations, repérage, gain et pertes, variations à appliquer à un état,...

Il faut aussi prendre de la distance par rapport aux contextes concrets de façon à donner un statut de nombres aux relatifs, aussi bien positifs que négatifs sans discrimination et à ne pas créer d'obstacles didactiques à la mise en place des règles de l'addition et surtout de la multiplication.

(d'après Irem de Poitiers, Suivi Scientifique Cycle central Tome 1)

2) Introduction des nombres relatifs

a) Quelques remarques préalables :

La construction de ce nouvel ensemble d'objets mathématiques doit être vue comme une extension du sens de ce que l'on nomme nombre pour qu'il n'y ait pas une coupure entre les nombres négatifs et les nombres positifs déjà connus. Les nombres relatifs ne prendront rapidement le statut de nombres que si l'élève opère avec eux. Ces opérations devront amener les élèves à ne pas imaginer séparément les anciens et les nouveaux nombres mais à considérer les négatifs comme une partie de l'ensemble des relatifs. (d'après irem de Poitiers)

Ceci a deux conséquences sur nos choix didactiques :

- Dans une écriture de la forme $(+3) + (-2)$, les deux signes + n'ont pas le même statut, le premier est un signe prédicatoire, le signe du nombre positif 3 et le deuxième est un signe d'addition.
Il y a donc pour les élèves une source de confusion possible.

Donc :

Nous n'introduisons pas d'écriture du type $(+3)$, elles sont exprimées par les élèves par opposition avec (-3) .

On préfère garder au signe + le seul statut opératoire au détriment d'une cohérence de notation dans l'ensemble Z.

Nous avons donc choisi dès le départ d'assimiler $(+3)$ et 3 qui sont présentées comme deux écritures d'un même nombre.

- Nous pensons qu'ainsi, les élèves voient mieux l'inclusion de \mathbb{Z} dans \mathbb{C} .
- La simplification des écritures est facilitée.
- Nous avons décidé d'introduire les nombres relatifs à partir d'égalités à compléter du type $9 + \dots = 7$.
Nous avons prévu de même, une introduction de l'addition, en restant dans un contexte interne aux maths et en justifiant les résultats sur des exemples.
Le lien entre des résultats que l'on aura justifiés et des situations concrètes de gain et de perte sera fait en fin de séquence.

b) Les situations proposées aux élèves

Etape 0 : Etablir que $(a + b) - c = a + (b - c)$

Cette étape n'est pas nécessairement à faire juste avant l'introduction des nombres relatifs, mais plutôt dans un des thèmes précédents, le thème concernant l'organisation des calculs par exemple.

1. Margot va à la librairie, elle achète deux articles : un cahier à 2,75 € et un livre à 8,25 € .
Le libraire lui fait une réduction de 0,50 € sur le prix du livre.
Calculer le prix total que Margot doit payer de deux façons différentes et pour chaque façon, écrire les calculs sur une seule ligne.

Lors de la mise en commun, le professeur écrit au tableau l'égalité suivante :

$$2,75 + (8,75 - 0,50) = (2,75 + 8,25) - 0,50$$

2.



Calculer la longueur AC de deux façons différentes et pour chaque façon, écrire les calculs en une seule ligne.

Le professeur écrit l'égalité : $(7,8 + 4,2) - 2,2 = 7,8 + (4,2 - 2,2)$

Les deux égalités étant au tableau, le professeur demande aux élèves d'écrire d'autres égalités du même type avec des nombres de leur choix pour s'assurer que les élèves ont bien repéré la structure commune à ces deux égalités. Puis il demande aux élèves de formuler une propriété à l'aide de lettres comme ils l'ont déjà fait pour la distributivité.

Si vous traitez ce point avant d'avoir fait la distributivité, reportez vous à ce thème pour le déroulement de la mise en commun.

Bilan : Etant donnés trois nombres a,b et c quelconques, les deux expressions suivantes sont égales :

$$(a + b) - c = a + (b - c)$$

Etape 1 :

Compléter les pointillés

$$12 + \dots = 27$$

$$38 + \dots = 83$$

$$438 + \dots = 705$$

$$58 + \dots = 58$$

$$9 + \dots = 7$$

D'abord les élèves complètent en calculant mentalement puis quand les nombres deviennent compliqués, ils posent la soustraction. S'ils n'ont pas l'idée de la soustraction, on peut leur donner la calculatrice et leur demander quelle opération ils doivent taper pour trouver la solution.

La plupart des élèves disent que la dernière égalité est impossible, mais certains proposent -2 (trouvé grâce à la calculatrice ?).

Le professeur relance alors le travail en exigeant que cette dernière opération devienne possible, il explique que jusque là, effectivement c'était impossible, mais ce jour, un grand pas va être franchi...

Des élèves demandent alors si on peut remplacer les pointillés par autre chose qu'un nombre tout seul, le professeur leur répond que oui.

Il incite les élèves à trouver plusieurs solutions.

Des élèves proposent de remplacer les pointillés par $7 - 9$ ou par $2 - 4$, ou $0 - 2$, ce qui donne $9 + (7 - 9) = 7$ ou $9 + (2 - 4) = 7$.

D'après l'étape 0, le calcul devient possible, en effet, on effectue par exemple :

$$9 + 7 = 16 \text{ et } 16 - 9 = 7.$$

Lors de la mise en commun, les élèves confrontent leurs solutions, on peut en déduire que $7 - 9 = 2 - 4 = 1 - 3 = \dots = 0 - 2 = -2$

Le professeur explique alors que le nombre $0 - 2$ sera désormais noté -2

Dans un souci de simplification, on s'affranchit dès le départ des parenthèses autour de -2 sauf s'il est situé après un signe d'addition.

Le nombre négatif est introduit comme différence de deux entiers, ce qui est cohérent avec la conception de la fraction comme nombre rationnel et quotient de deux entiers, que les élèves ont rencontrée en sixième.

Exercice : Ecrire plusieurs égalités à trous ayant -2 comme solution

Les élèves écrivent :

$$3 + (-2) = 1 \text{ et } 1 - 3 = -2$$

$$-2 + 5 = 3 \text{ et } 3 - 5 = -2$$

$$2 + (-2) = 0 \text{ et } 0 - 2 = -2$$

A Retenir : On peut effectuer des soustractions pour lesquelles le premier nombre est plus petit que le deuxième, le résultat est un nombre négatif, il s'écrit avec un signe $-$

$$-2 = 0 - 2 = 1 - 3 = 7 - 9 = \dots$$

$$\text{On a alors } 9 + (-2) = 7$$

Etape 2 :

On redonne des additions à trous avec une solution positive ou négative, en variant la place du trou, et on glisse parmi ces exercices, l'égalité :

$$\dots + 7 = 0$$

A Retenir : Deux nombres sont opposés quand leur somme vaut zéro.

$$-7 + 7 = 7 + (-7) = 0$$

Les deux nombres 7 et -7 sont opposés.

Etape 3 :

- 1) Effectuer les soustractions suivantes (*on mélange les résultats positifs et les résultats négatifs*)

$$35 - 17$$

$$23 - 48$$

$$34 - 26$$

$$48 - 72$$

.....

- 2) Effectuer les additions de nombres relatifs suivantes : (*on propose ici uniquement des additions dont le résultat est positif*)

$$7 + (-4)$$

$$12 + (-5)$$

$$54 + (-29)$$

$$-35 + 68$$

$$-17 + 21$$

.....

3) Addition de nombres relatifs : généralisation.

a) Quelques remarques préalables :

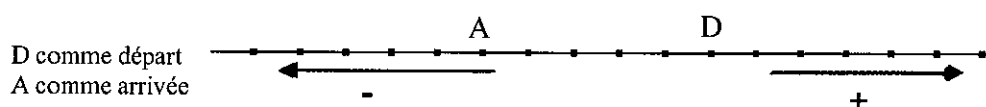
Il s'agit de montrer que ces nouveaux nombres, que l'on vient d'introduire, peuvent s'ajouter entre eux et s'ajouter aux anciens nombres, entiers naturels.

Il est préférable d'introduire l'addition comme **bilan de deux variations**, les nombres relatifs en jeu ont alors tous le même statut.

- l'ascenseur monte de 7 étages puis descend de 3 étages, peut-il faire le même déplacement en une seule fois ?
- le matin j'ai perdu 7 billes et l'après midi 2 autres. Quel est le bilan de la journée ?

à préférer à : ce matin il fait -3° , la température monte de 6° . Quelle est la nouvelle température ?
(état + variation = état)

On peut représenter les variations sur une droite graduée mais on ne marque pas l'origine. On demande à l'élève de placer un point de départ et on explique que l'on compte le nombre de pas.



Cette façon d'introduire l'addition présente deux inconvénients :

- Certains élèves se demandent pourquoi une succession de déplacements se traduit par une addition. Pourquoi cette opération ?
- Pour effectuer cette addition, il faut faire parfois une addition arithmétique et parfois une soustraction arithmétique.

D'où l'idée de passer par une introduction avec des situations abstraites où le statut de l'addition est clair.

b) Les situations proposées aux élèves :

Les élèves ont déjà rencontré : $9 + (-2) = 7$ et $7 - 9 = -2$

Etape 1 :

Pouvez vous imaginer des additions dont le résultat soit un nombre négatif ?
Justifiez les résultats que vous proposez.

Les élèves proposent par exemple $-5 + 3$ et donnent comme résultats possibles -8 , -2 ou 2 .

On peut justifier le résultat en faisant intervenir la notion d'opposé.

Certains élèves trouvent cette preuve sans aide. Mais le professeur peut aider les élèves qui n'y arrivent pas, dans un premier temps puis ils peuvent le faire eux mêmes sur d'autres exemples.

On admettra la commutativité de l'addition : $-5 + 5 = 5 + (-5) = 0$
 $-5 + 3 = -5 + (5 - 2) = (-5 + 5) - 2 = 0 - 2 = -2$ en utilisant l'étape 0.

On peut procéder de même avec :
 $(-4) + (-7) = (-4) + (4 - 11) = -11$

Ou encore avec :
 $8 + (-3) = (5 + 3) + (-3) = 5$

$-6 + 2 = -4$ que l'on justifie avec $-6 + 6 - 4 = 0 - 4 = -4$

$-3 + (-4) = -7$ que l'on justifie avec $-3 + 3 - 7 = 0 - 7 = -7$

et aussi $2 + (-6) = -4$ que l'on justifie par commutativité de l'addition
 ou par $2 + (-2) + (-4) = 0 + (-4) = -4$

On peut décider d'énoncer ces règles par des phrases, ou de donner seulement des exemples.

Etape 2 : Une situation dans un contexte concret.

Nous choisissons d'illustrer l'addition comme bilan de deux variations.

Le travail précédent permet de justifier que la succession de deux actions se traduit bien par une addition.

