IREM

des Pays de la Loire

LES MATHÉMATIQUES NE SE SONT PAS FAITES EN UN JOUR ...

Promenades historiques

Cinquième promenade : De la zététique à la géométrie analytique.

Juin 2007

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DES PAYS DE LA LOIRE

2, rue de la Houssinière • BP 92208
44322 NANTES CEDEX 03
Tel. 02 51 12 59 41
Site : www.irem.sciences.univ-nantes.fr/

Cinquième promenade historique

JUIN 2007

Cinquième promenade historique

De la zététique à la géométrie analytique

Avec la collaboration de Xavier LEFORT et Pierre ÉTIENNE
préface de Dominique BENARD

Niveau fin de collège et lycée

IREM
Des Pays de la Loire

Le philosophe grec Aristippe et ses compagnons naufragés abordent la côte de Rhodes et découvrent des figures géométriques dessinées sur le sable : « *nous sommes sauvés, voici des traces laissées par des êtres humains* ». (Vitruve, De l'architecture, livre VI)

Présentation

Nous vous proposons, au travers d'une série de petits cahiers, quelques promenades historiques au fil des mathématiques.

Nous nous adressons autant aux élèves qu'aux professeurs ; chacun, nous l'espérons, pourra y trouver son compte.

Pour cela, nous avons choisi un langage simple et vous trouverez au long des pages qu'il faut lire le crayon à la main, des exercices pour mieux pénétrer les notions abordées.

Les mathématiques ne se sont pas faites en un jour ; elles ont une histoire pleine de bonds et de rebonds. Cette histoire permettra peut-être au lecteur ou à la lectrice de comprendre que ses difficultés furent parfois aussi celles des plus grands mathématiciens, de découvrir comment certaines notions ont évolué et pourquoi, de faire enfin des mathématiques autrement.

Nous appuierons ces promenades sur la lecture de textes originaux en proposant, lorsque cela semble nécessaire pour la compréhension, des traductions en termes plus modernes.

Nous indiquerons le ou les niveaux d'accessibilité, et les prérequis, le cas échéant. Mais nous avons pris le parti de ne privilégier aucun niveau, du collège au lycée, en passant par le lycée professionnel.

Nous vous souhaitons d'agréables promenades mathématiques. Le rêve est peut-être au bout du chemin.

Ce fascicule s'adresse plutôt à des élèves de troisième ou de niveau lycée.
Certaines parties de l'introduction, d'un niveau un peu élevé, sont reportées dans une annexe.
Les chapitres 1, 3 et partiellement 5, sont abordables en fin de troisième et en seconde. Les chapitres 2 et 4 demandent plus probablement un niveau de 1° ou de terminale.

Préface

Une spirale, une ellipse « inscrite » dans un cercle, telles sont les traces de l'activité mathématique évoquée sur la gravure ornant la couverture de chacune des promenades historiques, dont paraît aujourd'hui la cinquième consacrée à l'émergence de la géométrie analytique. Deux figures géométriques donc, où le regard du mathématicien pourra extraire, de manière plus ou moins explicite, certains traits significatifs : par exemple, parcourant la spirale, une proportionnalité « visible » entre la distance au point central et le nombre de tours effectués ; l'existence d'une relation particulière entre le cercle et l'ellipse « visiblement » suggérée par leur présentation conjointe. L'œil de chair, secondé par l'œil de la raison, est ici le vecteur essentiel d'une première analyse de la situation présentée dans la figure.

Et si nous imaginions les naufragés transportés à notre époque, les traces qu'ils découvriraient pourraient sans doute ressembler à ceci :

$$r = a.\theta$$

$$X^2 + Y^2 = 1 \xleftrightarrow{x=a.X,\, y=b.Y} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Il est bien possible alors d'évoquer la géométrie analytique comme géométrie sans figures. La promenade qui nous est ici proposée dans les bonne feuilles de quelques textes fondateurs ou particulièrement éclairants fait bien apparaître ce déplacement du statut de la figure : non plus schéma d'appui et de référence pour la démonstration, mais schéma de première exposition d'une situation problématique dont l'analyse et la résolution procèderont par opérations algébriques, les équations se substituant alors à la figure. De sorte que cette dernière peut bien s'effacer. Toutefois, il est frappant de constater combien, dans ces mêmes textes, la figure reste prégnante.

Car il s'agit tout d'abord de constituer une énonciation algébrique qui soit *expressive* de la situation géométrique. De sorte que le mathématicien, confronté aux équations, puisse, quand il en ressent la nécessité, revenir à de la figure, s'appuyer à nouveau sur elle pour continuer son analyse.

Par ailleurs, si la traduction algébrique congédie la *figure*, ses caractères produisent des *formes*. Et la pratique de la production et de la transformation de ces formes – traduction et calcul algébriques – convoquent le regard du mathématicien, tout autant que la considération active d'une figure par laquelle s'élabore une analyse géométrique « pure ». Les trois démonstrations analytiques du même théorème, proposées en introduction à cette promenade, en donnent une preuve jubilatoire : par exemple dans l'intervention fréquente d'arguments de *symétrie*, mais d'une symétrie renouvelée opérant sur les formes algébriques (changer x en $-x$, permuter certaines variables …) ; de même dans l'expression de la concourance de plusieurs droites en un point (éventuellement à l'infini) par une forme écrite toute particulière que le mathématicien exercé se doit de reconnaître au premier coup d'œil.

Enfin, il s'agit aussi, au terme de l'analyse algébrique, de revenir à la situation géométrique, de traduire à l'inverse le « résultat algébrique […] dans le langage de l'énoncé proposé » comme y insiste Gabriel Lamé, l'un des mathématiciens sur les traces desquels le lecteur est invité à cheminer.

C'est assez dire, au-delà de et à travers l'intérêt historique et mathématique de cette cinquième promenade, son importance pour penser et mettre en œuvre une pédagogie qui se soucie de cohérence, de sens, et donc d'expressivité. En invitant le lecteur, comme dans les quatre promenades précédentes, à « s'y mettre », à plonger dans les calculs et les raisonnements des anciens, à y déceler l'unité qui s'y construit et la diversité qui s'y déploie, elle nous apprend ou nous rappelle que le plaisir de la promenade ne se tire pas seulement de la beauté des paysages qu'elle nous montre. Car cette beauté ne réside pas tant dans les paysages eux-mêmes qu'elle ne résulte du fait même de marcher, des points de vue qui s'y constituent pas à pas, dans la durée d'une rumination en mouvement, suée comprise, plus que d'une pause contemplative, même instruite.

« Les mathématiques ne se sont pas faites en un jour », nous rappelle le titre générique de l'ensemble de ces promenades historiques. Je pourrais ajouter, m'appuyant sur la lecture de cette cinquième livraison, que les mathématiques ne sont pas un site que l'on découvrirait au bout du chemin, mais que c'est le chemin lui-même – ou, dit autrement, moins que d'*être*, il s'agit d'apprendre à *devenir* mathématicien.

Que les auteures (et les collaborateurs) de cette cinquième promenade soient ici remerciées pour ce don qu'elles nous font d'une nouvelle occasion de nous mettre en mouvement.

Dominique BÉNARD

IREM des Pays de Loire, Centre du Mans

Avant propos

L'expression "géométrie analytique" est peu employée dans les livres scolaires ou les programmes actuels des lycées et collèges. En seconde, par exemple, on parlera plus facilement de "repérage". Cependant, chacun ou chacune, élève ou enseignant, réagit toujours à ces mots.

Avant de nous lancer dans l'écriture de cette promenade, nous voulions en savoir davantage sur ces sentiments, dont nous imaginions bien qu'ils pouvaient être enthousiastes, ou au contraire très négatifs. Ainsi, nous avons fait un bref sondage auprès de nos collègues de l'IREM, ou dans nos établissements, leur demandant d'écrire tous les mots qu'ils associaient à "géométrie analytique".

Voici ce que nous avons obtenu, de façon majoritaire, avec un essai de classement par grands domaines :

-Equations - Résolution d'équations - algèbre

-Graphique - Résolution graphique – Courbes- Coniques- Equations de courbes

-Calcul - Remplacer les capacités de raisonnement en géométrie par des compétences en calcul numérique - Tout devient nombre - Se dégager éventuellement de la figure - Lien entre calculs et géométrie - Automatisation grâce au calcul

Repère – Coordonnées - De la figure aux coordonnées, puis des coordonnées aux vecteurs - Problèmes de changement de repère - x, y, z

-Est-ce de la "vraie" géométrie ? - Moins joli - Technique longuette dans laquelle on se lance si la géométrie pure n'a pas abouti- Débouchant parfois sur de belles maths qu'on découvre plus tard

-Plus facile - Un "truc" qui permet de résoudre tous les problèmes de géométrie - Un "refuge"- Simplifie certains problèmes, en complique d'autres

-Analyse – Fonctions -Démontage d'un problème - Analyser un problème - Analyse/synthèse

-Mouvement – Transformations

-Vecteurs – Matrices - Systèmes linéaires

-Leibniz – Descartes - Synonyme de géométrie cartésienne

Nous retiendrons que, pour beaucoup, séduits ou réticents sur cette sorte de géométrie, l'utilisation grandissante de l'informatique pour le traitement des problèmes implique plus ou moins le passage au numérique, donc rendrait très actuelle la géométrie analytique.

Il semblait désormais important de démêler les différents points de vue apparus dans le tableau précédent, nous demandant finalement s'il y avait une géométrie analytique ou des géométries analytiques.

Cette géométrie est bien sûr liée à l'algèbre. Dans les premiers manuels du secondaire où elle apparaît, au XIX° siècle, puis au début du XX° siècle, c'est en général dans les livres d'algèbre, au même titre d'ailleurs que la notion de fonction. Ce qui fait le point commun de tout cela, c'est le mot "équation", c'est la manipulation "des x et des y", c'est aussi la notion de "courbe".

De fait, Auguste Comte, dans son *Traité élémentaire de géométrie analytique* de 1843, se propose de "*rendre spécialement familière cette intime harmonie mutuelle entre les courbes et les équations, que la grande conception de Descartes a définitivement organisée, et qui caractérise le véritable esprit et la principale difficulté de la géométrie analytique*".

