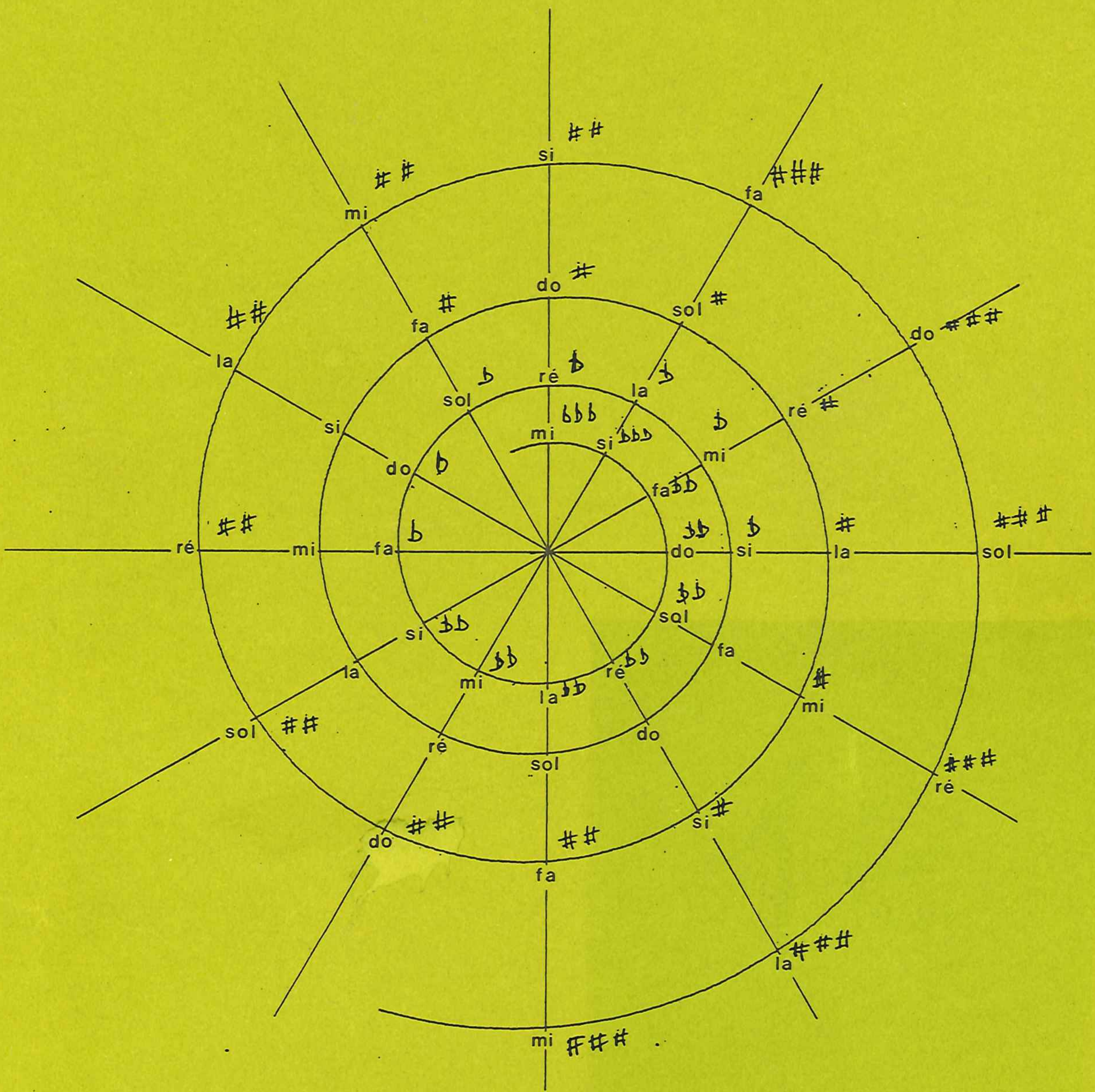
I.R.E.M de Basse-Normandie
I.U.T : Bd Mal Juin
14000 - CAEN

Tél : 44-27-91

KREISLERIANA

CAHIER DU GROUPE MATHEMATIQUE ET MUSIQUE N°.1



GROUPE MATH-MUSIQUE sous la direction de Yves HELLEGOUARCH.
Avec la participation de Béatrice HAQUIER, Yves HELLEGOUARCH et Michel SOUFFLET.

JUIN, 1985.

REMERCIEMENTS :

A Ghislaine HUE pour le talent et le sang-froid dont elle a fait preuve face à nos hiéroglyphes,

A Didier BESSOT pour sa belle spirale,

A Bernard CADET, maître de conférence en Psychologie à l'Université de Caen, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail,

A Franck LEFEVRE pour son aide active dans les tracés de courbes.

SOMMAIRE

SUJETS ABORDES

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Philosophie	X							X	X
Psychologie	X							X	X
Esthétique	X								
Arts Plastiques			X						
Pédagogie	X	X	X	X	X	X		X	
Technique Instrumentale		X		X		X		X	
Musicologie						X	X		
Arithmétique				X	X	X			X
Groupes		X	X			X			X
Géométrie			X						
Physique				X					
Histoire	X			X			X		X

> Je remarque une fois de plus l'avantage qu'il y a pour le poète, le philosophe, le naturaliste, et pour nous tous, à nous livrer, de temps en temps, à une occupation différente, de notre occupation habituelle et à ouvrir l'oeil, pour ainsi dire, de côté. Le poète aura ainsi des visions qu'aucune inspiration volontaire ne ferait naître. Le philosophe devra admettre des principes qu'une longue étude ne lui aurait pas révélés et le naturaliste lui-même tombera sur une fleur ou un animal imprévu et nouveau.
>
> H.D THOREAU.

INTRODUCTION

1°) Le titre de ce recueil - Kreisleriana - fait allusion aux oeuvres de E.T.A. HOFFMANN et de R.SCHUMANN et indique assez, je pense, qu'il s'agit d'un ensemble de fragments qui n'ont pas l'ambition de constituer un ensemble bien coordonné.

Les fragments sont de styles divers (comme leurs auteurs) car nous n'avons pas trouvé de bonne raison pour porter tous le même uniforme : ce sont simplement les traces du travail d'un petit groupe qui se réunit à l'IREM de Caen certains vendredis pour examiner les éventuelles retombées pédagogiques d'un rapprochement entre les mathématiques et la musique.

Un dénominateur commun à ces articles est q'ils tournent autour de thèmes ayant tous un rapport avec les mathématiques <u>et</u> la musique.

Un autre dénominateur commun est que l'on s'est efforcé d'aborder les différents sujets de manière pragmatique et au niveau le plus bas. Si, au cours du voyage, il a fallu prendre des chemins plus escarpés, on s'est efforcé de les choisir de manière "localement pure" c'est-à-dire en restant à l'intérieur d'une même discipline (variable d'un chemin à l'autre).

Finalement on doit savoir qu'on s'est essoufflé très vite et que l'on ne culmine pas très haut ; le lecteur ne doit surtout pas penser qu'on lui demande un grand effort et il ne doit pas oublier non plus qu'il dispose de la liberté de s'arrêter là où le paysage lui plait, que ce soit dans les Avaloirs ou sur le Mont Pinçon.

2°) Nous sommes redevables des quelques idées contenues dans ce travail aux deux bonnes fées que sont les mathématiques et la musique.

Je surprendrai sans doute beaucoup les musiciens en disant que notre goût de la liberté nous à été donné par la fée des mathématiques, mais peut-être me croiront-ils davantage si je cite ici Descartes [1] :

"Et ainsi je pensai que les sciences des livres, au moins celles dont les raisons ne sont que probables, et qui n'ont aucunes démonstrations, s'étant composées et grossies peu à peu des opinions de plusieurs et diverses personnes, ne sont point si approchantes de la vérité que les simples raisonnements que peut faire naturellement un homme de bon sens touchant les choses qui se présentent".

La liberté en mathématiques n'est limitée que par la nécessité de la non-contradiction logique. Cette liberté est donc accessible à tout "homme de bon sens" et ne s'incline devant aucun principe d'autorité.

Et j'espère aussi surprendre les mathématiciens en disant que la fée de la musique nous apporte l'intuition de beaucoup d'objets et de structures mathématiques :"la musique est un exercice caché d'arithématique tel que l'esprit ignore qu'il compte " disait Leibniz dans une célèbre lettre à Christian Goldbach. En citant ces noms prestigieux je vise naturellement les non-mathématiciens car les mathématiciens, eux, pourront faire les exercices d'arithmétique musicale qu'on leur donne dans les pages qui suivent...

L'interaction entre ces deux principes me paraît riche de possibilités pédagogiques, en mathématiques aussi bien qu'en musique. Et c'est ce dernier point que je vais maintenant examiner, d'une autre manière, certes, et en le généralisant beaucoup...

3°) Depuis quelque temps on fait un certain bruit autour d'une théorie qui date de plus d'un siècle : celle des deux hémisphères [2]. Les hémisphères dont il s'agit sont les hémisphères cérébraux et les indications qui suivent ne sont valables que pour les droitiers.

L'hémisphère gauche paraît être le siège du langage, du calcul, des activités analytiques et logiques, etc... Bref c'est le côté "ordinateur" de l'esprit humain.

On peut rapprocher ceci des commentaires que faisait Emil Artin sur les "Eléments de mathématique" de Nicolas Bourbaki, " :

"Nous pensons tous que les mathématiques sont un art. L'auteur d'un livre, resp. le professeur dans sa classe, essaie de transmettre à ses lecteurs, resp. auditeurs, le sens de la beauté structurelles des mathématiques. Dans cette entreprise il échouera toujours. Certes les mathématiques sont logiques : chaque conclusion est tirée des résultats qui précèdent. Cependant la totalité de l'affaire, l'oeuvre d'art véritable, n'est pas linéaire ; et, ce qui est bien pire, sa perception ne peut-être qu'instantanée. Nous avons tous éprouvé, en de rares occasions, une impression d'exaltation en réalisant que nous avions permis à nos auditeurs de voir, l'espace d'une seconde, l'architecture complète d'une question, et toutes ses ramifications. Comment peut-on y parvenir ?

Se cramponner obstinément à la logique linéaire inhibe la visualisation de l'ensemble, mais pourtant cette structure logique doit prédominer sous risque de chaos. Bourbaki est tout à fait conscient de ce dilemme. Le fait que son oeuvre est subdivisée en livres, le fait que des exercices sont donnés qui utilisent des parties ultérieures de la théorie montrent qu'il a conscience de la difficulté. Cependant je pense que dans certains cas la subdivision en livres ne suffit pas."
Et on peut revenir à Descartes pour noter la ressemblance entre ces propos et la règle XI [1] :

"Aprés que nous avons eu l'intuition de quelques propositions simples, si nous en déduisons quelques autre, il est utile de les parcourir toutes d'un mouvement de pensée continu et ininterrompu, de réfléchir à leurs relations mutuelles, et, autant que cela est possible, de concevoir distinctement plusieurs choses à la fois ; car c'est ainsi que notre connaissance acquiert beaucoup plus de certitude et la puissance de notre esprit une plus grande étendue".

L'hémisphère droit paraît être le siège de l'imagination, de l'intuition spatiale, musicale, des pensées holistiques et synthétiques, etc...
C'est là sans doute que réside "l'ange qui soupire en nous lorsque la parole est sans puissance".
Quoi qu'il en soit, on trouve ici une caractérisation de deux aspects souvent antinomiques de l'activité intellectuelle en général, et mathématique en particulier.
Qui n'a remarqué (et souvent en face d'un auditoire!) la difficulté qu'il y a à couler dans un moule Bourbakiste hypothético-déductif, les errements de la recherche dans la solution d'un problème ?
Deux personnages semblent alors se disputer le terrain : celui qui représente l'ordre logique veut étouffer l'intuition et l'intuition bouscule l'ordre logique(au grand scandale de celui-ci !).
Pour symboliser ceci, il sera commode de donner une "définition" dans le genre flou.

<u>DEFINITION</u> :

On appelle "mathématiques de l'hémisphère gauche (resp.droit)" les mathématiques qui sont abstraites, déductives, formelles, calculatrices, etc... (resp.intuitives, holistiques, non verbales, imaginatives, etc..)

4°) On dirait bien que, depuis Descartes, on assiste à un développement persistant des mathématiques de l'hémisphère gauche.
Il paraît difficile de vouloir absoudre Descartes de toute responsabilité dans cette situation, qu'on en juge par cet extrait de la règle XIII [1] :
"Si nous comprenons parfaitement une question, il faut l'abstraire de tout concept superflu, la simplifier le plus possible, et la diviser au moyen de l'énumération en des parties aussi petites que possible".
Mais on peut également se demander si Descartes lui-même ne serait pas surpris de l'état actuel des choses, n'a t-il pas écrit (règle XI).
"Il est utile aussi, la plupart du temps, de <u>tracer ces figures</u> et de les <u>montrer</u> aux sens externes, afin que, par ce moyen, notre pensée soit plus facilement tenue attentive".

5°) Il est temps de conclure cette trop générale et trop longue introduction.

Je le ferai en regrettant que "la reine de nos facultés", je veux dire l'imagination, soit en ce moment le parent pauvre de l'enseignement des mathématiques (et même le parent <u>suspect</u> : veut-on expulser "la folle du logis"? ne serait-elle pas assez respectable pour nos philistins ?). Nous connaissons tous assez d'exemples de cet état de fait (par exemple des textes de problèmes dont un bon élève peut écrire la solution sans le moindre tâtonnement, tel un ordinateur pour qu'il soit inutile d'insister.

Et c'est aussi pour réagir contre cet ostracisme de l'imagination que nous vous présentons ces courtes notes. Nous espérons qu'elles résonneront agréablement dans votre hémisphère droit et, qui sait ? qu'elles vous inciteront à vous joindre au groupe "Maths et Musique" l'année prochaine, pour faire mieux !

Avril 1985, Yves HELLEGOUARCH.

REFERENCES :

[1] R.DESCARTES : "Oeuvres complètes" La Pléiade

[2] P.J DAVIS, R.HERSH : "The mathematical experience", Pelican

[3] "The collected : papers of Emil Artin" Addison-Wesley.

* Pour une étude détaillée de la neurologie de la perception de la musique : B.LECHEVALIER, F.EUSTACHE, Y.ROSSA "Les troubles de la perception de la musique d'origine neurologique" ; MASSON - 1985.

1) - MOTIFS REPETITIFS EN MUSIQUE

I) INTRODUCTION

Il est bien connu que l'un des moyens pédagogiques utilisés dans le but d'améliorer la technique des instrumentistes et des chanteurs est la répétition : répétition d'une même phrase ou d'un même motif.
Certains pédagogues de la musique doutent de la rentabilité de ce moyen et certains pensent même qu'il peut être nuisible, d'autres y attachent une grande valeur. Mon propos n'est pas d'entrer dans cette discussion, mais d'analyser le procédé et de réfléchir aux significations qu'il pourrait avoir.
Et si je suis conduit à présenter l'attitude des pédagogues "répétitifs" ce n'est pas pour l'approuver, mais pour la caractériser.

1,1 - L'une des caractéristiques est qu'il n'y a pas de limite au nombre de répétitions.

Le maître (inquiet) :"Combien de fois as-tu répété cette difficulté depuis la semaine dernière ?".

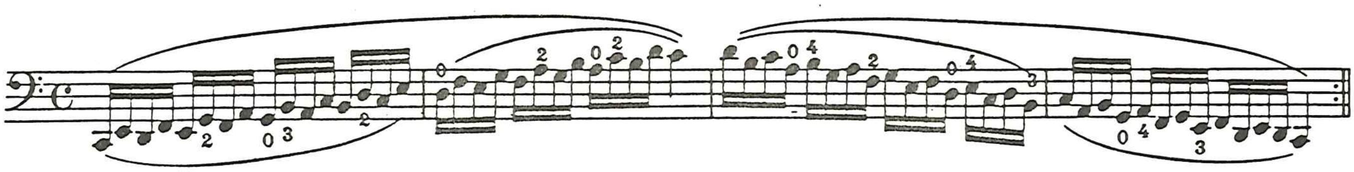
L'élève (honteux) : " Seulement 5040 fois, Maître, car je ne peux travailler qu'une heure par jour et le mauvais passage dure 5 secondes".

Le maître (rassuré) : "Ce n'est pas assez, il faut travailler cinq heures par jour et le répéter 25 200 fois pour la prochaine leçon".

De nombreux recueils d'exercices répétitifs sont vendus dans le commerce (par exemple les "Exercices Journaliers" de L.R Feuillard pour le violoncelle). Ils contiennent des motifs que l'élève est censé répéter un nombre indéfini de fois. Pour pouvoir présenter une science illimitée dans un volume fini on utilise le signe :

Il signifie que le motif qui précède ce signe doit être répété plusieurs fois.

Voici un exemple de motifs répétitifs tirés des "Exercices Journaliers":



1,2 - Une autre caractéristique joue en sens inverse :

Pour les instruments ordinaires (je ne parle pas des ordinateurs de J.C RISSET qui développent une dimension supplémentaire) l'ambitus de tout exercice est limité. La fable suivante n'est donc pas concevable :

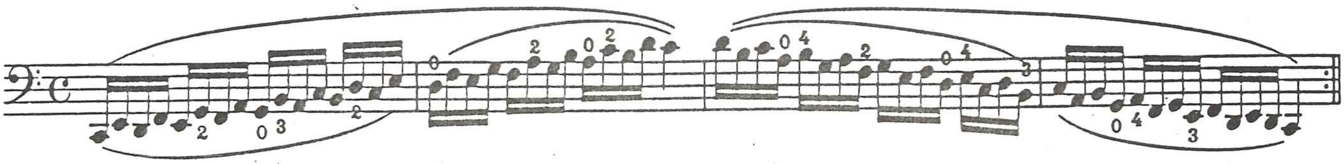
Le maître (fâché) : "pourquoi t'es-tu arrêté aux gammes de do ### à 23 octaves ?"

L'élève (honteux) :"J'ai aussi étudié toutes les gammes jusqu'à do ♭♭♭ et en mineur harmonique et mélodique, les gammes à la tierce, les gammes en tierces, en sixtes, en octaves et en dixièmes, les arpèges et "les Exercices Journaliers". Mais je ne peux pas travailler plus d'une heure par jour ".

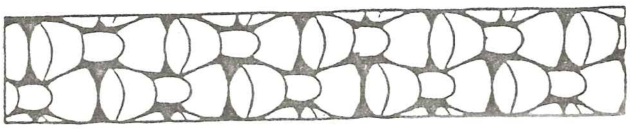
Le maître (furieux) : "Tu étudieras toutes les gammes, jusqu'à la 47ième octave et tu travailleras cinq heures par jour comme je te l'ai déjà dit".

1,3 - Les remarques précédentes ont pour but de souligner l'analogie qui apparaît entre le travail de l'élève qui veut travailler sa technique selon les principes décrits ci-dessus et celui d'un dessinateur qui voudrait réaliser une frise décorative : cette frise doit se reproduire indéfiniment et être située dans une bande de largeur limitée.

Pour concrétiser cette approche nous allons montrer en quoi l'exercice E signalé plus haut :



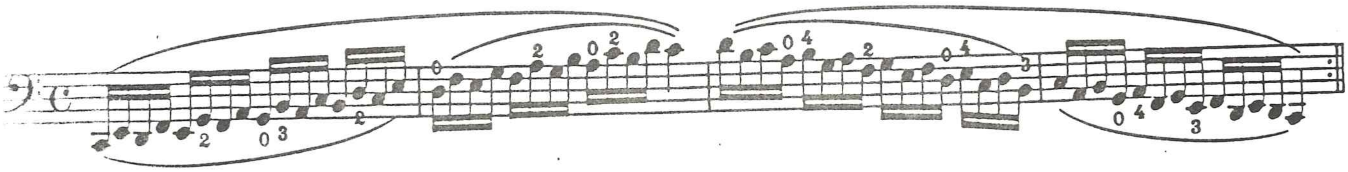
et la frise japonaise que voici :



sont, ou ne sont pas, analogues.

II) ANALYSE D'UN EXERCICE

Globalement nous pouvons dire que le motif :



se reproduit identique à lui-même avec une périodicité de quatre mesures (barres verticales).
Si l'on désigne par M ce motif et par t_4 la translation de quatre mesures dans le temps, nous avons donc :

$$t_4\ (M) = M$$

On aura aussi (théoriquement) :

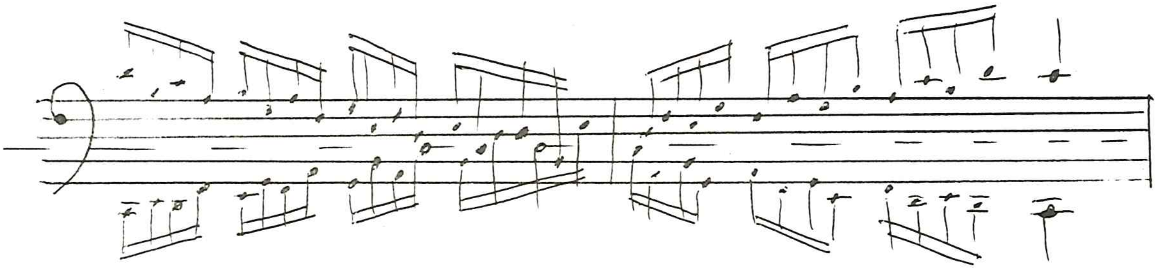
$$t_4^n\ (M) = M$$

pour tout $n \in Z$.

2,1 - Hauteur des notes et rythme.

Si l'on considère l'ensemble A des deux premières mesures et l'ensemble B des deux dernières mesures on constate qu'ils se déduisent l'un de l'autre par une symétrie axiale R (appelée renversement en musique) dont l'axe se trouve être à la hauteur du do $^{\#}$ de la portée.
Cela se "voit" lorsque l'on superpose A et B :

axe
de R



Mais comme les deux motifs sont décalés de deux mesures dans le temps nous avons en réalité :

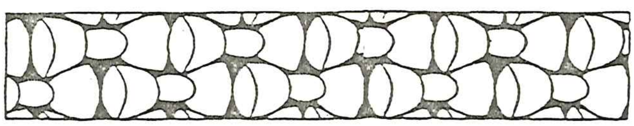
$$B = t_2 \circ R(A) = R \circ t_2(A)$$

où t_2 désigne la translation de deux mesures.
L'opération $t_2 \circ R$ est appelée un "glissement" en géométrie, nous avons donc affaire à un "glissement musical" analogue au glissement :

A

B

de la frise japonaise :

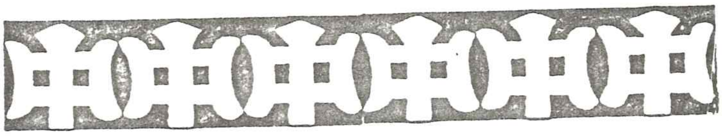


2,2 - Main gauche.

Si on regarde d'assez loin, on constate que la suite des doigtés de la main gauche, présente le même genre de symétrie :

$$\underbrace{0314321403143214021422140214}_{C}2\underbrace{41204122412041234130412341}_{D}310$$

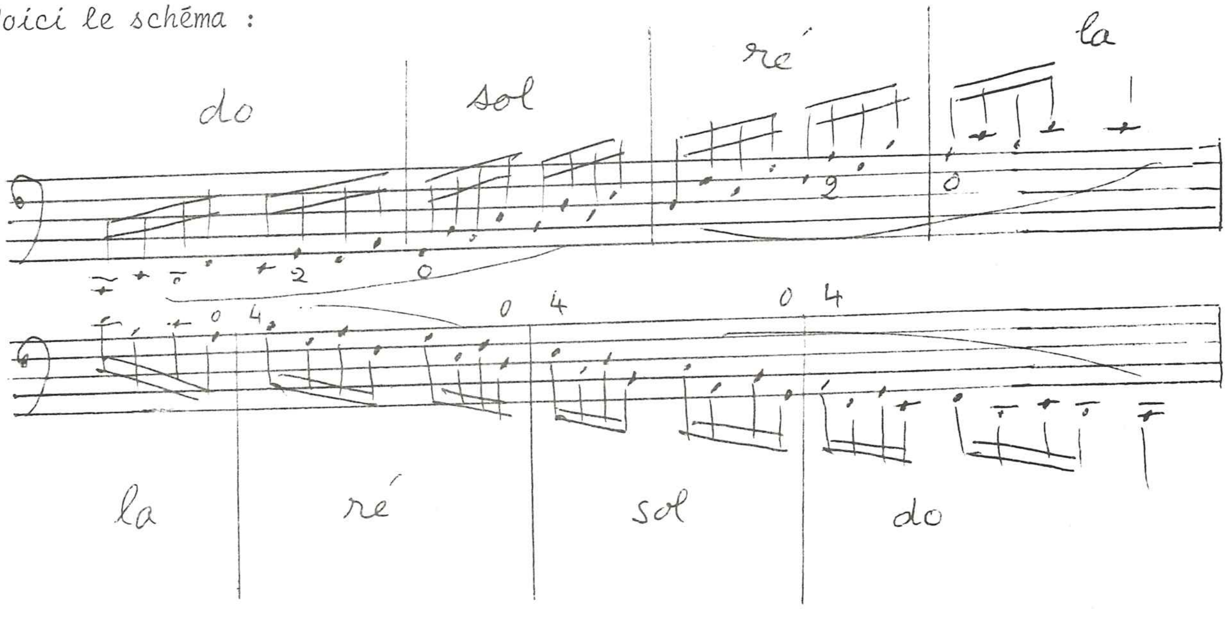
Les ensembles C et D sont simplement inverses l'un de l'autre (c'est une sorte de "récurrence" pour utiliser le vocabulaire des musiciens).
Il reste quelques exceptions au centre et aux extrémités, mais "les arbres ne doivent pas dissimuler la forêt" et la structure digitale de l'exercice correspond à la frise suivante :



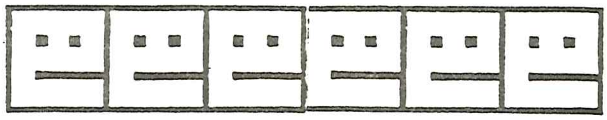
Si l'on compare les structures 2,1) et 2,3) il y a un petit problème : le symétrie des doigtés est légèrement décalée par rapport à celle du rythme.
C'est assez ennuyeux.....

2,3- Main droite.

Les coups d'archets suivent le rythme et le seul problème consiste à savoir sur quelle corde on doit jouer.
Voici le schéma :



On s'aperçoit qu'il y a un énorme décalage (décalage maximal) entre la structure rythmique et le schéma des cordes. D'autre part le choix des coups d'archets, qui prend parti pour la structure rythmique, entre en conflit avec le schéma des cordes. De sorte que, globalement, il n'y a aucune symétrie pour la main droite, ce qui donne la frise :



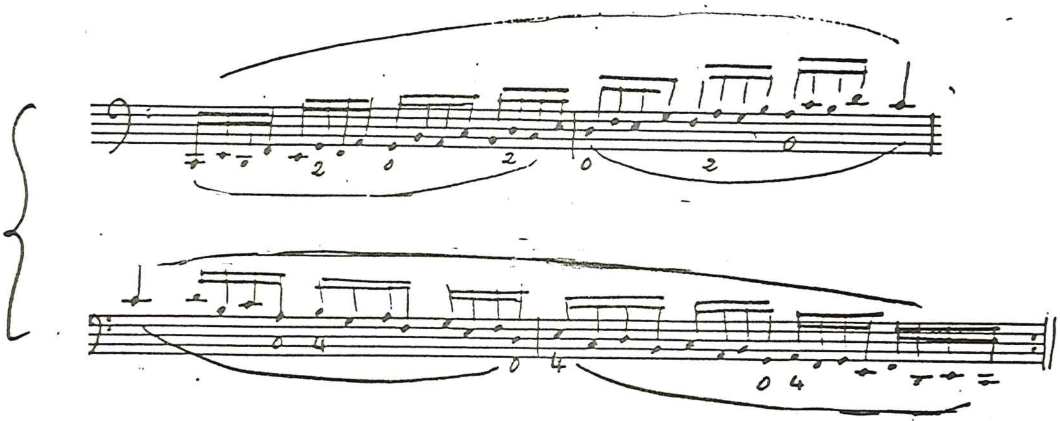
2,4 - Conclusion.