Bilan du matin	Bilan de l'après-midi	Bilan de la journée	Bilan de la journée avec un nombre	Opération résumant la journée
Gagné 10 billes	Gagné 8 billes			
Perdu 8 billes	Gagné 12 billes			
Perdu 6 billes	Perdu 5 billes			
Gagné 5 billes	Perdu 8 billes			
Gagné 9 billes	Perdu 9 billes			
Perdu 4 billes	Gagné 0 bille			
Gagné 0 bille	Perdu 5 billes			

- *Quelques élèves ont du mal à comprendre comment on peut faire le bilan de la journée alors que l'on ne connaît pas le nombre de billes que l'on avait le matin.*
- *Pour la deuxième ligne par exemple, des élèves écrivent dans la dernière colonne : $8 - 5$ au lieu de $5 - 8$, les autres élèves refusent ce calcul dont le résultat est 3 et non -3 comme il est écrit dans la colonne bilan.*
- *D'autres élèves proposent $5 + (-8)$, on justifie le résultat de l'addition en utilisant les opposés.*

4) Graduation, comparaison, repérage :

Etape 1 :

Compter à l'envers depuis 8 en enlevant à chaque fois 3.
On pourra représenter les nombres trouvés sur un schéma.

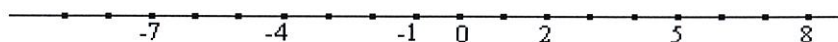
Les élèves trouvent les nombres 5 ; 2 ; -1 ; -4 ; -7 ;

Ils trouvent alors que mathématiquement, on n'a pas encore défini $-1 - 3$, grâce au schéma en reculant de trois graduations à chaque fois.

Pour représenter ces nombres les élèves proposent une graduation d'axe vertical ou horizontal.

A Retenir :

On peut représenter les nombres relatifs sur une droite graduée :



Etape 2 : « Le nombre caché »

Le professeur choisit un nombre négatif de grande valeur absolue (par exemple -396) et les élèves doivent le deviner. Ils proposent des nombres et le professeur répond par « trop petit » ou « trop grand ».

On peut refaire un jeu avec -14583 par exemple pour compliquer le classement et obliger les élèves à réfléchir.

Il semble difficile de prendre un nombre décimal car on cumule alors deux difficultés, le classement des décimaux et celui des négatifs, mais avec une bonne classe

La détermination d'intervalles dans lesquels le nombre sera compris va poser problème. On peut proposer aux élèves s'ils n'y pensent pas eux-mêmes, de représenter le jeu par une droite graduée.

Etape 3 :

Le professeur propose des exercices variés de repérage sur une droite ou dans le plan dans des contextes abstraits ou concrets.

Les élèves en déduiront eux mêmes les règles de comparaison de deux relatifs.

Ils se réfèrent à la droite graduée, ou bien à la distance à zéro : « plus un nombre négatif est éloigné de zéro, plus il est petit » ou encore, « dans les négatifs, l'ordre est inversé ».

5) Introduction de la soustraction de deux relatifs.

Il est préférable de laisser passer du temps entre la leçon sur l'addition et celle sur la soustraction, pour avoir l'occasion de reparler des nombres relatifs plusieurs fois dans l'année, et éviter d'avoir un seul chapitre, très dense.

Etape 1 : Situation contextuelle

Les élèves peuvent s'aider avec le « thermomètre » dessiné à droite du tableau.

Température du matin	Température de l'après-midi	Variation entre le matin et l'après-midi	Opération traduisant la variation de température entre le matin et l'après-midi.	
3°	9°			11
				10
				9
				8
8°	2°			7
				6
-3°	5°			5
				4
-8°	1°			3
				2
6°	-3°			1
				0
-7°	-5°			-1
				-2
-4°	-7°			-3
				-4
5°	5°			-5
				-6
3°	-3°			-7
				-8
-2°	-2°			

Les élèves proposent, pour la troisième ligne par exemple :

$5 - (-3) = 8$ ou bien $5 + 3 = 8$

On constate que ces deux opérations sont correctes, l'explication viendra à l'activité suivante.

Etape 2 : Situation abstraite

On passe de l'utilisation des règles de l'addition pour compléter des additions à trous à la définition de la différence de deux nombres puis à la méthode pour soustraire un nombre.

On donne les trois colonnes séparément en les écrivant successivement au tableau. On corrige la première puis on écrit la deuxième à côté, etc.


Pour remplir la deuxième colonne, on invite les élèves à observer comment on trouve la soustraction qui donne la solution de la première colonne .

Pour remplir la troisième colonne, on fait recopier les résultats de la deuxième dans les pointillés à droite du signe =.

Quand on a tout complété, on demande aux élèves de comparer les contenus des deux dernières colonnes et de décrire les ressemblances et les différences.

Pour faciliter ce travail, on pourra garder le tableau de l'activité précédente sous les yeux, on y trouve déjà des égalités entre additions et soustractions.

Compléter :

même résultat		
		
$3 + \dots = 7$	$7 - 3 = \dots\dots\dots$	$7 + \dots\dots = \dots\dots$
$5 + \dots = 2$	$2 - 5 = \dots\dots\dots$	$2 + \dots\dots = \dots\dots$
$-7 + \dots = 3$	$3 - (-7) = \dots\dots\dots$	$3 + \dots\dots = \dots\dots$
$6 + \dots\dots = -4$	$-4 - 6 = \dots\dots\dots$	$-4 + \dots\dots = \dots\dots$
$-9 + \dots = -5$	$-5 - \dots = \dots\dots\dots$	$-5 + \dots\dots = \dots\dots$
$1 + \dots = -3$	$\dots - \dots = \dots\dots\dots$	$\dots + \dots = \dots\dots$
$-8 + \dots = -11$	$\dots - \dots = \dots\dots\dots$	$\dots + \dots = \dots\dots$
$7 + \dots = 0$	$\dots - \dots = \dots\dots\dots$	$\dots + \dots = \dots\dots$
$-10 + \dots = -10$	$\dots - \dots = \dots\dots\dots$	$\dots + \dots = \dots\dots$

A Retenir :

Pour soustraire un nombre relatif, on peut ajouter son opposé.

$$a - b = a + \text{opposé de } b$$

exemples : $7 - (-4) = 7 + 4 = 11$ $-3 - 4 = -3 + (-4) = -7$

Dans certains cas, la transformation est inutile :

$$8 - 6 = 2 \qquad 3 - 8 = -5$$

Application : compléter :

$12 - (-20) =$ $-20 - (-14) =$ $-42 - 42 =$ $-19 - 11 =$ $28 - 28 =$

$13 - 30 =$ $-12 - 18 =$ $-39 - (-39) =$ $-18 - (-20) =$ $35 - 25 =$

6) Sommes algébriques

a) Remarques préalables :

On propose des situations problèmes, dans des contextes concrets ou abstraits qui mènent à des calculs de sommes algébriques. Aucune virtuosité n'est exigée dans ce type d'exercice.

On n'incite pas forcément les élèves à aller systématiquement vers l'écriture simplifiée s'ils ne le souhaitent pas.

Par contre, tout calcul astucieux est vivement encouragé.

La simplification des écritures pose problème :

Pour effectuer cette simplification, deux méthodes sont utilisées dans les manuels.

$$\begin{aligned} & (+2) + (-5) + (+4) \\ & = (+2) - (+5) + (+4) \\ & = 2 - 5 + 4 \end{aligned}$$

*En transformant tous les nombres en nombres positifs.
Dans ce cas, le signe – qui reste est un signe de soustraction.*

$$\begin{aligned} & (+2) + (-5) + (+4) \\ & = +2 - 5 + 4 \\ & = 2 - 5 + 4 \end{aligned}$$

*En enlevant les signes d'addition et les parenthèses.
En enlevant le signe + du nombre +2
Les signes qui restent sont des signes prédicatoires.*

Cette deuxième méthode nous semble préjudiciable, les expressions obtenues n'ayant plus de signes opératoires, n'ont plus de sens.

Nous utilisons la première méthode où les seuls signes + sont des signes d'addition.

$$(+2) + (-5) + (+4) \text{ s'écrit } 2 + (-5) + 4$$

En transformant l'addition en soustraction cela donne $2 - 5 + 4$

Les seuls signes qui restent sont donc des signes d'opération, sauf dans le cas où la somme algébrique commence par un nombre négatif.

On peut alors interpréter le calcul comme $0 - \dots$ où le – est un signe de soustraction.

b) Les situations proposées aux élèves :

L'objectif est d'habituer les élèves à passer d'une suite d'additions et de soustractions à une suite d'additions et vice versa.

1. Sommes de plusieurs relatifs

Moyenne de températures, avec des températures opposées.

On s'arrange pour que le résultat soit positif et que la division soit simple.

2. Suites d'additions et de soustractions ou sommes de plusieurs relatifs

Mouvements d'ascenseur :

Le professeur décrit oralement les mouvements de l'ascenseur, « il monte de 7 étages, il descend de 3 étages, » Les élèves doivent prendre des notes et résumer la suite de déplacements en un seul.

Les élèves proposent de traduire les déplacements

soit par : $7 + (-3) + 2 + (-6) + 5 + \dots$

soit par $7 - 3 + 2 - 6 + 5 \dots\dots$

3. Suites d'additions et de soustractions :

Programme de calcul :

Choisir un nombre

Ajouter 7

Soustraire 9

Ajouter -2

Soustraire -4

Faire une conjecture et la prouver.

A Retenir:

Pour effectuer une suite d'additions et de soustractions de nombres relatifs, on peut la transformer en une suite d'additions, alors :

- 1. les opposés se neutralisent*
- 2. on peut regrouper les négatifs entre eux et les positifs entre eux,*

7) Notation $-x$

On donne aux élèves les deux programmes de calcul suivants :

<p><u>Programme 1 :</u> Choisir un nombre Prendre son opposé Ajouter 10</p>	<p><u>Programme 2 :</u> Choisir un nombre L'enlever de 10</p>
---	---

Faire fonctionner ces deux programmes de calcul avec les nombres 7 ; 15 ; -4 ; -27
Que constatez vous ?

Les élèves ont déjà rencontré des programmes de calcul, ils ont donc l'habitude de les traduire par des expressions littérales. Cette fois ci ils peuvent le faire mais seulement en utilisant la notation $opp(x)+10$ pour le programme 1.

a) *Le programme 1 se traduit par l'expression $opp(x) + 10$.*

Le programme 2 se traduit par l'expression $10 - x$.

$10 - x = 10 + opp(x)$ en utilisant la définition de la soustraction de deux relatifs et la commutativité de l'addition.

On a ainsi démontré que les deux programmes reviennent au même.

b) *Le professeur va à cette occasion introduire la notation $(-x)$ et proposer la justification suivante :*

Quand on a introduit les nombres négatifs, on avait $7 - 9 = 5 - 7 = 3 - 5 = \dots = 0 - 2$

On a convenu de noter ce nombre -2 .

De la même façon : $x + opp(x) = 0$ donc $opp(x) = 0 - x$

On notera donc $opp(x) = -x$

Il est important de signaler aux élèves le changement de statut du signe $-$ qui de signe de soustraction devient le symbole de l'opposé d'un nombre.

c) *On revient alors aux programmes de calcul, on peut désormais écrire*

$$10 - x = 10 + (-x) = -x + 10$$

***À Retenir :* Le signe $-$ peut avoir trois significations différentes selon les cas :**

- *Le signe d'un nombre négatif, par exemple (-3)*
- *Le signe d'une soustraction, par exemple $5 - 8$*
- *Le signe qui indique l'opposé, par exemple $-x$*

Le professeur propose enfin un tableau à compléter :

x	3	-4			-0,2
$-x$			7	1,5	

Il attire l'attention des élèves sur le fait que $-x$ peut être positif quand x est négatif.