Cependant Descartes, concevant la parfaite équivalence entre géométrie et algèbre, ne faisait pas de la géométrie analytique au sens où nous l'entendons couramment maintenant… Ce n'était pas de la géométrie des coordonnées.

Nous nous sommes donc proposés, dans cette promenade, de suivre quelques développements de cette géométrie, sous ses diverses facettes, selon les problèmes à résoudre, et le contexte mathématique et culturel, pour mieux percer tout ce qui en fait la puissance, la séduction, mais aussi les faiblesses aux yeux de certains.

Application de l'algèbre à la géométrie ? Mise en équation et réduction au calcul ? Géométrie des coordonnées ? Utilisation de variables x, y ... ? Proche de l'analyse fonctionnelle ? Géométrie sans figure ? Qu'y a-t-il d'analytique dans la géométrie analytique ?

Ce sont quelques questions auxquelles nous n'apporterons pas toujours de réponse, mais que nous espérons au moins éclairer.

Comme souvent dans l'histoire des mathématiques, les moteurs de la recherche ou de l'invention sont quelques grands problèmes parfois très anciens. C'est ici le cas. Il nous a semblé par exemple qu'une grande question sous-jacente au développement de cette nouvelle géométrie était la question des coniques. Nous y consacrons donc un chapitre. Nous n'oublions pas que dans le secondaire actuel, ces courbes sont peu traitées, voire pas du tout. Nous avons donc choisi pour nos premiers chapitres de traiter de problèmes plus accessibles, pour que les enjeux de cette nouvelle géométrie puissent être mieux saisis.

Nous nous contenterons par ailleurs de la géométrie plane, et nous n'évoquerons que les coordonnées dites "cartésiennes", sans nous attacher à d'autres sortes de coordonnées, comme les polaires ou les barycentriques.

Au final, on pourra s'interroger sur la validité de l'affirmation de Viète, reprise par Descartes : ***aucun problème qui ne soit résolu.***

EXERCICES

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A L'USAGE DES ÉLÈVES

DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PAR

P. AUBERT & G. PAPELIER
Professeur au lycée Henri IV. Professeur au lycée d'Orléans.

TOME PREMIER

TROISIÈME ÉDITION

PARIS
LIBRAIRIE VUIBERT
BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

1924

Introduction - Un théorème, trois démonstrations

La géométrie analytique peut prendre des formes diverses et variées. Mais très souvent, actuellement, on la considère comme « le bâton des aveugles » ainsi que l'écrivait Jean-Victor Poncelet au début du XIX° siècle. C'est, pour beaucoup, un pis-aller lorsque la démonstration de géométrie pure nous échappe. Ce peut être aussi de la belle géométrie, inventive et puissante.

Un théorème, trois démonstrations

Pour prendre goût à l'aventure, nous vous proposons un extrait d'un manuel d'exercices de géométrie analytique de 1924[1], dont les auteurs sont un peu considérés comme des références : P. Aubert et G. Papelier. Ils furent en effet des écrivains prolifiques d'exercices pour les classes de mathématiques spéciales. Une petite recherche nous a permis de constater que leurs recueils d'exercices, aussi bien d'algèbre-analyse-trigonométrie, d'algèbre élémentaire, de géométrie analytique, de mécanique, ou de calcul numérique, ont été édités et réédités de 1900 à 1959, au moins. Ceux qui ont poursuivi leurs études de mathématiques dans les années 1960 n'ont sans doute pu y échapper. A ce titre le manuel que nous avons choisi est représentatif d'une époque.

Il s'agit de démontrer le théorème suivant : *Dans un triangle les trois médianes sont concourantes.*

Vous avez peut-être vous-même quelques idées de démonstration.

Les auteurs nous en proposent trois.

Pour mieux apprécier la diversité et les enjeux de ces trois démonstrations, examinons dans un premier temps les différents moyens de démontrer l'alignement de trois points, qui font l'objet du premier chapitre.

Le premier outil, classique dirions-nous, est **la proportionnalité**.

[1] *Exercices de géométrie analytique à l'usage des élèves de mathématiques spéciales* par P. Aubert, professeur au lycée Henri IV et G. Papelier, professeur au lycée d'Orléans, trois tomes, troisième édition, Paris, Vuibert, 1924.

Dans un repère du plan, trois points distincts M, N P de coordonnées respectives (x' ; y'), (x'' ; y''), (x''' ; y''') sont alignés si et seulement si : $\dfrac{y'''-y'}{x'''-x'}=\dfrac{y''-y'}{x''-x'}$.

Le deuxième outil est celui des **déterminants**, qui est une autre façon d'écrire la même chose, mais qui est qualifié de "calcul plus élégant".

Trois points α, β, γ de coordonnées respectives $(x_1 ; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$, $(x_3 ; y_3)$ sont alignés si et seulement si : $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$

Un troisième outil, bien sûr, est l'utilisation des **équations de droites**, qui est là encore une autre façon de traduire la proportionnalité, puisque pour établir l'équation d'une droite passant par deux points donnés, l'un ou l'autre des outils précédents peut être utilisé.

Première démonstration :

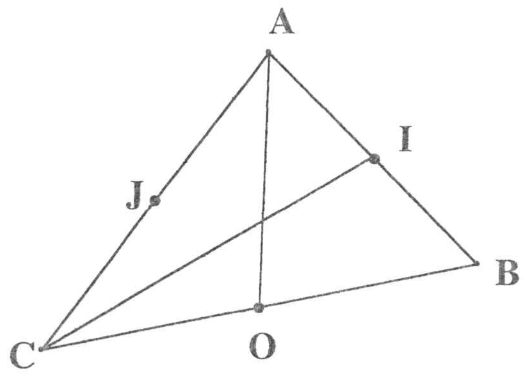
> Soit le triangle ABC ; prenons pour axes BC et la médiane AO ; désignons par a l'ordonnée du point A et par b et – b les abscisses des points B et D. La médiane qui joint le point C(– b ; 0) au milieu $(\frac{b}{2} ; \frac{a}{2})$ du côté AB a pour équation
>
> (1) $\dfrac{y}{x+b}=\dfrac{a}{3b}$.
>
> Elle rencontre OA au point G, dont l'ordonnée est $\dfrac{a}{3}$.
>
> L'équation de la médiane issue du point B se déduit de l'équation (1) en changeant b en – b ; par suite cette médiane passe aussi par le point G de la médiane OA, tel que l'on ait
>
> $$\overline{OG}=\frac{1}{3}\overline{OA}$$
>
> p. 17-18

Pour mieux comprendre

Cette démonstration semble peut-être un peu rude. Voici quelques pistes.

Nous commencerions volontiers par une figure. Le livre de Aubert et Papelier en comporte très peu. C'est un des reproches que certains feront à la géométrie analytique : de la géométrie sans figures. Nous reviendrons sur cet aspect lors d'une de nos prochaines étapes.

Quoi qu'il en soit, nous vous proposons la figure suivante :



Nous appelons I le milieu de AB , et J le milieu de AC.

Voua avez sûrement noté que les longueurs, les droites et ce que nous appelons les segments sont notés de la même façon.

Le repère choisi est lié à la figure. Que propose t-on de prendre comme origine du repère ? Comme axe des abscisses ? Comme axe des ordonnées ? Quels avantages présente ce choix ?

Dans le repère choisi, les coordonnées des différents points de la figure sont :

$$A(0\,;a) \qquad B(b\,;0) \qquad C(-b\,;0) \text{ et } I(\frac{b}{2}\,;\,\frac{a}{2})$$

La stratégie choisie pour déterminer une équation de CI, bien qu'elle soit présentée de façon très inhabituelle pour vous est en fait la suivante : M étant un point de coordonnées $(x\,;y)$, il est possible de traduire à l'aide des coordonnées que M, C et I sont alignés.

Comment trouve-t-on les coordonnées de G ?

Trouvez l'équation de la deuxième médiane BJ.

Vérifiez alors ce qui est affirmé.

L'écriture $\overline{OG}$ est ce que nous nommons actuellement mesure algébrique de OG, mais qui est un peu abandonnée ces dernières années. Nous avons tendance à remplacer cette écriture par une écriture vectorielle. En 1924, la notion de vecteurs avait très peu pénétré l'enseignement des mathématiques.

Vous avez probablement remarqué que les auteurs ne forment pas l'équation de la droite BJ. Une simple considération de symétrie leur suffit.

Deuxième démonstration :

Soient (x_1 , y_1), (x_2 , y_2), (x_3 , y_3) les coordonnées des sommets A, B, C par rapport à deux axes quelconques.
L'équation de la médiane issue du point A est :

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{\frac{y_2+y_3}{2}-y_1}{\frac{x_2+x_3}{2}-x_1}$$

ou

$$x(y_2+y_3-2y_1)-y(x_2+x_3-2x_1)-x_1(y_2+y_3)+y_1(x_2+x_3)=0.$$

On en déduit les équations des autres médianes par permutation circulaire d'indices ; on obtient ainsi :

$$x(y_3+y_1-2y_2)-y(x_3+x_1-2x_2)-x_2(y_3+y_1)+y_2(x_3+x_1)=0$$

$$x(y_1+y_2-2y_3)-y(x_1+x_2-2x_3)-x_3(y_1+y_2)+y_3(x_1+x_2)=0$$

En ajoutant ces trois équations membre à membre, on obtient une identité ; on conclut que les trois droites sont concourantes.

p. 18

Pour mieux comprendre

Aucune figure, une fois de plus n'est proposée.

Cette fois le repère est quelconque. Ceci induit bien sûr un style de démonstration assez différent. Les coordonnées des points A, B et C sont données de façon générale. A partir de là, pouvez-vous écrire les coordonnées des points O, I, J ?

En utilisant le procédé de la première démonstration, vous devez pouvoir écrire une équation de AO similaire à celle proposée. Puis après calcul, vous obtiendrez la deuxième forme.

Cette deuxième forme a pour avantage de permettre "la permutation circulaire des indices". Comprenez-vous ce que cela signifie ? Auriez-vous de vous-même pensé à ce procédé de calcul ? Elle présente évidemment le grand avantage d'alléger le discours. C'est cela aussi une géométrie analytique bien comprise.

Quelle identité obtenez-vous en ajoutant membre à membre les trois égalités ?