Comme on l'a vu en 2,1) , 2,2) , et 2,3) notre exercice superpose des structures diverses qui sont parfois antino-miques (voir classification des groupes des frises).
On peut penser que, loin de simplifier la difficulté qu'il est censé résoudre, il ne fait que superposer des difficultés divergentes. Cela conduit à énoncer la conjoncture suivante qu'il serait facile de tester :

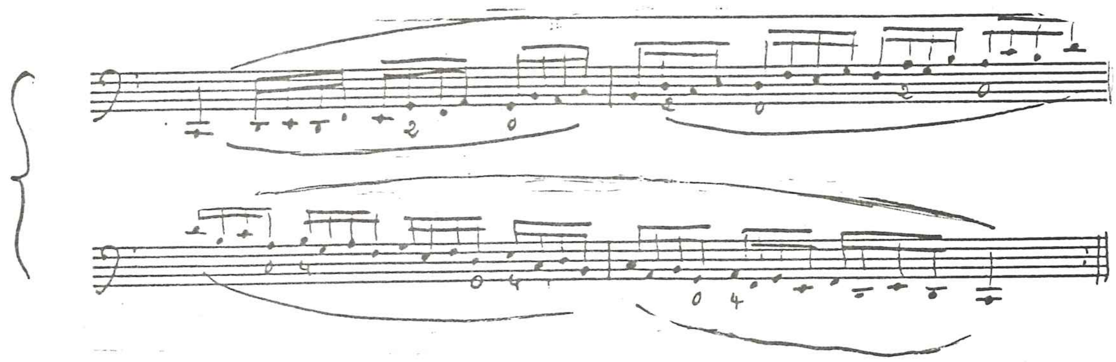
<u>Conjecture</u> : A contenu technique égal, le degré de difficulté d'un exercice est fonction croissante de son degré d'incohérence structurelle.

Une autre manière (moins abstraite) de dire la même chose est la suivante : avant d'essayer de dessiner un chat dissymétrique, il faut s'exercer à dessiner les chats symétriques (de droite et de gauche) correspondants.
Cela conduit à remplacer notre exercice E par deux autres exercices plus cohérents et qui le "recouvrent"

E'



E''



Plutôt que de répéter 1000 fois sans rien dire l'exercice E, ne pourrait-on pas envisager d'introduire un peu de variété en commençant par répéter 250 fois E', 250 fois E" et en demandant l'autorisation de ne répéter que 500 fois E ?

REMARQUE :

On note une analogie entre le procédé ci-dessus et celui qui consiste à décomposer un mouvement vibratoire complexe en somme de mouvements vibratoires simples, c'est-à-dire entre notre procédé et l'analyse harmonique de Fourier.

III) DE LA TECHNIQUE A LA MUSIQUE.

Je me propose de montrer, par quelques exemples tirés du trio de Brahms en do majeur op 87, comment un grand compositeur peut transformer en ferments créatifs, les procédés répétitifs que nous avons rencontrés.

Mes explications s'adressent à l'hémisphère gauche du cerveau du lecteur et, pour lui, je ferai une sorte d'analyse musicale non-standard en utilisant des analogies visuelles et une description subjective de quelques passages du trio. Mais la musique s'adresse surtout à l'hémisphère droit et si le lecteur veut connaître "la" vérité, je ne peux que lui conseiller de bien écouter ce trio dont il existe d'excellents enregistrements. Alors il pourra s'interroger sur la sémantique des "glissements" et des mouvements parallèles et il percevra les lueurs des mystérieuses "symétries axiales".

3,1 - Remarques sur les "glissements".

Prenons le second mouvement qui comporte un thème (qui a le caractère d'une mélodie populaire hongroise) et 5 variations.
Voici le thème:

etc..

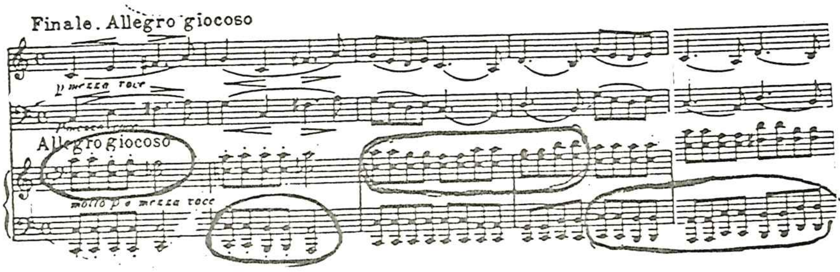
On constate que le violon et le violoncelle jouent des mélodies complètement parallèles à une octave de distance, mais un mathématicien pourrait remarquer un "glissement" dans la partie de violoncelle, vers la fin du thème.

Brahms va t-il s'intéresser à ce détail, à cette polarisation passagère du thème en yin et yang ?
Regardons la fin de ce mouvement (les fins contiennent toujours une grande partie du message de Brahms ; par exemple, la fin du second mouvement du sextuer en si^{b} majeur).
On y retrouve le même "glissement" au même endroit, mais il s'étend alors sur huit mesures et se prolonge en multiples échos de plus en plus fragmentés, jusqu'au quatre notes ultimes du violon et du violoncelle qui se décident à résoudre en mouvement parallèle à la sixte l'opposition du yin et du yang. Il me paraît remarquable que ce message soit immédiatement intelligible à "l'ange qui sommeille en nous", sans recours à l'hémisphère gauche !


tranquillo poco a poco
più tranquillo poco a poco
160
dolce
cresc.
f dim.
dim. e rit.
p dim. e rit.
pp

3,2 - Remarques sur les symétries axiales.

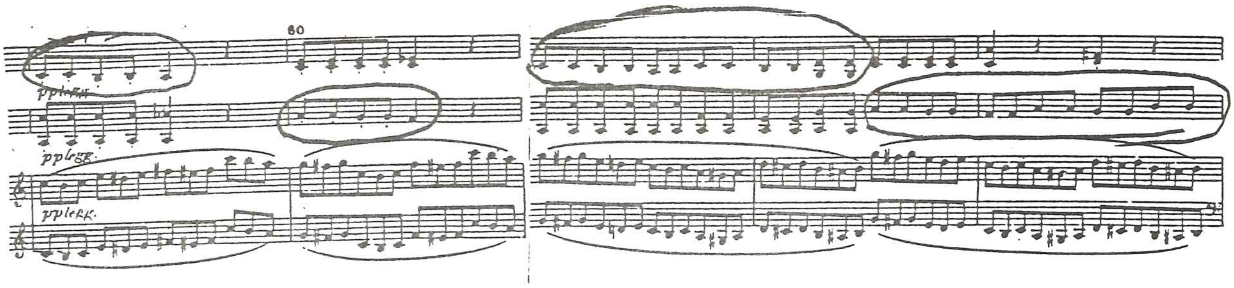
Prenons le finale qui est indiqué "allegro giocoso" et ressemble, d'assez loin, à un rondo dont le refrain débuterait sur un thème en mouvements parallèles aux cordes, accompagné d'un motif joyeux et plein d'assurance que j'ai encadré pour montrer son cheminement d'une main à l'autre du piano :



Tout à coup, le motif joyeux disparaît, et le thème prend un aspect inquiétant : est-ce une fausse impression ?

Il réapparaît ensuite en chassant le mauvais présage et en se cachant dans le thème dont il réussit à faire partie :

Après l'intervention de nouveaux thèmes le refrain revient, transformé : le motif joyeux est maintenant confié aux cordes et le thème s'est transformé en sextolets, en mouvements parallèles aux deux mains du piano :

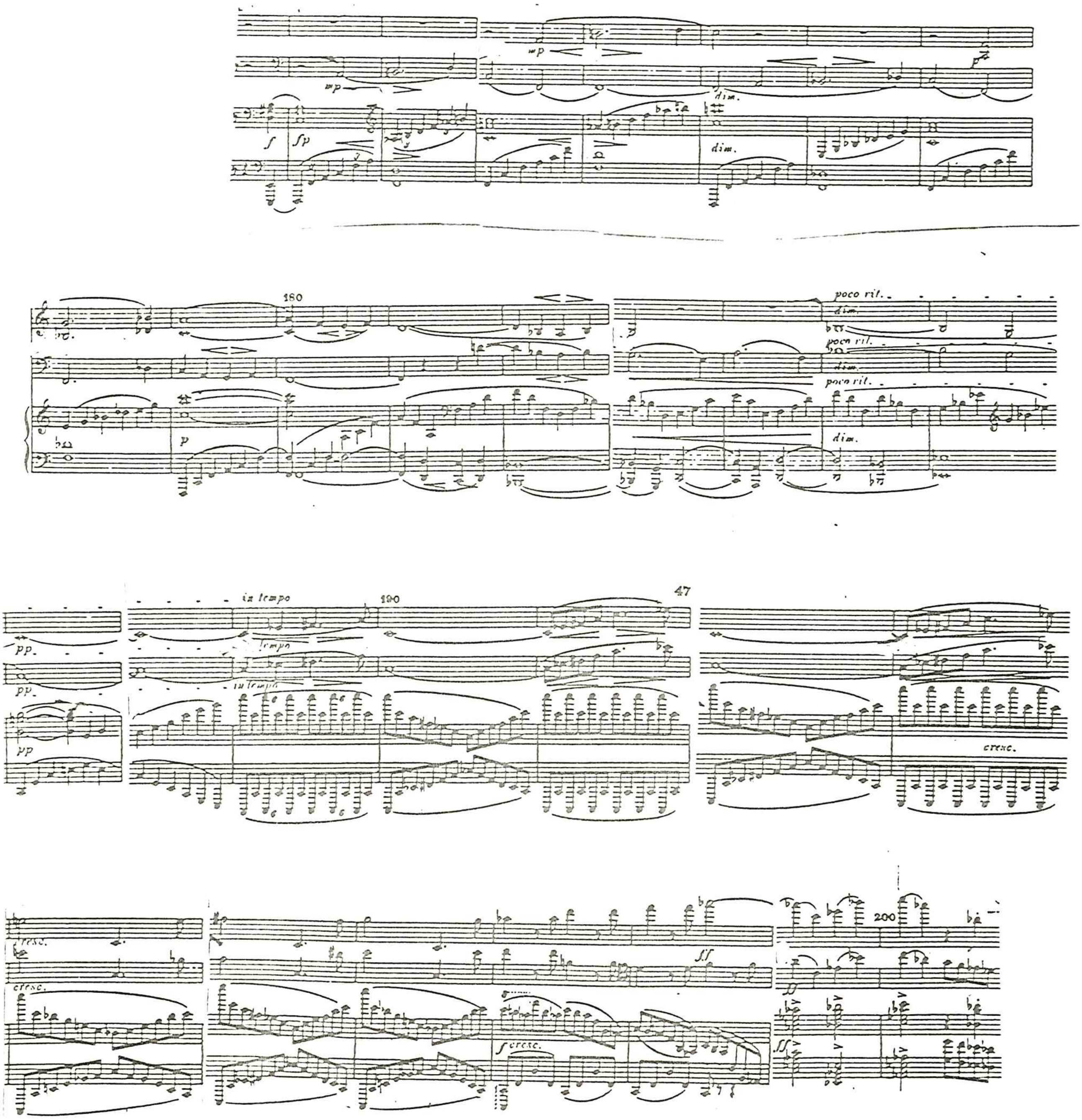


Cherchons la première réapparition du passage inquiétant, la voici :

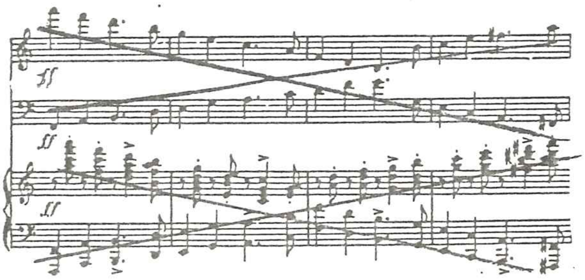

pp
cresc. poco a poco
71
sf
f

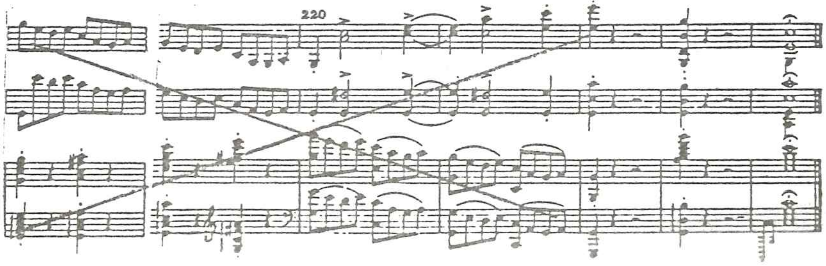
On constate que le thème s'est dédoublé, au piano, en deux images renversées l'une de l'autre dans un miroir. Hum ! ce passage semble bien sentir le soufre ...
Ensuite une intervention insistante du motif joyeux semble réussir à exorciser les démons du passage inquiétant, de sorte que le retour du refrain est semblable à son apparition première.

Est-ce tout ? non, le refrain revient dans une atmosphère détendue et nostalgique (en "augmentation") et le passage inquiétant subit une nouvelle transmutation dans laquelle le dédoublement en miroir semble envahir tout l'univers pianistique :



Puis, le trio se termine, dans la coda, par un dédoublement général où la bonne humeur et le motif "giocoso" parviennent à triompher "in extremis".





REMARQUE :

Bien d'autres aspects contrapuntiques apparaissent dans ce trio et je conseille vivement au lecteur intéressé de se plonger dans la partition.

ANNEXE 1 :

Que pensait Brahms de ce trio ?

Claude Rostand [1] dit que "cette oeuvre est rarement jouée, et paraît tout aussi négligée par les musiciens qu'elle le fut, semble t-il, par son auteur lui-même, qui n'y fait guère allusion dans sa correspondance".

A.E Weir [2] dit au contraire que Brahms tenait cette oeuvre en haute estime, comme le prouve une lettre à son éditeur, et qu'elle obtint aussi l'adhésion sans réserve de Clara Schumann.

Sa première exécution eut lieu le 25 Aout 1882 dans un concert privé à Alt-Aussee, Ignoz Brüll était au piano et Brahms s'amusa beaucoup en disant qu'elle avait été écrite par Brüll.

Le 15 Mars 1883 elle fut jouée publiquement à Vienne et le public, aussi bien que la critique, fit un accueil sans réserve à cette oeuvre.

ANNEXE 2 :

Autres glissements et symétries axiales issue du même trio (quelques exemples).

Premier mouvement :

Troisième mouvement :

* REFERENCES

(2) "The Chamber Music of Brahms" - A.E. Weir Belwin Mills

(1) "Johannes Brahms" - C.Rostand Fayard.

"Mes états d'esprit sont périodiques".

H.D. THOREAU.

2)- LES SEPT GROUPES DES FRISES

1) FRISES

Nous voulons parler ici de l'analogue pictural des exercices répétitifs dont il a été question dans le chapitre 1, c'est-à-dire des frises.

D'après le Larousse on donne le nom de "frise" à divers éléments de décoration en forme de bande très allongée et continue.

Cette définition est inadéquate pour l'usage que l'on veut en faire ici, mais elle constitue un bon point de départ pour préciser ce que nous voulons dire.

Une propriété essentielle à ajouter à la frise est d'être périodique : elle doit se reproduire elle-même par une translation t ($t \neq id$).

Si X désigne une frise, on devra avoir $t(X) = X$. Il en résulte que, pour tout nombre $n \in Z$, on aura aussi $t^n(X) = X$, où t^n désigne la puissance $n^{ième}$ de la translation t.

Une propriété qui est bien indiquée par le Larousse est que la frise est "en forme de bande très allongée".

Cela veut dire que les seules translations possibles, laissant invariante la frise X , doivent être toutes dans la direction de cette bande.

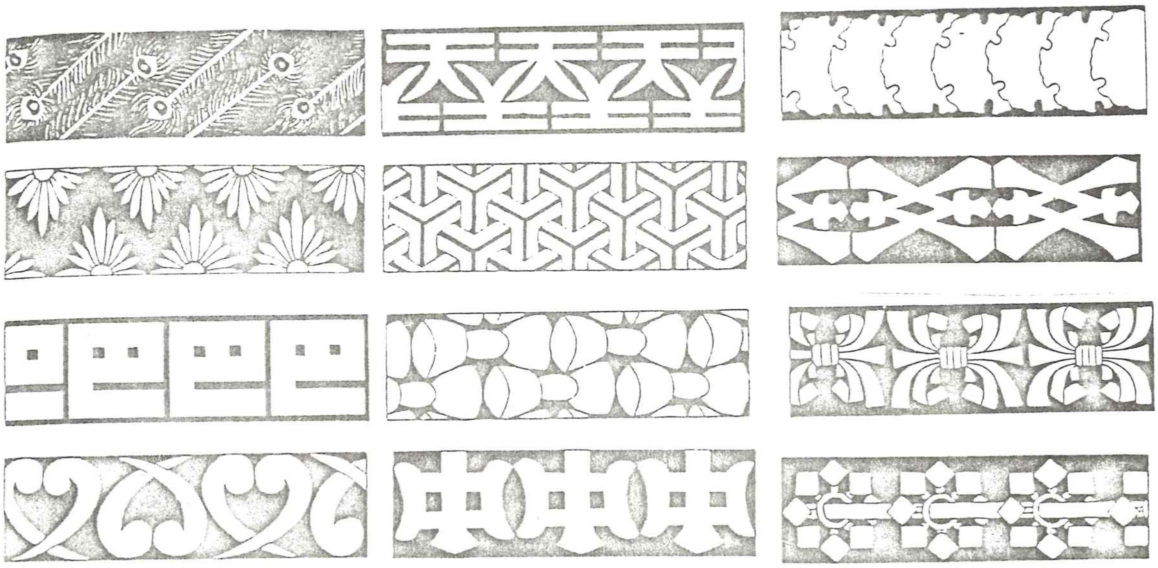
D'une manière précise, si t_1 et t_2 sont deux translations telles que l'amplitude de t_1 soit $\overrightarrow{v_1}$ et l'amplitude de t_2 soit $\overrightarrow{v}_2$, on doit avoir $\overrightarrow{v}_2 = \lambda \overrightarrow{v_1}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (par exemple $\lambda = \sqrt{2}$).

Finalement nous sommes en désaccord total avec le Larousse sur la question de la continuité ; nous voulons au contraire introduire une clause de discontinuité (qui nous conduira à exclure $\lambda = \sqrt{2}$).

Nous ne voulons pas que X soit reproductible par des translations infiniment petites, c'est-à-dire des translations t dont l'amplitude $\|\overrightarrow{v}\|$ serait inférieure à un nombre $\varepsilon > 0$ donné à l'avance.*

* A proprement parler v est la norme de l'amplitude de t.

Lorsque ces trois conditions sont satisfaites on peut démontrer que toutes les translations t qui laissent X invariante sont les puissances d'une même translation t_0 : $t = t_0^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$.
Voici quelques exemples de frises.



2) GROUPES DES FRISES.

X désignant une certaine frise (répétée indéfiniment dans la bande) on appelle "groupe de la frise X ", et on note $\mathcal{F}_X$, l'ensemble de toutes les isométries du plan qui laissent X invariante, c'est-à-dire qui sont telles que $f(X) = X$.

Cet ensemble est un groupe pour la composition des applications.
Par ceci on entend que :

1°) l'identité, $id \in \mathcal{F}_X$

2°) Si $f \in \mathcal{F}_X$, alors $f^{-1} \in \mathcal{F}_X$

3°) Si f et $g \in \mathcal{F}_X$, alors $f \circ g \in \mathcal{F}_X$

On dit que $\mathcal{F}_X$ est un sous-groupe du groupe de toutes les isométries du plan.
Il est clair que $\mathcal{F}_X$ contient toutes les translations t telles que $t(X) = X$.

Ces translations forment elles-mêmes un groupe que l'on notera S, on a donc :

$$S \subset \mathcal{F}_X$$

Le résultat essentiel de ce chapitre est que, à isoporphisme près, il n'existe que sept groupes $\mathcal{F}_X$ possibles.

Remarques :

1) Supposons que les frises X et Y soient semblables c'est-à-dire qu'il existe une similitude orthogonale s, directe ou inverse, telle que $s(X)=Y$ Alors $\mathcal{F}_X \cong \mathcal{F}_Y$. Considérons $f \in \mathcal{F}_X$ et posons $g := s \circ f \circ s^{-1}$, alors :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "s"] & Y \end{tikzcd}$$

On voit facilement que g est une isométrie du plan et on a :

$$g(Y) = s \circ f \circ s^{-1}(Y) = s \circ f(X) = s(X) = Y$$

2) Considérons les deux frises suivantes :

X_1 : ..... E E E E E E E E E E .....

X_2 : ..... E E E E E E E E E E .....

Si l'on s'en tient à la définition précédente les groupes $\mathcal{F}_{X_1}$ et $\mathcal{F}_{X_2}$ ne sont pas isomorphes car $\mathcal{F}_{X_1}$ contient la symétrie s dont l'axe est l'axe de symétrie de la lettre E et $\mathcal{F}_{X_2}$ ne contient aucune symétrie orthogonale.

Toutefois si $\mathcal{G}_{X_2}$ désigne le groupe des automorphismes affines qui conservent X_2, alors il est clair que :

$$\mathcal{F}_{X_1} \cong \mathcal{G}_{X_2}$$

Pour une étude plus approfondie voir l'annexe 2.

3) MOTIFS

Nous dirons qu'un ensemble M de points du plan est un "motif" de la frise X si X est la réunion de tous les $f(M)$ pour $f \in \mathcal{F}_X$.
On dira aussi que la frise X est "engendrée" par le motif M.

Exemples :

1) X est un motif de X, mais un point n'est pas en général un motif de X.

2) est un motif de ....EEEEE.... mais n'est pas un motif de ....EEEEE.....

Supposons que $\mathcal{F}$ soit un groupe de frise et que M soit une partie non vide du plan, alors $X = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(M)$ est une frise dont le groupe $\mathcal{F}_X$ contient $\mathcal{F}$.

4) DESCRIPTION DU GROUPE D'UNE FRISE PARTICULIEREMENT SIMPLE.

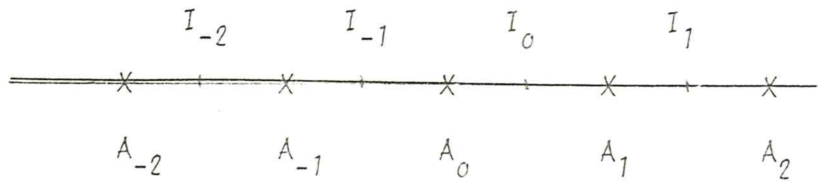
On désigne par $\vec{a}$ un vecteur non nul et par O un point quelconque du plan.
On pose :

$$Z = \left\{ O + n\vec{a} \quad ; n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Il est clair que Z est une frise et que si l'on remplace $\vec{a}$ et O par $\vec{a_1}$ et O_1 les frises correspondantes sont semblables, d'aprés la première remarque du paragraphe 2, leurs groupes sont isomorphes : $\mathcal{F}_Z \cong \mathcal{F}_{Z_1}$.

Nous poserons : $A_0 = 0$, $A_n = 0 + n\vec{a}$ et $I_0 = 0 + \frac{\vec{a}}{2}$, $I_n = I_0 + n\vec{a}$. On pose :

$$\begin{cases} Z = \{A_n, n \in \mathbb{Z}\} \\ \hat{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{A_n, I_n\} \end{cases}$$



4,1) Translations.

La translation $x \longmapsto x + n\vec{a}$ appartient à $\mathcal{F}_X$

Il est clair que cette translation est la puissance $n^{\text{ième}}$ de la translation $t_0 : x \longmapsto x + \vec{a}$.

On dira que le groupe S des translations est engendré par t_0, et on écrira :

$$S = \langle t_0 \rangle$$

On peut caractériser l'action de t sur Z par la relation $t_0 (A_i) = A_{i+1}$

4,2) Symétries centrales

Si une symétrie S_B, de centre B, laisse Z invariant on doit avoir $S_B(A_i) = A_j$.

On en déduit que B est le milieu du segment $A_i A_j$

Si $j = i + 2h$, $h \in \mathbb{Z}$, alors $B = A_{i+h}$

Si $j = i + 1 + 2h$, $h \in \mathbb{Z}$, alors $B = I_{i+h}$

Réciproquement on constate que toute symétrie S_B avec $B = A_\ell$ ou $B = I_\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}$, laisse Z invariant.

Remarquons que $S_{Io} \circ S_{Ao} = t_0$ (annexe 1), il en résulte que t_0 appartient au groupe $\langle S_{Io}, S_{Ao} \rangle$ engendré par S_{Io} et S_{Ao}.

Montrons que ce groupe contient tous les S_B, avec $B = A_\ell$ ou I_ℓ.

En effet $t_0{}^n \circ S_{A_0}$ est une symétrie centrale (annexe 1) et on a :

$$t_0{}^n \circ S_{A_0} (A_0) = A_n$$

Donc :

$$\begin{cases} t_0^{\,n} \circ S_{A0} = S_{Ah} & \text{si } n = 2h \\ t_0^{\,n} \circ S_{A0} = S_{Ih} & \text{si } n = 2h+1. \end{cases}$$

4,3 Symétries axiales

Il est clair que la symétrie s d'axe $A_0 A_1$ conserve Z et que c'est la seule symétrie axiale, d'axe parallèle à $A_0 A_1$, qui conserve Z.

Si une autre symétrie axiale σ conserve Z, alors $\sigma \circ s$ conserve Z. Mais $\sigma \circ s$ est une rotation autour d'un centre C.
Une telle rotation ne peut conserver Z que si $C \in \widehat{Z}$ et si son angle est égal à π, donc l'axe de σ doit être perpendiculaire à $A_0 A_1$ (annexe 1) et C est A_ℓ ou I_ℓ.

Nous noterons par σ_{A_ℓ}, resp. σ_{I_ℓ} la symétrie axiale dont l'axe est la perpendiculaire à $A_0 A_1$ contenant A_ℓ, resp I_ℓ.

Les principales relations entre ces diverses symétries sont les suivantes :

$$s \circ \sigma_{A_\ell} = \sigma_{A_\ell} \circ s = S_{A_\ell}$$

$$s \circ \sigma_{I_\ell} = \sigma_{I_\ell} \circ s = S_{I_\ell}$$

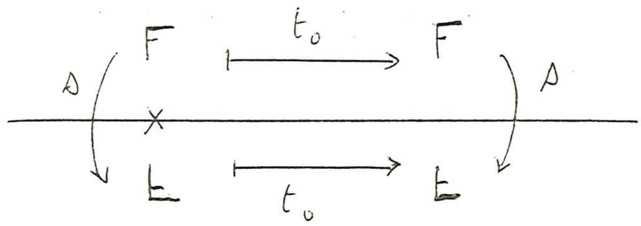
$$\sigma_{A_{i+h}} \circ \sigma_{A_i} = \sigma_{I_{i+h}} \circ \sigma_{I_i} = t_0^{\,2h}$$

$$\sigma_{I_{i+h}} \circ \sigma_{A_i} = \sigma_{A_{i+h+1}} \circ \sigma_{I_i} = t_0^{\,2h+1}$$

4,4) Glissements

Nous appellerons "glissement" une isométrie négative sans point fixe.

Le prototype des glissements est $\gamma_0 = t_0 \circ s = s_0\, t_0$:



<u>REMARQUE</u> :

Si t désigne la translation de vecteur $\frac{\vec{a}}{2}$, le glissement $\gamma = t \circ s = s o t$ ne peut pas appartenir à $\mathcal{F}_Z$, sinon t lui-même devrait être dans $\mathcal{F}_Z$, ce qui est absurde.

4,5) Conclusion

Toutes les isométries de $\mathcal{F}_Z$ sont engendrées par s, σ_{A_0} et σ_{I_0} ; on écrit :

$$\mathcal{F}_Z = \langle s,\ \sigma_{A_0},\ \sigma_{I_0} \rangle$$

En effet :

$$\left\{\begin{array}{l} t_0 = \sigma_{I_0} \circ \sigma_{A_0} \\ S_{A_0} = s \circ \sigma_{A_0} = \sigma_{A_0} \circ s \\ S_{A_k} = t_0^{2k} \circ S_{A_0} \ , \quad S_{I_k} = t_0^{2k+1} \circ S_{A_0} \\ \gamma_0 = t_0 \circ s \end{array}\right.$$

5) CLASSIFICATION DES GROUPES DES FRISES

5,1) Méthode

Soit une frise X de groupe $\mathcal{F}_X$.

Supposons que $\mathcal{F}_X$ contienne une rotation R_A, alors pour tout $f \in \mathcal{F}_X$, $f \circ R_A \circ f^{-1}$ est une rotation de $\mathcal{F}_X$ dont le centre est $f(A)$.

L'angle de toutes ces rotations est égal à π, sinon $R_A(x)$ ne serait plus dans la "bande très allongée" dont parle le Larousse.

Ainsi $R_{f(A)} \circ R_A$ est une translation de $\mathcal{F}_X$ d' amplitude

$2\,\overrightarrow{Af(A)} = n\,\overrightarrow{v_0}$, où $\overrightarrow{v_0}$ désigne l'amplitude de t_0.

(t_0 désignent toujours un générateur du groupe des translations de $_X$ - voir paragraphe 1).