Thème 6 : Travail sur les égalités



L'objectif de ce travail est de montrer qu'il y a plusieurs écritures possibles pour un même nombre et qu'elles peuvent toutes avoir une utilité selon la question posée. Il faut donc apprendre à changer d'écriture selon le problème.



Le signe = entre ces différentes écritures ne signifie plus que l'on donne le résultat d'un calcul, comme certains élèves le pensent. On veut ici insister sur son caractère symétrique, très utile pour résoudre des équations par exemple. Une égalité n'a pas de sens de lecture privilégié.

Situation 1 :

Etape 1 : Combien de nombres y a-t-il dans ce cadre ?

$4 \times \frac{1}{3}$		$1 + \frac{1}{3}$		$\frac{11}{6} + \frac{7}{6}$
	$\frac{12}{4}$			
			$\frac{9}{3}$	
		$9 \times \frac{1}{3}$		$1 - \frac{1}{4}$
	$\frac{3}{4}$			
			$\frac{75}{100}$	
$\frac{16}{12}$		$\frac{4}{3}$		
				$\frac{9}{12}$

Certains élèves comptent les écritures : ils répondent 12.

Certains comptent les nombres entiers, ils répondent 30. Pour $\frac{9}{3}$ cela fait deux nombres ...

Certains font remarquer qu'il y a des nombres égaux, il ne faut donc les compter qu'une fois. Cette remarque a différents sens selon les élèves, certains ont compris que $\frac{9}{3}$ et $\frac{12}{4}$ par exemple représentent

le même nombre. D'autres répondent qu'il y a 11 nombres (par exemple pour $\frac{9}{3} = \frac{12}{4} = 9 \times \frac{1}{3}$, ils comptent 5 nombres 9,3,12,4 et 1.) Ils comptent les entiers différents qui composent les écritures.

Cela amènera le professeur à revenir sur le statut de nombre d'une fraction (voir 6^{ème}).

La classe se met donc à rechercher parmi ces écritures celles qui représentent des nombres égaux.

Lors de la mise en commun des résultats, on établira le bilan suivant pour cette première étape.

Il y a trois nombres :

$$a = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = 9 \times \frac{1}{3} = \frac{11}{6} + \frac{7}{6} \quad b = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{16}{12} \quad c = \frac{3}{4} = \frac{9}{12} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{75}{100}$$

Etape 2 : En utilisant les résultats ci dessus, répondre aux questions suivantes.

Justifier la réponse en précisant pour chaque question l'écriture utilisée.

1. L'un de ces nombres est un entier, lequel ?
2. Calculer $a + 3477$
3. Comparer les nombres b et c avec 1.
4. Comparer les nombres a et b entre eux.
5. Ajouter les nombres b et c
6. Soustraire les nombres a et b
7. Placer le nombre b sur une droite graduée.
8. Trouver une écriture décimale du nombre c
9. Calculer $a + \frac{1}{6}$
10. Diviser b par 4

Pour cette partie, on pourra mettre les élèves par deux afin que lors de la mise en commun, il s'installe entre eux une discussion sur la meilleure écriture à choisir pour chaque question.

Situation 2 :

Etape 1 : « programmes de calcul conduisant à une égalité vraie pour tout nombre »

a) Voici un programme de calcul :

Choisir un nombre

Calculer son double

Calculer son triple

Additionner les deux résultats précédents

Diviser par 5

Ecrire le résultat

Appliquer ce programme de calcul avec un nombre. Recommencer deux fois.

Quelle conjecture peut-on faire ?

Les élèves remarquent que l'on retrouve toujours le nombre choisi au départ. $\frac{2x+3x}{5} = x$
Ceci est une égalité vraie pour tout x . Les élèves peuvent le justifier.

b) Voici un autre programme de calcul

Choisir un nombre
Calculer son double
Calculer son triple
Additionner les deux résultats précédents
Diviser par le nombre choisi au départ
Ecrire le résultat

Appliquer ce programme de calcul avec le nombre 5
Pouvez vous faire la même conjecture qu'avec le programme précédent ?

Les élèves remarquent que l'on retrouve 5. Mais cette fois le résultat est constant. Quel que soit le nombre x choisi au départ le résultat sera toujours 5 puisque le programme peut s'écrire

$\frac{2x+3x}{x} = 5$ Ceci est encore une égalité vraie pour tout x (non nul). Les élèves peuvent le justifier.

Etape 2 : Egalité parfois vraie parfois fausse :

1) On considère l'égalité $x(8-x) = 15$
Cette égalité est-elle vraie pour $x=0$? $x=1$? $x=2$? $x=3$? $x=4$? $x=5$?

Certains élèves s'arrêtent à $x=3$ pensant avoir trouvé LA solution : ils pensent qu'il ne peut y en avoir qu'une.

En 4^{ième} on pourra aussi proposer la situation suivante
Calculer $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ pour $x=1$; $x=2$; $x=3$
Que peut-on en déduire ?

Le polynôme est construit de la manière suivante $(x-1) \times (x-2) \times (x-3)$ et n'a donc pas d'autres racines que 1, 2, 3 contrairement à ce que certains élèves pourraient généraliser.

2) Pour un collège, le foyer dispose de 200 pour acheter des BD à 5 et des CD à 15 chacun. Quelles sont les différentes possibilités d'achat de BD et de CD par le foyer ?

Les élèves raisonnent par tâtonnement et trouvent plusieurs solutions. Il y a 13 couples solutions. Cela revient à trouver x et y tels que $15x + 5y = 200$ avec x et y nombres entiers positifs.

Etape 3 :

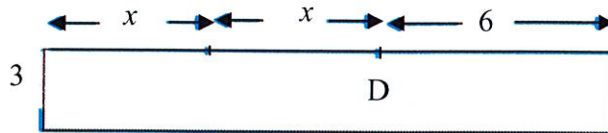
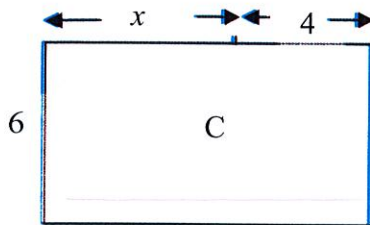


4^{ème} partie
page 108

Tester une égalité en utilisant les notions d'aire et de périmètre d'un rectangle.

Les trois situations proposées permettent de tester des égalités tout en différenciant les notions d'aire et de périmètre.

Exercice : Voici deux rectangles



Ecrire les aires et périmètres de chacun des deux rectangles.

a) Un élève se demande si les deux rectangles peuvent avoir la même aire. Qu'en pensez-vous ?

b) Calculer le périmètre des deux rectangles lorsque $x = 1$. Que remarquez-vous ?

Un autre élève se demande s'il est toujours vrai que les deux rectangles ont le même périmètre.

Qu'en pensez-vous ?

A Retenir :

Une égalité contenant des lettres peut être vraie pour toutes les valeurs données aux lettres : on l'appelle identité.

$$k \times a - k \times b = k \times (a - b)$$

$$\frac{2x + 3x}{5} = x$$

D'autres égalités contenant des lettres peuvent être parfois vraies parfois fausses selon les valeurs données aux lettres : on les appelle équations.

$$5x + 7 = 12 \quad (\text{vraie pour } x = 1, \text{ fausse pour toutes les autres valeurs de } x)$$

$$15x + 5y = 200 \quad (\text{vraie pour } x = 8 \text{ et } y = 16 \text{ par exemple})$$

Thème 7 : Equations

1) Résolution d'équations :

Situation 1 : Programmes de calcul

Programme 1
Choisir un nombre
Multiplier par 5
Rajouter 111

- a) Si le nombre de départ est 13, quel est le résultat final ? Et si le nombre de départ est 5,7 ?
b) Le résultat final est 188, quel était le nombre de départ ?

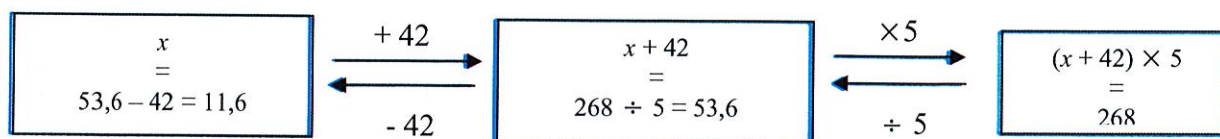
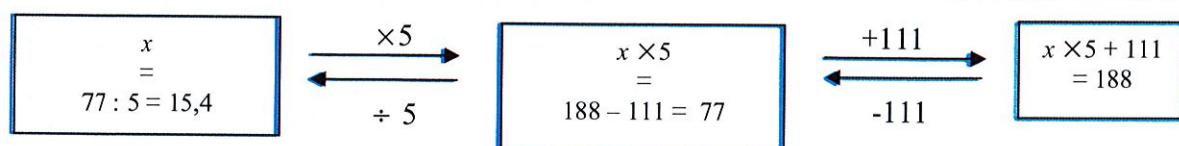
Programme 2
Choisir un nombre
Ajouter 42
Multiplier le résultat par 5

- a) Si le nombre de départ est 8,3 quel est le résultat final ?
b) Le résultat final est 355, quel était le nombre de départ ? Et si le résultat final est 268 ?

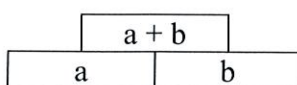
Pour les élèves qui ont du mal à résoudre ces exercices, on peut proposer les schémas suivants qui vont les aider à comprendre.

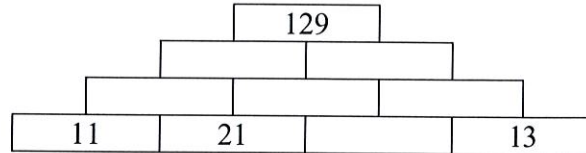
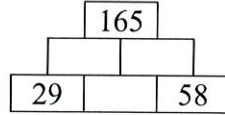
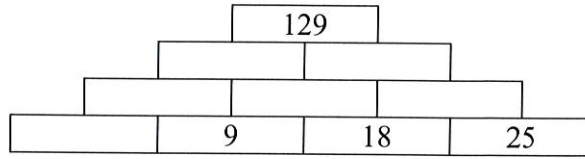
A la première ligne, est indiquée la procédure qui a servi à obtenir l'expression dont on connaît la valeur finale. La deuxième ligne, montre les opérations nécessaires pour revenir au nombre de départ. Le schéma se lit pour la première ligne de gauche à droite, puis pour la deuxième ligne de droite à gauche.

Le professeur fait un schéma au tableau et l'explique en même temps aux élèves.



Situation 2 : Complète chaque pyramide, chaque nombre est la somme des deux qui sont situés dans les deux cases en dessous.





- La première pyramide peut être complétée sans faire intervenir de lettres, par soustractions.
- Pour la deuxième, certains élèves font des calculs arithmétiques, parfois non formalisés, qui correspondent aux calculs effectués lorsqu'on résout l'équation si on met une lettre.

$$29 + 58 = 87 \quad 165 - 87 = 78 \quad 78 \div 2 = 39$$

Certains imaginent, sans le formaliser, que le nombre inconnu va apparaître une fois dans chaque case de la deuxième ligne donc deux fois au sommet.