Essayons de comprendre ce passage :

Par facilité, notons : $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ la première équation, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ la deuxième et $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ la troisième équation.

L'identité obtenue permet d'affirmer que quels que soient x et y on a :

$a_3x + b_3y + c_3 = -(a_1x + b_1y + c_1) - (a_2x + b_2y + c_2)$

Si G est le point d'intersection des deux premières médianes, cela démontre-t-il qu'il est aussi sur la troisième ?

Troisième démonstration :

Soient

(BC) $\quad P_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0$

(CA) $\quad P_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0$

(AB) $\quad P_3 \equiv A_3x + B_3y + C_3 = 0$

les équations des côtés BC, CA, AB.

Nous considérons la médiane AM comme la conjuguée harmonique par rapport aux côtés AB et AC de la droite AN menée par A parallèlement à BC. L'équation de cette droite est de la forme $P_2 + \lambda P_3 = 0$, λ étant déterminé en écrivant que les droites $P_2 + \lambda P_3 = 0$ et $P_1 = 0$ sont parallèles. Ceci donne

$$\frac{A_2 + \lambda A_3}{A_1} = \frac{B_2 + \lambda B_3}{B_1} \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{A_1B_2 - B_1A_2}{A_3B_1 - B_3A_1}$$

L'équation de AN est alors

$$P_2 + \frac{A_1B_2 - B_1A_2}{A_3B_1 - B_3A_1} P_3 = 0$$

et celle de la médiane AM

$$P_2 - \frac{A_1B_2 - B_1A_2}{A_3B_1 - B_3A_1} P_3 = 0$$

ou $$(A_3B_1 - B_3A_1)P_2 - (A_1B_2 - B_1A_2)P_3 = 0$$

On en déduit les autres médianes par permutation circulaire d'indices ; on obtient

$$(A_1B_2 - B_1A_2)P_3 - (A_2B_3 - B_2A_3)P_1 = 0$$

$$(A_2B_3 - B_2A_3)P_1 - (A_3B_1 - B_3A_1)P_2 = 0$$

En ajoutant membre à membre on a une identité, donc les trois médianes sont concourantes

p. 18-19

De nombreuses notions, sans compter les notations, sont sans aucun doute obscures ou totalement inconnues.

Pour comprendre ce texte, il faut d'abord remarquer que, vers la fin du XIX° siècle, un certain nombre de mathématiciens, que nous étudierons dans les prochains chapitres, ont suggéré, pour alléger les calculs, de noter tout simplement par exemple P = 0 l'équation d'une droite (ou d'une autre courbe), en remplaçant éventuellement P par une formule explicite si cela devient nécessaire, mais en s'en passant dans tous les autres cas.

Ainsi, ici, l'équation de BC s'écrit : $P_1 = 0$, celle de CA : $P_2 = 0$ et celle de AB : $P_3 = 0$.

Il va s'agir en fait de s' intéresser au paramètre λ.

Pour ceux et celles qui veulent approfondir cette partie et les méthodes qui y sont en jeu, nous donnons quelques clés à la fin de cette partie.

Il faut trouver la valeur de λ pour laquelle AN est parallèle à BC.

$P_2 + \lambda P_3 = 0$ s'écrit : $(A_2 + \lambda A_3)x + (B_2 + \lambda B_3)y + C_2 + \lambda C_3 = 0$.

P1 = 0 s'écrit : $A_1x + B_1y + C_1 = 0$

Le parallélisme des deux droites va donc se traduire par :

$$\frac{A_2 + \lambda A_3}{A_1} = \frac{B_2 + \lambda B_3}{B_1} \quad \text{donc} \quad \lambda = \frac{A_1B_2 - B_1A_2}{A_3B_1 - B_3A_1}$$

Par ailleurs, avec les éléments établis plus haut, Si deux droites sont conjuguées par rapport à deux autres, (Δ) et (Δ'), d'équations $\Delta = 0$ et $\Delta' = 0$, alors, les deux droites conjuguées ont des équations de la forme : $\Delta + \lambda\Delta' = 0$ et $\Delta - \lambda\Delta' = 0$.

Donc, la droite AM comme conjuguée harmonique de la droite AN aura pour équation :

$$P_2 + \lambda' P_3 = 0 \text{ avec } \lambda' = -\lambda$$

Vous pouvez suivre alors cette troisième démonstration.

Ces trois démonstrations sont presque trois étapes de ce qui se nommera géométrie analytique vers la fin du XIX° siècle : un lent chemin vers l'abandon des figures, la concision des formules, dans le but plus ou moins avoué de se débarrasser des obstacles à un raisonnement efficace, clair et fécond.

La géométrie de Descartes, celle de Fermat, sont assez éloignées a priori de cette géométrie analytique du début du XX° siècle. Ce sont pourtant ces mêmes idées qui ont guidé ces initiateurs d'une nouvelle géométrie : clarté et fécondité, qui feront qu'il n'y aura plus aucun problème qui ne sera résolu.

Peut-être la troisième démonstration proposée par Aubert et Papelier vous donne envie d'en savoir plus, vous ouvre de nouveaux horizons. Remontons alors un peu le temps, et rejoignons celui de Viète, de Descartes, de Fermat, …

Annexe : quelques clefs pour ceux et celles qui voudraient approfondir

a) Division harmonique :

Voici ce que l'on peut trouver dans un manuel de géométrie analytique, contemporain de notre livre d'exercices[2] :

> Quatre points A, B, P, Q étant en ligne droite, on dit que deux de ces points, P et Q sont conjugués harmoniques par rapport aux deux autres, A et B, lorsqu'ils partagent le segment AB en deux rapports opposés, c'est à dire, lorsqu'ils satisfont à la condition :
>
> $$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -\frac{\overline{QA}}{\overline{QB}}$$
>
> 
>
>
> On peut intervertir soit P et Q, soit A et B, soit le groupe des points P, Q avec celui des points A et B. Et l'on dit pour ces raisons, que les quatre points A, B, P, Q forment une division harmonique dont A et B sont deux points conjugués, ainsi que P et Q.
>
> p. 63-64

Un peu plus loin, on démontre, et vous pourrez le faire facilement, que si les points A, B, P et Q ont pour abscisses respectives a, a', x et x' sur la droite AB, alors, A, B, P, Q forment une division harmonique si et seulement si :

$\frac{a-x}{a'-x} + \frac{a-x'}{a'-x'} = 0$, ce qui donne finalement : $2(aa' + xx') - (x + x')(a + a') = 0$

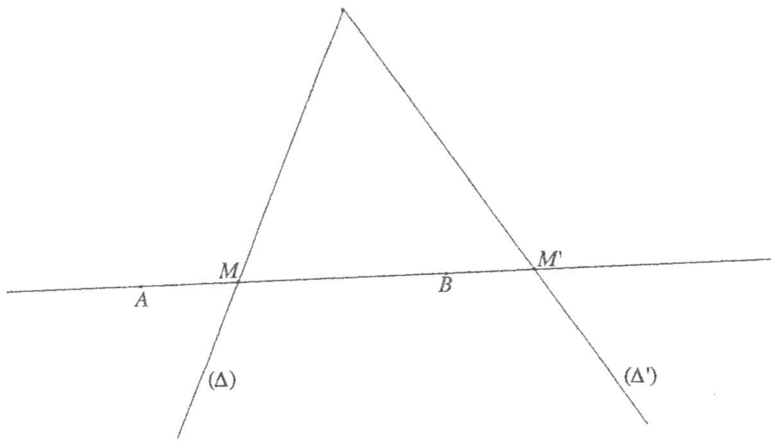
---

[2] *Cours de géométrie analytique, à l'usage des candidats à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures, aux Ecoles des Mines, à l'Ecole des Ponts et Chaussées, et des élèves de première année de mathématiques spéciales*, A. Tresse et A. Thibaut, Armand Colin, 1904.

Puis, de façon remarquable, ce qui justifie le nom : si l'origine O du repère est située en B, la dernière égalité se transforme en : $\frac{2}{a}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}$, ce qui signifie que a est la moyenne harmonique entre x et x'.

b) Points conjugués par rapport à deux droites :

Deux points A et B sont conjugués par rapport à deux droites (Δ) et (Δ') lorsque la droite AB coupe (Δ) et (Δ') en deux points M et M' conjugués harmoniques par rapport à A et B.



On peut alors démontrer que si A et B ont pour coordonnées respectives (x_0 ; y_0) et (x_1 ; y_1) et si (Δ) et (Δ') ont des équations données par :

$\Delta \equiv Ax + By + C = 0$ $\qquad\qquad$ $\Delta' \equiv A'x + B'y + C' = 0$,

alors : A et B sont conjugués harmoniques par rapport à (Δ) et (Δ') si et seulement si :

$\Delta_1\Delta'_0 + \Delta_0\Delta'_1 = 0$ avec :

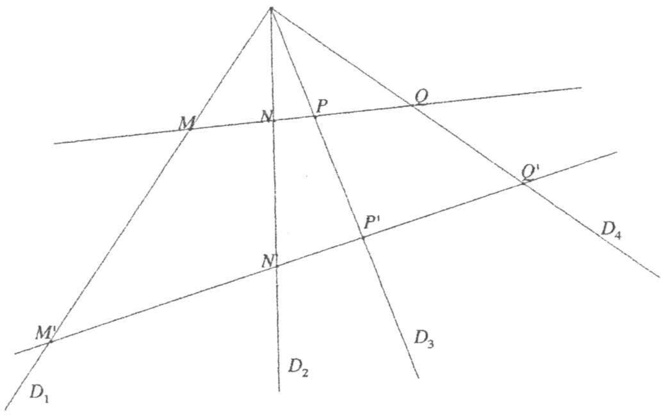
$\Delta_1 = Ax_1 + By_1 + C \qquad \Delta'_1 = A'x_1 + B'y_1 + C'$

$\Delta_0 = Ax_0 + By_0 + C \qquad \Delta'_0 = A'x_0 + B'y_0 + C'$

c) Faisceaux harmoniques de droites :

On peut démontrer que si un faisceau de quatre droites est coupé par une transversale suivant une division harmonique, alors toute transversale coupera le faisceau suivant une division harmonique.

Alors ce faisceau de quatre droites se nomme faisceau harmonique.