Il en résulte que :

$$\left\{ f(A) \; ; \; f \in \mathcal{F}_X \right\} = \left\{ A + n\,\frac{\overrightarrow{v_0}}{2} \; ; \; n \in \mathbb{Z} \right\} := Z$$

et on vérifie facilement que tout $f \in \mathcal{F}_X$ conserve Z, c'est-à-dire que :

$$\mathcal{F}_X \subset \mathcal{F}_Z$$

Donc les groupes $\mathcal{F}_X$ qui contiennent des rotations (c'est-à-dire des symétries centrales) sont isomorphes à des sous-groupes de $\mathcal{F}_Z$.

On commencera par déterminer ces sous-groupes et, ensuite, on examinera les cas où $\mathcal{F}_X$ ne contient pas de rotations : c'est-à-dire le cas le plus simple !

5,2) Cas où $\mathcal{F}_X$ contient des symétries centrales.

Soit τ un générateur du groupe des translations de Z et soit $t_0 = \tau^2$; alors l'étude du paragraphe 4 montre que t engendre le groupe des translations de $\mathcal{F}_X$.

Si $\mathcal{F}_X$ ne contient pas d'isométries négatives on a donc :

$$\mathcal{F}_X = \langle t_0 , s_A \rangle := \mathcal{F}_2$$

Si $\mathcal{F}_X$ contient des isométries négatives, mais <u>pas de symétries axiales</u>, alors $\mathcal{F}_X$ contient un certain glissement $\gamma_n = \tau^n \circ s$.
On vérifie sans peine que si n est pair, $s \in \mathcal{F}_X$ ce qui est contraire à l'hypothèse.
Donc n est de la forme $2p + 1$, $p \in \mathbb{Z}$ et

$$t_0^{-p} \gamma_n = \tau^{-2p} \circ \tau^{2p+1} \circ s$$

$$= \tau \circ s = \gamma_0 \in \mathcal{F}_X$$

Il en résulte que :

$$\mathcal{F}_X = \langle \gamma_0 , s_A \rangle : = \mathcal{F}_2^2$$

Si $\mathcal{F}_X$ contient une symétrie axiale σ_{A_n}, alors $\mathcal{F}_X$ contient s car :

$$\sigma_A = t_0^{-n} \circ \sigma_{A_n}$$

et $\quad s = \sigma_A \circ s_A$

Mais $\sigma_{I_0} \circ s_{A_0} = t_0$, donc $\sigma_{I_0} \in \mathcal{F}_X$
et réciproquement, si $\sigma_{I_0} \in \mathcal{F}_X$ alors $\sigma_A \in \mathcal{F}_X$ et $s \in \mathcal{F}_X$.
Donc :

$$\mathcal{F}_X = \langle t_0, s_A , s \rangle : = \mathcal{F}_2^1$$

5,3) <u>Cas où $\mathcal{F}_X$ ne contient pas de symétries centrales.</u>

Nous irons du plus complexe au plus simple en supposant d'abord que $\mathcal{F}_X$ contient des symétries axiales.
Remarquons que si les axes de deux symétries se rencontrent en un point O, la composée de ces symétries est une rotation autour de O, ce qui est exclu.
On en déduit que si $\mathcal{F}_X$ contient plusieurs symétries axiales leurs axes sont parallèles.
La composée de deux symétries axiales d'axes parallèles, est une translation dans la direction perpendiculaire aux axes. On en déduit que si $\mathcal{F}_X$ contient plusieurs symétries axiales, les axes de ces symétries sont orthogonaux à la direction de t_0.

On voit facilement que dans ce cas on a $\mathcal{F}_X = \langle t_0 , \sigma_A \rangle \; : = \mathcal{F}_1^2$

Si $\mathcal{F}_X$ ne contient qu'une seule symétrie axiale, alors son axe est de même direction que t_0, donc :

$$\mathcal{F}_X = \langle t_0, s \rangle = \mathcal{F}_1^1$$

Reste le cas où $\mathcal{F}_X$ ne contient pas de symétries axiales.
Si $\mathcal{F}_X$ contient une isométrie négative celle-ci est nécessairement un glissement γ' et on a $\gamma' \circ \gamma' = t_0^n$.
Si n est pair, alors en posant $n = 2m$ et $\sigma = t_0^{-m} \circ \gamma'$ on a :

$$\sigma \circ \sigma = (t_0^{-m} \circ \gamma') \circ (t_0^{-m} \circ \gamma')$$

$$= t_0^{-2m} \circ (\gamma' \circ \gamma') = id.$$

donc σ est une symétrie axiale $\in \mathcal{F}_X$, ce qui est absurde.
Donc $n = 2m + 1$ est en posant $\gamma = t_0^{-m} \circ \gamma'$ on a :

$$\gamma \circ \gamma = (t_0^{-m} \circ \gamma') \circ (t_0^{-m} \circ \gamma')$$

$$= t_0^{-2m} \circ (\gamma' \circ \gamma') = t_0$$

donc :

$$\mathcal{F}_X = \langle \gamma \rangle \; : = \mathcal{F}_1^3$$

Si $\mathcal{F}_X$ ne contient ni isométries négatives ni rotations, alors $\mathcal{F}_X$ est formé de translations, donc :

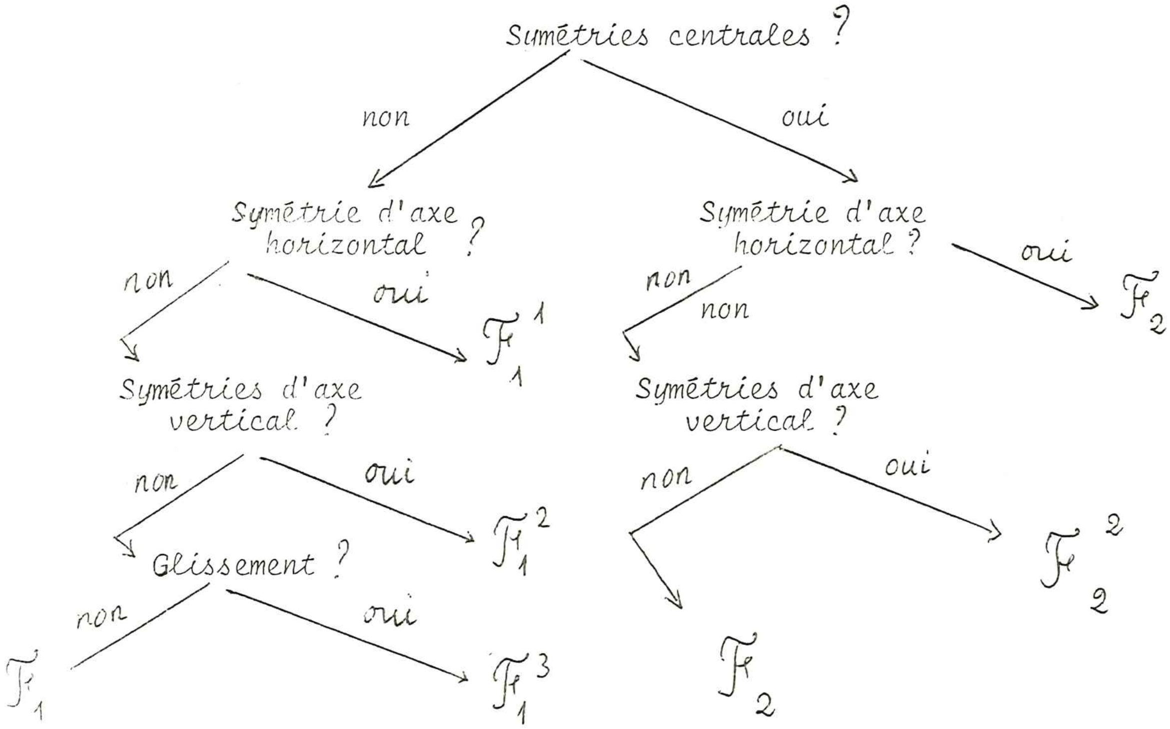
$$\mathcal{F}_X = \langle t_0 \rangle \; : = \mathcal{F}_1$$

6) <u>ALGORITHME DE RECONNAISSANCE</u>

Voici un algorithme simple qui vous permettra de reconnaître à quel groupe une frise donnée se rattache.

L'ordre des questions est le suivant :

- Y a t-il un centre de symétrie ?
- Y a t-il un axe de symétrie horizontal ?
- Y a t-il un axe de symétrie vertical ?
- Y a t-il des glissements ?



REMARQUE : On retrouve le classement

REMARQUE :

On retrouve le classement précédant par niveau de structure, l'arbre étant incliné de $\mathcal{F}_1$, en bas à gauche à $\mathcal{F}'_2$ en haut à droite.

Afin de vous entraîner, voici les sept groupes de frises toutes formées uniquement de lettres ; le remplacement d'une lettre par une autre, invariante par des symétries différentes, permet d'obtenir un groupe différent.
Cela vient du fait que le groupe des symétries laissent invariant chaque lettre est isomorphe à ce que nous appelerons le groupe vectoriel associé dans la démonstration de niveau 2. Du point de vue pédagogique, le choix des lettres est intéressant car ici les motifs sont bien séparés.

F F F F F F F F	S S S S S S S S
D D D D D D D D	I I I I I I I I
A A A A A A A A	M W M W M W M W
D W D W D W D W	

REMARQUE : pour les groupes qui contiennent des glissements mais pas de symétries, nous avons besoin d'un motif formé de deux lettres.

Dans le même esprit, voici quelques exercices pour vous entraîner :

ME COOK HE COOK WE COOK ME C
SANTA CLAUS SANTA CLAUS S A
HOHOHOHOHOHOHOHOHOHOHOHOHOHO
MTMTMTMTMTMTMTMTMTMTMTMTMTMT
NOONNOONNOONNOONNOONNOONNOON
WOMOWOMOWOMOWOMOWOMOWOMOWOMO
HOT TOMATO HOT TOMATO HO

D'une manière générale, et toujours du point de vue pédagogique, le choix d'une lettre est excellent pour faire comprendre la différence entre une isométrie directe et une isométrie indirecte : l'image de la lettre F par une symétrie orthogonale n'est pas un F (si on ne regarde pas par transparence) ; le fait que le sens des angles soit inversé est bien sûr à signaler, mais ce n'est peut-être pas la première propriété qu'il faut faire observer.
Pour illustrer ce fait, nous vous proposons l'exercice suivant :

La figure ci-contre illustre le groupe

		P				P				P				P			

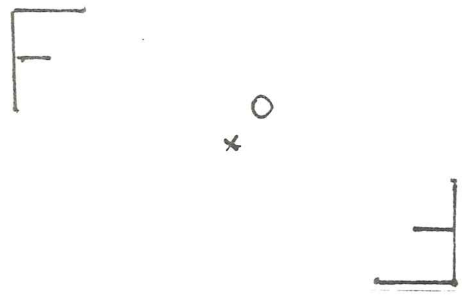
En complétant les cases vides judicieusement, vous pouvez illustrer ainsi les 7 groupes.

ANNEXE 1 :

Notions élémentaires concernant les isométries rencontrées dans ce paragraphe et leurs composées.

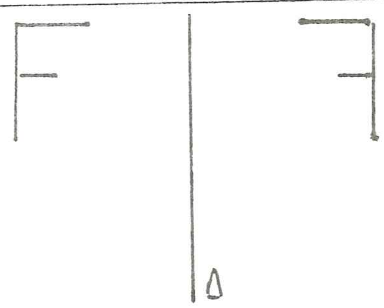
Une isométrie du plan est une application du plan sur lui même qui conserve les distances.

SYMETRIE CENTRALE



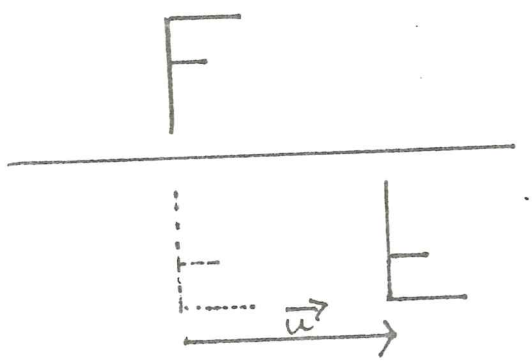
Chaque point M du plan est transformé en un point M' tel que o soit milieu de [MM'].
C'est aussi une rotation de centre O et d'angle 180°

SYMETRIE ORTHOGONALE PAR RAPPORT A UNE DROITE Δ

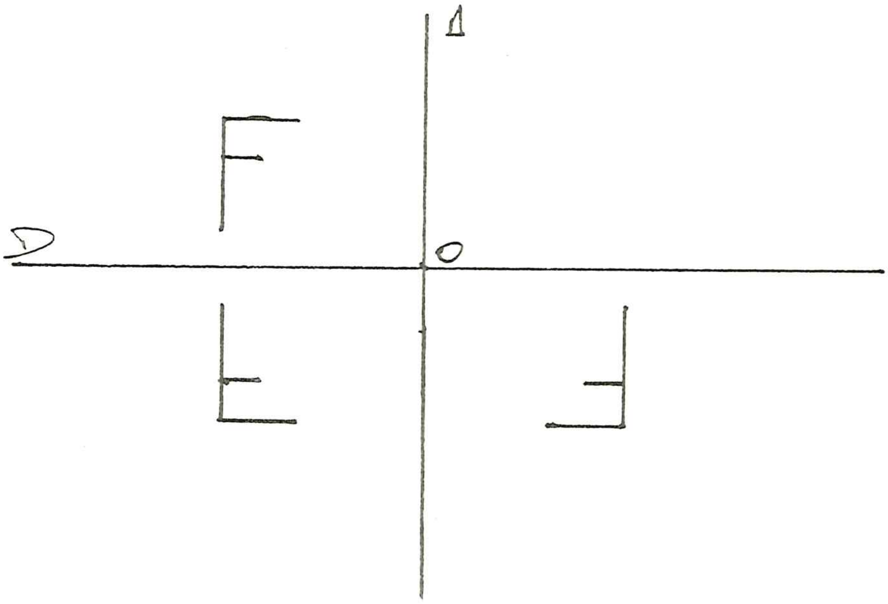


Chaque point M du plan est transformé en un point M' tel que Δ soit médiatrice de [MM'].

GLISSEMENT : C'est la composée d'une symétrie orthogonale d'axe Δ avec une translation de vecteur $\vec{u}$ parallèle à Δ.



Composée de deux symétries orthogonales et d'axes perpendiculaires.



s = symétrie d'axe D

σ : symétrie d'axe Δ

On a :

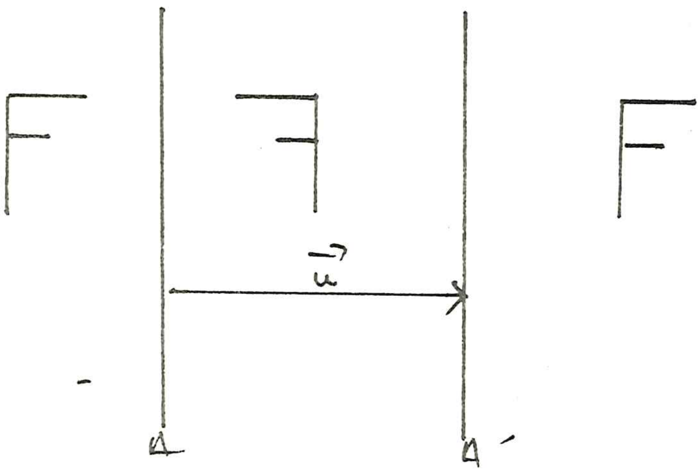
$\sigma \circ s = S$ — S étant la symétrie de centre O (intersection de D et de Δ).

CONCLUSION : On a aussi : $s = \sigma \circ S = S \circ \sigma$
et $\sigma = S \circ s = s \circ S$

Composée de deux symétries orthogonales σ et σ' d'axes parallèles.

$\sigma' \circ \sigma = t_{2\vec{u}}$

ou $t_{2\vec{u}}$ est la translation de vecteur $2\vec{u}$.
u est le vecteur correspondant à la translation qui transforme Δ en Δ'.



Remarque : $\sigma \circ \sigma' = t_{-2u}$

<u>COMPOSEE D'UN GLISSEMENT DE TYPE $\gamma = s \circ t_{\vec{u}}$ AVEC UNE SYMETRIE CENTRALE S DONT LE CENTRE A EST SUR L'AXE DE s.</u>

Notons Δ la droite passant par A et perpendiculaire à l'axe de s. Appelons la symétrie d'axe Δ .
Alors les résultats qui précèdent entraînent :

$$S \circ \gamma \quad m \quad S \circ s \circ t_{\vec{u}} = \sigma \circ t_{\vec{u}} = \sigma' \, ^{*}$$

ou σ' est la symétrie d'axe Δ' image de Δ dans la translation de vecteur $\frac{\vec{u}}{2}$

De même, on a :

$$\sigma \circ \gamma = \sigma \circ s \circ t_{\vec{u}} = S \circ t_{\vec{u}} = S' \, ^{*}$$

ou S' est la symétrie de centre I image de A dans la translation de vecteur $\frac{\vec{u}}{2}$

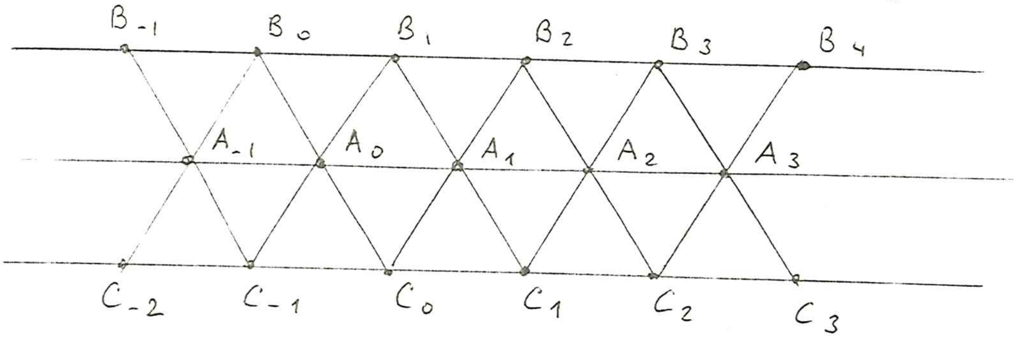
* La composition des applications est toujours associative.

ANNEXE 2

La question que l'on se pose est de savoir si notre définition de $\mathcal{F}_X$ n'est pas trop restrictive, ne devrait-on pas plutôt considérer le groupe $\mathcal{G}_X$ de tous les automorphismes affines de la frise X ?

L'exemple du paragraphe 2 nous incite à cet élargissement mais dissimule la complexité de la situation.

Prenons plutôt pour X la frise suivante formée d'hexagones réguliers :



L'algorithme de reconnaissance montre que $\mathcal{F}_X = \mathcal{F}_2^{\,\prime}$.
Mais $\mathcal{G}_X$ contient la symétrie affine Σ_0 d'axe $A_0 A_1$ et de direction $A_0 B_0$ ainsi que la symétrie affine Σ_1 d'axe $A_0 A_1$ et de direction $A_0 B_1$

$\mathcal{G}_X$ n'est pas isomorphe à $\mathcal{F}_X$: on pourra étudier la transformation $\Sigma_1 \circ \Sigma_0$ (transvection affine) et montrer qu'elle ne peut pas être l'image d'un élément de $\mathcal{F}_2^{\,\prime}$ dans un isomorphisme $\mathcal{F}_2^{\,\prime} \to \mathcal{G}_X$.

ANNEXE 3

Pour les lecteurs dont l'hémisphère gauche est particulièrement développé, je propose une définition des <u>groupes</u> de frises qui court-circuite celle des <u>frises</u> (le Larousse) et qui permet de retrouver toute la classification ci-dessus.

Dans la suite nous désignerons par T l'espace vectoriel des vecteurs du plan; O le groupe orthogonal du plan et Js le groupe des isométries du plan.
Nous savons qu'il existe une suite exacte :

$$0 \longrightarrow T \xrightarrow{\tau} Is \xrightarrow{\ell} O \longrightarrow 0$$

où τ est l'injection de T dans Is qui fait correspondre la translation $\tau_{\vec{t}} : x \longmapsto x+\vec{t}$ au vecteur $\vec{t}$, et où ℓ est l'épimorphisme qui envoie une isométrie sur l'application linéaire associée.
On posera $\mathcal{E} = \tau(T)$ = sous-groupe des translations de Is et on posera la définition suivante :
$\mathcal{F}$ est un <u>groupe de frise</u> si et seulement si :

$$\begin{cases} \mathcal{F} \subset \mathcal{I}_s \\ \mathcal{F} \cap \mathcal{E} \cong \mathbb{Z} \end{cases}$$

<u>Lemme 1</u> : Posons $S = \tau^{-1}(\mathcal{F} \cap \mathcal{E})$

1) $\mathcal{F}$ opère sur S par $(\alpha, \vec{t}) \longmapsto \ell(\alpha)(\vec{t})$

2) On a : $\quad \alpha \circ \tau_{\vec{t}} \circ \alpha^{-1} = \tau_{\ell(\alpha)(\vec{t})}$

Bornons-nous à démontrer la deuxième assertion ; si $x \in E$:

$$\alpha \circ \tau_{\vec{t}} \circ \alpha^{-1}(x) = \alpha\left[\alpha^{-1}(x) + \vec{t}\,\right] = x + \ell(\alpha)(\vec{t})$$

<u>Lemme 2</u> : Supposons que $S = \mathbb{Z}\vec{t_0}$ et désignons par $\bar{s}$ la symétrie vectorielle d'axe $\mathbb{R}\vec{t_0}$, et par $\bar{\sigma}$ la symétrie vectorielle d'axe orthogonal à $\mathbb{R}\vec{t_0}$.
Alors on a :

$$\ell(\mathcal{F}) = \{id\} \;,\; \{id, \bar{s}\} \;,\; \{id, \bar{s}\bar{\sigma}\} \;,\; \{id, \bar{\sigma}\}$$
$$\text{ou } \{id, \bar{s}, \bar{\sigma}, \bar{s}\bar{\sigma}\}.$$

En effet si l'action de $\mathcal{F}$ sur S est triviale, alors pour tout $\alpha \in \mathcal{F}$ et $\vec{t} \in S$, on a $\ell(\alpha)(\vec{t}) = \vec{t}$, donc $\ell(\mathcal{F}) = \{id\}$ ou $\ell(\mathcal{F}) = \{id, \bar{s}\}$.
Sinon, on a $\ell(\alpha)(\vec{t}) = \pm\vec{t}$ (car un générateur de S est envoyé sur un générateur de S) ce qui fournit les trois autres cas.

Théorème ("les sept groupes des frises") :

Soit un groupe de frise $\mathcal{F}$ et soit $S = \mathbb{Z}\,\vec{t_0}$

1) Si $\ell(\mathcal{F}) = \{id\}$, alors $\mathcal{F} = \mathcal{E} = \mathcal{F}_1$

2) Si $\ell(\mathcal{F}) = \{id, \bar{s}\}$, alors :

$$\mathcal{F} = \langle \tau_{\vec{t_0}}, s \rangle := \mathcal{F}_1^1 \quad \text{ou} \quad \mathcal{F} = \langle \gamma \rangle = \mathcal{F}_1^3$$

où s est telle que $\ell(s) = \bar{s}$ et γ est un glissement tel que $\ell(\gamma) = \bar{s}$ et $\gamma^2 = \tau_{\vec{t_0}}$.

3) Si $\ell(\mathcal{F}) = \{id, \bar{s}\bar{\sigma}\}$, alors
$\mathcal{F} = \langle \tau_{\vec{t_0}}, S_A \rangle = \mathcal{F}_1^2$
S_A désignant une symétrie de centre A.

4) Si $\ell(\mathcal{F}) = \{id, \bar{\sigma}\}$, alors
$\mathcal{F} = \langle \tau_{\vec{t_0}}, \sigma \rangle = \mathcal{F}_1^2$ où σ désigne une symétrie d'axe perpendiculaire à $\vec{t_0}$.

5) Si $\ell(\mathcal{F}) = \{id, \bar{s}, \bar{\sigma}, \bar{s}\bar{\sigma}\}$, alors
$\mathcal{F} = \langle \tau_{\vec{t_0}}, S_A, s \rangle = \mathcal{F}_2^1$ ou $\mathcal{F} = \langle \gamma, S_A \rangle = \mathcal{F}_2^2$
où A appartient à l'axe ou de γ.

DEMONSTRATION

1) est évident.

2) Si $\ell(\mathcal{F}) = \{id, \bar{s}\}$ deux cas sont possibles :
$\mathcal{F}$ contient une symétrie ou $\mathcal{F}$ n'en contient pas.
Dans le premier cas $\mathcal{F} = \langle \tau_{t_0}, s \rangle$, dans le second cas $\mathcal{F}$ contient un glissement γ' et $\gamma'^2 \in \mathcal{E}$.
Si $\gamma'^2 = \tau_{2nt_0}$, alors $\gamma' \circ \tau_{-nt_0}$ est une symétrie de $\mathcal{F}$!
Donc $\gamma'^2 = \tau_{(2n+1)t_0}$ et $\gamma' \circ \tau_{-nt_0} = \gamma$ est telle que $\gamma^2 = \tau_{t_0}$.

3) Si $\ell(\mathcal{F}) = \{id, \bar{s}\bar{\sigma}\}$, alors $S \in \ell^{-1}(\bar{s}\bar{\sigma})$ qui possède un point fixe A est un demi-ton autour de A.

4) Si $\ell(\mathcal{F}) = \{id, \bar{\sigma}\}$, alors $\sigma \in \ell^{-1}(\bar{\sigma})$ est une symétrie par rapport à un axe perpendiculaire à $\vec{t_0}$.

5) Si $\ell(\mathcal{F}) = \{id, \bar{s}, \bar{\sigma}, \bar{s}\bar{\sigma}\}$

Si $\ell^{-1}(\bar{s})$ contient une symétrie s, alors

$$\mathcal{F} = \langle \tau_{\vec{t}_0}, s, S_A \rangle$$

avec $s(A) = A$.

Si en effet $s(A) - A = \vec{\theta} \neq 0$, alors $\vec{\theta}$ est perpendiculaire à $\vec{t}_0$ et $s \circ S_A$ est une symétrie s' dont l'axe se déduit de celui de s par la translation $\vec{\theta}$.

Donc $s' \circ s = \tau_{2\vec{\theta}}$ et $2\vec{\theta} \notin S$, ce qui est absurde !

Si $\ell^{-1}(\bar{s})$ ne contient pas de symétrie, on voit comme en 2) que $\ell^{-1}(\bar{s})$ contient un glissement γ tel que $\gamma^2 = \tau_{\vec{t}_0}$.

Ensuite on voit comme ci-dessus que A appartient à l'axe de γ.

* REFERENCE

G.E MARTIN, "Transformation geometry" SPRINGER

3) CORDES VIBRANTES

Pourquoi les cordes vibrantes ?

C'est parce que le son produit par une corde élastique dont la vibration est entretenue, tout comme le son de la flûte, est un modèle de phénomène vibratoire périodique : de même que l'ordre est le contraire du chaos, ce son est le contraire d'un bruit.

Il n'est pas question de traiter ici de l'ensemble de la question qui est, depuis 1747, un très vaste chapitre de physique et un problème séminal dans plusieurs théories mathématiques : séries de Fourier, intégration, distributions, etc...

Que s'est-il passé en 1747 de si remarquable en ce qui concerne les cordes vibrantes ? Tout simplement l'obtention par Jean le Rond d'Alembert de l'équation différentielle aux dérivées partielles qui gouverne leur mouvement :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a^2 \frac{d^2 y}{dt^2}$$

En somme cette équation faisait passer l'étude des cordes vibrantes de l'hémisphère droit à l'hémisphère gauche, mais le savoir sur cette question était beaucoup plus ancien :

"It is Stonehenge ! "said Clare

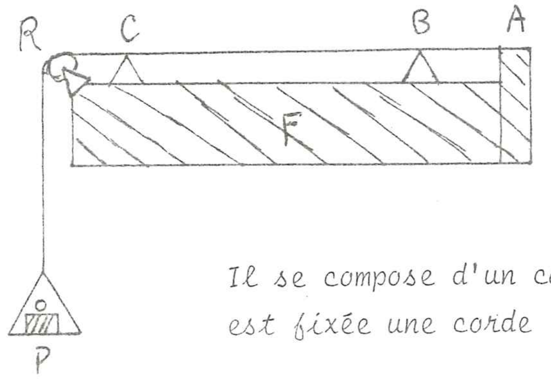
"The heathen temple, you mean ?"

"Yes, older than the centuries ; older than the d'Urbervilles !".

(Thomas Hardy : "Tess of the d'Urbervilles").

I - LE MONOCORDE

C'est un des plus anciens appareils de physique puisque Pythagore, trés probablement, l'utilisait déjà.



Il se compose d'un cadre en bois F sur lequel est fixée une corde (fixation en A).

La corde passe sur deux chevalets B et C (B est fixe mais C peut être déplacé) puis sur une poulie R et, finalement, son extrêmité libre est tendue par un poids P.