Ils font un raisonnement pré algébrique avec des phrases, sans utiliser de lettres.

- Pour la troisième pyramide, ils essaient de refaire le même raisonnement mais il est beaucoup plus difficile d'imaginer que le nombre inconnu va apparaître trois fois au sommet et de deviner ce qu'il faut enlever.

Le fait de remplacer le nombre inconnu par une lettre facilite le travail.

Situation 3 :

Quel nombre faut-il ajouter à 28 pour obtenir 96 ?
 Quel nombre faut-il retrancher à 123 pour obtenir 79 ?
 Par quel nombre faut-il multiplier 34 pour obtenir 408 ?
 A quel nombre faut-il soustraire 57 pour obtenir 142 ?
 Quel nombre faut-il diviser par 28 pour obtenir 73 ?

Pour répondre à ces questions, il n'y a pas de difficulté majeure.

Les élèves traduisent la phrase par une opération à trou qu'il faut compléter.

Ils ont déjà rencontré ce type de travail en sixième.

$$\begin{aligned} 28 + \dots &= 96 \\ \dots - 57 &= 142 \\ 123 - \dots &= 79 \\ 34 \times \dots &= 408 \\ \dots \div 28 &= 73 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 96 - 28 &= \dots \\ 142 + 57 &= \dots \\ 123 - 79 &= \dots \\ 408 \div 34 &= \dots \\ 73 \times 28 &= \dots \end{aligned}$$

Situation 4 : A propos de l'équation $\frac{a}{x} = b$:



La résolution d'équations de ce type sera utile pour le théorème de Thalès et le cosinus en quatrième et troisième.

L'objectif de cette étape est de faire le lien entre la division et la multiplication :

$$\frac{a}{x} = b \text{ équivaut à } b \times x = a$$

Consigne 1 : Dans un premier temps, le professeur distribue un problème différent à chaque élève (deux ou trois élèves peuvent avoir le même), et dit : tu es chargé de résoudre l'exercice n°. que tu iras corriger au tableau.

Dans un deuxième temps, avant la correction, le professeur distribue l'ensemble des 8 énoncés à tous les élèves et leur laisse quelques minutes pour chercher les autres problèmes. Il leur demande quelles sont les ressemblances et les différences entre ces problèmes.

1. Par quel nombre faut-il diviser 1305 pour trouver 45 ?
2. Complète l'égalité : $1305 \div \dots = 45$
3. On a partagé 1305 bonbons entre les élèves d'une classe. Chaque élève a 45 bonbons. Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ?
4. Complète la division à trou :

$$\begin{array}{r|l} 1305 & \dots \\ 0 & 45 \end{array}$$

5. Trouve la valeur de x tel que : $\frac{1305}{x} = 45$
6. Complète l'égalité $45 \times \dots = 1305$
7. On a partagé 1305 bonbons entre 45 élèves de sixième. Combien chaque élève a-t-il eu de bonbons ?
8. On a acheté 45 objets identiques et on a payé 1305 €. Combien coûte un objet ?

Choix des problèmes : Nous avons choisi deux problèmes 3 et 7 qui se ressemblent, mais le calcul demandé correspond pour l'un au nombre de parts et pour l'autre à la valeur d'une part. Le raisonnement mis en œuvre n'est pas tout à fait le même.

Gestion du bilan : Un élève va au tableau corriger chaque exercice. S'il y a lieu, deux élèves ayant trouvé des démarches différentes pour un même problème pourront les proposer. Par exemple, pour le problème 6, certains posent la division, alors que d'autres font des essais à l'aide de multiplications.

L'intérêt de ce travail est de voir quelles méthodes les élèves vont utiliser pour résoudre les différents problèmes, comment ils vont transformer le problème 1 pour le mettre sous la forme du problème 4, ou bien le problème 5 pour le mettre sous la forme du problème 6.

Les élèves vont s'apercevoir que tous les exercices se ramènent à la même division.

Bilan : Les deux équations $\frac{1305}{x} = 45$ et $45 \times x = 1305$
ont la même solution $x = \frac{1305}{45}$

Consigne 2 : Voici 4 exercices, résous les.

1. Par quel nombre faut-il diviser 55,5 pour trouver 1,5 ?
2. Complète l'égalité : $\frac{\dots}{45} = 17$
3. Résous le problème : On a partagé 390 bonbons entre les élèves d'une classe. Chaque élève a 15 bonbons. Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ?
4. Complète l'égalité : $\frac{7,68}{x} = 3,2$

Cette fois-ci on a glissé un intrus parmi les exercices.

Dans l'exercice 2, l'énoncé ressemble à ceux des autres exercices mais pour trouver la solution, il faut faire une multiplication.

A Retenir :

Pour résoudre l'équation : $\frac{390}{x} = 15$

Pour résoudre l'équation : $\frac{x}{390} = 15$

On calcule : $x = \frac{390}{15}$

On calcule : $x = 390 \times 15$

Situation 5 : Trouver la valeur de la lettre qui rend l'égalité vraie dans chaque cas.

$$5 \times a = 335$$

$$89 + y = 106$$

$$\frac{9}{x} = 6$$

$$12 \times b = 0$$

$$3 + a = 2$$

$$\frac{x}{21} = 3$$

$$x + 17 = 10$$

$$y - 7,3 = 12$$

$$9 \times x = 9$$

$$21 - x = 27$$

$$5 + x = -3,5$$

$$y - 8792 = 303$$

$$3 - x = -7$$

$$4,2 - a = 0,6$$

$$11x = 7$$

Les élèves résolvent depuis longtemps ce type d'équation sans le savoir sous forme d'égalités à trous, en utilisant les définitions des opérations.

Pour certains des exemples donnés ici, il est nécessaire d'avoir travaillé sur les nombres relatifs.

A Retenir :

$5,2 + x = 12,8$ $x = 12,8 - 5,2$	<i>Une équation du type $a + x = b$ a pour solution : la différence $b - a$</i>				
$25 \times y = 12$ $y = \frac{12}{25}$	<i>Une équation du type $a \times x = b$ a pour solution : le quotient $\frac{b}{a}$</i>				
$\frac{51}{x} = 17$ $17 \times x = 51$ $x = \frac{51}{17}$	<i>Dans une équation du type $\frac{a}{x} = b$ b est le quotient de a par x. Cela revient à écrire</i> $b \times x = a$ <table style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">a</td><td style="padding-left: 5px;">x</td></tr><tr><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">0</td><td style="padding-left: 5px;">b</td></tr></table>	a	x	0	b
a	x				
0	b				

Remarque :

Ce thème sur les égalités et les équations peut être traité au travers des différents chapitres du programme de 5^{ème} dans lesquels on trouvera des exemples d'applications.

Exercices :

Un nombre augmenté de 13 est égal au double de 45. Quel est ce nombre ?

Le triple d'un nombre est égal à la moitié de 108. Quel est ce nombre ?

Par combien faut-il diviser 132 pour obtenir le tiers de 36 ?

2) Mise en équation de problèmes

Cet exercice permet aux élèves de s'entraîner à mettre un problème en équation. Le travail avait été amorcé en 6^{ème} (thème 8 exercice 3)

Dans chaque problème il y a deux inconnues, c'est pourquoi nous imposons une lettre pour désigner le prix du stylo. Sinon, des élèves pourraient prendre deux lettres et ils ne sauraient pas résoudre.

Par exemple dans le 1^{er} cas :

p : le prix du stylo et m le prix du marqueur

$$p + m = 10,5 \text{ et } m = 2 \times p$$

Clara achète un stylo qui coûte p euros. Elle a assez d'argent pour un deuxième article :

1^{er} cas : Elle achète un marqueur qui vaut le double du prix du stylo et paie pour l'ensemble 10,5 .
Ecrire l'équation permettant de trouver le prix du stylo (et du marqueur).

2^{ème} cas : Elle achète une trousse qui coûte 4 de plus que le stylo et paie pour l'ensemble 10 .
Ecrire l'équation permettant de trouver le prix du stylo.(et de la trousse)

3^{ème} cas : Elle achète une pochette de crayons de couleur qui vaut le triple du prix du stylo et paie pour l'ensemble 15 .
Ecrire l'équation permettant de trouver le prix du stylo.(et des crayons de couleur)

4^{ème} cas Elle achète un cahier qui coûte 1 de moins que le stylo et paie pour l'ensemble 7 .
Ecrire l'équation permettant de trouver le prix du stylo (et du cahier).

5^{ème} cas : Elle achète un cartable qui vaut 5 fois plus cher que le stylo et paie pour l'ensemble 27 .
Ecrire l'équation permettant de trouver le prix du stylo.

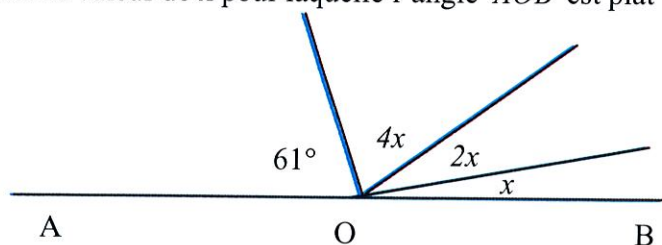
6^{ème} cas : Elle achète une gomme qui coûte la moitié du prix du stylo et paie pour l'ensemble 5,85 .
Ecrire l'équation permettant de trouver le prix du stylo.

7^{ème} cas : Elle achète un crayon à papier qui coûte quatre fois moins cher que le stylo et paie pour ce crayon 0,55 .
Ecrire l'équation permettant de trouver le prix du stylo.

3) Applications à la mesure :

Exercice n°1 :

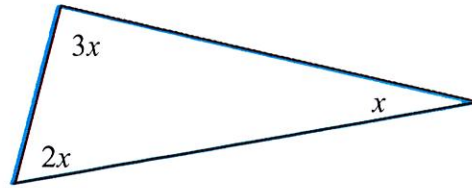
Trouver la valeur de x pour laquelle l'angle \widehat{AOB} est plat ?



Pour les exercices 2 et 3 il faut avoir vu la somme des angles d'un triangle.

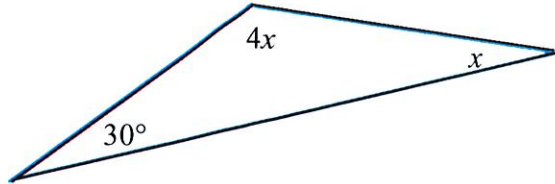
Exercice n°2 :

Que peut-on dire de ce triangle ? Justifier.



Exercice n°3 :

Que peut-on dire de ce triangle ? Justifier.



Exercice n°4 :

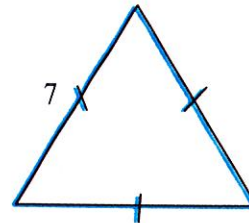
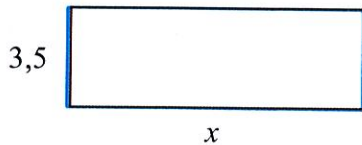
Ce rectangle est formé de trois carrés identiques

Trouver la longueur des cotés des carrés pour laquelle le périmètre du rectangle est 128 cm



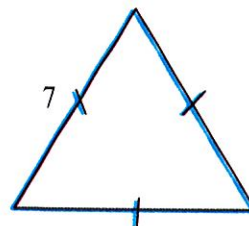
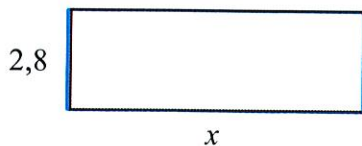
Exercice n°5 :

a) Pour quelle valeur de x ce rectangle et ce triangle ont le même périmètre ?