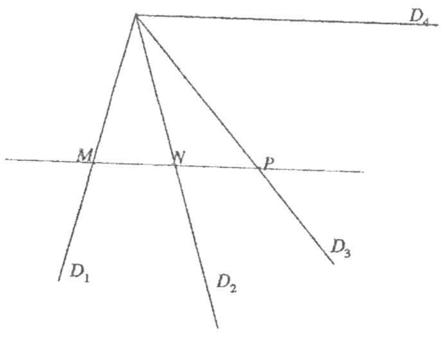
Donc si quatre droites concourantes forment un faisceau harmonique et si une sécante D quelconque à ces quatre droites détermine quatre points d'intersection M, N, P, Q, ils sont tels que :

$$\frac{\overline{NM}}{\overline{NP}} = -\frac{\overline{QN}}{\overline{QP}}$$

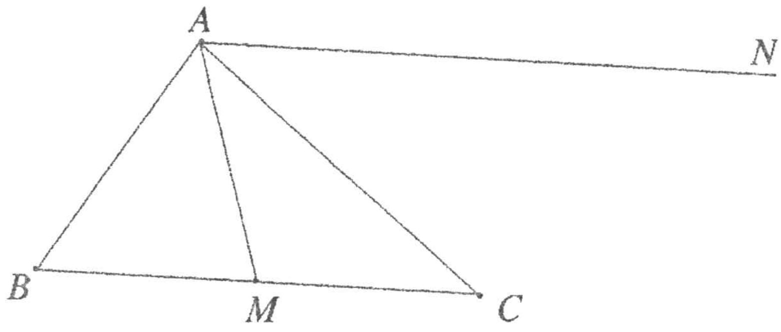
M est le conjugué de P par rapport à N et Q.

Dans ce cas, la droite D_1 est la conjuguée de la droite D_3 par rapport à D_2 et D_4.

La sécante peut être parallèle à l'une des droites du faisceau. Ainsi par exemple, le point Q n'existe plus. (On dit qu'il est renvoyé à l'infini). Par "continuité", en passant à la limite, on établit alors que $\overline{MN} = -\overline{PN}$. Et donc N est le milieu de [PM]



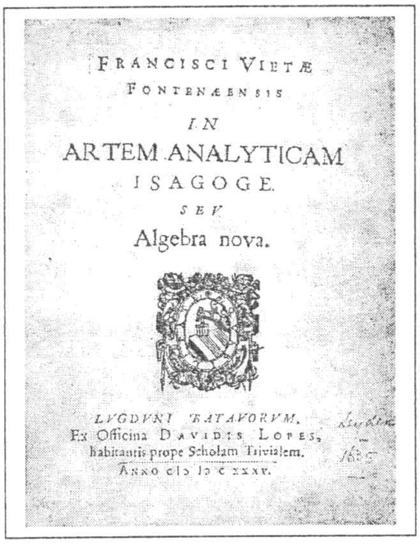
Dans le cas de la troisième démonstration, la droite AM est bien conjuguée de AN par rapport à AB et AC.



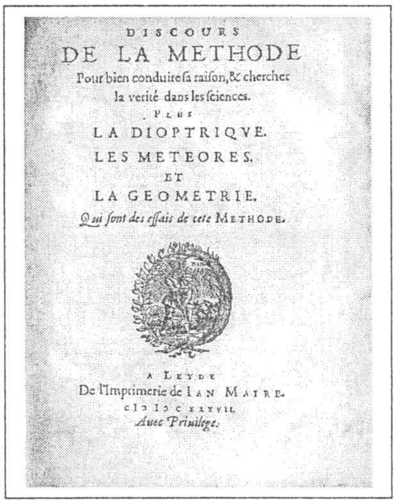
d) Equations des droites d'un faisceau, passant par un point donné :

C'est en quelque sorte une généralisation de ce qui a été utilisé dans la deuxième démonstration : Les droites AB et AC se coupent en A. L'équation d'une droite quelconque passant par A sera une combinaison linéaire des équations de AB et AC, donc de la forme $P_2 + \lambda P_3 = 0$

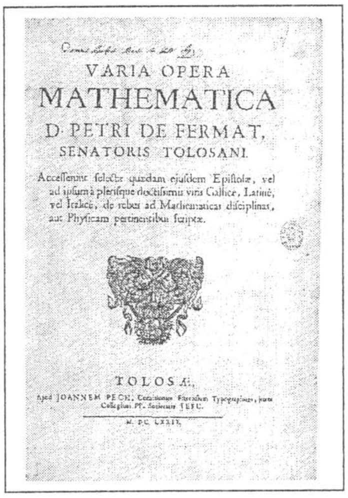
Vous pouvez le vérifier.


FRANCISCI VIETÆ
FONTENÆENSIS
IN
ARTEM ANALYTICAM
ISAGOGE.
SEV
Algebra nova.

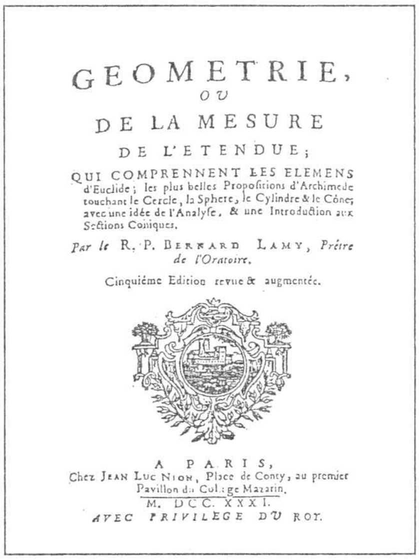
LVGDVNI BATAVORVM,
Ex Officina DAVIDIS LOPES,
habitantis prope Scholam Trivialem.
ANNO CIϽ IϽ C XXXV.


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher
la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIϽ IϽ C XXXVII.
Avec Privilege.


VARIA OPERA
MATHEMATICA
D. PETRI DE FERMAT,
SENATORIS TOLOSANI.
Accesserunt selectæ quædam ejusdem Epistolæ, vel ad ipsum à plerisque doctissimis viris Gallicè, Latinè, vel Italicè, de rebus ad Mathematicas disciplinas, aut Physicam pertinentibus scriptæ.

TOLOSÆ,
Apud JOANNEM PECH, ... juxta Collegium PP. Societatis JESU.
M. DC. LXXIX.


GEOMETRIE,
OU
DE LA MESURE
DE L'ETENDUE;
QUI COMPRENNENT LES ELEMENS d'Euclide; les plus belles Propositions d'Archimede touchant le Cercle, la Sphere, le Cylindre & le Cône; avec une idée de l'Analyse, & une Introduction aux Sections Coniques.
Par le R. P. BERNARD LAMY, Prêtre de l'Oratoire.
Cinquiéme Edition revue & augmentée.

A PARIS,
Chez JEAN LUC NION, Place de Conty, au premier Pavillon du College Mazarin.
M. DCC. XXXI.
AVEC PRIVILEGE DU ROY.

1. Les fondateurs : Viète, Fermat, Descartes.

Nullum non problema solvere

La géométrie analytique est d'abord une méthode pour résoudre des problèmes : les fondateurs veulent une « méthode d'invention » qui permette de résoudre tous les problèmes de géométrie. Cette méthode est dite analytique parce qu'elle procède par analyse. L'analyse, chez les géomètres de l'Antiquité, s'oppose à la synthèse : elle va de l'énoncé recherché à l'énoncé connu, alors que la synthèse va du connu à ce qui est recherché. À partir du IX^{e} siècle, les mathématiciens arabes inventent avec l'algèbre une nouvelle analyse, qui consiste à trouver un nombre inconnu à partir d'équations traduisant un problème et des nombres connus. Ces mathématiciens appliquent cette analyse à certains problèmes géométriques, où la grandeur à construire devient l'inconnue du problème. Les fondateurs de la géométrie analytique systématisent cette approche : tous les problèmes de géométrie doivent se résoudre de la sorte, c'est-à-dire en traduisant le problème de géométrie par une ou des équations.

Est-ce qu'un résultat obtenu par cette méthode analytique peut être considéré comme démontré ? Autrement dit, la géométrie analytique peut-elle servir de fondement à une démonstration. Cette question est délicate pour un géomètre du XVI^{e} ou du XVII^{e} siècle qui a pour seul modèle la démonstration axiomatico-déductive des géomètres de l'Antiquité. Descartes est celui qui répondra positivement : il y a, dit-il, deux façons de démontrer. La première, appelée analyse, est celle qui consiste à procéder selon la méthode, et la seconde, la synthèse, est celle qui déduit des propositions à partir d'axiomes. Cette décision cartésienne explique peut-être que l'idée de géométrie analytique reste associée au nom de Descartes.

C'est bien une autre façon de faire de la géométrie que propose Descartes. Il ne s'agit plus de déduire par la logique des propositions à partir d'autres propositions ou d'axiomes, mais de déduire par le calcul des grandeurs géométriques à partir d'autres grandeurs et d'une grandeur unité. Ces deux façons sont tellement différentes, que ne l'oublions pas, Descartes, à son grand dam, ne fut pas compris des premiers lecteurs de *La géométrie*.

François Viète

On ne retient souvent de François Viète que son idée de désigner par des lettres les grandeurs connues et inconnues dans les équations ; en fait, cet « artifice » n'est là que pour faciliter la réalisation d'un objectif ambitieux : donner une méthode générale pour résoudre tout problème.

Il met en œuvre cette méthode dans ses *« Cinq livres des zététiques »*, et il montre en particulier comment l'algèbre permet de résoudre des problèmes géométriques.

Le mot *zététique* utilisé par Viète vient du grec ζητεω, qui signifie « chercher », et désigne la méthode analytique ou un problème résolu par cette méthode : on suppose le problème résolu et on *analyse* les liens existant entre les grandeurs cherchées et celles qui sont données.

Le texte que nous vous proposons d'étudier est tiré du livre III des Zététiques (p.154-155).

ZETETIQUE III.

Estant donnée la perpendiculaire d'un triangle rectangle, et la difference de la base à l'hypotenuse : trouver la base et hypotenuse.