On a ainsi une sorte de violon primitif : C correspond au doigt du violoniste et P aux chevilles qui permettent de tendre les cordes.

On peut faire vibrer la corde de différentes façons : on peut la frapper, la mettre en vibration avec un archet ou bien en pizzicato.
On s'aperçoit qu'elle émet un son dont la fréquence obéit aux lois de Mersenne (1636) dont voici l'énoncé :

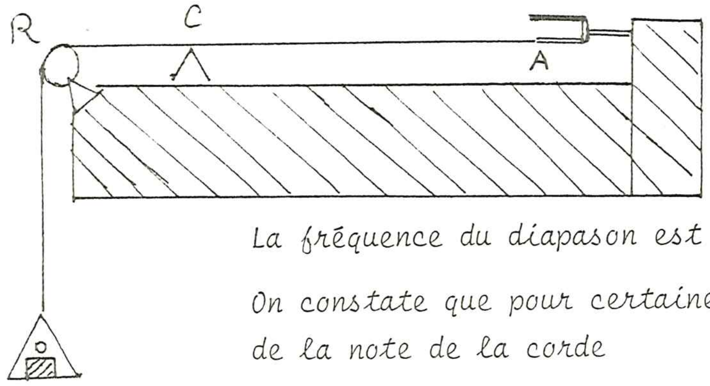
1°)- Loi de Pythagore : la fréquence du son est inversement proportionnelle à la longueur de la corde.

2°)- Elle est proportionnelle à la racine carrée de la tension T.

3°)- Elle est inversement proportionnelle à la racine carrée de la densité de la corde.

II - EXPERIENCE DE MELDE.

En 1852, Melde eut l'idée de remplacer le point de fixation A par une source de vibrations sinusoïdales (une branche de diapason par exemple).

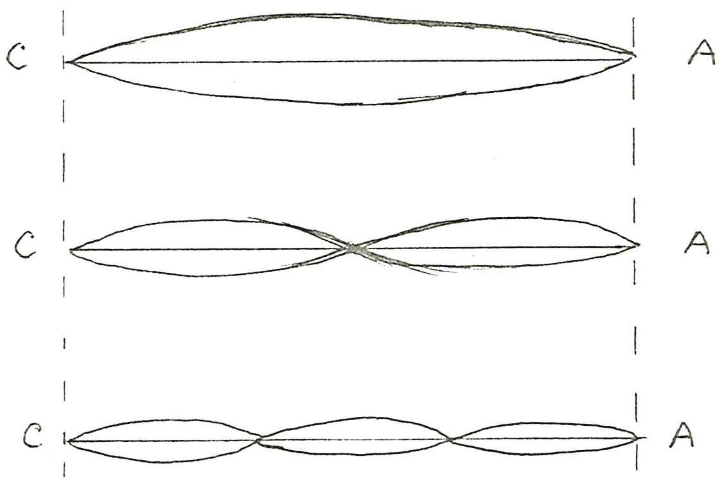


La fréquence du diapason est considérée comme fixe.

On constate que pour certaines valeurs de la fréquence de la note de la corde (fréquences obtenues en faisant varier C ou P) celle-ci se met à vibrer de manière visible.

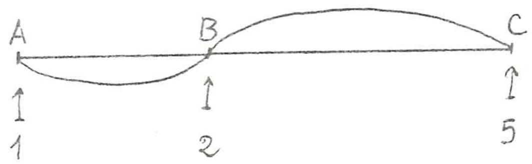
Et on constate que les fréquences de ces vibrations sont toutes des multiples entiers de la fréquence la plus basse, qui correspond à celle du diapason.

Lorsque C reste fixe, les configurations que prend la corde sont les suivantes :



etc ---

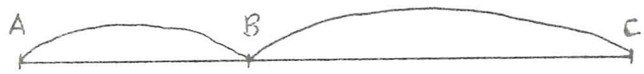
C'est-à-dire que les longueurs vibrantes situées entre deux <u>noeuds</u> consécutifs sont proportionnelles à 1, 1/2, 1/3, etc..., les fréquences correspondantes des sons émis étant (loi de Pythagore) proportionnelles à 1,2,3,etc... Il est facile, avec un peu de "bon sens", de se convaincre qu'il ne peut pas en être autrement.
Montrons par exemple que la situation représentée sur la figure ci-dessous est absurde :



En effet la période de vibration du segment AB (resp : BC) serait proportionnelle à 2 (resp.3) :

période (AB) : 2T
période (BC) : 3T

Au bout du temps 3T on se retrouve donc dans la situation suivante :



et une force devrait être exercée en B pour y maintenir un noeud, ce qui n'est conforme ni à la réalité de la situation ni au bon sens !

REMARQUE :

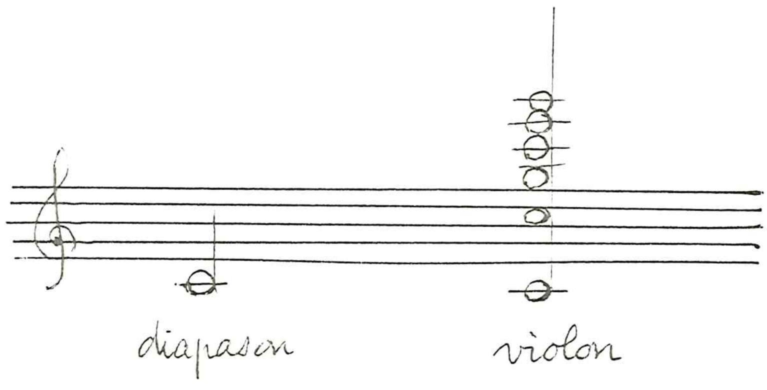
Ce raisonnement [J] me paraît être un magnifique exemple de "mathématiques de l'hémisphère droit". Il suppose en effet, chez le lecteur, une "vision" spatiale et temporelle d'une corde vibrante qui a son siège, paraît-il, dans l'hémisphère cérébral droit [D , H] . Et il serait difficile de le traduire en "mathématiques de l'hémisphère gauche," c'est-à-dire en mathématiques bourbakistes.

III - TIMBRE DU VIOLON

Il y a au moins deux manières différentes de mettre en vibration une corde de violon ; on peut soit utiliser un archet (vibrations de relaxation) soit le doigt (pizzicato).

3,1) Son entretenu par l'archet

L'analyse harmonique d'un son de violon fait apparaître sa richesse harmonique qui le distingue d'un son sinusoïdal pur (diapason).



Une seule note est semblable à un accord de sons purs qui serait joué decrescendo de bas en haut : ces sons sont appelés les harmoniques du son fondamental.
Helmholtz a montré que les intensités des différentes harmoniques d'un son de violon sont proportionnelles à :

$$1 \; , \; 1/2^2 \; , \; 1/3^2 \; , \; 1/4^2 \; , \; \ldots\ldots \; 1/n^2 \; , \; \ldots\ldots$$

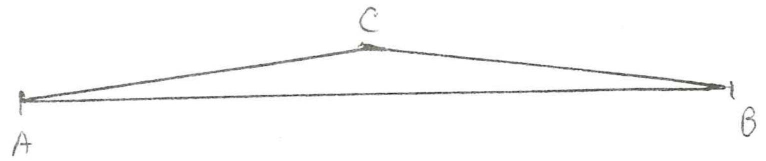
D'une manière précise :

$$y = C^{te} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n \pi x}{L} \sin \frac{2n\pi}{T} (t - \tau)$$

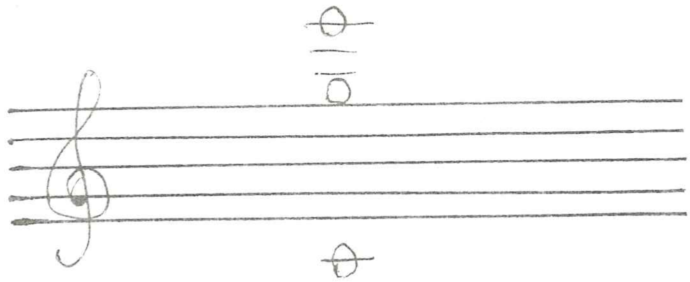
où L est la longueur de la corde, T la période de vibration et τ un paramètre qui dépend de l'archet (tension, état des crins, colophane, etc....)

3,2) Pizzicati

La composition en harmoniques d'une note jouée pizzicato dépend de l'endroit où la corde est "pincée".



Si elle est pincée en son milieu, comme dans la figure ci-dessus, on l'oblige à avoir un ventre de déplacement en son milieu, ce qui exclut la possibilité d'obtenir des harmoniques d'ordre pair, d'où "l'accord" :



Si elle est pincée en un point C tel que

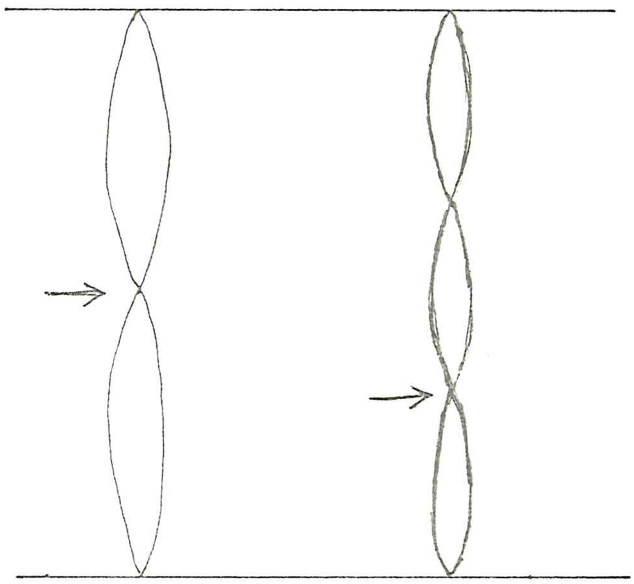
$$\frac{AC}{AB} \in \left\{ 1/5 \ , \ 2/5 \ , \ 3/5 \ , \ 4/5 \right\}$$

alors les harmoniques dont les ordres sont divisibles par 5 sont absentes, etc...

APPLICATION :

Accorder un violoncelle n'est pas une chose aussi simple qu'il peut paraître, pour la raison que si on joue le "do" , les harmoniques du "do" font vibrer par sympathie les autres cordes soit à l'état fondamental, soit à l'état harmonique (comme dans l'expérience de Melde).
C'est la raison pour laquelle il est préférable de commencer par la corde du haut qui, d'ailleurs, se trouve être le "la" : les harmoniques du "la" ont peu d'action sur les grosses cordes qui se trouvent au-dessous et qui sont difficiles à mettre en vibration.
Le "la" étant donné, on peut alors simplement accorder le "ré" (quinte au-dessous) de telle sorte que le rapport des fréquences : $\frac{la}{ré} = 3/2$.

Pour cela on met un doigt, <u>sans appuyer</u>, au voisinage du milieu de la corde "la" un autre au voisinage du tiers ou des deux-tiers du "ré" ; si on joue simultanément les deux notes on doit entendre un unisson au voisinage duquel l'oreille est extrêmement sensible.



IV - HARMONIQUES NATURELLES, SUITES DE FAREY

Lorsque l'on pose le doigt, sans appuyer, au point C d'une corde de violon, et que

$$\frac{AC}{AB} = x \in \mathbb{Q}$$

$$x = \frac{2}{5}$$

la corde se met à vibrer sur toute sa longueur avec un noeud au point C.
Si $x = n/d$, alors une des vibrations possibles correspond à la division de AB en d parties égales.
Si $x = \frac{n_0}{d_0}$, où $\frac{n_0}{d_0}$ est une fraction irréductible, alors il existe un entier $a \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\begin{cases} n = a n_0 \\ d = a d_0 \end{cases}$$

Donc toutes ces vibrations sont les harmoniques d'un son fondamental correspondant à la division de AB en d_0 parties égales.

On a donc un modèle théorique de la production des harmoniques naturelles.

Tout se passe comme si la corde était le segment $]0 \quad 1]$ de l'ensemble des rationnels, et comme si on avait une fonction h telle que :

$$h(x) = d_0$$

où d_0 est le dénominateur de x écrit sous forme de fraction irréductible.
On appelle suite de Farey d'ordre n, et on note $\mathcal{F}_n$ l'ensemble ordonné des fractions irréductibles de $[0 \; 1]$ dont le dénominateur n'excède pas n, rangées par ordre croissant .

Par exemple :

$$\mathcal{F}_5 = \{0/1 \, , \, 1/5 \, , \, 1/4 \, , \, 1/3 \, , \, 2/5 \, , \, 1/2 \, , \, 3/5 \, , \, 2/3 \, , \, 3/4, \, 4/5 \, , \, 1/1\}$$

La restriction de l'application h à $\mathcal{F}_5 \cap]0\ 1]$ est :

$x \downarrow h(x)$										
x	1/5	1/4	1/3	2/5	1/2	3/5	2/3	3/4	4/5	1/1
$h(x)$	5	4	3	5	2	5	3	4	5	1

On remarque une symétrie par rapport au milieu de la corde (ce qui s'entend fort bien sur un violon !).

Qui était Farey ?

D'après Hardy et Wright (Introduction to the theory of numbers) Farey était un géologue et la seule chose qui lui a survécu est la notion de suite de Farey (il a énoncé un théorème sur ces suites en 1816).
Mais dans l'édition anglaise de l'ouvrage fondamental de Helmholtz, le traducteur cite un certain John Farey qui, en 1811, s'intéressait au problème du tempérament égal. Etait-ce le même Farey ? Si oui, l'origine des suites de Farey serait incontestablement musicale.

V - UN EXEMPLE MUSICAL DE FONCTION DISCONTINUE.

Nous avons rencontré dans le paragraphe 4, une application h :

$$h :]0\ 1] \cap \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

qui est définie par h (n/d) = d , lorsque n et d sont premiers entre eux.
Il est clair que h est surjective.
Si $d \in N \setminus \{0\}$ on a :

$$h^{-1}(d) = \{n \in N \ ; \ 0 < n < d, \ (n,d) = 1\}$$

Le cardinal de l'ensemble $h^{-1}(d)$ est noté $\varphi(d)$, et l'application φ est appelé la fonction d'Euler, on a donc :

$$|h^{-1}(d)| = \varphi(d)$$

où $|E|$ désigne le nombre des éléments d'un ensemble E.

Il en résulte que h n'est <u>pas injective</u>, car on démontre dans tous les cours d'arithmétique que :

$$\varphi(p_1^{n_1} \ldots\ldots p_s^{n_s}) = p_1^{n_1-1}(p_1-1)\ldots\ p_s^{n_s-1}(p_s-1)$$

où $p_1, \ldots, p_s$ sont des nombres premiers positifs distincts.

Une autre manière de le voir est de remarquer que $h(r) = h(1-r)$.
Montrons que h n'est <u>pas continue</u>.
En effet si h était continue, elle serait localement constante et si $h(r) = d$, alors $h(r')$ serait égal à d pour tout r' suffisamment voisin de r, ce qui est absurde.
On peut se demander si h prend, en moyenne, de grandes ou de petites valeurs.
Un élément de réponse est donné par le résultat suivant.

<u>Théorème</u> 1 :

1) $$\sum_{r \in]0,1] \cap \mathbb{Q}} [h(r)]^{-3} < \prod_{p \text{ premier}} \left(1 + \frac{1}{p^2}\right) = \frac{15}{\pi^2}$$

2) $$\sum_{r \in]0,1] \cap \mathbb{Q}} [h(r)]^{-2} = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = \infty$$

<u>Idée de la démonstration</u>

1°) Pour la première assertion, on remarque que :

$$\sum_{r \in h^{-1}(d)} [h(r)]^{-3} = \frac{\varphi(d)}{d^3} = \frac{\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_s}\right)}{d^2}$$

en posant $d = p_1^{n_1} \cdot \ldots\ p_s^{n_s}$

On a donc :

$$\sum_r [h(r)]^{-3} = \sum_{d \geq 1} \frac{\varphi(d)}{d^3} = \prod_p \left[1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1 - \frac{1}{p}}{p^{2n}}\right]$$

$$< \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^2}\right) = \frac{\zeta(2)}{\zeta(4)} = \frac{15}{\pi^2}$$

2°) La seconde assertion s'étudie de même :

$$\sum_{d \geq 1} \frac{\varphi(d)}{d^2} = \prod_p \left[1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1 - \frac{1}{p}}{p^n}\right] = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p}\right) = \infty$$

Comme cela est démontré dans le problème de CAPES de 1980.

REMARQUE : Si n est un entier $\geqslant 2$, on a :

$$\sum_r [h(r)]^{-n-1} \leqslant \frac{\zeta(n)}{\zeta(2n)}$$

VI - QUELQUES PROPRIETES ARITHMETIQUES DES SUITES DE FAREY

Afin d'illustrer l'utilité* des suites de Farey nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 2 :

Soit un nombre irrationnel $\alpha \in]0\ 1[$ et soit $n \geqslant 1$.

1°) Il existe a/b (irréductible) $\in \mathcal{F}_n$ telle que :

$$\left|\frac{a}{b} - \alpha\right| < \frac{1}{b}2$$

2°) Le minimum de $|a - b\alpha|$ est atteint pour une seule fraction (irréductible) $\frac{a}{b}$ de $\mathcal{F}_n$.

Démonstration

1°) Commençons par l'unicité.

S'il existe $\frac{a_1}{b_1}$ et $\frac{a_2}{b_2}$ telles que

$$|a_1 - b_1\alpha| = |a_2 - b_2\alpha|$$

Alors

$$a_1 - \varepsilon a_2 = (b_1 - \varepsilon b_2)\alpha$$

Avec $\varepsilon = \pm 1$ et comme $\alpha \notin \mathbb{Q}$, on a $\varepsilon = 1$ et $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$

* En théorie de l'approximation.

2°) Soient deux fractions successives $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ de $\mathcal{F}_n$.

Nous allons montrer que $a'b - ab' = 1$ en raisonnant par récurrence sur n.

Si $n = 1$, $\mathcal{F}_n = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right)$ et la propriété est évidente.

Soit n quelconque : nous supposerons que la propriété est vraie pour $\mathcal{F}_{n-1}$.

Si $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ sont dans $\mathcal{F}_{n-1}$ il n'y a rien à démontrer.

Supposons donc que $b = n$ ou $b' = n$ et que, par exemple :

$$\frac{a_0}{b_0} < \frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$$

avec $\frac{a_0}{b_0}$, $\frac{a'}{b'} \in \mathcal{F}_{n-1}$ et $\frac{a}{b} \in \mathcal{F}_n$

D'aprés l'hypothèse de récurrence : $a'b_0 - a_0b' = 1$

Posons : $\begin{cases} ab_0 - a_0b' = r \\ a'b - ab' = s \end{cases}$

et considérons que a et b sont deux inconnues, en résolvant ce système on obtient :

$$\begin{cases} a = ra' + sa_0 \\ b = sb_0 + rb' \end{cases}$$

Considérons l'ensemble S de toutes les fractions :

$$\frac{A}{B} = \frac{\lambda a_0 + \mu a'}{\lambda b_0 + \mu b'} \quad , \lambda \text{ et } \mu \in N$$

alors $\frac{a}{b} \in S$ et toutes ces fractions sont entre $\frac{a_0}{b_0}$ et $\frac{a'}{b'}$.

On voit facilement que si $(\lambda, \mu) = 1$, ces fractions sont irréductibles car:

$$\begin{cases} \lambda = -b' \;(\lambda a_0 + \mu a') + a' \;(\lambda b_0 + \mu b') \\ \mu = \quad b_0 \;(\lambda a_0 + \mu a') - a_0 \;(\lambda b_0 + \mu b') \end{cases}$$

La fraction de plus petit dénominateur correspond à $(\lambda, \mu) = (1,1)$, c'est nécessairement $\frac{a}{b}$ donc :

$$\begin{cases} a = a' + a_0 \\ b = b_0 + b' \end{cases}$$

et

$$a'b - ab' = a'(b_0+b') - (a'+a_0)\, b' = a'b_0 - a_0 b' = 1$$

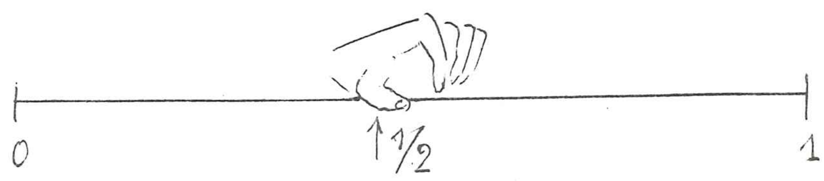
3°) Il est clair que α est soit dans $\left]\frac{a}{b}, \frac{a+a'}{b+b'}\right[$ soit dans $\left]\frac{a+a'}{b+b'}, \frac{a'}{b'}\right[$. Supposons par exemple que l'on soit dans le premier cas, alors :

$$\left| \frac{a}{b} - \alpha \right| < \left| \frac{a}{b} - \frac{a+a'}{b+b'} \right| = \frac{1}{b(b+b')} < \frac{1}{b^2}$$

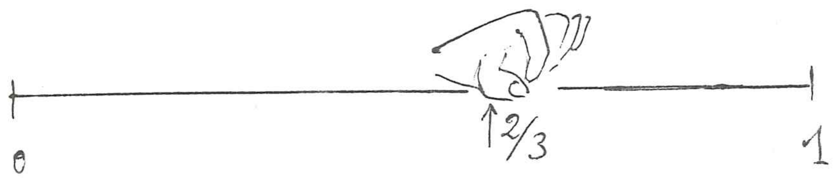
ANNEXES

1) LIEN AVEC LA TECHNIQUE DU VIOLONCELLE.

Le violoncelle ayant des cordes très longues par rapport au violon ou à l'alto contient, en un certain sens, toutes les possibilités techniques de ces derniers instruments.
En effet si on fixe le pouce au milieu de la corde, on se trouve dans la situation d'un altiste en première position.



Si on le fixe au 2/3 de la corde, on se trouve dans la situation d'un violoniste en première position :



C'est la raison pour laquelle l'éminent violoncelliste britannique C.BUNTING considère que ces positions sont fondamentales dans la pédagogie du violoncelle : conception étonnament pythagoricienne !

II - ENSEMBLES DE FAREY DANS LES SERIES FORMELLES.

1°) On peut définir une "valeur absolue" sur l'anneau des polynômes $k[X]$ en posant :

$$|a_n X^n + \ldots + a_0| = \rho^n$$

Si $a_n \neq 0$, ρ étant un nombre > 1.

Le complété du corps des fractions rationnelles $k(x)$ pour cette valeur absolue est le corps des séries formelles que l'on notera $k((\frac{1}{x}))$.

Il existe une analogie profonde et remarquable entre Z , Q et R d'une part; $k[x]$, $k(x)$ et $k((\frac{1}{x}))$ d'autre part.

Cependant $k((\frac{1}{x}))$ contient un sous anneau qui n'a pas d'équivalent alg - brique dans R, c'est $k[[\frac{1}{x}]]$ C'est à dire l'ensemble des séries entières en $\frac{1}{x}$; l'analogue le plus simple de $k[[\frac{1}{x}]]$ est $[-1,1]$, car les éléments de $k[[\frac{1}{x}]]$ sont les séries α telles que $|\alpha| \leqslant 1$.

Si $\alpha \in k((\frac{1}{x}))$, s'écrit :

$$\alpha = a_n x^n + \ldots + a_0 + \frac{a_{-1}}{x} + \ldots + \frac{a_{-p}}{x^p} + \cdots$$

On dira que :

$$[\alpha] = a_n X^n + \ldots + a_0 \in k[X]$$

est la <u>partie entière</u> de α et que :

$$(\alpha) = \frac{a-1}{X} + \ldots + \frac{a-p}{X^p} + \cdots$$

est le <u>reste</u> de α.

2°) Ceci étant, on peut définir, pour tout entier $n \geqslant 1$, un "ensemble de Farey" $F_n \subset k(X)$ en considérant les fractions rationnelles $\frac{a(x)}{b(x)}$ telles que degré $a(x) \leqslant$ degré $b(x) \leqslant n$.

THEOREME 3 :

Soit $\alpha \in k\left[\left[\frac{1}{x}\right]\right] \setminus k(x)$ et soit $n \geqslant 1$.

1) Il existe $\frac{a}{b}$ (irréductible) $\in F_n$ telle que :

$$\left|\frac{a}{b} - \alpha\right| < \frac{1}{|b|^2}$$

2) Le minimum de $|a - bx|$ est atteint (sur F_n) par une seule fraction irréductible $\frac{a}{b}$ et, lorsque n varie, on obtient une suite de "meilleures approximations de α.

Démonstration

1) Commençons par l'unicité.

Soient a/b et a'/b' telles que :

$$|a - b\alpha| = |a' - b'\alpha| < \inf\left\{\frac{1}{|b|}, \frac{1}{|b'|}\right\}$$

alors on a :

$$|ab' - bb'\alpha| \text{ et } |a'b' - bb'\alpha| < 1$$

d'où

$$|ab' - a'b| < 1$$

Ce qui entraîne que $ab' - a'b = 0$.

2) La démonstration de l'existence s'éloigne davantage de celle du théorème 2.

Puisque $a = [b\alpha]$, ce qu'il faut voir est que l'on peut choisir b de telle sorte que :

$$|(b\ x)| < \frac{1}{|b|^2}$$

Posons $\alpha(x) = a_0 + \frac{a_1}{X} + \dots + \frac{a_n}{X^n} + \dots$

et $b(x) = b_0 X^n + b_1 X^{n-1} + \dots + b_n$

avec $b_0 \neq 0$. Ce que l'on demande est que :

$$\begin{cases} a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_{n+1} b_0 = 0 \\ a_2 b_n + a_3 b_{n-1} + \dots + a_{n+2} b_0 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_n b_n + a_{n+1} b_{n-1} + \dots + a_{2n} b_0 = 0 \end{cases}$$

Ce sont n équations linéaires à n + 1 inconnues :

il y a donc une solution non nulle $(b_0, \dots, b_{n+1})$ qui nous donne le polynôme b (x) cherché.

Comme $\left|\frac{a}{b} - \alpha\right| \neq 0$, puisque $\alpha \notin k(x)$, on construit ainsi une suite de "meilleures approximations" de α en choisissant celles pour lesquelles $|a-b\alpha|$ est minimum et en faisant varier n.

REMARQUE :

Ce résultat est un cas particulier de la théorie des "approximants de Padé".

REFERENCES:

J : James JEANS : "Science and Music" Dover

D,H : P.J DAVIS, R.HERSH : "The math'matical experience" , Pelican.

4) - SOMMES DE FONCTIONS SINUSOIDALES

I - PRINCIPES GENERAUX

1) Nous allons commencer par "accorder nos violons" en donnant des définitions abstraites.

DEFINITIONS Un son musical est un bruit périodique.
Un son est une superposition de sons musicaux.

Notre propos est d'essayer de voir dans quelles conditions une superposition de sons musicaux est succeptible de donner un son musical et quelle est la période (ou la fréquence) de ce son musical.

Un son musical fondamental (sans harmoniques) correspondant à une formation sinusoïdale simple, nous allons étudier la périodicité de la fonction :

$$f(x) = \lambda \sin \alpha x + \mu \sin \alpha x \quad (\lambda\mu \neq 0)$$

afin de voir dans quel cas la superposition de deux sons musicaux fondamentaux peut donner un son musical.

2) Théorème : Soient quatre nombres réels non nuls α, β, λ, μ

$f(x) = \lambda \sin \alpha x + \mu \sin \beta x$ est périodique si et seulement si $\frac{\beta}{\alpha}$ est un nombre rationnel (donc un quotient de nombres entiers)

PREUVE

1°) La condition est clairement suffisante, montrons qu'elle est nécessaire.

2°) $f(x)$ périodique $\Leftrightarrow \exists T \neq 0$, $f(x+T) = f(x)$

En dérivant deux fois, on a aussi :

$$f''(x+T) = f''(x)$$

L'égalité $f(n \ T) = f(x)$ est équivalente à :

$$\lambda(\sin \alpha(x+T) - \sin \alpha x) + \mu(\sin \beta(x+T) - \sin \beta x) = 0$$

soit : $u(x) + v(x) = 0$

En dérivant deux fois, on obtient :

$$\alpha^2 u(x) + \beta^2 v(x) = 0$$

$$\text{ou } u(x) + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 v(x) = 0$$

d'où si $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \neq 1$: $(u(x), v(x)) = (0,0)$

ce qui équivaut à : $\begin{array}{l} u(x) = 0 \\ v(x) = 0 \end{array} \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha T \in \pi\mathbb{Z} \\ T \in \pi\mathbb{Z} \end{array}\right.$

donc, il existe k et k' entiers tels que :

$$\alpha T = k\pi \quad \text{et} \quad \beta T = k'\pi$$

on a donc $\dfrac{k\pi}{\alpha} = \dfrac{k'\pi}{\beta}$ soit : $\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{k'}{k}$

soit

Finalement, si $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = 1$, alors $\frac{\beta}{\alpha} = \pm 1$.