Cet exercice peut se résoudre mentalement. Les deux largeurs ajoutées font 7, soit un des côtés du triangle. Il reste deux côtés donc $x = 7$.

b) Pour quelle valeur de x ce rectangle et ce triangle ont le même périmètre?

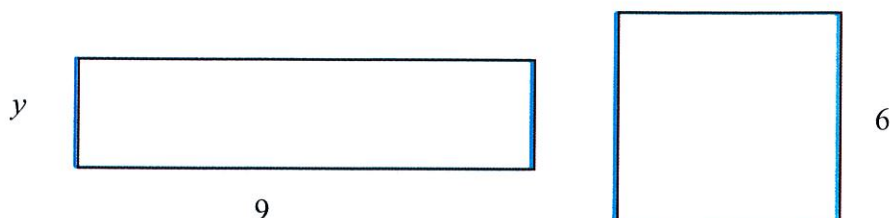


C'est le même texte que ci-dessus avec 2,8 au lieu de 3,5.

La résolution devient plus compliquée à mettre en œuvre mentalement. Les élèves utilisent l'algèbre de façon plus ou moins implicite. D'abord ils calculent $7 \times 3 = 21$ puis $21 - 2,8 \times 2 = 21 - 5,6 = 15,4$.

Puis ils écrivent directement $2x = 15,4$.

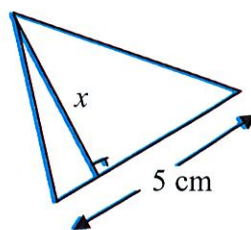
c) Pour quelle valeur de y ce rectangle et ce carré ont la même aire ?



Exercice n°6 :

On sait que l'aire de ce triangle est 15 cm^2 .

Quelle est la hauteur cherchée ?



L'enseignant peut explicitement demander aux élèves d'écrire les équations si elles ne sont pas apparues et les inciter à vérifier en remplaçant les lettres par les valeurs.

4) La division euclidienne

1. Egalité de division ?

Voici trois égalités : $35 \times 27 + 16 = 961$ $47 \times 58 + 51 = 2777$ $21 \times 36 + 47 = 803$

Pouvez vous sans aucun autre calcul deviner les quotients et les restes des divisions suivantes :

$$961 \overline{) 35}$$

$$961 \overline{) 27}$$

$$2777 \overline{) 47}$$

$$2777 \overline{) 58}$$

$$803 \overline{) 21}$$

$$803 \overline{) 36}$$

Quand cela n'est pas possible, expliquer pourquoi ?

Dans cette situation, on revient sur le reste d'une division euclidienne. Il est important de souligner ce point pour comprendre la suite.

Cet exercice a été proposé dès la sixième.

2. Retrouver les diviseurs manquants dans les divisions suivantes.

$$\begin{array}{r} 339 \overline{) \dots} \\ 17 \overline{) 23} \end{array} \quad \begin{array}{r} 339 \overline{) \dots} \\ 17 \overline{) 14} \end{array} \quad \begin{array}{r} 242 \overline{) \dots} \\ 21 \overline{) 17} \end{array} \quad \begin{array}{r} 242 \overline{) \dots} \\ 21 \overline{) 13} \end{array}$$

Les égalités sont $339 = 23 \times 14 + 17$ et $242 = 13 \times 17 + 21$

Les élèves calculent $339 : 23$ ils trouvent 14 comme diviseur et 17 comme reste.

Puis ils font $339 : 14$ et ne trouvent pas 23 comme quotient mais 24! Ils se rendent compte alors que le problème vient du reste 17 qui est plus grand que 14.

Certains proposent alors de faire d'abord $339 - 17$ pour disent-ils « se débarrasser du reste, on est sûr d'avoir ainsi une division dont le reste est zéro ».

Pour les deux dernières divisions, il faut procéder ainsi sinon le quotient trouvé n'est pas le bon.

Le professeur peut alors proposer le bilan suivant en écrivant les divisions à l'aide d'égalités :

$$339 = 23 \times \dots + 17$$

Bilan : Pour retrouver le nombre manquant, on peut faire les calculs suivants

$$339 - 17 = 322 \text{ et } 322 : 23 = 14$$

L'écriture en ligne de la solution n'arrive pas spontanément de la part des élèves pourtant elle est intéressante car elle permet de s'approcher, sur un exemple, de la méthode de résolution d'une équation de la forme $ax + b = c$.

On s'arrêtera là, volontairement car donner une méthode systématique de résolution peut créer un obstacle pour la résolution d'équations plus compliquées en quatrième. Le point de vue adopté ici utilise la définition des opérations, ce sera différent quand l'inconnue figurera des deux côtés du signe = en quatrième.

Exercice : On donne la division suivante :

$$\begin{array}{r} 11574 \overline{) 125} \\ 74 \overline{) 92} \end{array}$$

De combien peut on augmenter le dividende sans changer ni le diviseur ni le quotient ?

De combien peut on le diminuer ? Quel sera alors le reste ?

**Quatrième partie :
Trois situations clés pour la classe de cinquième.**

Situation 1 : Le 4x4

Niveau : fin de 6^{ème} ou début 5^{ème}

Dans le cas où cette situation est traitée en fin de 6^{ème}, toutes les expressions sont écrites avec des parenthèses même inutiles et on ne fait pas le bilan de l'étape 1.

Objectifs :

- usage des parenthèses dans une expression numérique
- priorité des opérations (**pas pour la sixième**)
- démontrer des conjectures à l'aide d'expressions numériques

Etape 1 :

Ecrire tous les entiers de 0 à 9 à l'aide d'une expression contenant quatre fois le nombre 4. On pourra utiliser les quatre opérations, éventuellement plusieurs fois la même.

Pour faciliter la compréhension de la consigne, on écrit au tableau :

$$4...4...4...4 = 0$$

$$4...4...4...4 = 1$$

On peut préciser aux élèves qu'ils peuvent utiliser des parenthèses ou bien ne pas le préciser. Si oui, vont-ils s'autoriser à mettre des parenthèses même si on ne l'a pas dit ? Si non, ne va t'on pas trop les guider en induisant la nécessité des parenthèses ? (surtout pour la 5^{ème})

Les élèves cherchent à écrire les entiers de 0 à 9 dans un premier temps, sans calculatrice. Certains nombres sont plus difficiles à trouver que d'autres, soit parce que les élèves ne pensent pas à $4 : 4 = 1$ ou parce qu'ils ne pensent pas à mettre des parenthèses.

Pour débloquer la situation, au bout d'un temps de recherche, on demande à la classe de proposer les solutions trouvées pour zéro.

exemples :

$$(4 + 4) - (4 + 4) = 0$$

$$4 + 4 - 4 - 4 = 0$$

$$4 - 4 + 4 - 4 = 0$$

$$(4 \times 4) - (4 \times 4) = 0$$

$$4 : 4 - 4 : 4 = 0$$

etc.

A Retenir :

Dans une expression numérique, on peut mettre des parenthèses, elles se calculent alors en premier.

Le professeur relance ensuite la recherche, puis au bout de quelques minutes on peut autoriser l'usage de la calculatrice, ou mettre les élèves par groupes de deux (sans calculatrice) ce qui accélère la recherche.

Si la calculatrice est autorisée, il arrive assez souvent que les élèves trouvent des expressions donnant des calculs utilisant des nombres négatifs.

Par exemple : $4 - 4 - 4 + 4 = 0 - 4 + 4 = 0$

Le professeur leur dit alors que l'on ne veut pas s'y intéresser dans cette activité, bien que début 5^{ème}, les élèves aient peut-être déjà rencontré des écritures de ce type.

Au bout d'un temps de recherche, on autorise la calculatrice, pour vérifier les expressions déjà trouvées et chercher les autres.

Certains élèves s'aperçoivent alors que les expressions qu'ils ont trouvées ne donnent pas le résultat prévu : ils font les calculs dans l'ordre, sans tenir compte des priorités des opérations et sans mettre de parenthèses.

On pose alors le problème à la classe :

$4 + 4 : 4 + 4 = 9$ et non 6.

Quel calcul fait la calculatrice ?

Certains ont mis des parenthèses autour de $4 : 4$, ils ont le bon résultat, on peut en déduire que la calculatrice calcule d'abord la division. (en sixième, il faut donc obligatoirement mettre des parenthèses)

Comment faire pour que la première opération soit $4 + 4$?

On met des parenthèses autour des calculs que l'on veut voir effectués en premier

Le professeur peut alors donner la règle de priorité des opérations .

A Retenir : règles de priorités

- 1- Dans une suite de calculs, il faut d'abord effectuer les calculs entre parenthèses.
- 2- Dans une suite de calculs sans parenthèses, il faut effectuer les multiplications et les divisions avant les additions et les soustractions. On dit que les multiplications et les divisions sont prioritaires sur les additions et les soustractions.
- 3- Si la suite de calculs sans parenthèses ne comporte que des additions et des soustractions, on effectue les calculs dans l'ordre de la gauche vers la droite.
On peut rajouter
- 4- Si la suite de calculs sans parenthèses ne comporte que des multiplications et des divisions, on effectue les calculs dans l'ordre de la gauche vers la droite.

On termine alors l'étape 1 en appliquant ces règles de priorité, on peut valider les expressions proposées par les élèves.

Etape 2 :

Pour les expressions suivantes, trouve t-on toujours le même résultat si on remplace les 4 par des 5 ou des 6 ?

Si on ne trouve pas le même nombre, peut-on prévoir le résultat ?

Vos conjectures sont-elles encore vraies si on remplace les 4 par n'importe quel nombre ?

L'objectif de cette étape est d'introduire l'usage des lettres pour prouver des conjectures.

Remarque : Le professeur choisit quelques expressions parmi celles proposées par les élèves à l'étape 1. Faire le travail pour toutes les expressions serait long et fastidieux et parfois difficile pour certaines.

Par exemple : $5 = (4 \times 4 + 4) : 4$ d'où en généralisant $(a \times a + a) : a = \frac{a^2 + a}{a} = a + 1$.

Les élèves remplacent les 4 par 5 puis 6 et refont les calculs. Ils conjecturent que pour les trois premières expressions, on trouve toujours le même résultat et pour les suivantes, on peut prévoir. Pour la quatrième, on trouve le nombre choisi au départ et pour la dernière, on trouve deux fois ce nombre.

Le professeur suggère alors d'appeler a un nombre inconnu fixé et de remplacer les 4 par a dans les expressions ci dessus.