Ce probleme a cy devant esté expliqué, car il est le mesme, qu'Estant donnée la difference des quarrez et la difference des costez, trouver les costez : D'autant que le quarré de la perpendiculaire est la difference du quarré de l'hypotenuse, au quarré de la base. Soit donc la perpendiculaire d'un triangle donnée D, et la difference de la base à l'hypotenuse B ; il faut trouver la base et l'hypotenuse.

La somme de la perpendiculaire[1] *et hypotenuse soit A. Donc BA, sera égal à Dq, et par consequent* $\frac{\mathrm{Dq}}{\mathrm{B}}$ *égal à A.*

Mais estant donnée la somme des costez, et leur difference, les costez seront aussy donnez.

Estant donc donnée la perpendiculaire d'un triangle rectangle et la difference de la base à l'hypotenuse ; on trouvera la base et l'hypotenuse.

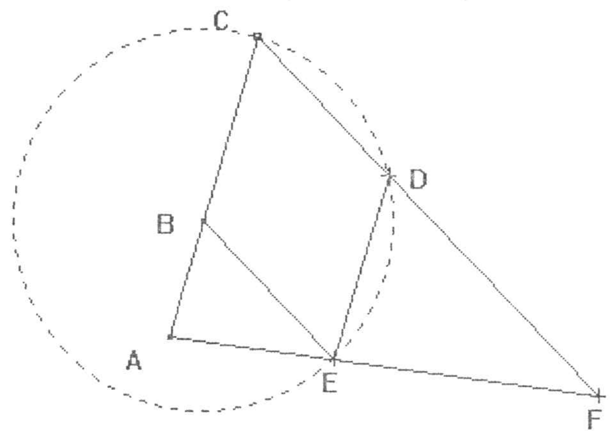
[1] Erreur vraisemblablement du traducteur de Viète : il faut lire « base » à la place de « perpendiculaire ».

THEOREME

La perpendiculaire d'un triangle rectangle est moyenne proportionnelle, entre la difference de la base à l'hypotenuse, et leur somme.

Soit D 5, B 1, les proportionnelles sont 1, 5, 25, et partant l'hypotenuse sera 13, la base 12, la perpendiculaire demeurant 5. Pour ceste raison, le zetetique suivant est mesme que celui cy.

EN LIGNES.



La difference de la base et hypotenuse soit AB, la perpendiculaire BC, il faut trouver la somme des costez.

Du point B, comme centre et de l'intervalle BC, soit descrit l'arc de cercle CDE, dans lequel soient appliquez successivement CD, DE, chacune égale à BC, puis tirant AE, et prolongeant CD jusques à ce qu'elles se rencontrent en F, la ligne DF, sera la somme de la base et hypotenuse, lesquels seront dicernez par le premier Zetetique du premier livre.

La demonstration est que BC, CD, DE, EB, estant égales, les lignes BC, DE, seront paralelles. Pareille BE, CD, et par consequant les triangles BAE, DEF semblables ; partant comme AB sera à DE, ainsi EB , à DF, mais DE, et EB, sont égalles chacune à BC, donc AB, sera à BC, comme BC, à DF, qui sera la somme de l'hypotenuse et base, ce qu'il falloit montrer.

On pourroit encore trouver les costez par l'exegetique du 3. Zetetique du 2. livre precedent auquel le lecteur est renvoyé.

Le vocabulaire, les notations utilisés par Viète ne sont pas tout à fait ceux en usage actuellement, c'est pourquoi nous vous proposons une « aide à la lecture et à la compréhension » de ce texte.

lignes 1-2 : la « perpendiculaire » et la « base » d'un triangle rectangle sont les côtés de l'angle droit. Dessinez un triangle rectangle de « manière habituelle » et vous comprendrez tout de suite le choix de ce vocabulaire.

lignes 3-4 : Traduire en langage algébrique actuel le problème *« Estant donnée la difference...les costez »* (on appellera x et y les « costez »).

lignes 4-5 : ... où l'on retrouve un théorème bien connu...

lignes 5-6 : Viéte indique quelles sont les hypothèses et pose le problème.

ligne 7 : Dq signifie « D au carré ».

ligne 9 : On se retrouve dans une situation classique : trouver deux nombres dont on connaît la somme et la différence.

lignes 10-11 : Conclusion : le problème a été résolu et, au passage, on a établi une propriété du triangle rectangle que Viète énonce sous forme de théorème (lignes 12-13).

ligne 12 : Dire que x est la moyenne proportionnelle des nombres a et b signifie que l'on a l'égalité : $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$, ou encore $x^2 = ab$.

Dans quelle ligne le théorème énoncé par Viète apparaît-il ?

lignes 14-15 : Viète donne une application numérique du problème qu'il vient de traiter : il donne $D = 5$, $B = 1$. Il cherche alors A tel que $\frac{B}{D}=\frac{D}{A}$ et trouve $A = 25$. Vous pouvez maintenant terminer vous-même la résolution.

« EN LIGNES » : Viète va maintenant effectuer une construction géométrique des grandeurs cherchées.

lignes 16-17 : Il donne les hypothèses et pose le problème.

ligne 20 : la « ligne » DF désigne à la fois le segment [DF] et la longueur DF. Viète affirme que DF représente la somme de la base et de l'hypoténuse.

lignes 22 à 25 : Viète démontre son affirmation.

« comme AB sera à DE ainsi EB à DF » signifie $\frac{AB}{DE}=\frac{EB}{DF}$.

lignes 26-27 : Viète ne termine pas la résolution du problème : il renvoie le lecteur à un problème précédent où il explique comment construire deux segments connaissant leur somme et leur différence.

Sauriez-vous construire, en utilisant uniquement la règle et le compas, deux segments connaissant leur différence AB et leur somme DF ?

Pierre de Fermat

C'est dans un court essai, *Ad locos planos et solidos isagoge ,* que Fermat présente les principes fondamentaux de la géométrie analytique. Ce traité ne fut pas publié de son vivant ; par suite, dans l'esprit du plus grand nombre, la géométrie analytique est considérée comme l'invention de Descartes seul. Il semble cependant que Fermat ait découvert pratiquement la même méthode que Descartes bien avant la publication de *La Géométrie* et que son travail ait circulé sous forme de manuscrit jusqu'à la publication en 1679 de ses *Varia opera mathematica,* si l'on en croit Carl Boyer dans son *Histoire des mathématiques.* Ce dernier le regrette car l'exposé de Fermat lui semble plus systématique et pédagogique que celui de Descartes. Il est certain que sa « géométrie analytique » était d'une certaine façon plus proche de nos coordonnées usuelles, avec la considération « d'axes » rectangulaires.

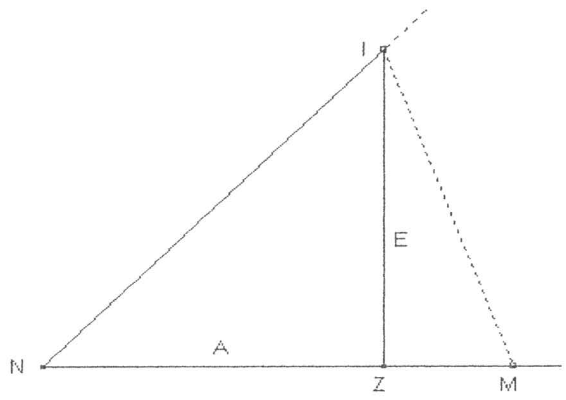
Contrairement à Descartes qui utilise un autre symbolisme algébrique, Fermat conserve la notation de Viète et l'applique à un domaine nouveau, l'étude des lieux géométriques. Il énonce ce qu'on peut considérer comme le principe fondamental de la géométrie analytique : *« Dès qu'une équation contient deux quantités inconnues, il y a un lieu correspondant, et le point extrême de l'une de ces quantités décrit une ligne droite ou une ligne courbe ».*

Fermat étudie d'abord l'équation linéaire et démontre que toutes les équations du premier degré représentent des lignes droites.

Voici un court extrait de cette étude (p. 86) :

Il est commode, pour établir les équations, de prendre les deux quantités inconnues sous un angle donné, que d'ordinaire nous supposerons droit, et de se donner la position et une extrémité de l'une d'elles ; pourvu qu'aucune des deux quantités inconnues ne dépasse le carré, le lieu sera plan ou solide, ainsi qu'on le verra clairement ci-après.

Soit NZM une droite donnée de position, dont on donne le point N. Qu'on égale NZ à la quantité inconnue A, et la droite ZI (menée sous l'angle donné NZI) à l'autre quantité inconnue E.



Soit D in A aequatur B in E ; le point I sera une droite donnée de position.

En effet, on aura $\frac{B}{D}=\frac{A}{E}$. Donc le rapport $\frac{A}{E}$ est donné, ainsi que l'angle en Z. Donc le triangle NIZ est donné d'espèce, donc l'angle INZ. Mais le point N est donné, ainsi que la position de la droite NZ. Donc NI sera donnée de position. La synthèse est facile.

D in A aequantur B in E siginifie : $D \times A = B \times E$. On reconnaît ici les notations de Viète : les consonnes D et B désignent des quantités connues, les voyelles A et E désignent les quantités inconnues.

Nous avons dit plus haut que la façon de procéder de Fermat était plus proche de nos coordonnées, cependant il n'apparaît toujours pas de repère au sens actuel : la droite NM pourrait être assimilée à l'axe des abscisses, l'origine étant N, mais il n'y a pas réellement d'axe des ordonnées, seulement une direction donnée par la droite ZI.

Fermat part d'une équation (ici : Dx = By avec les notations actuelles) et dégage les propriétés de la courbe la représentant, au contraire de Descartes dont la démarche était plutôt de partir d'un problème de lieu pour en trouver l'équation.
Dans la suite de son traité, Fermat considère différents types d'équations où apparaissent le produit des inconnues, leurs carrés, et donne leur caractérisation géométrique : hyperbole, parabole, ellipse.

René Descartes

Dans la Règle III des *Règles pour la direction de l'esprit*, Descartes écrit p. 12 :

> Nous ne deviendrons jamais mathématiciens, par exemple, bien que notre mémoire possède toutes les démonstrations faites par d'autres, si notre esprit n'est pas capable de résoudre toutes sortes de problèmes.