3°) Conséquence : Si on joue simultanément (et avec des intensités égales) les deux notes d'une quinte tempérée, on n'obtient pas un son musical (c'est seulement un son). Si on joue simultanément (et avec des intensités égales) les deux notes d'une quinte pure, on obtient un son musical.

En effet dans le 1er cas la fonction correspondante est $\sin 2x + \sin 2^{\frac{19}{12}} x$ alors que dans le 2ème cas, la fonction est $\sin 2x + \sin 3x$ or, $2^{\frac{19}{12}}$ n'est pas rationnel.

Du point de vue physique, il est difficile de faire la différence entre les deux fonctions, en effet :

$$2^{\frac{19}{12}} \simeq 2{,}996.$$

Graphiquement, en les représentant à l'aide d'un micro-ordinateur, nous n'avons pu les distinguer, même en les étudiant sur des intervalles trés grands.

Le physicien d'ailleurs ne distingue pas les nombres rationnels des nombres irrationnels, puisque pour lui tout nombre est considéré avec une certaine approximation (les mathématiciens ont montré que tout irrationnel peut s'approcher d'aussi près que l'on veut par un rationnel). Cette distinction-rationnels, irrationnels - pourrait donc apparaître comme une subtilité propre au mathématicien si elle n'était aussi ressentie par le musicien : un accord de quinte pure joué en gamme de Zarlino par exemple est perçu avec plus de plénitude que le même accord joué en gamme tempérée. Cette constatation qui met en évidence la finesse de perception de l'oreille et les capacités d'analyse du cerveau humain ne peut que nous remémorer cette affirmation de Leibniz, déjà citée dans l'introduction, considérant la musique comme une arithmétique de l'esprit.

II - EXEMPLES DE SOMMES DE FONCTIONS PERIODIQUES EN LIAISON AVEC DES SITUATIONS MUSICALES.

1) Accord parfait majeur et accord de septième de dominante.

Ces accords s'obtiennent en jouant simultanément les notes do mi sol et do mi sol sib en do majeur. Ils sont purs dans la gamme de Zarlino. En effet, dans cette gamme ils superposent respectivement des notes de fréquence 4N , 5N , 6N et 4N , 5N , 6N , 7N. Dans les deux cas, la fonction somme est périodique de fréquence N correspondant à un do situé deux octaves en dessous du do fondamental (fréquence 4N).

Pour illustrer ce paragraphe, nous avons représenté graphiquement les fonctions $\sin 4x + \sin 5x + \sin 6x$

et $\sin 4x + \sin 5x + \sin 6x + \sin 7x$

qui correspondent à ces accords dans le cas de sons musicaux fondamentaux (sans harmoniques) joués en phase, c'est à dire avec une synchronisation parfaite. Si les sons ne sont pas en phases, les courbes sont différentes, mais les fonctions sont toujours de période 2π, c'est à dire d'une fréquence correspondant à celle de $\sin x$ et l'oreille humaine ne perçoit pas la différence.

Graphiques : figure 2 et figure 3.

2) Sons musicaux fondamentaux et harmoniques.

En fait, le problème est plus compliqué, car une note obtenue sur un instrument de musique est constituée d'un son fondamental auquel on attribuera la fréquence N (fonction sin x) et d'un certain nombre de ses harmoniques de fréquence pN où p est un naturel supérieur à 1.
Un son musical de fréquence N correspond donc à une fonction du type :

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_n \sin nx$$

La donnée de la suite (a_n) correspond à celle du timbre car l'oreille humaine n'est pas sensible à la phase.
Sur un violon, par exemple, en jouant avec l'archet, le timbre correspond à la suite $(\frac{1}{n^2})$ et le son à une fonction du type :

$$\sin x + \frac{1}{2^2} \sin 2x + \frac{1}{3^2} \sin 3x + \dots + \frac{1}{n^2} \sin nx$$

(voir chapitre précédent)

Nous avons représenté graphiquement les fonctions

$$f_n(x) = \sum_{p=1}^{n} \sin px \qquad \text{pour } n = 10,\ 20,\ 50$$

Lorsque n devient grand, f_n semble tendre vers une fonction périodique discontinue correspondant à une fonction de type cotg $\frac{x}{2}$.

Mathématiquement on a bien sûr envie de justifier cette intuition :

On sait que l'on peut calculer $\sum_{p=1}^{n} \sin px$ en considérant $\sin px$ comme la partie imaginaire de e^{ipx}, on a alors

$$\sum_{p=0}^{n} \sin px = \mathrm{Im}\left(1 + e^{ix} + e^{2ix} + \dots + e^{inx}\right)$$
$$= \mathrm{Im}\left(\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right)$$

Premier calcul de $f_n(x)$

On a :

$$\frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1} = \frac{e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\left[e^{\frac{i(n+1)x}{2}} - e^{-\frac{i(n+1)x}{2}}\right]}{e^{\frac{ix}{2}}\left[e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}\right]}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\, e^{\frac{inx}{2}}$$

En prenant la partie imaginaire :

$$f_n(x) = \frac{\sin\frac{nx}{2}\,\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

Remarques :

1) Lorsque x est très petit $f_n(x) \sim x \sum_0^n p$, donc

$$\sum_{p=0}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}$$

2) Cette formule paraît cependant impuissante à décrire le comportement de $f_n(x)$ lorsque x n'est pas petit et que n tend vers l'infini.

Deuxième calcul de $f_n(x)$.

Considérons un nombre réel $\rho < 1$ et très voisin de 1, on a :

$$\sum_{p=0}^{n} \rho^p e^{ipx} = \frac{1-\rho^{n+1}e^{i(n+1)x}}{1-\rho\, e^{ix}} := S_{n,\rho}(x)$$

Lorsque n tend vers l'infini on obtient :

$$\lim_{n \to \infty} S_{n,\rho}(x) = \frac{1}{1-\rho e^{ix}} = \frac{1-\rho e^{-ix}}{1-2\rho\cos x+\rho^2}$$

D'où :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_p \rho^p \cos px = \frac{1-\rho\cos x}{1-2\rho\cos x+\rho^2} \\ \displaystyle\sum_p \rho^p \sin px = \frac{\rho \sin x}{1-2\rho\cos x+\rho^2} \end{cases}$$

Comme les seconds membres ont une limite (si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$) lorsque $\rho \to 1$, on peut poser, comme Léonhard Euler :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_p \cos px = \lim_{\rho \to 1}\left(\frac{1-\rho\cos x}{1-2\rho\cos x+\rho^2}\right) = \frac{1}{2} \\ \displaystyle\sum_p \sin px = \lim_{\rho \to 1}\left(\frac{\rho\sin x}{1-2\rho\cos x+\rho^2}\right) = \frac{1}{2}\cot g\,\frac{x}{2} \end{cases}$$

<u>Remarque :</u>

Les séries qui apparaissent au premier membre ne sont pas convergentes donc $\sum_p$ <u>ne symbolise pas</u> la somme de ces séries au sens classique du terme.

Différence entre les deux formules.

Par soustraction on obtient :

$$f_n(x) - \sum_p \sin px = - \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}$$

On peut donc affirmer que le premier membre prend ses valeurs dans $\left[-\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}, \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right]$ lorsque n varie.

Si $x = (2l+1)\pi$, avec $l \in \mathbb{Z}$, cette valeur est 0.

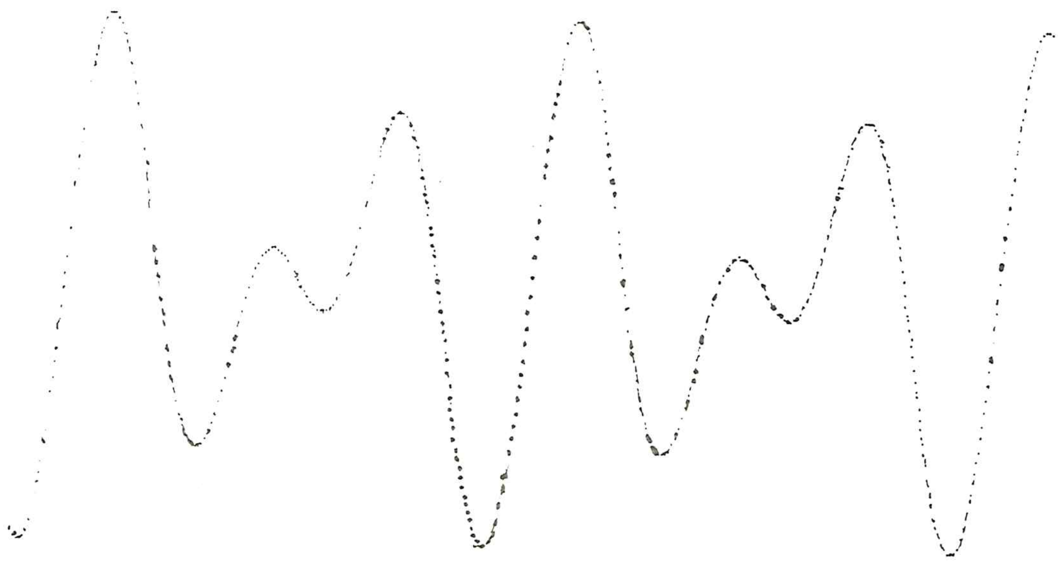
Si $\frac{x}{\pi} \in \mathbb{Q}$, ces valeurs sont en nombre fini.

Si $\frac{x}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, ces valeurs sont partout denses dans le segment $\left[-\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}, \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right]$ (voir Annexe 2).

Son du violon.

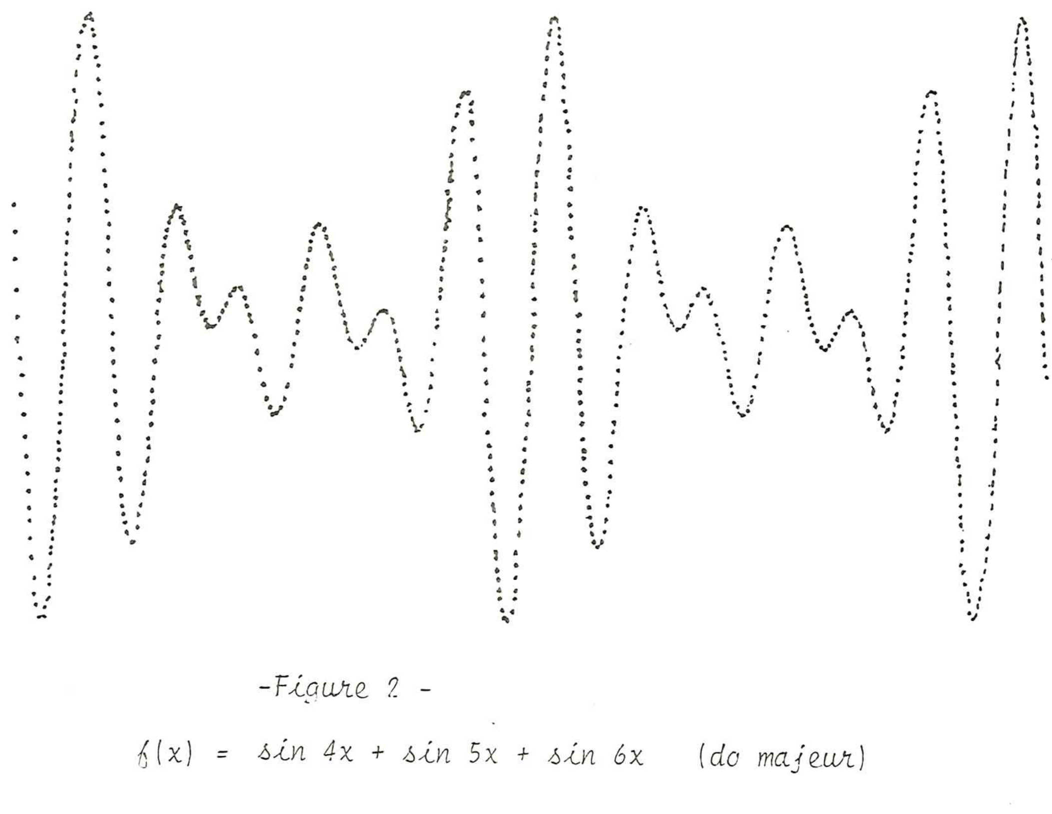
La série $\sum_p \frac{1}{p^2} \sin px$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ et sa somme est donc une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (voir figures 8 et 9).

REPRESENTATIONS GRAPHIQUES



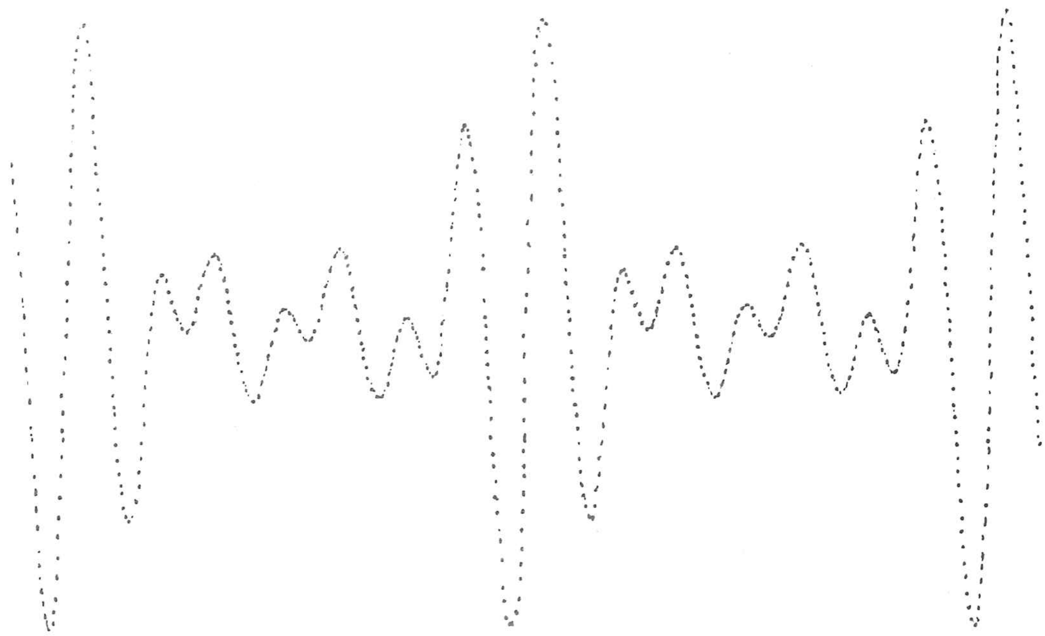
-Figure 1 -

$f(x) = \sin 2x + \sin 3x$ (quinte pure)



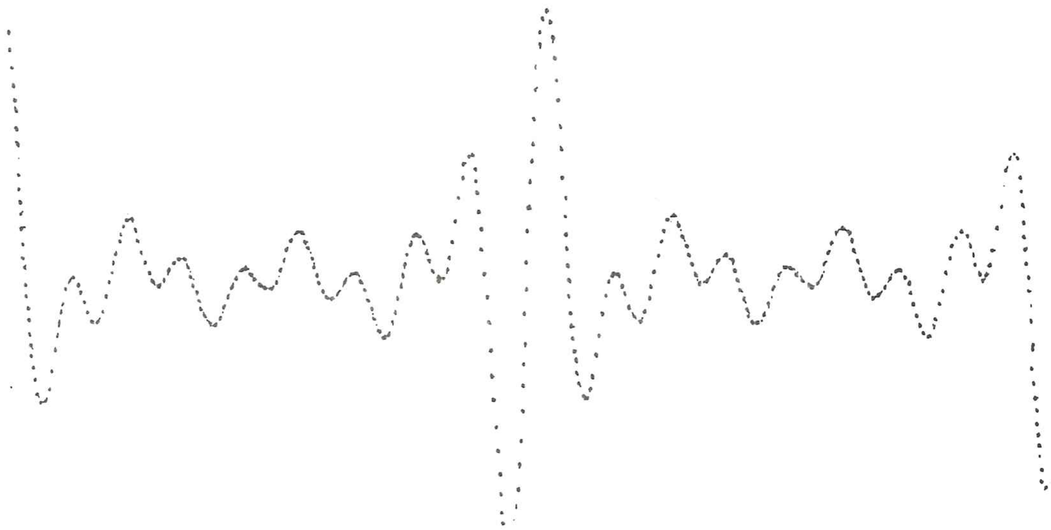
-Figure 2 -

$f(x) = \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x$ (do majeur)



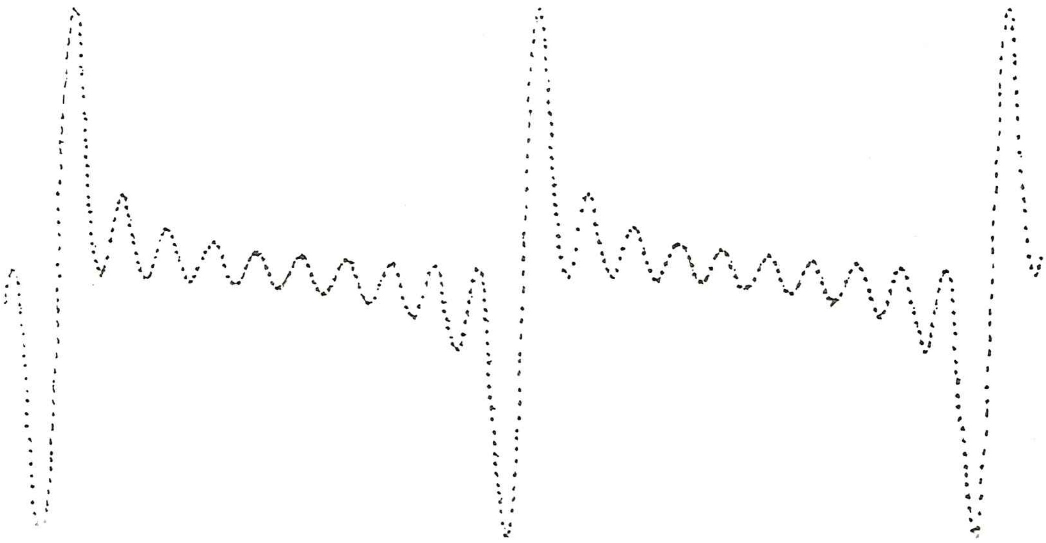
-Figure 3 -

$f(x) = \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x + \sin 7x$ (do majeur 7ème)



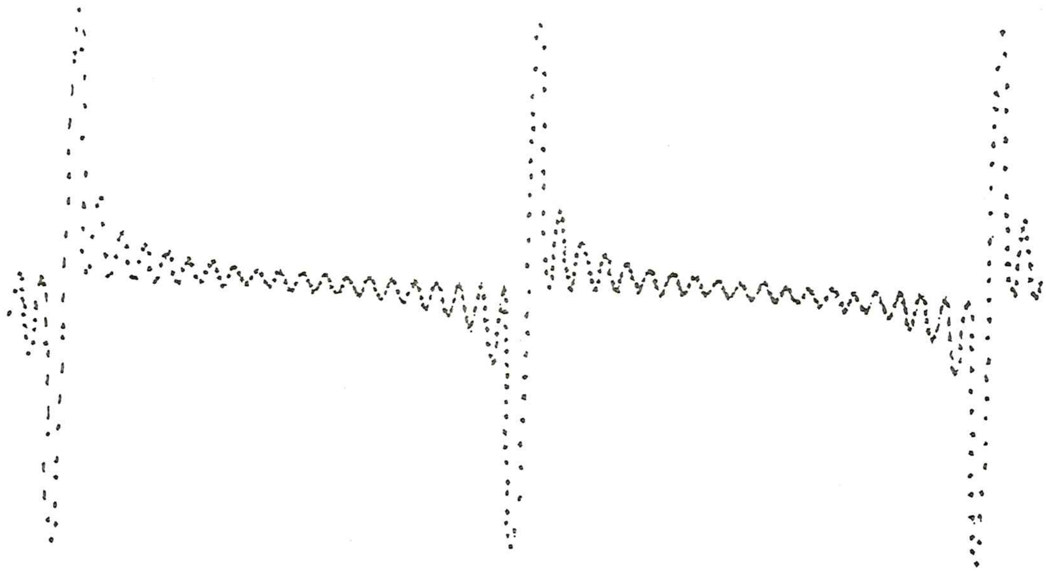
-Figure 4 -

$f(x) = \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x + \sin 7x + \sin 8x + \sin 9x$ (do majeur 9ème).



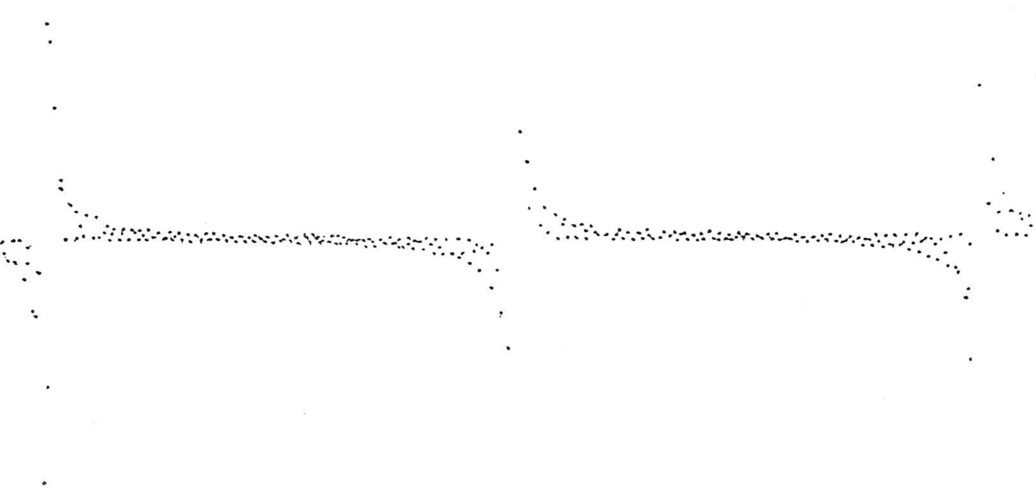
-Figure 5-

$f(x) = \sum_{p=1}^{10} \sin px$



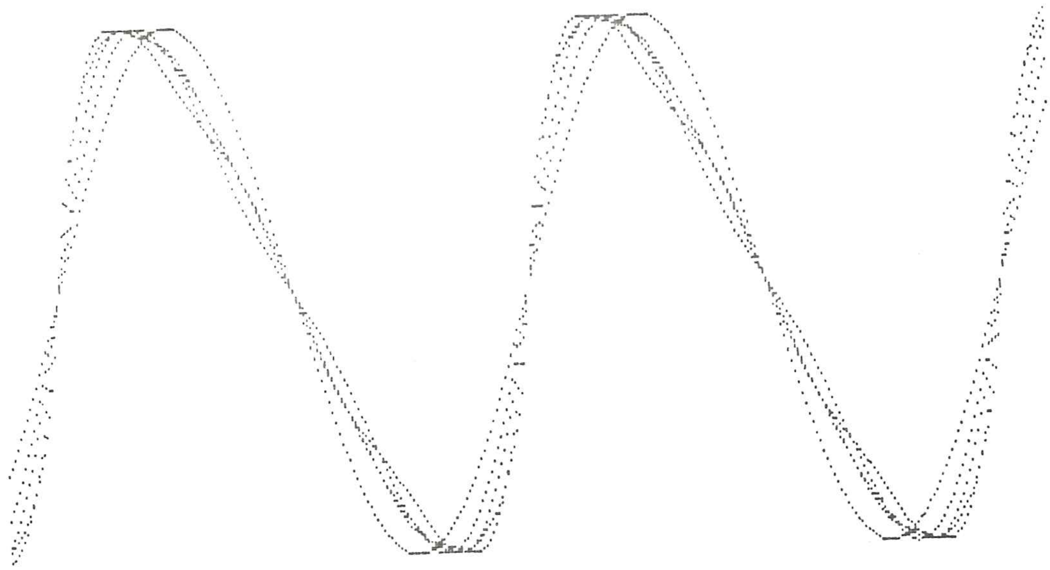
-Figure 6-

$f(x) = \sum_{p=1}^{20} \sin px$



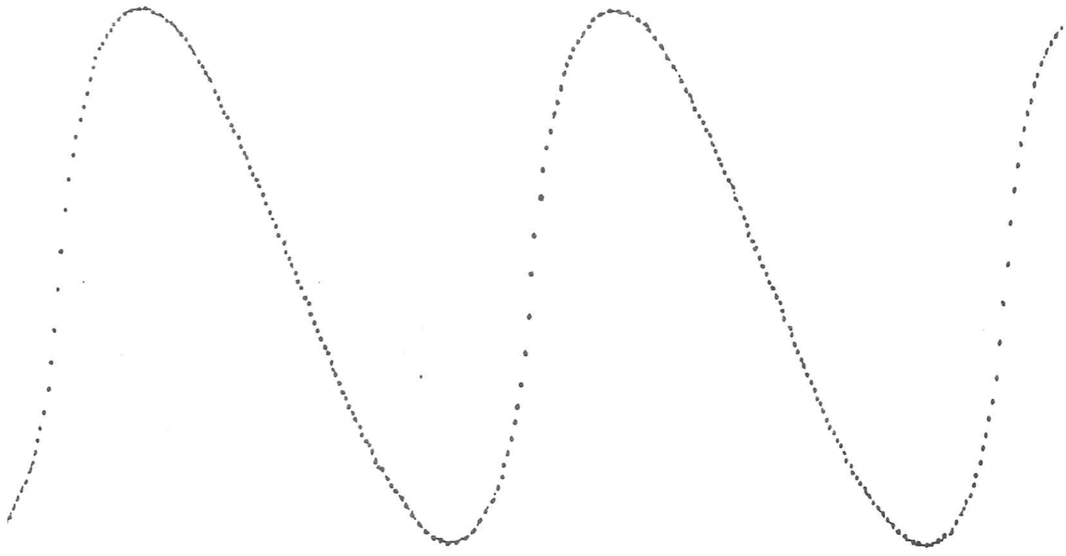
-Figure 7 -

$f(x) = \sum_{p=1}^{50} \sin px$



-Figure 8 -

$f(x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} \sin px$ $n = 1, 2, 3, 5$



-Figure 9 -

$f(x) = \sum_{p=1}^{20} \frac{1}{p^2} \sin px$

(violon)

REMARQUE : Toutes ces courbes sont des frises : vous pouvez chercher à quel groupe elles correspondent !

ANNEXE 1

Nous allons généraliser le théorème du paragraphe 1.

Théorème :

Soient 2n nombres réels non nuls $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que les α_i^2 soient distincts deux à deux, on pose :

$$f(x) = \lambda_1 \sin \alpha_1 x + \ldots + \lambda_n \sin \alpha_n x$$

Alors une condition nécessaire et suffisante pour que f soit périodique est qu'il existe un nombre réel non nul μ tel que $\mu \alpha_i \in \mathbb{Z}$ pour tout i.

Preuve :

1°) Il est clair que la condition est suffisante ($2\pi\mu$ est une période). Montrons qu'elle est nécessaire.

2°) Soit $T \neq 0$ tel que $f(x) = f(x+T)$. Alors on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[\sin \alpha_i (x+T) - \sin \alpha_i x \right] = 0$$

Posons $h_i(x) = \lambda_i \left[\sin \alpha_i (x+T) - \sin \alpha_i x \right]$ et dérivons 2h fois cette identité on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{2h} h_i(x) = 0$$

Les n premières relations, obtenues pour $h = 0, 1, \ldots, n-1$, forment un système de Van der Monde et on en déduit que, pour tout i :

$$h_i(x) = 0$$

Ceci signifie (puisque $\lambda_i \neq 0$) que $\alpha_i T \in 2\pi \mathbb{Z}$

Donc, si l'on pose $\mu = \dfrac{T}{2\pi}$, on voit que l'on a :

$$\mu \alpha_i \in \mathbb{Z} \quad , \text{ pour } i = 1, \ldots, n.$$

ANNEXE 2

1°) On a vu dans le paragraphe I, que les courbes représentatives des fonctions :

$$f(x) = \sin 2x + \sin 3x$$
$$g(x) = \sin 2x + \sin 2^{19/12} x$$

sont "très voisines".

Est-ce à dire que $|f(x) - g(x)|$ est toujours très petit ?

Si l'on prend $x = 10^3$, on trouve :

$$|f(x) - g(x)| \simeq 0,6$$

On ne peut donc pas dire que f et g sont "très voisines" (sur R).

2°) On peut se poser la question plus générale suivante :

lorsque $\alpha \longrightarrow 3$ est-ce que $\sup |\sin \alpha x - \sin 3x|$ tend vers zéro ?

La réponse est "oui" sur tout intervalle borné, mais "non" sur R.

Nous allons démontrer ces deux points.