Expression proposée	Généralisation	A Retenir
$(4 - 4) + (4 - 4) = 0$	$(a - a) + (a - a)$ $= 0 + 0$ $= 0$	$a - a = 0$
$(4 - 4) + 4 : 4 = 1$	$(a - a) + a : a$ $= 0 + 1$ $= 1$	$a : a = \frac{a}{a} = 1$
$4 : 4 + 4 : 4 = 2$	$a : a + a : a$ $= 1 + 1$ $= 2$	
$(4 - 4) \times 4 + 4 = 4$	$(a - a) \times a + a$ $= 0 \times a + a$ $= 0 + a$ $= a$	$0 \times a = 0$ $0 + a = a$
$(4 - 4) : 4 + 4 = 4$	$(a - a) : a + a$ $= 0 : a + a$ $= 0 + a$ $= a$	$0 : a = \frac{0}{a} = 0$ pour $a \neq 0$
$(4 : 4) \times 4 + 4 = 8$	$(a : a) \times a + a$ $= 1 \times a + a$ $= a + a$ $= 2 \times a$	$1 \times a = a$ $a + a = 2 \times a$

A Retenir :

Pour n'importe quel nombre a :

$$\begin{array}{ccccccc} a - a = 0 & \frac{a}{a} = a : a = 1 & 0 \times a = 0 & \frac{0}{a} = 0 & \frac{a}{1} = a \\ 0 + a = a & 1 \times a = a & a + a = 2 \times a & & \end{array}$$



Ces expressions paraissent anodines, elles figurent rarement dans les bilans des manuels. Mais on les utilise très souvent pour simplifier des expressions littérales, surtout à partir de la quatrième.

Par exemple on les utilise pour les calculs suivants où il est important d'expliciter la démarche, au moins au début de l'apprentissage.

$$x + 4 - x = (x - x) + 4 = 0 + 4 = 4$$

$$\frac{x}{3x} = \frac{x \times 1}{x \times 3} = \frac{1}{3}$$

$$x^2 + x = x \times x + x \times 1 = x(x + 1)$$

$$\frac{3x}{x} = 3 \times \frac{x}{x} = 3 \times 1 = 3$$

$$4x - x = 4 \times x - 1 \times x = (4 - 1) \times x = 3 \times x = 3x$$

Pour le professeur, voici des exemples de solutions de l'étape 1 :

Il existe de nombreuses autres possibilités pour certains entiers, voici une expression pour chaque entier de 0 à 9.

$$(4 + 4) - (4 + 4) = 0$$

$$(4 \times 4 + 4) : 4 = 5$$

$$(4 - 4) + 4 : 4 = 1$$

$$(4 + 4) : 4 + 4 = 6$$

$$4 : 4 + 4 : 4 = 2$$

$$(4 \times 4) : 4 + 4 = 8$$

$$(4 + 4 + 4) : 4 = 3$$

$$4 + 4 : 4 + 4 = 9$$

$$(4 - 4) \times 4 + 4 = 4$$

Situation 2 : Echanger des programmes de calcul.

*Objectif : Traduire un programme de calcul par une écriture littérale.
Gérer l'usage des lettres et des parenthèses.*

Etape 0 :

En classe entière, faire fonctionner un programme de calcul avec plusieurs nombres choisis par le professeur puis par les élèves.

Programme 0 : Choisir un nombre
Le multiplier par 3
Ajouter 4
Diviser le résultat par 10

Faire fonctionner ce programme pour les nombres 2 ; 1,4 ; -1 ; 1/3 puis pour un nombre de votre choix.

Etape 1 : situation de communication

Les élèves sont par groupes de deux, chaque groupe a un programme 1 ou 2.
Chaque groupe ayant un programme 1 est apparié avec un groupe ayant un programme 2 (il y a donc un nombre pair de groupes).

Vous devez traduire ce programme de calcul par un message ne contenant aucun mot.

Vous envoyez ce message au groupe auquel vous êtes appariés. Ils doivent retrouver votre programme de calcul, le réécrire en français et vous le renvoyer.

Vous vérifierez que c'est bien le même programme que celui que vous aviez au départ, éventuellement en le faisant fonctionner pour des nombres de votre choix.

Les élèves s'échangent les messages par l'intermédiaire du professeur uniquement, qui joue le rôle du facteur, il n'y a aucune communication orale entre les groupes.

Pour l'aspect pratique, les élèves écrivent sur leur message leurs noms et ceux des destinataires du message. « De pour »

Programme 1

Choisir un nombre
Ajouter 4
Multiplier le résultat obtenu par 5
Enlever 12

Programme 2

Choisir un nombre
Le multiplier par 3
Ajouter 7
Diviser le résultat par 2

Étape 2 : mise en commun

Les diverses productions des groupes sont analysées au tableau, pour le programme 1. On discute pour disqualifier certaines productions incorrectes ou inadaptées.

On peut refaire plus rapidement le même travail pour le programme 2.

Exemples de productions d'élèves relevées après l'étape 1 :

<u>Programme 1</u>	<u>Programme 2</u>
A) a) $x ?$ $x + 4 \times 5 - 12$	A) $x ?$ $x \times 3$ $(x \times 3) + 7$ $(x \times 3 + 7) : 2$
ou b) y $\frac{+4}{\dots \times 5}$ -12	
B) $(c + 4) \times 5 - 12$	B) $\frac{(a \times 3) + 7}{2}$ ou $\frac{? \times 3 + 7}{2}$
C) ? $? + 4 = !$ $! + 5 = \bullet$ $\bullet - 12 =$	C) $A = 0, 1, 2, 3, \dots, 100, \dots, 1000$ $A \times 3 = B$ $B + 7 = C$ $C : 2$
D) (1,2,3,4...etc.) $\dots + 4 = x$ $x \times 5 = b$ $b - 12$	D) (1,2,3,4,...) $(\dots \times 3 + 7)$ $\dots : 2$
E) $(10(9,8,7,\dots) + 4 \times 5) - 12$	
F) 0,1,2,3,4.... + 4 $(4 \times 5) - 12$	

Remarques faites avec les élèves:

- On disqualifie la proposition F) pour le programme 1 car le programme doit être valable pour n'importe quel nombre, il ne faut pas remplacer le nombre choisi par une valeur.
- On disqualifie les propositions A) et E) pour le programme 1 qui sont incorrectes du point de vue de l'usage des parenthèses.

- On discute sur l'inutilité des listes de nombres qui de toute façon ne pourront pas être complètes. Elles ne contiennent que des nombres entiers, le plus souvent inférieurs à 10, ce qui a conduit un des groupes à proposer dans la réponse « choisir un nombre entier entre 1 et 10 ».
- Dans la proposition D) pour le programme 2 le même symbole « ... » désigne à chaque ligne des nombres différents. Cela peut prêter à confusion, on préférera la proposition C) qui attribue un nom différent à chaque nombre.
- *Il est recommandé de ne pas faire l'étape 0 dans la même séance car le souvenir de la consigne de cette étape facilite la compréhension par les récepteurs de messages mal rédigés par les expéditeurs.*
- *La disposition verticale du programme de construction n'a-t-elle pas favorisé la proposition A) b) ? On pourrait aussi donner les programmes sous la forme d'une succession de phrases disposées horizontalement.*
- *On a préféré l'infinitif « Choisir un nombre », dans l'intitulé des programmes de calcul, à « Choisis un nombre », qui avait été expérimenté précédemment et paraît inciter plus les élèves à choisir une valeur.*

Etape 3 : nouvelle situation de communication

Même dispositif que l'étape 1

Programme 3 :

Choisir un nombre
Le diviser par 2
Ajouter 4
Multiplier le résultat obtenu par 8

Programme 4

Choisir un nombre
Enlever 8
Multiplier le résultat obtenu par 2
Ajouter 4

Traduire le programme par un message ne contenant aucun mot et comportant le moins de caractères possibles.

Etape 4 : nouvelle mise en commun

Même dispositif que l'étape 2.

Remarques faites avec les élèves :

- On disqualifie les propositions du type C) ou A) qui ont trop de caractères pour privilégier la forme classique de l'expression numérique du type B). On discute sur la nécessité des parenthèses- B) programme 2- autour d'opérations prioritaires.
- Le professeur explique que l'usage d'une lettre pour désigner un nombre variable est préféré à celui d'un signe du genre ? ou !

Bilan de cette activité : Une expression littérale traduit un programme de calcul. Le nombre variable est désigné par une lettre.

Certains élèves proposent de supprimer les signes \times pour raccourcir l'expression, par exemple pour le programme 2 : $\frac{3a+7}{2}$.

On institutionnalise alors cette suppression en mettant en garde les élèves contre les dangers et en leur précisant qu'ils peuvent toujours remettre les signes \times s'ils le jugent utile.

A Retenir :

Le signe \times peut ne pas s'écrire devant une lettre ou une parenthèse.

$$3a = 3 \times a = a \times 3 \quad 5(c + 4) = 5 \times (c + 4)$$

mais $25 \neq 2 \times 5$

Situation 3 : Tester une égalité en utilisant les notions d'aire et de périmètre d'un rectangle

Les trois situations proposées ici permettent, outre le fait de différencier à nouveau les notions d'aire et de périmètre, de tester des égalités, savoir faire qui figure au programme de la classe de cinquième.

Plutôt que de consacrer un chapitre à « tester des égalités », il nous paraît plus judicieux de traiter cette partie du programme tout au long de l'année, dès que l'occasion s'en présente, au travers de problèmes de mesure, de problèmes géométriques ou de problèmes arithmétiques.

Nous rejoignons ici M. Marot et F. Moinier auteurs d'un article dans la brochure « Des mathématiques au cycle central », d'où est tirée une partie de la situation 3.

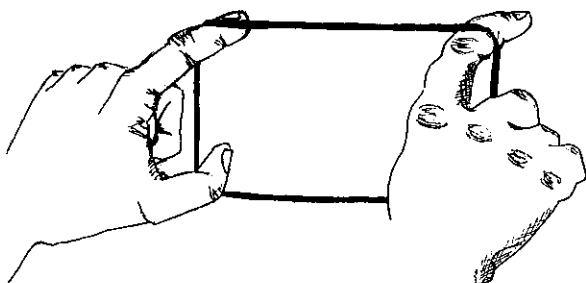
Nous présentons donc trois situations bâties autour des notions d'aire et de périmètre du rectangle. Les deux premières situations peuvent être abordées dès la classe de 6^{ème} au moment du travail sur l'aire et le périmètre, tandis que la situation 3 est plutôt réservée au niveau 5^{ème}.

En fait, ces situations peuvent être traitées à différents niveaux jusqu'à la seconde avec des prolongements divers dans le cadre algébrique et fonctionnel.

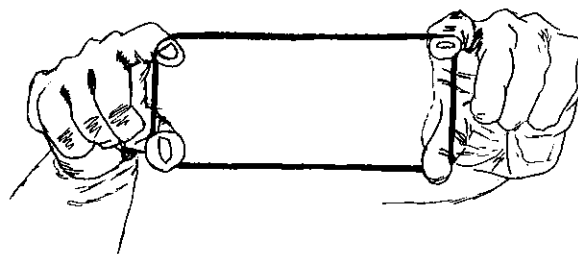
Situation 1 :

Etape 0 : ⁽¹⁾

Le professeur utilise une ficelle dont il noue les deux extrémités. A l'aide des doigts, en écartant l'index et le pouce, il forme deux rectangles de même périmètre, environ 18 cm et de dimensions assez proches.



ce que fait le professeur



ce que voit l'élève

(2)

Première question à la classe : ces deux rectangles ont une propriété commune. Laquelle ?

Le professeur fait formuler à la classe qu'ils ont le même périmètre qui est la longueur de la ficelle. Si des questionnements quant à l'aire de ces deux rectangles n'apparaissent pas dans la classe à ce moment là, le professeur pose la deuxième question.