Or, par rapport à la volonté de résoudre des problèmes, les démonstrations des mathématiques anciennes sont insatisfaisantes. Dans la Règle IV des *Règles pour la direction de l'esprit,* Descartes exprime ainsi son insatisfaction à la lecture des écrits des Anciens p. 23 :

> Certes, j'y lisais sur les nombres une foule de développements dont le calcul me faisait constater la vérité ; quant aux figures, il y avait beaucoup de choses qu'ils me mettaient en quelque sorte sous les yeux mêmes et qui étaient la suite de conséquences rigoureuses. Mais pourquoi il en était ainsi et comment on parvenait à le trouver, ils ne me paraissaient pas suffisamment le montrer à l'intelligence elle-même.

Les écrits n'indiquent pas pourquoi l'auteur se propose de démontrer tel résultat, ni comment il parvient à le démontrer. La forme logique permet de constater la vérité des résultats, d'en être convaincu, mais elle ne permet pas de résoudre de nouveaux problèmes. L'intelligence n'est pas satisfaite car les processus qui ont conduit aux énoncés sont cachés.

Dans les *Règles pour la direction de l'esprit*, Descartes explique que sa méthode lui est venue de l'habitude, prise très jeune, d'essayer de résoudre les problèmes par lui-même plutôt que d'en lire les solutions. La résolution de problèmes mathématiques a sûrement joué un rôle initiatique pour la constitution de la méthode. Ainsi, le jeune Descartes découvre que le problème de la trisection de l'angle se traduit par une relation entre droites (par le terme de droite, on désigne au 17ème siècle une droite finie, c'est-à-dire ce qu'on appelle aujourd'hui un segment), à savoir que deux droites sont moyennes proportionnelles de deux autres. Il l'explique dans *La Géométrie* de 1637. Supposons l'angle NOP divisé en trois angles égaux NOQ, QOT et TOP, et menons QS parallèle à TO (fig.1).

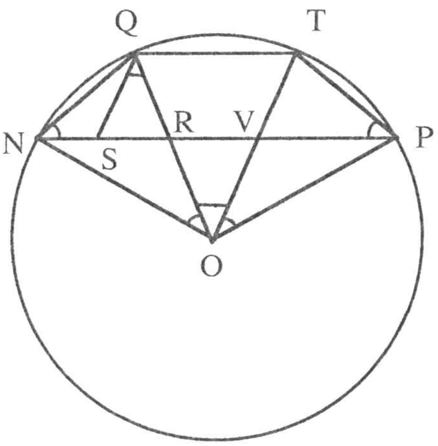


fig. 1

Alors un raisonnement géométrique simple permet de démontrer que : $\frac{NO}{NQ} = \frac{NQ}{QR} = \frac{QR}{RS}$

En effet, l'angle QNP est égal à l'angle TPN, car ces angles interceptent des arcs égaux. Nous en déduisons que les angles RVO et VRO sont égaux (avec D pour angle droit):

$$RVO = TVP = 4D - (TPN + OTP) = 4D - (QNP + NQO) = QRN = VRO.$$

Donc, le triangle VRO est isocèle et semblable au triangle QOT, et les angles suivants sont encore égaux : QRS = VRO, car ces angles sont opposés au sommet ; QSR = RVO, car QS est parallèle avec TV. On déduit de ces deux dernières égalités que le triangle QRS est semblable au triangle NOQ, lui-même égal au triangle QOT. Aussi, l'égalité des angles QRN et NQR implique que le triangle QNR est isocèle et semblable au triangle NOQ. Par conséquent :

$$\frac{QR}{RS} = \frac{NO}{NQ} \quad \text{et} \quad \frac{NO}{NQ} = \frac{NQ}{QR},$$

donc

$$\frac{NO}{NQ} = \frac{NQ}{QR} = \frac{QR}{RS}.$$

Dans ce raisonnement, nous voyons comment un problème concernant une figure composée est traduit en décomposant cette figure à partir de choses simples, à savoir des droites, et à l'aide de relations simples.

Au début de *La géométrie*, essai qui suit son *Discours de la méthode* de 1637, Descartes explique que tous les problèmes, et donc toutes les figures géométriques, se ramènent à la considération de droites (finies) en écrivant P. 333 :

> Tous les Problèmes de Géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes, pour les construire.

Il propose ainsi une homogénéisation dimensionnelle de la géométrie : toutes les grandeurs, y compris les aires et les surfaces, se ramènent à des longueurs de droite. Puis il explique *comment le calcul d'Arithmétique se rapporte aux opérations de Géométrie*, en expliquant p. 333 :

> Et comme toute l'Arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Division, et l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce de division : ainsi n'a-t-on autre chose à faire en Géométrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres, ou en ôter ; ou bien en ayant une, que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième, qui soit à l'une des deux, comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la Multiplication [...]. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'Arithmétique en la Géométrie, afin de me rendre plus intelligible.

L'addition et la soustraction de deux droites s'obtiennent facilement comme des droites par la simple opération géométrique de juxtaposition. Mais pour que les opérations de multiplication, de division ou d'extraction de racines deviennent des opérations internes, c'est-à-dire qui opèrent sur des droites pour produire encore des droites, il faut introduire une droite unité.

Ainsi, par exemple, pour multiplier deux droites BD et BC, il faut introduire une droite unité AB. Alors, la droite BE obtenue en menant AC et la parallèle ED à AC est le produit de la multiplication de BD par BC (fig. 2). Alors que dans la géométrie grecque le produit de deux droites est associée à un rectangle, vu comme une aire, dans la géométrie cartésienne le produit de deux droites est la grandeur d'une droite. De la sorte, le rectangle n'est plus la grandeur d'une aire mais une grandeur obtenue simplement à partir des côtés qui le délimitent.

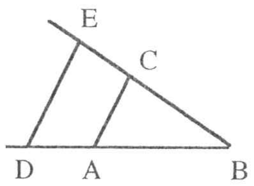


fig.2

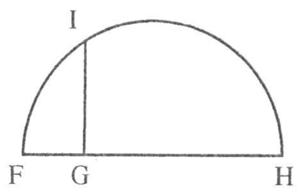


fig.3

Dans la géométrie grecque, le carré étant une aire, on peut parler du côté d'un carré. Par exemple, on dit que GI est le côté d'un carré qui a même aire que celle du rectangle de côtés FG et GH (fig.3). Mais dans la géométrie cartésienne, on peut dire qu'une droite est la racine carrée d'une autre droite. En effet, en prenant FG l'unité, alors GI est la racine carré de GH^2.

Descartes veut se rendre intelligible en introduisant les opérations de l'arithmétique dans la géométrie. Mais il sait que l'homogénéisation dimensionnelle de sa géométrie va heurter les conceptions héritées de la géométrie grecque. En effet, dans sa géométrie a^2 ou b^3 ne désignent plus des aires ou des volumes, mais de simples droites. Il écrit p. 335 :

> Où il est à remarquer que par a^2 ou b^3ou semblables, je ne conçois ordinairement que des lignes toutes simples, encore que pour me servir des noms usités en l'Algèbre, je les nomme des quarrés, des cubes, etc.

Le *etc.* pouvait laisser rêveur un lecteur versé dans la géométrie, car les puissances supérieures à trois n'ont plus aucune signification géométrique. Ainsi, Descartes se voit obligé de préciser qu'une écriture du type

$$\sqrt{C.\ aabb - b}$$

est tout à fait possible dans la nouvelle géométrie. En effet, dans la géométrie ordinaire, elle signifierait qu'il faut prendre le côté d'un cube qui serait lui-même somme d'un corps de dimension quatre et d'une droite. Il explique qu'il suffit de diviser une fois aabb par l'unité et de multiplier deux fois b par l'unité pour interpréter l'expression selon la géométrie ordinaire, c'est-à-dire selon la dimensionnalité habituelle.

Examinons, comment l'arithmétisation de la géométrie transforme le problème de la trisection de l'angle. En posant NO l'unité (fig.1), la relation

$$\frac{NO}{NQ} = \frac{NQ}{QR} = \frac{QR}{RS}$$

devient

$$QR = NQ^2 \text{ et } RS = NQ^3;$$

or

$$NP = 3\ NQ - RS,$$

donc

$$NP = 3\ NQ - NQ^3.$$

Comme l'écrit Descartes dans la première phrase de *La géométrie*, le problème a été *facilement réduit à tels termes qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de*

[2] Vous pouvez établir en effet, à l'aide de triangles semblables, que $GI^2 = GF \times GH$

quelques droites, pour les construire. En effet, ici, NP est connu et la droite NQ qu'il s'agit de déterminer s'exprime à l'aide de ce connu.

Descartes écrit à la troisième page de son ouvrage p. 335 :

> Ainsi voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes, qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté, selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusqu'à ce qu'on ait trouvé un moyen d'exprimer une même quantité en deux façons ce qui se nomme une équation.

Pour résoudre un problème, il faut décomposer la figure en droites connues et droites inconnues. Puis il faut écrire toutes les relations qui relient ces choses simples. Remarquons qu'il faut donner des noms à *toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire*, et donc introduire éventuellement de nouvelles droites à la figure initiale du problème.

Cette méthode est semblable à celle de l'algèbre, où l'inconnue d'un problème est obtenue en traduisant les données du problème. L'algèbre qui sert à résoudre des problèmes numériques va permettre de résoudre des problèmes géométriques. En effet, il faut établir, par décomposition, des relations entre des droites, puis obtenir, par recomposition l'équation qui relie droites inconnues et droites connues. Maintenant, le calcul littéral va donner à voir, en un coup d'œil, la succession des opérations qui ont permis de passer du problème aux relations entre droites connues et droites inconnues. La méthode va donc permettre de traduire les relations entre droites connues et droites inconnues sous forme d'équations.