3°) Sur un intervalle borné I

D'aprés le théorème des accroissements finis on a :

$$\sin \alpha x - \sin 3x = (\alpha - 3)x . \cos \theta$$

avec $\theta \in]\alpha x, 3x[$.

On en déduit que :

$$|\sin \alpha x - \sin 3x| \leqslant |\alpha - 3| . |x| = |\alpha - 3| . M$$

où M est une borne de I.

Ceci prouve que $|\sin \alpha x - \sin 3x|$ est très petit, pour tout $x \in I$, lorsque $|\alpha - 3|$ est très petit (convergence <u>uniforme</u> sur I).

4°) Sur R.

On suppose que $\alpha \notin \mathbb{Q}$, montrons qu'il existe $x \in R$ tel que $|\sin \alpha x - \sin 3x| > 1/2$.

Pour cela on prend $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Alors on a $\alpha x = n\pi$

Montrons qu'on peut trouver n pour que αx soit arbitrairement voisin de $\frac{\pi}{2}$ modulo $\mathbb{Z}\pi$.

Cette condition équivaut à dire que

$$n\alpha\pi \simeq \frac{\pi}{2} + m\pi$$

Soit à :

$$n\alpha \simeq \frac{1}{2} + m$$

Puisque $\alpha \notin \mathbb{Q}$, on sait que l'ensemble des $n\alpha - m$; n , $m \in \mathbb{Z}$, est dense dans $\mathbb{R}$.
Donc il existe bien n tel que $n\alpha$ soit arbitrairement voisin de 1/2 modulo $\mathbb{Z}$.

Dans ces conditions il est clair que $\left| \sin \alpha x - \sin 3 x \right|$ est voisin de 1.

5)- GAMMES NATURELLES ET NOTES ABSTRAITES

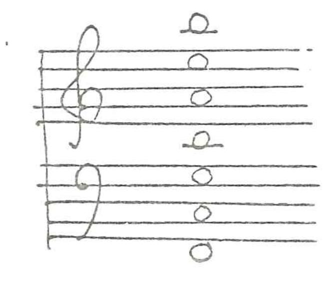
I) INTRODUCTION

Je me propose ici de présenter les gammes naturelles par le petit bout de la lorgnette afin de réduire au maximum le nombre de notions mathématiques préliminaires : on partira de concepts familiers à Pythagore (il y a 2500 ans !) pour aboutir à la notion de groupe quotient (beaucoup plus récente) et, en fait, on peut considérer que cet exposé est une introduction musicale à la notion de groupe quotient.
Dans un autre travail (l'article "Gammes Naturelles" dans [1]) j'avais fait le chemin inverse pour montrer comment la musique s'impose aux arithméticiens : en partant de la notion de groupe quotient on parvenait à la gamme chromatique à douze demi-tons : ni onze, ni treize !

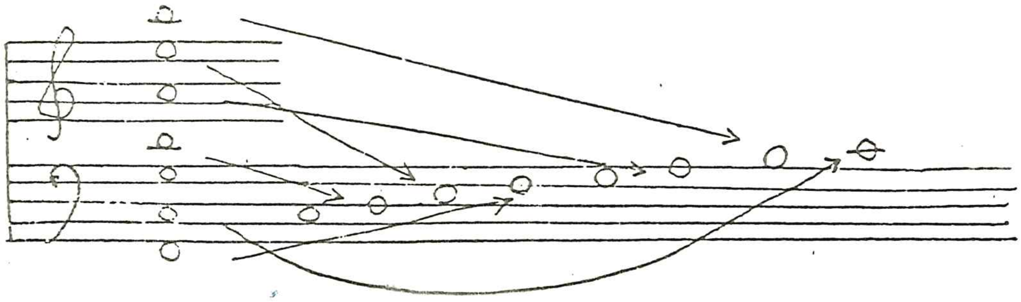
Mais si on veut réduire les notions mathématiques préliminaires à la seule connaissance de l'ensemble des fractions (chères à Pythagore) il faut connaître un peu plus de musique que l'arithméticien moyen.

1,1 Tous les théoriciens sont d'accord pour considérer que, après l'unisson, les intervalles les plus simples sont l'octave (2 et 1/2) et la quinte pure (3/2 et 2/3).

Si l'on part de la note "ré" et si l'on joue les 3 quintes successives au-dessus et les 3 quintes successives au-dessous de ce "ré" on obtient :



Si, ensuite, on les ramène dans une même octave, on trouve la gamme de do majeur de Pythagore :



En convenant de représenter la fréquence de la tonique (do) par le nombre 1, les fréquences des notes de la gamme de Pythagore sont :

do	ré	mi	fa	sol	la	si	do
1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

D'une manière générale si x est la fréquence de la tonique d'une gamme majeure donnée, les fréquences des divers degrés de cette gamme sont :

$x = 9/8x\ ,\ 81/64x\ ,\ 4/3x\ ,\ 3/2x\ ,\ 27/16x\ ,\ 243/128x\ ,\ 2x$

Toutes les fractions que nous obtiendrons à partir des fréquences des notes de la gamme de Pythagore sont de la forme $2^a\ 3^b$, où a et b sont des nombres entiers positifs ou négatifs.
Par exemple on peut écrire les fréquences des notes de do majeur sous la forme :

do	ré	mi	fa	sol	la	si	do
1	$3^2/2^3$	$3^4/2^6$	$2^2/3$	3/2	$3^3/2^4$	$3^5/2^7$	2

L'ensemble des fractions de la forme $2^a\ 3^b$ est fermé pour la multiplication puisque :

$$(2^a\ 3^b) \times (2^{a'}\ 3^{b'}) = 2^{a+a'}\ 3^{b+b'}$$

On l'appelle <u>le groupe multiplicatif engendré par 2 et 3</u> et on le note $\langle 2,3 \rangle$.

1,2 Une autre gamme majeure a été introduite au XVIe siècle par G.Zarlino et cette gamme majeure, en un certain sens est parfaite.

Si x désigne la fréquence de la tonique, les fréquences des divers degré de la gamme majeure de Zarlino sont :

$$x\ ,\ 9/8x\ ,\ 5/4x\ ,\ 4/3x\ ,\ 3/2x\ ,\ 5/3x\ ,\ 15/8x\ ,\ 2x$$

Toutes les fractions que nous obtenons à partir des fréquences des notes de la gamme de Zarlino sont de la forme $2^a\ 3^b\ 5^c$, où a,b,c sont des nombres entiers positifs ou négatifs.

Par exemple on peut écrire les fréquences des notes de do majeur sous la forme :

do	ré	mi	fa	sol	la	si	do
1	$3^2/2^3$	$5/2^2$	$2^2/3$	$3/2$	$5/3$	$3 \times 5/2^3$	2

L'ensemble des fractions de la forme $2^a\ 3^b\ 5^c$ est fermé pour la multiplication puisque :

$$(2^a\ 3^b\ 5^c) \times (2^{a'}\ 3^{b'}\ 5^{c'}) = 2^{a+a'}\ 3^{b+b'}\ 5^{c+c'}$$

On l'appelle <u>le groupe multiplicatif engendré par 2 , 3 et 5</u> et on le note $\langle 2, 3, 5 \rangle$.

1,3 REMARQUES

A titre de comparaison nous allons rappeler la définition de deux autres gammes aussi célèbres dans l'histoire de la musique que les précédentes.

1,3,1) - La gamme mésotonique

Les fréquences des divers degrés de la gamme majeure sont :

x , $5^{1/2}/2\ x$, $5/4\ x$, $2/5^{1/4}\ x$, $5^{1/4}$, $5^{3/4}/2\ x$, $5^{5/4}/4x$, $2x$

Si l'on pose $\alpha = 5^{1/4} = 1{,}4953488$ .., les fréquences des notes de la gamme de do majeur sont de la forme

do	ré	mi	fa	sol	la	si	do
1	$\alpha^2/2$	$\alpha^4/2^2$	$2/\alpha$	α	$\alpha^3/2$	$\alpha^5/2^2$	2

elles appartiennent au groupe multiplicatif $\langle 2,\alpha \rangle$ engendré par 2 et α.

Remarquons que x est un nombre irrationnel car il n'existe pas de fraction α telle que $\alpha^4 = 5$.

Les seuls intervalles rationnels (ou "purs") dans la gamme mésotonique sont l'unisson, la tierce majeure et l'octave.

1,3,2) - La gamme tempérée

Les fréquences des divers degrés de la gamme majeure sont :

x , $2^{2/12}x$, $2^{4/12}x$, $2^{5/12}\ x$, $2^{7/12}\ x$, $2^{9/12}\ x$, $2^{11/12}x$, $2x$

Si l'on pose $\rho = 2^{1/12} = 1{,}0594631$ ..., les fréquences des notes de la gamme de do majeur sont de la forme :

do	ré	mi	fa	sol	la	si	do
1	ρ^2	ρ^4	ρ^5	ρ^7	ρ^9	ρ^{11}	2

Elles appartiennent au groupe multiplicatif $\langle \rho \rangle$ engendré par ρ .

Remarquons que ρ est un nombre irrationnel car il n'existe pas de fraction ρ telle que $\rho^{12} = 2$.
Les seuls intervalles rationnels (ou "purs") dans la gamme tempérée sont l'unisson et l'octave.

REMARQUE :

Dans les questions théoriques l'usage des logarithmes, savarts et cents est à éviter car ces notions (outre le fait que leur définition est arbitraire) détruisent complètement la structure arithmétique des nombres que l'on considère.

Exercice : montrer que $5/4 \times 3/2 \neq \left[\dfrac{3/2}{\sqrt{81/80}}\right]^5 \times 1/4$, voir [2].

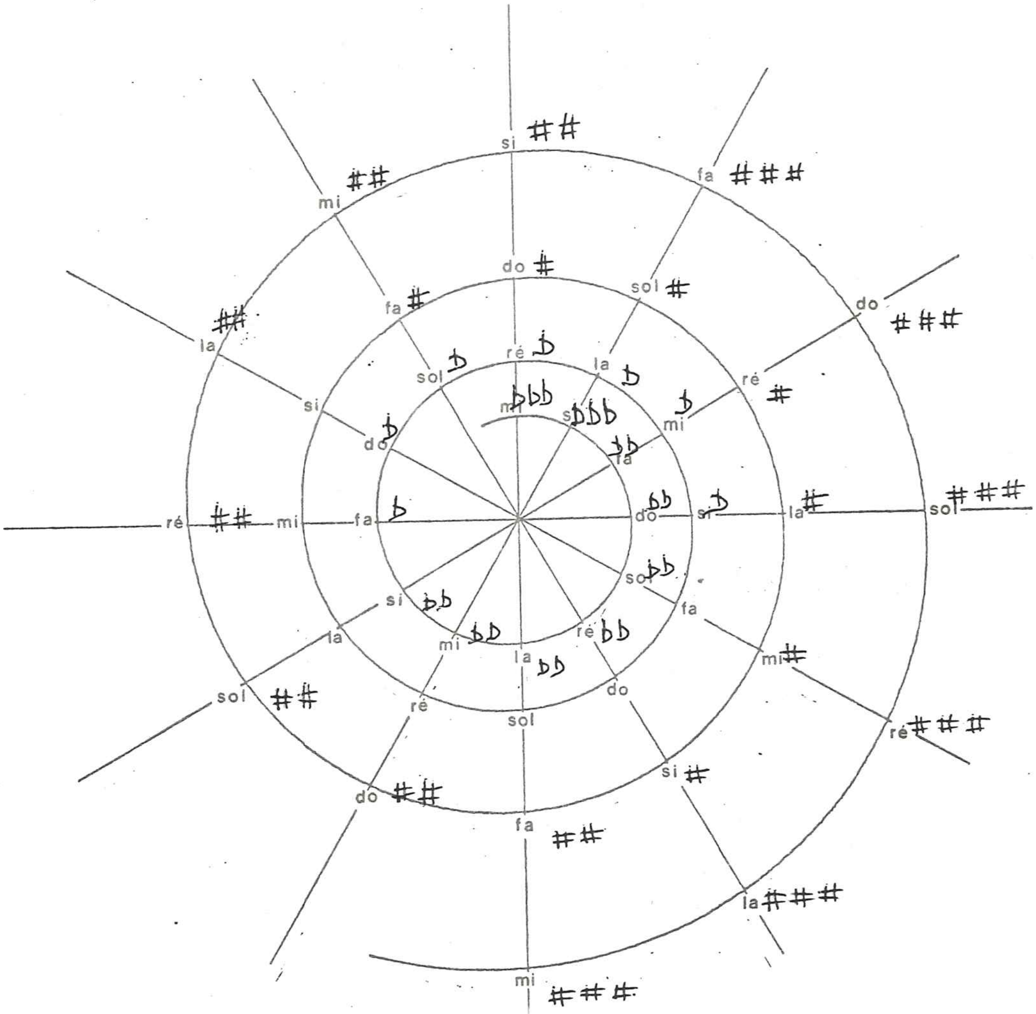
2) LA SPIRALE DES QUINTES DE LA GAMME DE PYTHAGORE

Lorsque l'on transpose la gamme de do majeur tempérée dans toutes les tonalités on multiplie la fréquence de la tonique, successivement, par une "quinte tempérée" c'est-à-dire $2^{\pm 7/12}$. Le schéma que l'on obtient est alors appelé le "cycle des quintes" dans tous les solfèges de France et de Navarre (et même ailleurs) et il introduit les douze notes de la gamme chromatique.
Si l'on veut reproduire cette opération avec une gamme majeure de Pythagore, c'est-à-dire si l'on multiplie la fréquence de la tonique, successivement, par une "quinte pure", c'est-à-dire 3/2 ou 2/3, on obtient une magnifique spirale infinie.
Le tableau suivant résume les premiers calculs ; on est souvent amené à multiplier les fréquances par 2 ou 1/2 pour rester à l'intérieur d'une même octave (mais en réalité la hauteur des notes ne doit pas être considérée comme limitée à une octave).

	do	do / ré^b	ré	ré / mi^b	mi	mi / fa	fa / sol^b	sol	sol / la^b	la	la / si^b	do^b	si / do
do^b		$2^8/3^5$		$2^5/3^3$	$2^{13}/3^8$		$2^{10}/3^6$		$2^7/3^4$		$2^4/3^2$	$2^{17}/3^7$	
sol^b		$2^8/3^5$		$2^5/3^3$		$2^2/3$	$2^{10}/3^6$		$2^7/3^4$		$2^4/3^2$	$2^{12}/3^7$	
ré^b	1	$2^8/3^5$		$2^5/3^3$		$2^2/3$	$2^{10}/3^6$		$2^7/3^4$		$2^4/3^2$		2
la^b	1	$2^8/3^5$		$2^5/3^3$		$2^2/3$		$3/2$	$2^7/3^4$		$2^4/3^2$		2
mi^b	1		$3^2/2^3$	$2^5/3^3$		$2^2/3$		$3/2$	$2^7/3^4$		$2^4/3^2$		2
si^b	1		$3^2/2^3$	$2^5/3^3$		$2^2/3$		$3/2$		$3^3/2^4$	$2^4/3^2$		2
fa	1		$3^2/2^3$		$3^4/2^6$	$2^2/3$		$3/2$		$3^3/2^4$	$2^4/3^2$		2
do	1		$3^2/2^3$		$3^4/2^6$	$2^2/3$		$3/2$		$3^3/2^4$		$3^5/2^7$	2
sol	1		$3^2/2^3$		$3^4/2^6$		$3^6/2^9$	$3/2$		$3^3/2^4$		$3^5/2^7$	2
ré		$3^7/2^{11}$	$3^2/2^3$		$3^4/2^6$		$3^6/2^9$	$3/2$		$3^3/2^4$		$3^5/2^7$	
la		$3^7/2^{11}$	$3^2/2^3$		$3^4/2^6$		$3^6/2^9$		$3^8/2^{12}$	$3^3/2^4$		$3^5/2^7$	
mi		$3^7/2^{11}$		$3^9/2^{14}$	$3^4/2^6$		$3^6/2^9$		$3^8/2^{12}$	$3^3/2^4$		$3^5/2^7$	
si		$3^7/2^{11}$		$3^9/2^{14}$	$3^4/2^6$		$3^6/2^9$		$3^8/2^{12}$		$3^{10}/2^{15}$	$3^5/2^7$	
fa		$3^7/2^{11}$		$3^9/2^{14}$		$3^{11}/2^{17}$	$3^6/2^9$		$3^8/2^{12}$		$3^{10}/2^{15}$	$3^5/2^7$	
do		$3^7/2^{11}$		$3^9/2^{14}$		$3^{11}/2^{17}$	$3^6/2^9$		$3^8/2^{12}$		$3^{10}/2^{15}$		$3^{12}/2^{18}$ = si.

On voit que l'on a :

$$\frac{si^{\#}}{do} = \frac{do}{ré^{\flat\flat}} = \frac{fa^{\#\#}}{sol} = \frac{sol}{la^{\flat\flat}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \text{Comma de Pythagore.}$$



Remarquons, c'est essentiel, que sur un même rayon de la spirale se trouvent des notes qui correspondent à une seule touche sur un piano (mais que les violonistes ne jouent pas nécessairement à la même hauteur).

3) NOTES ET INTERVALLES ABSTRAITS

Il s'agit d'expliquer mathématiquement la confusion que fait un pianiste lorsqu'il confond fa$^\sharp$ et sol$^\flat$ par exemple, c'est-à-dire lorsqu'il confond deux notes qui sont sur un même rayon de la spirale.
Si l'on se reporte à notre tableau, on voit que lorsque l'on saute, sur un même rayon, d'une branche à la branche immédiatement voisine et extérieure on multiplie la fréquence par un Comma de Pythagore, c'est-à-dire $\frac{3^{12}}{2^{19}}$.

Donc deux notes de fréquences x et y se trouveront sur un même rayon si et seulement si $\frac{x}{y} = \left(\frac{3^{12}}{2^{19}}\right)^n$ où n (entier positif ou négatif) représente le nombre de sauts (positifs ou négatifs) qu'il faut faire pour passer de y à x.
L'ensemble des nombres de la forme $\left(\frac{3^{12}}{2^{19}}\right)^n$ est un sous-groupe de $\langle 2,3 \rangle$ que j'appelle <u>le groupe des commas de la gamme de Pythagore</u> et que je note H.

Lorsque l'on dit que H est un sous-groupe de $\langle 2,3 \rangle$ on veut dire que si r et s sont dans H alors r s et r^{-1} sont aussi dans H.

Les rayons de la spirale correspondent aux noms des notes de la gamme chromatique.

Si deux notes de hauteurs x et y, avaient coïndidé dans la gamme tempérée, alors maintenant :

$$\frac{y}{x} \in H$$

On dira qu'elles sont deux représentants d'une même <u>note abstraite</u>.
Cette note abstraite peut-être représentée par l'ensemble x H qui est l'ensemble des fractions x h , avec $h \in H$.

Si x H et x'H sont deux notes abstraites, <u>l'intervalle abstrait</u> qu'elles déterminent est, par définition :

$$\frac{x'}{x}\ H$$

On peut additionner les intervalles abstraits de la manière suivante :

$$yH + y'H = yy'H$$

Pour cette addition, les intervalles abstraits forment un groupe infini qu'on appellera <u>la gamme chromatique abstraite</u>.
C'est un groupe monogène infini entendré par un demi-ton, par exemple par (do , do #) qui est $3^7/2^{11}$ H.

<u>Exercice</u> : montrons qu'il y a douze demi tons dans une octave, c'est à-dire que :

$$(3^7/_{2}11)^{12}\ H = 2H$$

Ceci revient à prouver que :

$$(3^7/_{2}11)^{12} \times 1/2 \in H$$

soit :

$$\frac{3^{7\times 12}}{2^{133}} \in H$$

et on constate que l'on a bien :

$$\frac{3^{7\times 12}}{2^{133}} = \left(\frac{3^{12}}{2^{19}}\right)^7 \in H$$

D'une manière générale, on va montrer que si l'intervalle y"H est la somme de yH et y'H, alors le nombre x" de demi-tons de y"H est la somme des nombres n et n' de demi-tons de yH et y'H.

En effet on a $y''H = yy'H$ et aussi :

$$yH = (3^7/11)^n H \ , \ y'H = (3^7/2^{11})^{n'} H \ , \ y''H = (3^7/2^{11})^{n''} H$$

donc :

$$(3^7/2^{11})^{n''} H = (3^7/2^{11})^n (3^7/2^{11})^{n'} H$$

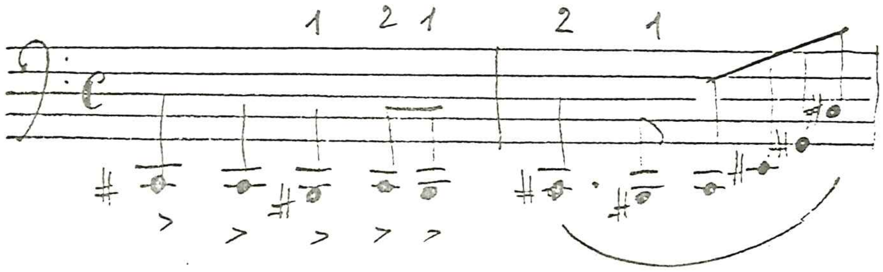
TABLEAU DES GAMMES TRANSPOSEES.

	do	do# / ré♭	ré	ré# / mi♭	mi	fa	fa# / sol♭	sol	sol# / la♭	la	la# / si♭	si	do
do♭		$2^8/3^5$		$2^9\times5/3^7$	$2^{13}/3^8$		$2^{10}/3^6$		$2^{11}\times5/3^8$		$2^8\times5/3^6$	$2^{12}/3^7$	
sol♭		$2^8/3^5$		$2^9\times5/3^7$		$2^6\times5/3^5$	$2^{10}/3^6$		$2^7/3^4$		$2^8\times5/3^6$	$2^{12}/3^7$	
ré♭		$2^8/3^5$		$2^5/3^3$		$2^6\times5/3^5$	$2^{10}/3^6$		$2^7/3^4$		$2^8\times5/3^6$		$2^5\times5/3^4$
la♭		$2^8/3^5$		$2^5/3^3$		$2^6\times5/3^5$		$2^3\times5/3^3$	$2^7/3^4$		$2^4/3^2$		$2^5\times5/3^4$
mi♭			$2\times5/3^2$	$2^5/3^3$		$2^2/3$		$2^3\times5/3^3$	$2^7/3^4$		$2^4/3^2$		$2^5\times5/3^4$
si♭	1		$2\times5/3^2$	$2^5/3^3$		$2^2/3$		$2^3\times5/3^3$		$5/3$	$2^4/3^2$		2
fa	1		$2\times5/3^2$		$5/2^2$	$2^2/3$		$3/2$		$5/3$	$2^4/3^2$		2
do	1		$3^2/2^3$		$5/2^2$	$2^2/3$		$3/2$		$5/3$		$3\times5/2^3$	2
sol	1		$3^2/2^3$		$5/2^2$		$3^2\times5/2^5$	$3/2$		$3^3/2^4$		$3\times5/2^3$	2
ré		$3^3\times5/2^7$	$3^2/2^3$		$3^4/2^6$		$3^2\times5/2^5$	$3/2$		$3^3/2^4$		$3\times5/2^3$	
la		$3^3\times5/2^7$	$3^2/2^3$		$3^4/2^6$		$3^2\times5/2^5$		$3^4\times5/2^8$	$3^3/2^4$		$3^5/2^7$	
mi		$3^3\times5/2^7$		$3^5\times5/2^{10}$	$3^4/2^6$		$3^6/2^9$		$3^4\times5/2^8$	$3^3/2^4$		$3^5/2^7$	
si		$3^7/2^{11}$		$3^5\times5/2^{10}$	$3^4/2^6$		$3^6/2^9$		$3^4\times5/2^8$		$3^6\times5/2^{11}$	$3^5/2^7$	
fa#		$3^7/2^{11}$		$3^5\times5/2^{10}$		$3^7\times5/2^{13}$	$3^6/2^9$		$3^8/2^{12}$		$3^6\times5/2^{11}$	$3^5/2^7$	
do#		$3^7/2^{11}$		$3^9/2^{14}$		$3^7\times5/2^{13}$	$3^6/2^9$		$3^8/2^{12}$		$3^6\times5/2^{11}$		$3^9\times5/2^{14}$ = si#

REMARQUE :

Si on voulait réaliser un instrument à <u>sons fixes</u> accordé selon la gamme de Pythagore, on serait amené à multiplier les touches pour tenir compte de l'intervention des Commas : des touches pour les dièzes, des touches pour les bémols, des touches pour les doubles dièzes, etc... c'est ce que l'on appelle un système d'accord à divisions multiples [2].
De tels systèmes ont été proposés par les anciens facteurs d'orgues et de clavecins, mais les instruments étaient difficiles à jouer. Cependant les instrumentistes à cordes et les chanteurs, qui sont libres de produire des notes de hauteurs variables, pratiquent (instinctivement très souvent) les corrections nécessaires en fonction du contexte musical : cela fait partie de <u>la justesse expressive</u>.

Par exemple, dans le passage suivant du concerto pour violoncelle de Schumann :



Casals jouait le si # avec le premier doigt (très proche du sillet) car si # est un comma au-dessus de do ♮ qui est la corde à vide [3]. D'autre part l'utilisation des ordinateurs devrait permettre de réaliser ce rêve des anciens facteurs d'orgues.

4) LA SPIRALE DES QUINTES DE LA GAMME DE ZARLINO.

Lorsque l'on refait les calculs du paragraphe 2 à partir de la gamme de Zarlino, on obtient le tableau numérique de la page 16 où les nombres inscrits appartiennent au groupe $\langle 2,3,5 \rangle$.
Si l'on regarde le rapport des fréquences des notes qui se trouvent sur un même rayon de la spirale, on trouve les nombres :

$$\frac{si^{\#}}{do} = 3^8 \times 5 \Big/ 2^{15} \quad , \quad \frac{ré\ (do\ maj.)}{ré\ (fa\ maj.)} = 3^4 \Big/ 2^4 \times 5 \quad , \text{ etc...}$$

Désormais on posera :

$$\begin{cases} \pi = \dfrac{3^{12}}{2^{19}} = \text{comma de Pythagore} = 1,0136433 \\[2ex] \delta = \dfrac{3^4}{2^4 \times 5} = \text{comma de Didyme} = 1,0125 \end{cases}$$

On voit que ces deux fractions sont :

$$\frac{si^{\#}}{do} = \frac{\pi}{\delta} \quad , \quad \frac{ré\ (do\ maj.)}{ré\ (fa\ maj.)} = \delta$$

et que les rapports des fréquences des notes qui se trouvent sur un même rayon appartiennent au sous-groupe $\langle \pi , \delta \rangle$ de $\langle 2,3,5 \rangle$.

REMARQUE :

Si on voulait réaliser un instrument à sons fixes accordé selon la gamme de Zarlino, on serait amené à introduire encore plus de touches que pour la gamme de Pythagore.
En effet, non seulement il faudrait des touches pour les dièzes, des touches pour les bémols, etc..., mais encore chaque note devrait être dédoublée puisque le ré de do majeur est plus haut que celui de fa majeur d'un comma de Didyme. En fait les branches de la spirale se dédoublent...

5) NOTES ET INTERVALLES ABSTRAITS

Si l'on reprend les considérations du paragraphe 4 on est amené à poser que le groupe des commas de la gamme de Zarlino est le groupe $\langle \pi , \delta \rangle$, c'est-à-dire l'ensemble des fractions du type $\pi^m \delta^n$, avec m et n entiers positifs ou négatifs.
On vérifie facilement que $K = \langle \pi , \delta \rangle$ est un sous-groupe de $\langle 2,3,5 \rangle$.
On dira que les notes de hauteurs x et y définissent la même note abstraite si (et seulement si) $\frac{y}{x} \in K$.
Cette note abstraite peut-être représentée par l'ensemble xK qui est l'ensemble des fractions xk, avec $k \in K$.
Si x K et x' K sont deux notes abstraites, l'intervalle abstrait qu'elles définissent est, par définition :

$$\frac{x'}{x} K$$

On peut additionner les intervalles abstraits comme suit :

$$yK + y'K = yy'K$$

Pour cette addition, les intervalles abstraits forment un groupe infini qui est engendré par un demi ton quelconque, par exemple par (do, do$\sharp$) qui est $\frac{3^3 \times 5}{2^7}$ K.

Remarquons que ce générateur est aussi (voir paragraphe 4) la classe

$$\frac{3^7}{2^{11}} K \quad , \text{ car :}$$

$$\frac{3^7}{2^{11}} = \frac{3^3 \times 5}{2^7} \times \frac{3^4}{2^4 \times 5} = \frac{3^3 \times 5}{2^7} \times \bar{\sigma}$$

et que l'on a encore, par conséquent, douze demi-tons dans une octave.