(1) D'après Annie Berté, Mathématiques du collège au lycée, édition Nathan Pédagogie (1996) et Emma Castelnuovo, Matematica numeri e figure (tome 1), édition la Nuova Italia (1989).

(2) Dessins de Laure Desnavres.

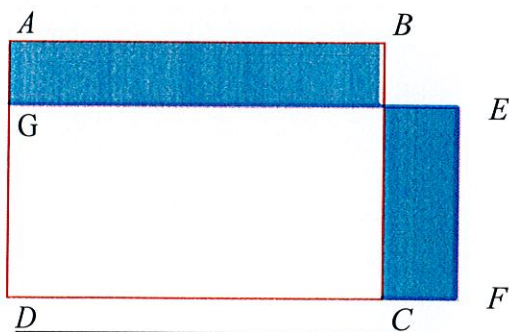
Deuxième question à la classe : ces deux rectangles ont-ils la même aire ?

Le professeur répertorie au tableau les différents arguments des élèves.

A propos de l'aire, ils disent :

- ils ont la même aire parce qu'ils ont le même périmètre.
- ils ont la même aire parce que cela se « compense », « ce que l'on perd d'un côté, on le gagne de l'autre ».

C'est la compensation des variations des dimensions entre longueur et largeur qui assure la conservation du périmètre. Les élèves la transposent à l'aire. Après plusieurs expérimentations, nous pensons qu'ils ont cette image mentale :



Le rectangle ABCD et le rectangle GEFD ont le même périmètre et les élèves pensent qu'ils ont la même aire car ils croient que les deux parties grisées ont la même aire .

Attention : ce schéma est explicatif pour le lecteur mais son usage en classe nous paraît beaucoup trop prématuré .

A ce stade de la situation , le professeur ne prend pas position, laisse les élèves dans le doute et passe à l'étape 1 .

Étape 1 : dessiner 7 rectangles différents de périmètre 18 cm. Indiquer leurs dimensions. On utilisera du papier quadrillé 0,5 cm sur 0,5 cm .

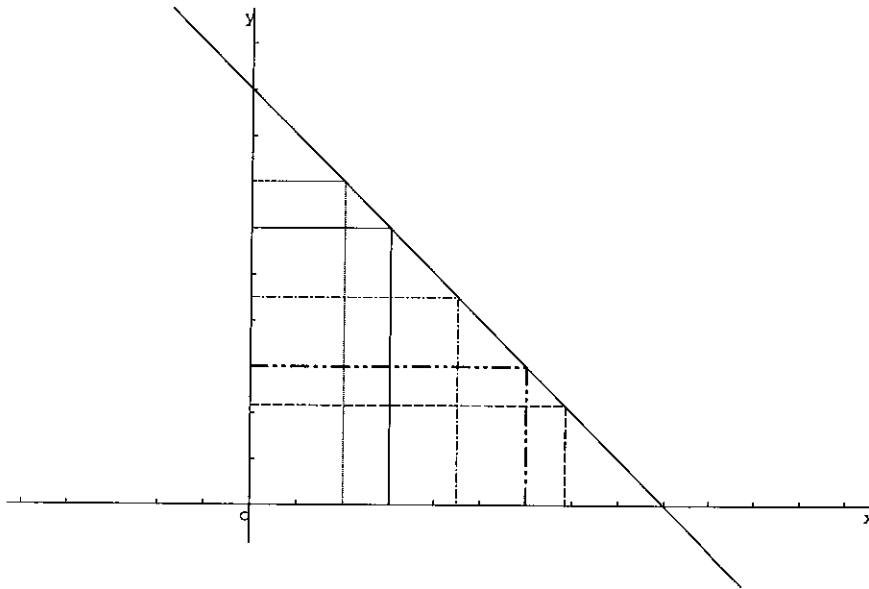
La classe travaille ainsi sur une équation à deux inconnues $a + b = 9$

Quatre rectangles sont « faciles » à trouver : 5 sur 4 , 6 sur 3 , 2 sur 7 et enfin 8 sur 1. Certains hésitent cependant sur le dernier qui est bien loin du rectangle « standard ».

Les élèves doivent en trouver trois autres. L'obstacle le plus important reste le passage au décimaux facilité par l'introduction du carré de côté 4,5 cm à condition d'être convaincu qu'un carré est un rectangle.

Le professeur demande ensuite aux élèves de découper les sept rectangles et de les rassembler en les superposant avec un sommet commun par ordre croissant d'une de leurs dimensions ; on obtient alors l'alignement du quatrième sommet .

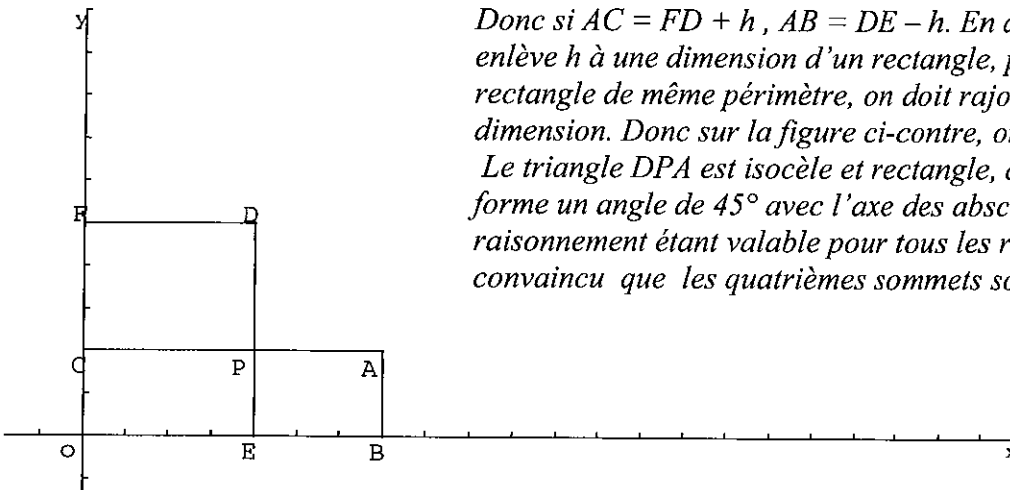
Il peut aussi leur demander de tracer les rectangles de façon à ce qu'ils aient tous un angle droit commun et de mettre en couleur le quatrième sommet.



Pourquoi obtient-on cet alignement ?

Les deux rectangles ont pour périmètre 18. On a donc $FD + DE = 9$ et $CA + AB = 9$.

Donc si $AC = FD + h$, $AB = DE - h$. En d'autres termes, si on enlève h à une dimension d'un rectangle, pour obtenir un rectangle de même périmètre, on doit rajouter h à l'autre dimension. Donc sur la figure ci-contre, on a $DP = AP = h$. Le triangle DPA est isocèle et rectangle, donc la droite (AD) forme un angle de 45° avec l'axe des abscisses. Ce raisonnement étant valable pour tous les rectangles, on est convaincu que les quatrièmes sommets sont alignés.



Cette preuve peut être donnée par le professeur en cinquième.

Etape 2 : Est-ce que tous ces rectangles ont la même aire ?

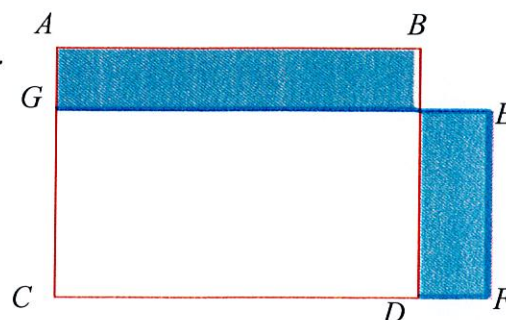
Spontanément, une grande partie des élèves pense qu'ils ont la même aire.

Le professeur utilise à nouveau la ficelle en leur montrant plusieurs cas jusqu'au cas limite du segment.

Certains n'y croient pas encore et pensent que cela se compense jusqu'à une rupture brutale où tout d'un coup l'aire devient nulle.

Le professeur peut alors dessiner le schéma ci-contre et montrer aux élèves que les parties grisées n'ont pas la même aire.

Ce schéma traduit l'empilement des deux rectangles.



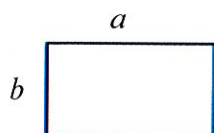
Après avoir expliqué les erreurs commises, le professeur collecte alors les dimensions de tous les rectangles trouvés par la classe en les présentant dans un tableau. Les élèves calculent les aires des différents rectangles.

Il arrive parfois qu'un élève propose un rectangle de 9 cm sur 0 cm : c'est un segment qui a 18 cm de périmètre quand on en fait le tour ! Ce segment peut être qualifié de rectangle aplati comme on parlera plus tard du parallélogramme aplati ou du triangle aplati.

Pour expliciter l'idée de limite, le professeur peut proposer un rectangle de 8,9 cm sur 0,1 cm. Les élèves pensent alors au rectangle de 8,99 cm sur 0,01 cm et ainsi de suite progressent vers le cas limite.

Une autre façon d'aller vers le cas limite est de demander aux élèves de trouver le rectangle qui a la plus petite aire.

En examinant le tableau, le professeur peut interroger les élèves sur le lien entre les dimensions des rectangles.



On obtient alors $a + b = 9$

On peut alors s'intéresser au rectangle qui a l'aire la plus grande.

Le professeur peut donner une ficelle à chaque élève afin qu'il réalise lui-même l'expérience.

L'utilisation de la ficelle permet aux élèves de conjecturer que c'est le carré. En effet, l'aire croît puis décroît et il semble « évident » vue la symétrie du phénomène qu'elle soit maximale pour le carré.

On peut se demander pourquoi on ne donne la ficelle aux élèves qu'à ce stade de la situation. Ce moment nous paraît un des plus opportuns. On aurait pu la donner plus tôt, au moment où les élèves doivent trouver les dimensions de 7 rectangles, surtout s'ils sont bloqués parce qu'ils ne pensent pas au carré et aux décimaux.

Mais il ne faut surtout pas donner la ficelle à chaque élève dès le début, pour deux raisons :

- les élèves doivent voir le professeur faire le geste assez souvent avant d'être capables de le faire eux-mêmes.

- les élèves doivent d'abord être convaincus de l'intérêt du problème apporté par ce matériel, sinon cette ficelle sera tout de suite un prétexte à rire ce qui empêchera la « dévolution » du problème, c'est à dire la transmission du problème aux élèves de sorte qu'ils aient envie de le résoudre.