Ainsi, dans *La géométrie*, le problème de la trisection de l'angle est réduit à une équation de degré trois. Posons NO = 1, NP = q connu, et NQ = z l'inconnue du problème, alors la relation

$$\frac{NO}{NQ} = \frac{NQ}{QR} = \frac{QR}{RS}$$

donne

$$QR = z^2 \text{ et } RS = z^3.$$

Nous avons de plus que :

$$NP = NS + SV + VP = NR + SV + VP - RS = 3\,NQ - RS,$$

d'où l'équation :

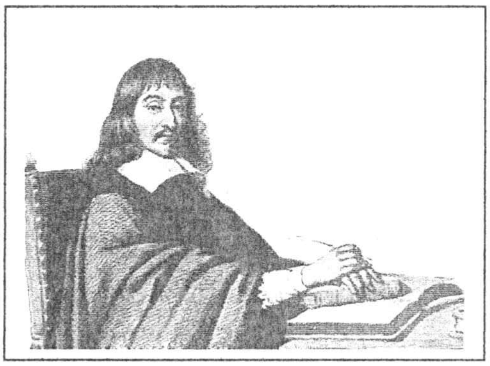
$$3z - z^3 = q \text{ avec } q \leq 2.$$

Cette équation est résolue dans *La géométrie* par intersection d'une conique d'équation

$$y = z^2 - \frac{3}{2}$$

et d'un cercle d'équation

$$\left(z + \frac{q}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{q^2}{4} + 4.$$



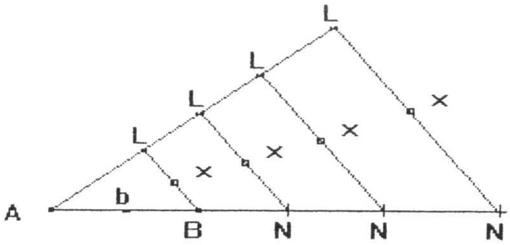
Bernard Lamy

L'œuvre de Descartes n'étant pas accessible aux profanes à l'écart du mouvement scientifique, le Révérend Père Bernard Lamy écrit un ouvrage de vulgarisation, les *« Elémens de Géométrie ou de la mesure de l'étendue »*, dans lequel il développe l'analyse mathématique de Descartes. Dans la préface de ce traité, Lamy précise ses intentions : *« mon principal dessein est de contribuer à rendre l'esprit exact et pénétrant, à quoi la Méthode, que les Géomètres appellent Analyse, est particulièrement utile ; je tâche dans le sixième Livre de donner une idée de cette Méthode, appliquant à la Géométrie ce que j'en ai dit ailleurs par rapport à la grandeur en général. »*
Cet ouvrage a été très apprécié par les contemporains du père Lamy à en juger par les rééditions successives entre 1685 et 1758.
Le texte qui suit est tiré du Livre VI des *Elemens de Géométrie* ($5^{ème}$ édition 1731).

> [...] Une construction ou effection Geometrique est donc un lieu, si ce n'est pas seulement un point qu'on propose de trouver, mais une suite de plusieurs points, qui comparez avec un certain point & une certaine ligne droite, ayent entr'eux les mêmes rapports. Et alors l'équation, qui exprime ces rapports, s'appelle un Lieu ; & le Problème qu'on entreprend de résoudre, est aussi un Lieu.
> [...] Les Problèmes, qui sont indéterminez, sont des Lieux ; car ils peuvent avoir plusieurs différentes solutions. Voyons en des exemples ; & comme toutes les résolutions s'expriment par une seule Equation, commençons par un lieu qui soit une ligne. La ligne LL en sera un, si l'on peut mener de tous les points les lignes LN, LN parallèles, qui rencontrent une ligne droite AN ; & ayant pris sur la ligne AN un point A à volonté, chaque ligne LN a un même rapport à la partie AN, qu'elle fait par sa rencontre. Par exemple, si la ligne LL est droite, & qu'elle rencontre la ligne droite AN en A, il est évident que chaque ligne droite LN a un même rapport à chaque partie AN ; ce qui se peut exprimer par cette équation $y = \frac{bx}{a}$. Si je suppose que le rapport proposé est comme de a à b, & que les lignes indéterminées soient LN = x , & AN = y : car puisque a.b : : x.y[1] ; donc le produit de b par x, qui est bx divisé par a, sera la valeur de y ; ainsi $y = \frac{bx}{a}$. Cette équation marque que ce lieu est une ligne ; car il n'y a qu'elle qui a cette propriété, que toutes les lignes qu'on tirera de AL sur AN, seront toutes à AN comme a est à b ; ainsi vous voyez que le Problème où il s'agit de trouver LL est un lieu ; qu'ainsi ce problème est indéterminé, étant capable de différentes résolutions ; & ce lieu ne peut être qu'une ligne droite : car il n'y a que celle dont LL occupe la place, qui ait les proprietez de la ligne droite.

---

[1] a.b : : x.y signifie « a est à b comme x est à y » , autrement dit $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$



Dans ce problème, Lamy caractérise l'objet « droite » par une équation. Il se donne une droite (AB) et une direction (LB) ; il pose AB = b et LB = a (non explicitement dit dans le texte).Il explique alors que tout point L de la droite (AL) vérifie $\frac{LN}{AN}=\frac{a}{b}$ et que, seuls les points de cette droite vérifient cette propriété. L'ensemble des points L a donc pour équation $y=\frac{bx}{a}$.

Ici il n'y a pas de repère, ou alors on peut considérer que le repère est lié à la figure.

Nous vous proposons un exercice qui vous aidera à mieux comprendre.

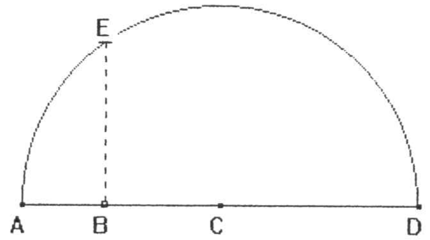
Exercice : Une droite (D) étant donnée et un point A pris « à volonté » sur (D), construire la droite ayant pour équation $y=\frac{2}{3}x$. *Cette droite est-elle unique ?*

Voyons un deuxième exemple de lieu proposé par Lamy :

Un Problème est un lieu à un cercle, & il est indéterminé, quand on propose de trouver une ligne dont le quarré soit égal à un plan[2] ; car alors il faut de nécessité supposer des grandeurs connues, comme par exemple que les côtez du plan sont a & b ; que AB = a, & BD = b. AD = a+b, & AC = CD.

Sur C comme centre je fais un cercle, & sur B la perpendiculaire BE, alors AB.BE : :BE.BD ; ainsi si BE = x, donc ab = xx ou $\frac{ab}{x}=x$. Ce Problème est indéterminé : car quelque raison que je suppose entre les parties de AD, le quarré de la ligne qui tombera perpendiculairement entre les deux points A & D, aura toujours son quarré égal au plan des parties de AD, c'est-à-dire, que ab = xx, ou $\frac{ab}{x}=x$. Ce Problème peut donc avoir une infinité de résolutions. […]

Il n'y a que le cercle, qui dans toutes ses parties ait toujours cette équation.



[2] plan : produit de deux longueurs

Dans ce problème, Lamy caractérise l'objet « cercle » par une équation. Reprenons la démarche de Lamy avec des notations qui nous sont plus habituelles :

On pose AD = m (c'est un paramètre), AB = a (c'est une variable), BD = m - a (Lamy a posé BD = b mais la somme AB + BD est constante et égale à AD), BE = x (qui va servir à caractériser les points du cercle).

On a donc $\frac{AB}{BE} = \frac{BE}{BD}$ (propriété connue du triangle rectangle), c'est-à-dire $\frac{a}{x} = \frac{x}{m-a}$, ou encore $x^2 = a(m - a)$. *« Ce Problème peut donc avoir une infinité de résolutions »,* dit Lamy ; en effet, on obtient tous les points du cercle en faisant varier a.

Ici encore on a l'équation d'une ligne en dehors de tout repère, ou alors dans un repère implicitement lié à la figure.

Exercice : Quelle serait l'équation du cercle obtenue en prenant un repère orthonormal ayant pour axe des abscisses (AD) et pour axe des ordonnées la perpendiculaire à (AD) passant par A ?

2. Euler : « De la division des lignes courbes en ordres »

Un siècle s'est écoulé depuis les travaux de Descartes et de Fermat.

Dans le chapitre I du tome 2 de l'*Introduction à l'analyse infinitésimale (1748),* Euler définit des mots nouveaux : abscisse, axe, appliquée, et introduit une idée qui n'était pas chez Descartes ni Fermat, l'idée que l'on peut représenter graphiquement une quantité variable, que celle-ci soit positive ou négative.

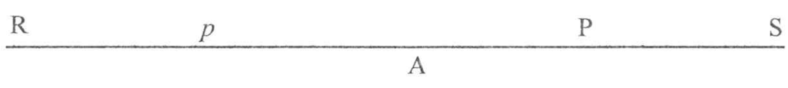
Regardons ce que dit Euler :

1. Une quantité variable étant une grandeur considérée en général, qui renferme toutes les valeurs déterminées, une droite indéfinie, telle que RS, sera très propre à représenter, en géométrie, une quantité de cette nature. En effet, puisqu'on peut prendre sur une droite indéfinie, une partie quelconque, qui ait une valeur déterminée, cette ligne présente à l'esprit la même idée de grandeur, que la quantité variable. Il faut donc, avant tout, fixer sur une ligne indéfinie RS un point A, qui sera censé l'origine des grandeurs déterminées, qu'on en séparera ; ainsi une portion déterminée AP représentera une valeur déterminée comprise dans la quantité variable.

2. Soit donc x une quantité variable, représentée par la droite infinie RS ; il est clair que toutes les valeurs déterminées de x , pourvu quelles soient réelles, peuvent être exprimées par des portions prises sur la ligne RS. Par exemple si le point P tombe sur le point A, l'intervalle AP, devenant nul, représentera la valeur $x=0$; mais plus le point P s'éloignera du point A, plus la valeur déterminée de x représentée par l'intervalle AP deviendra grande.
On appelle ces intervalles AP, ABSCISSES.
Ainsi les abscisses représentent les valeurs déterminées de la variable x.

3. Or, comme la droite indéfinie RS s'étend à l'infini de part & d'autre du point A, on pourra aussi couper de part & d'autre toutes les valeurs de x. Mais, si nous prenons les valeurs positives de x en allant sur la droite depuis le point A, les intervalles Ap situés sur la gauche représenteront les valeurs négatives de x. [...] Au reste, il est indifférent de prendre du côté qu'on voudra les valeurs positives de x ; car le côté opposé renfermera toujours les valeurs négatives.

Fig I.