Les deux gammes chromatiques abstraites que nous avons construites, $\langle 2,3\rangle/H$ et $\langle 2,3,5\rangle/K$, sont isomorphes entre elles.

Cet isomaphisme est tout simplement l'application :

$$yH \longmapsto yK$$

où $y \in \langle 2,3 \rangle$

Ces gammes sont aussi isomorphes à la gamme chromatique tempérée.

6) UN PROBLEME DE SEMANTIQUE MUSICALE

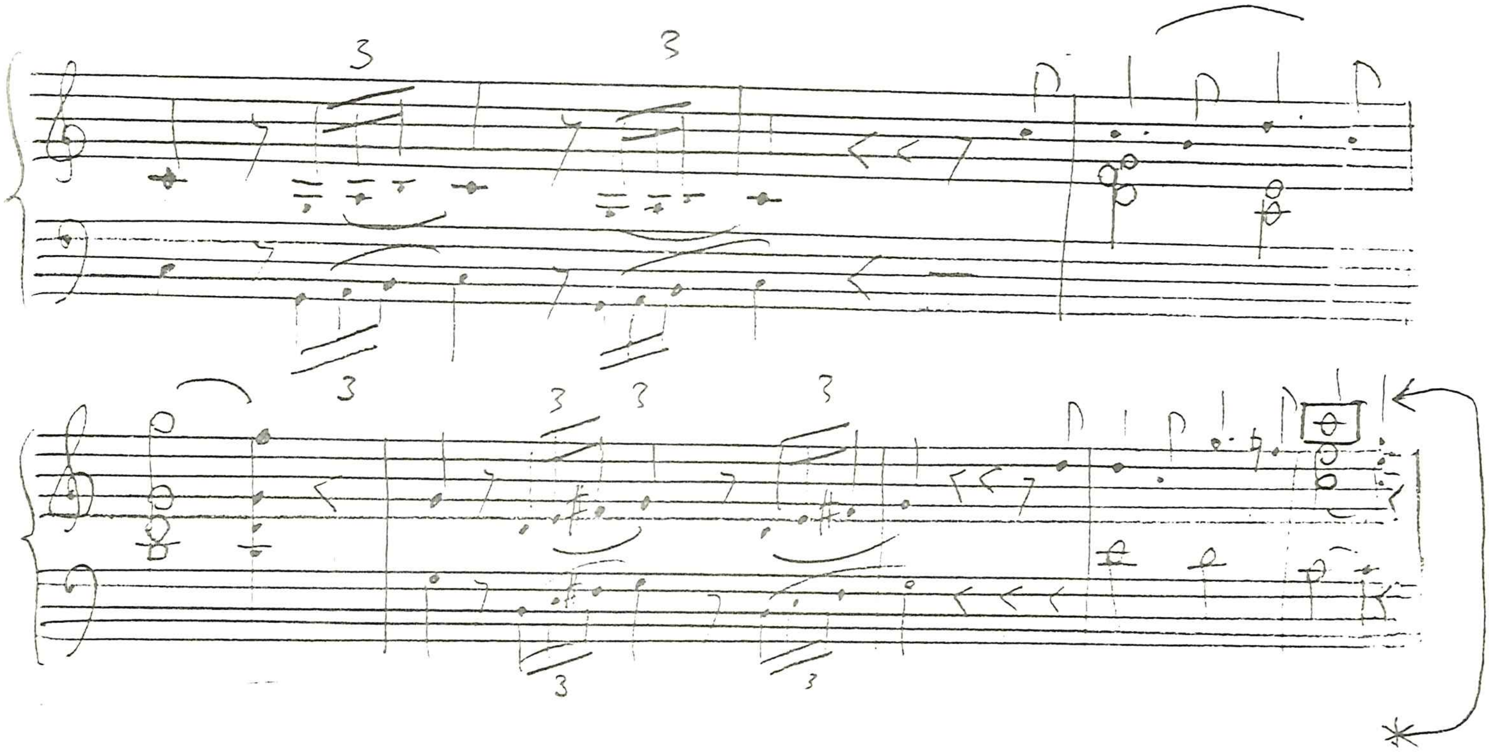
Lorsque l'on veut faire jouer une partition musicale à un ordinateur, il y a beaucoup de paramètres à déterminer.

Parmi ceux-ci il y a le tempérament que l'on veut utiliser [2] et à ce propos un problème de sémantique musicale peut se poser.

Alors que pour toutes les gammes tempérées (classique ou de S.Cordier [1] par exemple) et que pour la gamme de Pythagore, l'écriture musicale est non ambigüe (c'est-à-dire que la notation de la note contient assez d'informations pour déterminer sa fréquence), il n'en est plus de même pour la gamme de Zarlino : il y a ambiguité de la hauteur de la note dans certains cas.

C'est un problème que connaissent bien les linguistes ; supposez que vous rencontriez le mot "fin" dans un texte que vous voulez traduire en anglais, devez-vous choisir "end" ou "thin" ou "clever", etc... ? Cela dépend du sens du contexte.

J'ai rencontré la même difficulté lorsque j'ai voulu faire jouer à un ordinateur le thème initial de la symphonie Jupiter.



Il y a ambiguité pour la hauteur du "la" encadré:si on est sol majeur il doit être plus haut que si l'on est en do majeur. D'une manière précise si la fréquence de  est égale à 1 alors la fréquence de ce "la" en sol majeur est $3^3/_{2^3}$, mais elle n'est que de 10/3 en do majeur.

Une analyse musicale de la tonalité est donc nécessaire pour déterminer la hauteur de cette note (et, en fait, il est raisonnable de penser qu'on est revenu dans la tonalité fondamentale de do majeur).

EXERCICE :

Refaire le travail précédent pour la gamme mésotonique

Construire la spirale des quintes.

Montrer que le groupe des commas est engendré par $\frac{2^7}{5^3}$

Est ce que ré$^\sharp$ est plus haut que mi^b ?

Montrer que si $|a| < 7$, on a :

$$\left| \frac{2^a}{5^b} - 1 \right| > \left| \frac{2^7}{5^3} - 1 \right|$$

<u>Références</u> :

[1] "Musique et Mathématiques", Publication de l'A.P.M.E.P N° 52 (1983)

[2] "Musique et Tempérament", P.Y ASSELIN, COSTALLAT (1985).

[3] "Casals et l'art de l'interprétation", D.BLUM, BUCHET/CHASTEL (1980).

6) - HISTOIRE DU TEMPERAMENT

1°) Nous pouvons vraisemblablement dire que la quinte a dicté un peu partout sur la surface du globe, en des temps forts reculés, les premiers éléments fixes de ce qui pouvait être alors un art musical, art qui s'ignorait en tant que tel :

La musique à l'origine était en effet utilisée à des fins magiques.

Pour quelle raison supposer que cet intervalle de quinte a joué quasi universellement, ce rôle d'initiateur de l'oreil ?

Parcequ'il est le seul directement audible à partir d'instruments primitifs à sons fixes : lithophone et xylophone en premier lieu, métallophones beaucoup plus tard (les cordes et les tubes étant en cette hypothèse "exclus" comme impliquant une "industrie" déjà développée), et aussi les roseaux, bambous : tout ce que la nature peut offrir comme instruments à vent naturels.

2°) Ainsi ont pu naître, par la chaîne des quintes, le tritonique, le tétratonique et le pentatonique.
L'échelle <u>tritonique</u> suit l'échelle ditonique qui est la plus rudimentaire puisqu'elle est constituée uniquement de deux sons : FA - DO
L'échelle tritonique comprend 3 sons : DO - FA et SOL. Les sons de cette échelle constituent les degrés fixes des tétracordes de la théorie grecque antique.
<u>Tétratonique</u> : échelle constituée de 4 sons : DO - RE - FA et SOL
en ajoutant un 5ème son on obtient l'échelle
<u>pentatonique</u> : DO - RE - FA - SOL - LA
qui est extrêmement fréquente.

3°) Mais on peut se demander si cette chaîne de quintes, où l'on veut voir un processus nécessaire à la constitution des échelles, se situe dans la réalité des faits primitifs.

Il est assurément bien difficile d'admettre que les 7 sons diatoniques issus d'une chaîne de quintes, inéxécutables par une voix humaine unique (du seul fait de l'énorme ambitus de la série qui en résulte) soient venus spontanément se rabattre dans un intervalle d'octave qu'aucun système archaïque ne mentionne. Le rabattement est de toute évidence une opération savante, témoignage d'une évolution déjà longue.
Au Vietnam, par exemple, si l'armature pentatonique semble à peu prés immuable, les autres sons ne s'accordent avec aucune intervallique précise pour la raison qu'il s'agit de sons vacillants, glissés, d'intonation variable.
Voilà donc bien un exemple indéniable d'une tradition musicale ancestrale qui ne s'explique pas uniquement par la résonnance de la quinte.

4°) D'aprés les recherches récentes (entre autres, C.Braïlour ; J.Chailley), il semble bien que la formation des échelles musicales se soit faite de manière progressive par absorptions successives des sons consécutifs du cycle des quintes.

5°) Aprés l'échelle pentatonique (5 sons) le son 6 (MI) introduit l'échelle <u>lexatonique</u> :

DO - RE - MI - FA - SOL - LA

Cette échelle comprend le demi-ton (MI-FA- ignoré de l'échelle pentatonique et elle se distingue aussi de l'échelle heptatonique, la plus usuelle de nos jours, par l'absence du triton.

Les échelles ainsi obtenues sont considérées comme naturelles. La constitution des échelles ne se poursuit pas au-delà du 7ème son car il n'y a nulle part d'échelle octotonique. Quant à l'échelle chromatique*, elle a été obtenue différemment. Les échelles pré-heptatoniques (ayant moins de 7 sons à l'octave) sont souvent considérées comme défectives*.

Les échelles énumérées peuvent subir des déformations par attraction des degrés faibles vers les degrés forts qui restent stables en vertu de l'organisation hiérarchique des sons. C'est ainsi que s'expliquent les trois genre de la musique grecque antique (diatonique, chromatique* , enharmonique*) de même que les modes tsiganes ou les divers aspects du mode mineur.

6°) <u>Chromatisme</u> : (suppose comme référence de base l'adoption de l'échelle heptatonique naturelle).
Cette échelle ou gamme chromatique consiste en une succession de demi-tons diatoniques et chromatiques qui sont au nombre de 12 à l'octave.
Ce n'est qu'en système tempéré que le ton se divise par moitiés égales en demi-ton diatonique et demi-ton chromatique. Il ne reste toujours que 7 noms pour désigner douze sons, alors on utilise (♯; ♭; ♮).

7°) <u>Gamme défective</u> : c'est une gamme qui comporte moins de 7 sons. Terme fâcheux bien que très utilisé qui laisse supposer que l'on avait à l'origine une gamme heptatonique à laquelle on a retranché un ou plusieurs sons.

8°) <u>Enharmonique</u> : (musique grecque de l'Antiquité). Genre produit par une subdivision (en direction descendante) de la quarte juste en une tierce majeure et deux intervalles enharmoniques nommés "diésis" dont les rapports varient selon les théoriciens et l'époque.

9°) <u>Systèmes acoustiques</u> : Du fait que la somme de 12 quintes ne corresponde pas tout à fait à celle de 7 octaves, on a utilisé au cours des siècles, différents systèmes appelés systèmes acoustiques. Les plus importants d'entre eux sont
- le système puthagoricien, fondé sur le rapport 3/2 de la quinte
- le système zarlinien, favorisant en plus le rapport 5/4 de la tierce majeure
- le système tempéré égal, ne favorisant aucun intervalle (octave exceptée).

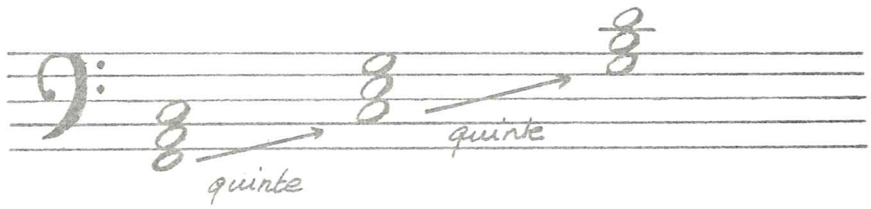
10°) <u>Système Pythagoricien</u> : Système bien antérieur à Pythagore à qui on en attribue la justification théorique. Il s'agit de l'obtention d'une échelle heptatonique par progressions successives de quintes justes avec réduction d'octave.
La somme de 12 quintes ne correspond pas tout à fait à celle de 7 octaves : elle la dépasse d'environ 1/8 de ton appelé comma pythagoricien.
Ce système n'impose pas de tonique ou de point de départ dans la succession des sons. Ce système est caractérisé par des tons égaux et des demi-tons inégaux. Il en résulte un caractère de dynamisme expansif qui se traduit par l'attraction mélodique des sons à distance de demi-ton (MI-FA ; SI - DO)
Très utilisé aux XVIe et XVIIè siècle.

11°) <u>Système Zarlinien</u>

M.G Zarlino n'a pas inventé ce système mais a beaucoup contribué à son adoption généralisée.

Sa caractéristique principale est de remplacer la tierce majeure pythagoricienne (81/64) par cclle de la série des harmoniques (5/4) ce qui permet une utilisation plus consonante des accords de trois sons (DO- MI-SOL).

Pour obtenir l'échelle heptatonique zarlinienne, la façon la plus simple et la plus usuelle est de prendre 3 accords parfaits majeurs situés à distance d'une quinte et d'en ordonner les sons par progressions diatoniques à partir de la basse de l'accord parfait médian considéré comme central et donc comme porteur de la tonique



Commence à s'imposer vers la fin du XVe siècle expansion maximale au XVIè siècle

Commence à être remplacé au XVIIIè sicèle par le sustème tempéré égal.

Ce système favorise au maximum l'audition verticale des accords consonants à l'état de repos.

12°) <u>Le système tempéré</u>

Les contradictions acoustiques inhérentes aux systèmes pythagoricien et zarlinien (impossibilité de faire coïncider les quintes avec les octaves et les tierces avec les quintes) divinrent de plus en plus intolérables dês lors que les compositeurs voulurent procéder à des modulations de plus en plus éloignées et imprévues sur des instruments à sons <u>fixes</u>.

Aussi, les musiciens durent-ils utiliser des compromis où certains sons furent légèrements transformés c'est-à-dire "tempérés", afin que d'autres deviennent acceptables. A l'origine tous les tempéraments proposés étaient inégaux, puisque l'on choisissait certains intervalles qui concervaient leur nature et que les autres étaient adaptés à partir d'eux.

C'est ainsi que procédèrent, parmis d'autres : A.SCHLICK (1511) ; P.AARON (1523) ; G.ZARLINO (1558) ; J.KEPLER (1619) et L.TULER (1729).

Toutefois aucun de ces systèmes tempérés ne s'avéra vraiment satisfaisant car certaines modulations restaient toujours impossibles. C'est ainsi que fut envisagé le partage égal de l'octave en 12 demi-tons égaux, c'est à dire la répartition du comma pythagoricien entre les 12 quintes formant l'échelle chromatique.

Le mathématicien flamand Simon STEVEN fut le premier à accorder un monocorde en tempérament égal avec une approximation trés satisfaisante (vers 1596). A la même époque un prince chinois Chou Tsai-yu (1595) avait calculé avec encore plus de précision les intervalles tempérés, puisque 9 sur 12 étaient absolument exacts. M.MERSENNE calcula aussi les valeurs des intervalles tempérées avec une approximation trés satisfaisante (ainsi que M.WERCKMEISTER).

Introduit dans la pratique musicale au début du XVIIIè siècle, le tempérament égal s'imposa peu à peu, mais non sans difficulté.

En 1851 pas un seul des orgues anglais présentés à la Grande Exposition n'était accordé en tempérament égal.

De nos jours il se répend de plus en plus grâce à l'industrie des synthétiseurs électroniques.

En tempérament égal les enharmoniques ne sont plus séparés par un comma mais coïncident DO# = RE b

On peut alors pratiquer des modulations dans les tons les plus éloignés ainsi que le chromatisme le plus extrême. De plus, des transpositions illimitées deviennent possibles sur les instruments à sons fixes.

13°) CONCLUSION

Les inconvénients inhérents au tempérament égal sont toutefois plus perceptibles de nos jours que par le passé. En effet, en raison de l'égalisation généralisée, l'oreille perd l'habitude des valeurs naturelles et l'instinct aussi bien mélodique qu'harmonique s'estompe de plus en plus.

Il serait souhaitable que les premières notions musicales se fassent d'abord en système pythagoricien (ordre mélodique), puis en système zarlinien (harmonie consonante) avant de passer au système tempéré.

Il serait aussi souhaitable que les producteurs de synthétiseurs prévoient la possibilité d'utiliser d'autres tempéraments sur les appareils qu'ils livrent au public.

REFERENCES :

(1) James Jeans : "Science and Music" - Dover

(2) Systèmes Pythagoricien
tempéré
zarlinien
par S.Gut dans la science de la musique (de chez BORDAS) sous direction Marc Honegger - Directeur à l'Institut de musicologie de l'Université de Strasbourg.

(3) Histoire de la musique de J.Combarieu (de chez Armand Colin).

7) - JUSTESSE MECANISTE ET JUSTESSE EXPRESSIVE

1) L'UNIVERS CHROMATIQUE DES PIANISTES ET SON ENVERS

Doit-on jouer sol# et la♭ à la même hauteur ? Question piège sans aucun doute : posez-la donc à un pianiste, à un organiste ou à un claveciniste. Vous aurez des réponses très diverses, mais certains pianistes donneront sans hésiter une réponse affirmative. Cela peut surprendre, mais cela s'explique par les raisons suivantes :

1) notre pianiste vit dans un univers où les hauteurs des notes sont fixes

2) à la différence des clavecinistes, les pianistes n'accordent pas leur instrument eux-mêmes mais confient cette tâche à un accordeur qui ne se préoccupe pas de savoir si on va jouer une œuvre en la majeur (où le sol# est probable) ou en mi♭ majeur (où le la♭ est probable)

3) notre pianiste peut avoir lu que l'accord actuel du piano est "bien-tempéré" [3] et qu'il en existe des modèles mathématiques (au moins deux !) parfaits

4) il peut aussi avoir entendu parler d'une certaine "loi de Fechner" qui affirme que "les sensations varient comme le logarithme des excitations physiques".

Et, finalement, Saint Augustin lui répète tous les jours que "l'habitude est une seconde nature". Alors pourquoi vouloir résister à l'idée que le clavier du piano est la représentation tactile de l'univers des sons ? Jouer un sol# ou un la♭ c'est appuyer sur les mêmes touches, donc sol# = la♭, tout est dit et le cercle est clos.

Bien entendu certains pianistes ne pensent pas que sol# = la♭, ils différencient ces deux notes par des phrasés différents, mais il est certain que tous les pianistes jouent sol# et la♭ à la <u>même hauteur</u>.
Cependant l'envers de cette certitude trompeuse nous enveloppe de toutes parts : il englobe l'univers des sons de hauteur variable, l'art de l'accordeur, les lois de l'acoustique, les expériences sur la perception des sons musicaux, etc ...

Je vais essayer d'en donner un rapide aperçu en me limitant à la notion d'intervalle.

L'intervalle entre deux notes peut être perçu <u>harmoniquement</u> (lorsque les deux notes sont jouées simultanément) ou <u>mélodiquement</u> (lorsque les deux notes sont jouées successivement).

Perception harmonique

Depuis l'Antiquité, on a remarqué que certains intervalles musicaux étaient particulièrement harmonieux, les voici par ordre de pureté décroissante :

nom de l'intervalle	rapport des fréquences de la note haute à la note basse
unisson	1
octave	2
quinte	$\frac{3}{2}$
quarte	$\frac{4}{3}$
etc ...	

Si la loi de Fechner était vraie, la quarte, la quinte et l'octave devraient se suivre par ordre de grandeur croissante (un pianiste ne doit-il pas écarter davantage les doigts pour jouer une octave que pour jouer une quarte ?).

Or depuis Carl Stumpf (XIX$^{\text{ème}}$ siècle) toutes les expériences montrent que ceci est faux. Dans un échantillon d'auditeurs sans formation musicale, Carl Stumpf a trouvé que 75 % perçoivent comme son unique deux sons simultanés à l'octave, 50 % réagissent de même à la quinte, 33 % à la quarte, etc ... [5, II, p. 187]. En revanche la loi de Weber, et seulement elle, est correcte. Sous sa forme la plus générale cette loi affirme que deux excitations physiques dont le rapport est constant donnent deux impressions égales (égalité qui n'implique aucun isomorphisme entre ensembles ordonnés).

Cela signifie que l'intervalle entre les notes de fréquences x et kx est perçu de la même manière que l'intervalle entre les notes de fréquences y et ky. C'est cette propriété qui permet de fonder la notion d'oreille relative (qui correspond à la notion mathématique de point projectif et qui est à la base de la notion de transposition en musique).

Terminons en mentionnant que la valeur minimale de k perceptible est comprise entre 1,001 et 1,01 (dans le médium) selon la finesse de l'oreille de l'auditeur.

Perception mélodique

Elle semble régie par des lois assez différentes - la loi de Weber, elle-même, devient trop rigide. Pour prendre un exemple disons que l'oreille est capable de reconnaître une mélodie après le traitement barbare qui consiste à ramener tous les intervalles à un demi-ton, en ne conservant que la suite des directions des changements de hauteurs [4, p. 112]

Quels intervalles trouve-t-on sur un piano ?

Tout dépend de l'accordeur.

Si l'accordeur se règle sur le tempérament classique (dit de Werckmeister) seuls les intervalles composés d'octaves sont justes (rapport des fréquences 2^n, avec n entier) car la gamme chromatique est le groupe engendré par $2^{1/12}$ (essayez donc d'expliquer la signification de ce symbole à un non-mathématicien !).

Si l'accordeur se règle sur le tempérament de S. Cordier [6] seuls les intervalles composés de quintes sont justes (rapport des fréquences $(\frac{3}{2})^n$, avec n entier) car la gamme chromatique est le groupe engendré par $(\frac{3}{2})^{1/7}$.

Et si, finalement, l'accordeur se fie à sa propre oreille tous les espoirs sont permis ...

2) LA JUSTESSE EXPRESSIVE DES CHANTEURS ET DES INSTRUMENTISTES A CORDES

Contrairement au pianiste dont l'univers ne comporte que des sons de hauteur fixe, le violoniste ne subit que quatre contraintes : les hauteurs des quatre cordes à vide, tout le reste est l'œuvre de la nature et du musicien. Et encore, dans ce cas, le violoniste accorde-t-il lui-même son instrument. Il choisit des quintes pures s'il doit jouer seul ou avec un piano accordé par Serge Cordier, il choisit des quintes tempérées s'il doit jouer avec un piano accordé de manière classique (Werckmeister). Quant au chanteur, il jouit d'une liberté totale et peut même changer de gamme chromatique à son gré.

La liberté des cordes et des chanteurs les conduit à rechercher des sons plus riches de significations et à développer les notions dites de "justesse expressive" (Casals [1, p. 134]) et de "justesse créative" (Bunting [2, p. 152-162]).

La justesse expressive commence lorsque l'on décide que sol# n'est pas nécessairement égal à la♭, et que l'on se demande ce qu'ils doivent être en fonction du contexte musical.

Par "contexte musical" j'entends, premièrement, une étude active de la partition : est-ce que le compositeur pensait les notes en tempérament égal (comme Wagner [7, p. 339] et les dodécaphonistes) ou inégal (comme Mozart [7, p. 327]) ? joue-t-on en la majeur ou en mi^{b} majeur ?
et deuxièmement l'utilisation des facultés imaginatives de l'interprète pour choisir les sons les plus harmonieux et les plus expressifs en fonction des données concrètes : Y a-t-il un piano dans l'ensemble ? ou une clarinette ? ou une flûte ? est-ce que la tonalité est majeure ? mineure ? etc ...
Il n'est donc pas surprenant que la justesse expressive apparaisse comme un domaine aussi vaste que l'Art de l'interprétation lui-même.

Aussi nous limiterons-nous à quelques remarques, que nous espérons simples et utilisables, basées sur un petit nombre de notions fondamentales et destinées à redonner confiance à chacun en sa propre oreille (et en celle des autres) afin de rechercher une justesse plus fine et profiter de l'infinie liberté permise aux instruments à sons variables.

Ainsi que le dit Helmholtz [7, p. 4[illegible]] : "le piano est sans aucun doute un instrument très utile pour faire connaissance avec la littérature musicale, ou pour jouer chez soi, ou pour accompagner des chanteurs. Mais pour des fins artistiques son importance n'est pas telle que son mécanisme doive servir de base à tout le système musical".

3) TEMPÉRAMENTS USUELS

En dehors des tempéraments égaux dont nous avons parlé plus haut deux tempéraments inégaux sont fréquemment utilisés:

La "gamme des violonistes" proche de celle de Pythagore [5, I, p. 176] et la gamme des chanteurs proche de celle de Zarlino [5, I, p. 106].

Ces gammes font partie de la catégorie des gammes naturelles dont on trouvera une théorie dans [6].

Le tableau suivant donne les fréquences des différentes notes du mode majeur, celle du do étant prise pour unité. Pour les autres modes voir [7, pp. 274-75].

	do	ré	mi	fa	sol	la	si	do
gamme tempérée classique	1	$2^{1/6}$	$2^{1/3}$	$2^{5/12}$	$2^{7/12}$	$2^{3/4}$	$2^{11/12}$	2
gamme tempérée de S. Cordier	1	$(\frac{3}{2})^{2/7}$	$(\frac{3}{2})^{4/7}$	$(\frac{3}{2})^{5/7}$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2})^{9/7}$	$(\frac{3}{2})^{11/7}$	$(\frac{3}{2})^{12/7}$
gamme de Pythagore	1	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{3^5}{2^7}$	2
gamme de Zarlino	1	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3.5}{2^3}$	2

Pour les lecteurs qui désireraient connaître des valeurs approchées de ces nombres, voici un tableau de leurs valeurs arrêtées à la quatrième décimale

	do	ré	mi	fa	sol	la	si	do
gamme tempérée classique	1	1,1225	1,2599	1,3348	1,4983	1,6818	1,8877	2
gamme tempérée de S. Cordier	1	1,1228	1,2607	1,3359	1,5000	1,6842	1,8911	2,0039
gamme de Pythagore	1	1,1250	1,2656	1,3333	1,5000	1,6875	1,8984	2
gamme de Zarlino	1	1,1250	1,2500	1,3333	1,5000	1,6667	1,8750	2

4) TONIC SOL-FA

Le tonic Sol-Fa est un système de notation musicale adaptée à l'écriture de la musique tonale. Il consiste à rechercher la tonalité locale d'un passage et à appeler "doh" la tonique, "ray" la sus-tonique, etc ...

Non seulement cette écriture est pratique mais elle donne une habitude conceptuelle extrêmement importante.

Le tableau suivant contient <u>toutes</u> les gammes majeures en notation de tonic Sol-Fa. Pour l'utiliser il suffit de remplacer x par la fréquence de la tonique.

	doh	ray	me	fah	soh	lah	te	doh
gamme tempérée classique	x	$2^{1/6}$ x	$2^{1/3}$ x	$2^{5/12}$ x	$2^{7/12}$ x	$2^{3/4}$ x	$2^{11/12}$ x	2x
gamme tempérée de S. Cordier	x	$(\frac{3}{2})^{2/7}$ x	$(\frac{3}{2})^{4/7}$ x	$(\frac{3}{2})^{5/7}$ x	$\frac{3}{2}$ x	$(\frac{3}{2})^{9/7}$ x	$(\frac{3}{2})^{11/7}$ x	$(\frac{3}{2})^{12/7}$
gamme de Pythagore	x	$\frac{3^2}{2^3}$ x	$\frac{3^4}{2^6}$ x	$\frac{2^2}{3}$ x	$\frac{3}{2}$ x	$\frac{3^3}{2^4}$ x	$\frac{3^5}{2^7}$ x	2x
gamme de Zarlino	x	$\frac{3^2}{2^3}$ x	$\frac{5}{2^2}$ x	$\frac{2^2}{3}$ x	$\frac{3}{2}$ x	$\frac{5}{3}$ x	$\frac{3.5}{2^3}$ x	2x

Les solfaistes étaient très nombreux en Grande-Bretagne à l'époque Victorienne (entre 1854 et 1884, quatre millions de britanniques pratiquèrent le Sol-Fa).

Ils apprenaient à chanter "sans aucun accompagnement instrumental, habitués qu'ils étaient de suivre seulement leur oreille" [7, p. 423]

Comme la gamme des solfaistes était proche de celle de Zarlino, nous commencerons par étudier la justesse zarlinienne.

5) <u>INTONATION TONALE DES CHANTEURS</u>

Supposons que, par exemple, nous devions chanter une pièce de Mozart. Selon Helmholtz [7, p. 327] : "Mozart a encore eu l'occasion de faire des études approfondies de la composition pour le chant. Il est maître de la plus douce harmonie, lorsqu'il le désire, mais il est un des derniers compositeurs possédant cette maîtrise".