Situation 2 :

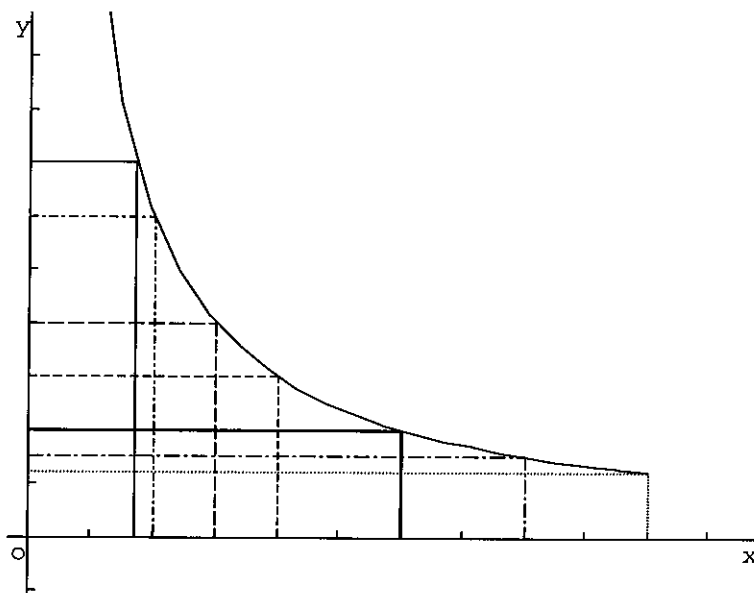
Étape 1 : Dessiner 7 rectangles différents de 36 cm^2 d'aire .

Les élèves constatent rapidement que le produit des dimensions doit faire 36 cm^2 et on retrouve les mêmes difficultés, liées au passage aux nombres décimaux, que dans la situation 1.

Certaines dimensions sont faciles à trouver : 9 sur 4 ; 18 sur 2 ; 12 sur 3. Le choix de 36 permet d'obtenir facilement le carré de côté 6 cm.

La classe travaille à nouveau avec une équation à deux inconnues $a \times b = 36$.

Après avoir tracé 7 rectangles de ce type , on demande aux élèves de les découper et de les rassembler en les superposant avec un sommet commun dans l'ordre croissant d'une des dimensions :



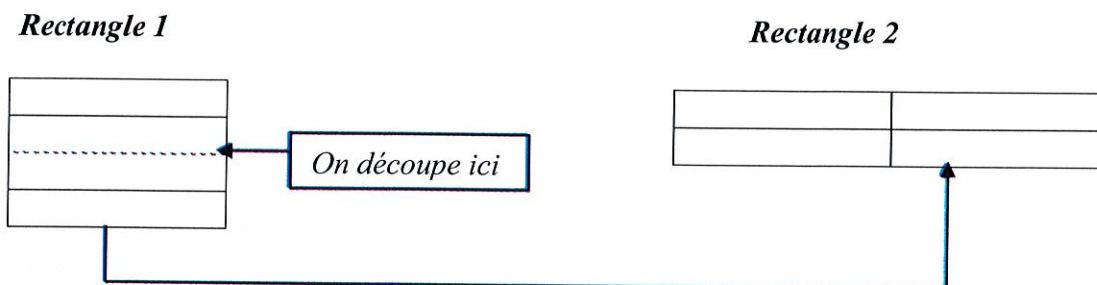
On obtient une demi-hyperbole . Certains élèves pensent que cette courbe est un arc de cercle Il peut être intéressant de leur montrer que , contrairement à un arc de cercle cette courbe ne se referme pas. Elle se rapproche toujours de plus en plus des axes.

Pour les convaincre, le professeur peut leur demander de trouver la largeur du rectangle de longueur 10 cm puis 20 cm , puis 50 cm ... Une nouvelle occasion de résoudre des équations !

Étape 2 : Est-ce que les sept rectangles ont le même périmètre ?

C'est encore une fois l'occasion de prolonger le travail sur la distinction entre aire et périmètre .

Au premier abord, les élèves pensent que le carré a le périmètre le plus long en référence à la situation précédente. Le professeur peut réaliser le découpage suivant :



On prend un rectangle d'aire 36 cm^2 , on le coupe en deux dans le sens de la largeur, en mettant les morceaux bout à bout, on obtient un rectangle de même aire mais pas de même périmètre. Les bords le long desquels on a coupé font augmenter le périmètre. On peut réitérer cette opération.

Les élèves disent alors : « plus on coupe, plus on rajoute du périmètre » ou encore « plus le rectangle est fin et long et plus le périmètre est long. »

Ce schéma les aide à se convaincre que le carré a le plus petit périmètre.

En troisième, on pourra justifier les extréma d'aire et de périmètre dans les situations précédentes.

1) En faisant démontrer l'égalité $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ on voit que :

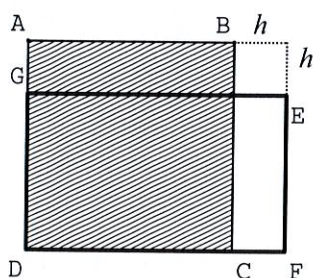
Si $a+b$ est constant (même périmètre) alors ab (l'aire) est maximum si $a-b=0$.

Si ab est constant (même aire) alors $a+b$ (le périmètre) est minimum si $a-b=0$.

Mais on peut démontrer ces mêmes résultats de façon plus naturelle pour les élèves, sans utiliser cette égalité dont le rapport avec la situation n'apparaît pas de prime abord.

2) Pourquoi le carré a l'aire maximum ?

Pour comprendre que le carré est le rectangle d'aire maximale pour un périmètre donné, un dessin où on superpose un carré ABCD et un rectangle non carré GEFD est très utile.



Pour ne pas changer le périmètre en partant du carré on augmente un côté de h et on diminue l'autre du même h .

De ce fait on obtient dans le coin un carré de côté h dont l'aire h^2 représente l'aire que l'on perd en passant du carré au rectangle.

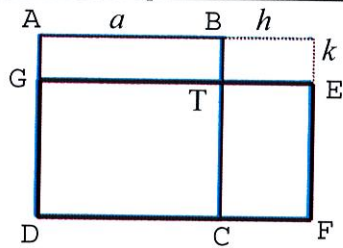
Donc pour que l'aire soit maximale il faut que $h=0$ et donc que le rectangle reste carré

Ceci se retrouve algébriquement dans l'écriture :

Quel que soit h l'aire du rectangle s'écrit : $(a+h)(a-h) = a^2 - h^2$ et il faut que $h=0$ pour avoir l'aire maximale.

Cette aire maximale est celle du carré soit a^2 .

3) Pourquoi le carré a le périmètre minimum ?



Le dessin montre que les rectangles $AGTB$ et $TEFC$ doivent avoir la même aire car l'aire de l'un représente ce que l'on perd soit $(a \times k)$ et l'aire de l'autre ce que l'on gagne soit $(a-k) \times h$, a étant la longueur du côté du carré $ABCD$.

Or $FE < AB$ ($a-k < a$). Donc il faut que h soit plus grand que k .

En effet si h était plus petit que k la diminution d'aire serait plus grande que l'augmentation.

Mais alors il est évident qu'en passant du carré à n'importe quel rectangle le périmètre augmente : on augmente plus que l'on ne diminue la somme des dimensions.

Donc c'est le carré qui a le périmètre minimum.

Ceci se retrouve algébriquement sans recourir au dessin.

A partir du carré, il faut augmenter une dimension et diminuer l'autre car pour obtenir un rectangle de même aire les dimensions ne peuvent augmenter toutes les deux ou diminuer toutes les deux. Soit h l'augmentation d'une dimension et k la diminution de l'autre, h et k étant deux nombres positifs.

L'aire d'un rectangle s'écrit :

$$(a+h)(a-k) = a^2 + a(h-k) - hk$$

On veut que l'aire soit constante, elle doit rester a^2 donc $a(h-k) - hk = 0$

soit encore $h-k = \frac{hk}{a}$

Comme h et k et a sont positifs, on a : $h-k > 0$ ou à la rigueur nul.

Le demi-périmètre devient $a+h+a-k = 2a+h-k$

et donc il faut $h-k = 0$ pour avoir cette somme minimale donc $hk = 0$ donc $h = k = 0$.

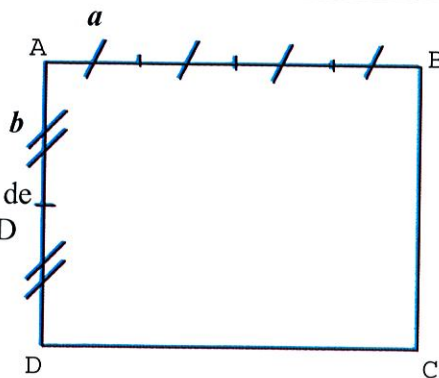
Le demi-périmètre minimum est donc $2a$ c'est à dire celui du carré.

Situation 3 : (d'après M. Marot et F. Moinier , des mathématiques au cycle central , commission inter-irem 1^{er} cycle)

Etape 1 :

a et b sont deux nombres .

Quelles sont les valeurs possibles de a et b pour que le rectangle $ABCD$ ait pour aire 348 cm^2 ?



Les élèves utilisent deux méthodes pour résoudre ce problème :

1) Ils utilisent l'expression littérale $(4 \times a) \times (2 \times b) = 348$

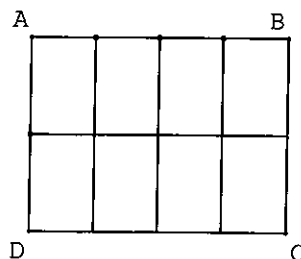
et en utilisant les propriétés de la multiplication obtiennent : $8 \times a \times b = 348$
ou encore $a \times b = 48$.

2) ils utilisent la figure :

et obtiennent directement

$$8 \times a \times b = 348$$

$$\text{donc } a \times b = 48$$



dans les deux cas , les élèves sont amenés à déterminer des couples de nombres dont le produit vaut 48 . Ils pensent dans un premier temps aux nombres entiers : $(1 ; 48)$, $(24 ; 2)$ $(6 ; 8)$ etc.

Le passage aux nombres décimaux demeure une difficulté mais permet de montrer qu'une infinité de valeurs est possible .

On peut alors demander aux élèves de trouver la valeur de b lorsque a vaut 7, on travaille alors les fractions et on introduit une difficulté supplémentaire pour les élèves .

Etape 2 : Est- ce que les rectangles trouvés à l'étape 1 ont tous le même périmètre ?

Instinctivement les élèves ont plutôt tendance à penser que c'est le cas mais ils essaient avec des valeurs et s'aperçoivent du contraire .

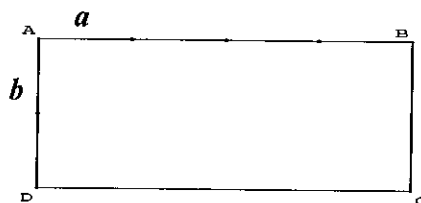
Il est également intéressant de faire remarquer qu'avec deux couple de nombres du type $(6 ; 8)$ et $(8 ; 6)$, on n'obtient pas la même valeur pour le périmètre .

On peut alors demander aux élèves de donner l'expression littérale du périmètre si elle n'est pas apparue auparavant :

$$P = 8 \times a + 4 \times b \quad \text{et on montre le rôle non « symétrique » de } a \text{ et de } b .$$

Etape 3 : on s'intéresse encore aux rectangles ABCD

Cette fois-ci , on ne sait pas combien vaut l'aire mais on veut trouver les valeurs de a et de b pour lesquelles Le périmètre vaut 80 cm .



On obtient alors $8 \times a + 4 \times b = 80$

En testant , les élèves obtiennent des solutions et montrent avec le passage des décimaux qu'il y en a une infinité .

On peut alors leur demander si tous les rectangles obtenus ont la même aire .

On peut également prolonger le problème en demandant de trouver b lorsque a vaut 6 et de trouver a lorsque b vaut 6 etc. ...