Alors, pour Mozart, est-ce que sol$^{\#}$ et la$^{\flat}$ ont toujours la même hauteur ?

Nous allons étudier cette question en supposant que le sol$^{\#}$ et le la$^{\flat}$ se trouvent en la majeur et mi$^{\flat}$ majeur et en utilisant la gamme de Zarlino. Mais chemin faisant nous découvrirons des phénomènes intéressants.

Pour commencer nous allons comparer les trois tonalités voisines de do, sol et fa majeur. Pour cela nous prendrons successivement $x = 1, \frac{3}{2}$ et $\frac{2}{3}$ et nous serons amener à multiplier ou à diviser les fréquences par 2 pour nous ramener à une seule octave.

	doh	ray	me	fah	soh	la	te	doh
gamme de Zarlino	x	$\frac{9}{8}x$	$\frac{5}{4}x$	$\frac{4}{3}x$	$\frac{3}{2}x$	$\frac{5}{3}x$	$\frac{15}{8}x$	$2x$
do majeur ($x = 1$)	1 do	$9/8$ ré	$5/4$ mi	$4/3$ fa	$3/2$ sol	$5/3$ la	$15/8$ si	2 do
sol majeur ($x = \frac{3}{2}$)	$3/2$ sol	$27/16$ [la]	$15/8$ si	1 do	$9/8$ ré	$5/4$ mi	$45/32$ [$fa^{\#}$]	$3/2$ sol
fa majeur ($x = \frac{2}{3}$)	$4/3$ fa	$3/2$ sol	$5/3$ la	$16/9$ [si^{b}]	1 do	$10/9$ [ré]	$5/4$ mi	$4/3$ fa

Dans ce tableau on a mis des crochets autour des noms des notes dont les fréquences n'apparaissent pas dans la gamme de do majeur ; nous dirons que ce sont de "nouvelles notes".

En changeant l'ordre des notes de manière à commencer par un do, on obtient le tableau suivant :

	do	ré	mi	fa	$fa^{\#}$	sol	la	si^{b}	do
sol maj.	1	$9/8$	$5/4$		$45/32$	$3/2$	$27/16$		2
do maj.	1	$9/8$	$5/4$	$4/3$		$3/2$	$5/3$		2
fa maj.	1	$10/9$	$5/4$	$4/3$		$3/2$	$5/3$	$16/9$	2

On note deux phénomènes qualitatifs (par ordre d'importance décroissante) :

1) l'apparition de nouvelles notes qu'on appelle $fa^{\#}$ en sol majeur et si^{b} en fa majeur et qui sont effectivement distinctes des précédentes dans ma théorie [6].

2) le fait que le second degré (ray) de la gamme majeure se comporte de manière particulière : au lieu de donner le "lah" de la gamme "au-dessus" il se trouve plus haut de la quantité $\frac{81}{80}$ (comma de Didyme, tout à fait audible). Mais dans ma théorie on a bien la <u>même</u> note abstraite (même classe dans le groupe quotient) avec une justesse différente.

Venons-en à la question sol$^{\#}$ = la^{b} ? Sol$^{\#}$ se rencontre la première fois en la majeur et la^{b} en mi^{b} majeur. Pour passer de "do" majeur à "la" majeur, un compositeur comme Mozart suivra un parcours sinueux qui sera équivalent à une suite de trois transpositions d'une quinte, nous prenons donc $x = (\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{8}$ pour la majeur et $x = \frac{8}{27}$ pour mi^{b} majeur.

Sol$^{\#}$ sera le "te" de la majeur, d'où la fréquence $\frac{27}{8} \times \frac{15}{8} \times 2^m$, et la^{b} sera le "fah" de mi^{b} majeur, d'où la fréquence : $\frac{8}{27} \times \frac{4}{3} \times 2^n$. Pour ramener le la^{b} dans l'octave on doit prendre $m = -2$ et $n = 2$, ce qui donne finalement :

$$\frac{\text{fréquence sol}^{\#}}{\text{fréquence la}^{b}} = \frac{32805}{32768} = 1{,}00113$$

c'est audible pour une très bonne oreille.

Dans ma théorie [6] le sol$^{\#}$ et le la^{b} sont la <u>même</u> note abstraite (même classe dans le groupe quotient) avec une justesse différente.

Il n'est peut-être pas inutile de remarquer que tous ces calculs peuvent être effectués sur les gammes tempérées et que le résultat que l'on obtient ne fait naturellement apparaître qu'une seule fréquence par note abstraite : la différence entre demi-ton diatonique et demi-ton chromatique disparait, l'univers redevient insipide et plat.

6) COMPARAISON DES DIVERSES INTONATIONS

Ce que l'on vient de dire pour la gamme de Zarlino pourrait être répété, mutatis mutandis, pour la gamme de Pythagore, dite "gamme des violonistes" ; cela ne présente aucune difficulté.

Pour cette raison nous nous bornerons à comparer l'intonation tempérée classique à l'intonation pythagoricienne et à l'intonation zarlinienne. Dans le tableau suivant les nombres à quatre décimales sont des approximations du rapport des fréquences des notes de Pythagore (respectivement Zarlino) à celles des notes tempérées

	doh	ray	me	fah	soh	lah	te
Pythagore	1	1,0023	1,0045	$(1{,}0011)^{-1}$	1,0011	1,0034	1,0057
Zarlino	1	1,0023	$(1{,}0079)^{-1}$	$(1{,}0011)^{-1}$	1,0011	$(1{,}0091)^{-1}$	$(1{,}0068)^{-1}$

Ce qui compte, en définitive, c'est moins les décimales que le fait que, quelque part, au voisinage et au-dessus de $2^{7/12}$ se trouve un nombre merveilleusement simple : $\frac{3}{2}$, c'est-à-dire une quinte pure bien résonnante et que l'on peut atteindre par le vibrato même lorsqu'on ne joue pas mathématiquement juste, c'est ce que savent instinctivement tous les grands interprètes ainsi que l'avait noté Helmholtz [7, p. 428] :

"Je pense que beaucoup de nos meilleures exécutions musicales doivent leur beauté à une introduction inconsciente du système naturel, et que nous pourrions plus souvent apprécier leurs charmes si ce système était enseigné de manière pédagogique en le mettant à la base de tout l'enseignement musical, à la place de l'intonation tempérée qui empêche la voix humaine et les instruments à cordes de développer leur pleine harmonie dans le seul but de ne pas perturber les habitudes des pianistes et des organistes".

Il est désormais clair que l'intonation naturelle est mathématiquement cohérente pour les instruments à sons variables , qu'elle est réalisable par les chanteurs et les instrumentistes à cordes, comme l'avait remarqué jadis Helmholtz, et aussi par les ordinateurs actuels ...

Finalement tous les points de vue se réconcilient dans une même structure abstraite [6] constituant le langage commun des musiciens, fixistes ou non. Et, pour tout ce qui se trouve au-delà de ces principes et de cette structure simplistes, je renvoie le lecteur à l'Essai de Christopher Bunting [2, pp. 152-62].

Représentons le nombre 1,0011 par une flèche (↑), cela nous permet de dresser un tableau des corrections que doivent faire un violoniste et un chanteur pour s'adapter à la justesse d'un piano accordé selon la gamme tempérée classique

	doh	ray	me	f	soh	lah	te	doh
violoniste	0	↓↓	↓↓↓↓	↑	↓	↓↓↓	↓↓↓↓↓	0
chanteur	0	↓↓	↑↑↑↑↑↑↑	↑	↓	↑↑↑↑↑↑↑↑	↑↑↑↑↑↑	0

Remarquons deux choses :

- toute oreille est sensible à dix flèches et les meilleures oreilles sont sensibles à une flèche,

- il y a une cohérence parfaite entre l'intonation pythagoricienne et celle que préconise Casals pour les gammes majeures [1, p. 135].

On peut aussi comparer les demi-tons chromatiques et diatoniques pour la gamme de Pythagore, on trouve :

$$\frac{\text{demi-ton chromatique}}{\text{demi-ton diatonique}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = 1{,}0136433 = \text{douze flèches}$$

Bien entendu il serait fallacieux de considérer tous les pianos comme accordés de la sorte, le métier de l'accordeur est plus un art qu'une science et très souvent les accordeurs préfèrent leur oreille à un dispositif électronique (ce qui paraît très raisonnable...). Aussi le tableau précédent n'a-t-il qu'un intérêt purement théorique.

7) CONCLUSION

Le lecteur peut légitimement se demander ce que signifie ce fatras de chiffres.

La réponse doit venir des pianistes : ils utilisent les chiffres pour affirmer que sol$^{\#}$ = la$^{\flat}$, pourquoi les chanteurs et instrumentistes à cordes ne pourraient-ils les utiliser pour affirmer le contraire ?

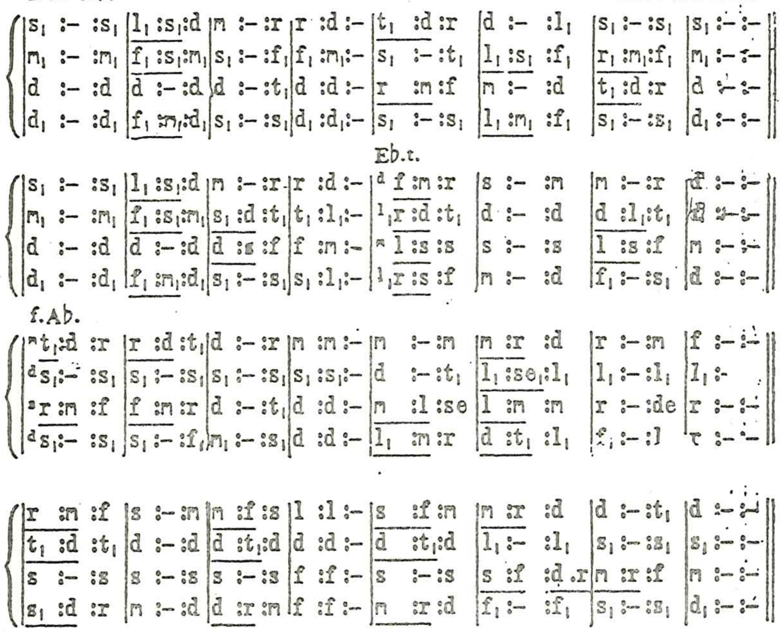
Bien sûr les détails quantitatifs ne doivent pas être pris sans réserves (la notion d'approximation n'est probablement pas le bon concept mathématique et puis il y a le vibrato) mais les résultats qualitatifs vont très loin ...

ANNEXE :

Hymne gallois noté en tonic Sol-Fa.

ARWELFA

Doh Ab. JOHN HUGHES.



Arglwydd, gad im dawel orffwys
  Dan gysodau'r palmwydd clyd,
Lle yr eistedd pererinion
  Ar eu ffordd i'r nefol fyd;
Lle'r adroddant dy ffyddlondeb
  Iddynt yn yr anial cras,
Nes anghofio cyfyngderau
  Wrth foliannu nerth dy ras.

O! mor hoff yw cwmni'r brodyr
  Sydd â'u hwyneb tua'r wlad,
Heb un tafod yn gwenieithio—
  Heb un fron yn meithrin brad;
Gwlith y nefoedd ar eu profiad,
  Atsain hyder yn eu hiaith;
Teimlant hiraeth am eu cartref,
  Carant sôn am ben eu taith.

Arglwydd, dal ni nes mynd adref,
  Nid yw'r llwybr eto'n faith;
Gwened heulwen ar ein henaid,
  Wrth nesàu at ben y daith;
Doed y nefol awel dyner
  I'n cyfarfod yn y glyn,
Nes in deimlo'n traed yn sengi
  Ar uchelder Seion fryn.

EMRYS.

Références

[1] David BLUM .- "Casals et l'art de l'interprétation"
Buchet/Chastel, 1980.

[2] Christopher BUNTING .- "Essay on the craft of Cello playing"
Cambridge, 1982.

[3] Serge CORDIER .- "Piano bien tempéré et justesse orchestrale"
Buchet/Chastel, 1982.

[4] Macdonald CRITCHLEY .- "Music and the Brain"
Heinemann, 1977.

[5] Roland de CANDE .- "Histoire universelle de la musique" tomes I et II
Seuil, 1978.

[6] Yves HELLEGOUARCH .- "Scales" C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada
Vol. IV, n° 5 octobre 1982
Vol. V, n° 2 avril 1983

et aussi "Musique et Mathématiques",
brochure n° 52, APMEP

[7] HELMHOLTZ .- "On the sensations of tone"
Dover, 1954, première édition en 1863.

8)- LA PSEUDO-LOI DE FECHNER

I) INTRODUCTION

Mon intérêt pour la pseudo-loi de Fechner provient de l'usage immodéré qu'en font un certain nombre de personnes.
Puisqu'elle établit un lien mathématique entre l'univers des sensations et le monde physique, il est devenu très facile de vous dire ce que vous devez ressentir : un appareil de physique suffit pour cela, et si vous ne ressentez rien c'est vous qui êtes déréglé.
Elle permet aussi une justification a priori de la gamme tempérée : la sensation d'octave est divisée en douze parties "égales". Pourquoi 12 ? qu'à cela ne tienne, on peut vous définir une gamme tempérée à 11 ou 13 demi tons si vous préférez ...
Préfère t-on ?
Et qu'en penserait Fechner ?
C'est ce que je suis allé regarder et une grande surprise m'attendait : le point de vue de Fechner était diamétralement opposé à celui de nos matérialistes modernes. Ce qu'il cherchait a établir était l'existence du monde physique à partir de celle de l'univers des sensations ......

II- LES SOURCES PHILOSOPHIQUES

Jetez donc un coup d'oeil à ce qui est dit de la philosophie de Schelling, un des inspirateurs de Fechner, dans les merveilleux "Fondements du Savoir Romantique"
Romantique, certes, était Schelling en voulant réconcilier la Nature et l'Esprit, catégories dissociées par la "Philosophie des lumières" et la conception mécaniste de l'univers ; la Nature était devenue étrangère à l'Homme et celui-ci se trouvait aliéné au sein de l'univers.

"Ce que nous prétendons, ce n'est pas que la nature coïncide comme par hasard avec les lois de notre esprit (par l'intermédiaire d'un troisième principe), mais qu'elle exprime <u>elle-même</u> , nécessairement et primitivement, les lois de notre esprit et que non seulement elle les exprime, mais les <u>réalise</u> et qu'elle n'est et ne peut être appelée Nature que pour autant qu'elle est l'une et l'autre".
Pour Fechner les plantes et les étoiles elles-mêmes étaient animées ; Dieu, l'âme de l'univers, avait une existence semblable à celle de l'homme et les lois naturelles étaient les modes de découverte de la perfection divine.

Le principe fondamental de la philosophie de Fechner est que, en dépit des apparences, l'esprit et le corps ne sont que deux aspects d'une même réalité. Et Fechner prenait l'exemple d'un cercle qui apparaît concave ou convexe selon que l'observateur se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur de celui-ci...

Pour Fechner la "loi" que nous allons décrire dans le troisième paragraphe signifiait que la relation entre le monde spirituel et le monde physique peut être formulée et que, par conséquent, il n'existe qu'<u>un seul monde</u>, le <u>monde spirituel</u>.

III) <u>LA "LOI" DE FECHNER</u>

Cette loi fut publiée en 1860 dans "Die Elements der Psychophysik , le grand ouvrage de Fechner.
Elle affirme que si le seuil de perception d'un phénomène donné correspond à une excitation E_0, on a :

$$(F) \qquad S(E) = C^{te} \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

où S(E) est la sensation qui correspond à l'excitation E.
Cent ans aprés Fechner cette loi est utilisée dans l'autre sens : les physiciens mesurent $\frac{E}{E_0}$ et nous informent ensuite de ce que nous devons ressentir (pauvre Fechner!).

Et comme c'est très pratique, on utilise cette loi dans tous les domaines sans trop se demander si elle a un sens.

Exemples :

Nos exemples seront relatifs à la perception des intervalles musicaux.

Un intervalle est un couple de notes que l'on repèrera par leurs fréquences E_1 et E_2, on le représentera par (E_1, E_2).

Lorsque les notes sont jouées successivement on dit qu'on à affaire à un intervalle mélodique, la sensation d'intervalle a peut-être alors un rapport avec la loi de Fechner, si l'on ne regarde pas trop les détails [M]

Lorsque les notes sont jouées simultanément on dit qu'on à affaire à un intervalle harmonique. Comme l'ordre entre E_1 et E_2 n'a plus d'importance, il vaut mieux représenter un intervalle harmonique par un ensemble, par exemple $\{E_1, E_2\}$.

Si la loi de Fechner était vraie, on aurait, pour une octave (c'est à dire $\{E_1, E_2\} = \{1, 2\}$)

$$S_2 - S_1 = C \text{ Log } 2$$

pour une quinte pure ($\{E_1, E_3\} = \{1, \frac{3}{2}\}$) :

$$S_3 - S_1 = C \text{ Log } \frac{3}{2} < S_2 - S_1$$

Si l'on n'entend pas bien les octaves (c'est le cas d'un certain nombre de chefs d'orchestre célèbres) on devrait se tromper davantage sur les quintes, encore plus sur les tierces, etc...

Or ceci est complètement faux (expériences de Carl Stumpf [C], expérience des musiciens ayant joué avec les susdits chefs d'orchestre célèbres, etc.....)

Dans les paragraphes qui suivent, on va se demander comment Fechner a obtenu sa "loi" et ensuite on s'interrogera sur la part de vérité qu'elle peut contenir et sur le type de nombres qui peuvent servir à repérer la sensation d'intervalle harmonique.

IV) - LA DEMARCHE DE FECHNER

G.T. Fechner (1801-1887) reçut une formation de biologiste à l'université de Leipzig, puis s'intéressa aux mathématiques, à la physique, à la philosophie, à l'esthétique, etc...
On peut penser que ses conceptions mathématiques étaient celles de tout physicien de l'époque et que pour lui :

- tout nombre est réel s'il n'est pas imaginaire
- toute fonction est continue et même différentiable.

On va essayer de reconstituer la démarche que Fechner a pu suivre, ou une démarche équivalente ...

4,1- Fechner part de la loi de Weber (qui était physiologiste) :

$$(W) \qquad \frac{\Delta E}{E} = a = c^{te}$$

Les conditions de validité de cette loi doivent être précisées : E est une excitation, E + Δ E est l'excitation correspondant à la plus petite variation (positive) de sensation perceptible différente.
E peut souvent être représentée par un nombre réel et cette formule a donc un sens.

4,2- Ensuite Fechner généralise (W) en écrivant la "formule fondamentale" :

$$\Delta S = c \frac{\Delta E}{E}$$

où c est une constante et Δ S l'accroissement de sensation.
On fait ici deux énormes hypothèses :

H_a) les sensations peuvent être mesurées par des nombres réels:

H_b) $\frac{\Delta S}{\Delta E}$ E ne dépend pas de E

et Fechner en ajoute une troisième (tout aussi énorme):

H_c) on peut passer à la limite :

$$\frac{dS}{dE} = \frac{c}{E}$$

4,3- Lorsqu'on admet a, b, c la loi de Fechner s'obtient par intégration :

$$\text{(F)} \qquad S = c \operatorname{Log} E/E_0$$

où E_0 est l'excitation qui correspond à $S = 0$: <u>seuil d'excitation</u>.

4,4- Nous avons dit que (F) ne s'applique pas à la perception harmonique des intervalles.

Donc, si nous voulons garder (W), nous devons rejeter l'une au moins des hypothèses a, b et c.

4,5- Il est clair que l'hypothèse H_a est particulièrement choquante.

Pour que ΔS soit un nombre réel il faudrait que les sensations vérifient les axiomes qui caractérisent les <u>grandeurs mesurables</u> [B]: on verra que ce n'est pas le cas pour la perception harmonique des intervalles.

Mais l'hypothèse H_c est aussi en contradiction avec la notion de quanta de perception qui est à la base de la loi de Weber.

<u>V) GRANDEURS MESURABLES</u>

Le problème de la mesure des grandeurs est à l'origine de la notion de nombre réel depuis que les mathématiciens grecs ont eu l'idée de comparer et d'ajouter des "grandeurs de même espèce". C'est cette approche qui est retenue dans Bourbaki [B].

Nous allons donner des conditions, sur un ensemble E muni d'une loi de composition interne et d'une relation d'ordre, pour que E soit isomorphe à une partie de R, ces conditions sont un peu moins générales que celles de Bourbaki.

<u>THEOREME</u> :

Soit un ensemble E totalement ordonné, possédant un plus petit élément w et soit $(x,y) \longmapsto xy$ une loi de composition interne non nécessairement commutative. Alors si les axiomes (GR_1), (GR_2), (GR_3) et (GR_4) ci-dessous sont satisfaits, il existe une application f strictement croissante

$f : E \longrightarrow R_+$ telle que l'on ait :

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

En outre l'image $f(E)$ est dense par rapport à tout intervalle $[0, f(b)]$ de R, b désignant un élément quelconque de E.

Les conditions supposées sont les suivantes (où $<$ désigne l'inégalité stricte).

(GR_1) La loi de composition est associative et w en est élément neutre ($wx = xw = x$, pour tout x).

(GR_2) $x < y$ entraîne, pour tout z, $xz < yz$ et $zx < zy$.

(GR_3) L'ensemble des éléments $> w$ n'est pas vide et n'a pas de plus petit élément et quels que soient x et y tels que $x < y$, il existe $z \geqslant w$ tel que $xz \leqslant y$.

(GR_3) ("axiome d'Archimède").

Quels que soient x et y avec $x > w$, il existe $n \in N$ tel que $x^n > y$.

REMARQUE :

Bourbaki dit que, dans l'application de ce théorème aux sciences expérimentales, on peut vérifier (GR_1) et (GR_2) à une certaine erreur près.

Mais (GR_3) doit être considéré comme une exigence *a priori* (car les grandeurs aussi petites que l'on veut échappent aux physiciens) et (GR_4) comme l'extrapolation d'un fait vérifiable si x n'est pas trop petit.

VI) LOI DE COMPOSITION SUR L'ENSEMBLE DES PERCEPTIONS HARMONIQUES DES INTERVALLES.

Entre la loi (W) que je suis prêt à accepter et la loi (F) qui ne me paraît pas acceptable, on peut formuler une troisième loi hypothétique qui, elle, me paraît assez raisonnable :

$$(H_d) \qquad \Delta S = f\left(\frac{\Delta E}{E}\right).$$

Cela ne *signifie pas* que f est une application de R^+ dans R, mais dans un certain ensemble $\mathcal{S}$ qui sera *l'ensemble des perceptions harmoniques des intervalles*.

Soit un intervalle I formé par deux notes de fréquences E_1 et E_2, on doit écrire (voir paragraphe 3 : exemple) :

$$I = \{ E_1 , E_2 \}$$

Dans la suite nous conviendrons que $E_1 \leqslant E_2$ et nous écrirons, indifféremment, $I = (E_1, E_2)$.
A cet intervalle I, la fonction f fait correspondre une sensation :

$$f\left(\frac{E_2 - E_1}{E_1}\right) = f\left(\frac{E_2}{E_1} - 1\right)$$

On en déduit une application h de l'ensemble J des intervalles harmoniques dans $\mathcal{S}$:

$$(E_1, E_2) \xmapsto{\ h\ } f\left(\frac{E_2}{E_1} - 1\right)$$

Il est clair que h se factorise de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd} J \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{S} \\ & {[1\ \infty[} \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Où π est la projection canonique : $(E_1\ ,\ E_2) \longmapsto E_2/E_1$ et où g est l'application : $x \longmapsto f(x - 1)$.

Maintenant, tout mathématicien qui se respecte est tenté de définir une loi de monoïde commutatif sur J en posant :

$$(E_1\ ,\ E_2)\ .\ (E'_1, E'_2) = (E_1\, E'_1\ ,\ E_2\, E'_2)$$

et, dans ces conditions, π est un morphisme.

g permet de transporter la structure de monoïde commutatif de $[1, \infty[$ à $\mathcal{S}$, mais (GR_2) pose un problème naturellement.
Rappelons cet axiome :
(GR_2) : $x < y$ entraîne, pour tout z, $xz < yz$ et $zx < zy$.

D'aprés mes définitions nous avons :

$(2,3).(3,4) = (6,12)$ (dans J)

donc

$h(\text{quinte}) \,.\, h(\text{tierce}) = h(\text{octave})$ (dans $\mathcal{S}$)

Si (GR_2) était vérifié on déduirait de :

$$w < h(\text{quinte})$$

que :

$w.h(\text{tierce}) < h(\text{quinte}).h(\text{tierce}) = h(\text{octave})$

et on obtiendrait que :

$h(\text{tierce}) = w.h(\text{tierce}) < h(\text{octave})$

Ce qui est absurde (Carl Stumpf).

<u>REMARQUE</u> :

$\mathcal{S}$ est un monoïde simplifiable dont le groupe symétrisé est le groupe des intervalles mélodiques.

Cependant la perception <u>mélodique</u>, c'est-à-dire non simultanée des intervalles, diffère de la perception harmonique [M] Topologiquement il n'y a pas de comparaison possible entre la perception harmonique et la perception mélodique.

VII) <u>UNE SOLUTION THEORIQUE PYTHAGORICIENNE</u>

Supposons un instant que l'univers soit dénombrable ou, plus simplement, que les fréquences des notes de musique puissent être repérées par des nombres rationnels (ce qui exclut la gamme tempérée mais n'est pas absurde à une époque où l'hypothèse atomique est enseignée dans les écoles).

Alors on pourrait prendre $\mathcal{S} = \mathbb{Q} \cap [1, \infty[$, c'est-à-dire l'ensemble des rationnels $\geqslant 1$ et g = l'identité :

$$\begin{tikzcd} J \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{S} \\ & \mathbb{Q}\cap[1,\infty[\arrow[ur, "id"'] & \end{tikzcd}$$

On pourrait dire que l'intervalle représenté par la fraction irréductible $\frac{n_1}{d_1}$ est inférieur ou égal à l'intervalle représenté par la fraction irréductible $\frac{n_2}{d_2}$ si et seulement si $n_1 \leq n_2$, et on aurait une classification des intervalles conforme, pour les petites valeurs de d et de n, à celle de C.Stumpf (voir [P]). Mais l'ordre ne serait pas total puisque l'on aurait :

$$\frac{5}{3} \leq \frac{5}{4} \quad \text{et} \quad \frac{5}{4} \leq \frac{5}{3}$$

Et naturellement, l'axiome (GR_2) ne serait pas vérifié non plus ; en effet si nous prenons :

$$x = \frac{3}{2} \quad , \quad y = \frac{5}{4} \quad \text{et } z = \frac{8}{5}$$

nous avons :

$$xz = \frac{12}{5} \quad , \quad yz = \frac{2}{1}$$

d'où :

$$xz > yz$$

bien que

$$x < y \ !$$

En conclusion cette approche semble indiquer que les nombres les plus adéquats pour représenter la perception harmonique des intervalles ne sont pas les nombres réels (équipés de leur topologie habituelle) mais les nombres entiers et les nombres rationnels.

ANNEXE : La harpe éolienne métaphysique de Thoreau.

Le passage suivant, tiré du Journal de H.D. Thoreau (les Presses d'Aujourd'hui) me paraît traduire avec bonheur l'unité ontologique du monde, que j'ai essayée de décrire dans le paragraphe 2, et qui doit être accessible à l'homme libéré.

> Il règne dans l'air une musique subtile pareille au chant des harpes éoliennes. J'entends des cors mélodieux qui résonnent sous les voûtes lointaines des hautes régions de l'air, musique à donner aux hommes une folie divine, musique qui, du haut du ciel, vient mourir à nos oreilles.
> Pour des oreilles attentives, quelle harpe splendide est le monde ! L'homme absorbé croit qu'au delà du chant du grillon rien ne peut être perçu, mais il existe une mélodie immortelle, que peuvent saisir le matin, à midi, la nuit, les oreilles qui savent ouïr, et, parfois, tantôt un homme, tantôt un autre l'entend, parce qu'il a des oreilles faites pour la musique.
> Vers ce chant, la spirée et la reine-des-prés se tendent. Elles sont peintes si merveilleusement, parce qu'elles plongent dans la couche la plus profonde de cette harmonie.

REFERENCES :

[B] BOURBAKI : Topologie Générale ch V, HERMANN

[C] R.DE CANDÉ : Histoire Universelle de la Musique, SEUIL

[G] G.GUSDORF : Fondements du Savoir Romantique, PAYOT

[M] MAC DONALD CRITCHLEY : Music and the Brain , HEINEMANN

[P] B.PARZYSZ : Musique et Mathématiques, A.P.M.E.P Publication N°52

Voir aussi :
BORING (E.G.) "A History of Experimental Psychology" 1950 et les travaux de CAMPBELL et STEVENS.