Autre notion inconnue au siècle précédent : la notion de fonction. Euler explique comment représenter graphiquement une fonction :

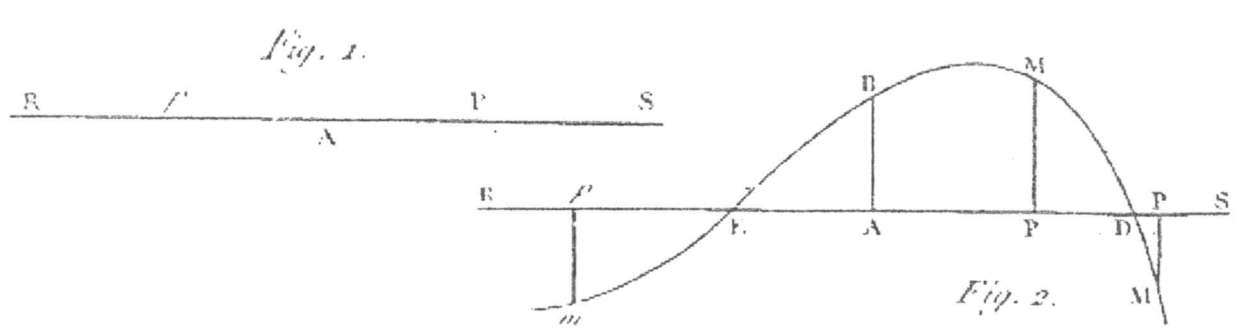
4. Puisqu'une ligne droite indéfinie est propre à représenter une quantité variable x, cherchons à présent une manière très commode de représenter géométriquement une fonction quelconque de x. Soit y cette fonction de x ; laquelle par conséquent recevra une valeur déterminée, si on substitue pour x une valeur donnée. Ayant pris une droite indéfinie RAS pour représenter les valeurs de x, il faudra, pour chaque valeur déterminée AP de x, élever sur cette ligne une perpendiculaire PM, égale à la valeur correspondante de y ; c'est-à-dire que, si la valeur de y est positive, il faudra la placer au-dessus de RS ; mais, si la valeur de y devient négative, il faudra la placer perpendiculairement au-dessous de la droite RS. Car les valeurs positives de y étant prises au-dessus de la droite RS, celles qui deviennent nulles tomberont sur la ligne même RS, & celles qui sont négatives, au-dessous.

[...]

6. [...] Les extrémités M de chacune des perpendiculaires représenteront une certaine ligne droite ou courbe, qui par conséquent se trouvera déterminée par la fonction y. Ainsi chaque fonction de x, rapportée de cette manière à la géométrie, donnera une ligne droite ou courbe, dont la nature dépendra de celle de la fonction y.

[...]

8. Quoiqu'on puisse décrire mécaniquement plusieurs lignes courbes par le mouvement continu d'un point, qui présente aux yeux la courbe dans son ensemble, nous les considérons ici principalement comme le résultat de fonctions, cette manière de les envisager étant plus analytique, plus générale & plus propre au calcul. Ainsi une fonction quelconque de x donnera une certaine ligne droite ou courbe ; d'où il suit que réciproquement on pourra rapporter aux fonctions les lignes courbes. Par conséquent, la nature d'une ligne courbe sera déterminée par une fonction de x, qui représentera toujours la longueur de la perpendiculaire MP, tandis que les intervalles AP pris sur la ligne RS, sur laquelle tombent les perpendiculaires MP abaissées de chaque point M de la courbe, sont indiqués par la variable x.



Puis Euler précise le vocabulaire qu'il va utiliser dans la suite de son traité :

> 11. Il y a dans ce que nous venons de dire sur la nature des courbes, certains noms à retenir, & dont l'usage revient très fréquemment dans leur théorie.
> D'abord la droite RS, sur laquelle se prennent les valeurs de x, s'appelle l'AXE, ou la *directrice*.
> Le point A, depuis lequel se comptent les valeurs de x, se nomme l'*origine des abscisses.*
> Les parties de l'axe AP qui représentent les valeurs déterminées de x, s'appellent ordinairement ABSCISSES.
> Et on a donné le nom d'APPLIQUEES aux perpendiculaires PM, menées des extrémités des abscisses à la courbe.
> Les appliquées sont dites dans ce cas-ci *perpendiculaires* ou *orthogonales,* parce qu'elles font avec l'axe un angle droit ; & comme les appliquées PM peuvent de même faire avec l'axe un angle oblique, on les appelle alors des *appliquées obliques.* Au reste, dans l'explication que nous ferons de la nature des courbes, nous emploierons constamment des appliquées perpendiculaires, à moins que nous n'avertissions expressément du contraire.
> [...]
> 14. Puisque y est une fonction de x, il s'ensuit ou que y sera égal à une fonction explicite de x, ou qu'on aura une équation entre x & y, qui déterminera la valeur de y en x. Dans les deux cas on dit que cette équation exprime la nature de la courbe. C'est pourquoi la nature d'une ligne courbe quelconque est donnée par une équation entre deux variables x & y, dont la première x représente les abscisses comptées sur l'axe depuis leur origine A, & la seconde les appliquées perpendiculaires à l'axe. Ces abscisses & ces appliquées considérées ensemble s'appellent les COORDONNEES *perpendiculaires.* Ainsi on dit que la nature d'une ligne courbe est exprimée par une équation entre les coordonnées perpendiculaires, lorsqu'on a entre x & y une équation, qui exprime la nature de la fonction y.

A la lecture de ce texte nous pouvons faire plusieurs remarques : tout d'abord, il n'y a pas d'axe des ordonnées ; ce n'est pas nécessaire car il n'est pas question de prendre une valeur de y indépendamment d'une valeur de x. D'autre part, dans le paragraphe 14, Euler énonce une idée très importante : on peut caractériser une ligne courbe par son équation, ce qui va lui permettre par la suite de classer les différents types de lignes courbes selon la forme de leur équation. En cela ses idées sont très différentes de celles de Descartes qui donnait une représentation algébrique d'objets géométriques.

Avant de passer à cette classification, Euler envisage longuement tous les changements de coordonnées possibles : changement de l'origine, de l'axe des abscisses par translation, par rotation (il établit des formules de changement de coordonnées), ceci afin de pouvoir dire si deux équations apparemment différentes correspondent ou non à la même courbe. Il donne un exemple :

On verra de cette manière que ces deux équations

$yy - ax = 0$ & $16u^2 - 24\,tu + 9t^2 - 55au + 10at = 0$ appartiennent à la même courbe, quoiqu'elles diffèrent beaucoup entre elles.

et montre que le passage de l'une à l'autre des équations résulte d'un changement de coordonnées.

Mais alors, comment savoir si deux équations différentes correspondent ou non à la même courbe ? C'est par la comparaison de leurs degrés ou *ordres* que l'on pourra conclure :

> 38. Ainsi, toutes les fois que deux équations proposées, l'une entre x & y & l'autre entre t & u, ne sont pas du même ordre, on en pourra conclure sur-le-champ que les courbes qu'elles expriment sont différentes. Il ne peut donc plus y avoir de doute que pour le cas où les deux équations sont du même ordre ; & alors il faudra s'aider du moyen que nous venons d'expliquer : mais, comme cette recherche est assez pénible, lorsque les équations sont d'un degré plus élevé, nous donnerons dans la suite des règles plus expéditives, qui feront juger sur-le-champ de la variété des courbes.

Il démontre en effet que l'ordre d'une équation est indépendant du choix des coordonnées.

Pour opérer une classification des lignes courbes on aurait pu penser à se baser sur les fonctions qu'elles représentent ou sur le nombre de termes contenus dans leur équation. Mais Euler explique que les changements de coordonnées modifient le genre des fonctions et la forme des équations (voir l'exemple donné précédemment), ce qui ne permet pas de faire de classement. En revanche, l'ordre des équations n'étant pas affecté par un changement de coordonnées, c'est cet ordre qui va permettre le classement :

> 51. Nous éviterons ces inconvénients, en prenant, pour classer les courbes, les ordres des équations qui expriment la relation entre les coordonnées. Car, pour une même courbe, l'équation restant toujours du même ordre, de quelque manière qu'on varie l'axe & l'origine des abscisses & même l'inclinaison des coordonnées, une même ligne courbe ne sera plus rapportée à différentes classes. Si on prend donc pour caractère distinctif le nombre des dimensions que les coordonnées perpendiculaires ou obliques forment dans l'équation, on ne troublera plus l'ordre des classes, en changeant l'axe ou l'origine des abscisses, ou en faisant varier l'inclinaison des coordonnées ; & la même courbe sera toujours rangée dans la même classe, soit qu'on prenne chaque équation particulière entre les coordonnées, soit qu'on prenne l'équation générale, ou même la plus générale. Ainsi le caractère distinctif tiré du degré des équations convient parfaitement à la distinction des lignes courbes.

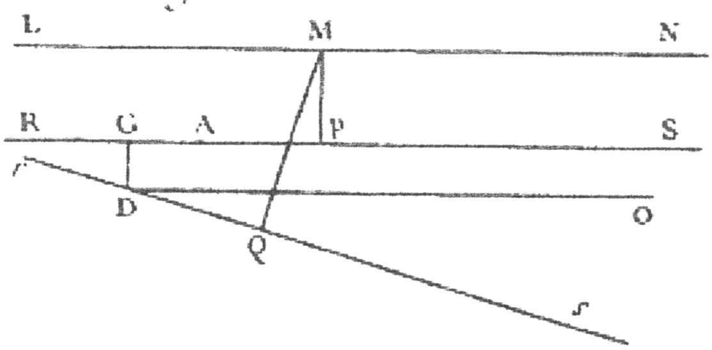
Euler donne alors les équations correspondant aux différents ordres.

L'équation générale du 1er ordre est $0 = \alpha + \beta x + \gamma y$ et les courbes qui s'y rapportent sont les lignes du 1er ordre. Il montre que le 1er ordre des lignes ne contient que la ligne droite :

39. Ce que nous venons de prescrire, pour trouver l'équation générale, qui appartient à une ligne courbe quelconque, peut aussi s'appliquer à la ligne droite. Car, soit proposée, au lieu d'une ligne courbe, la droite LM que nous supposerons parallèle à l'axe RS : dans quelque endroit qu'on place l'origine A des abscisses, l'appliquée PM sera toujours d'une grandeur constante, ou y = a : telle est l'équation de la ligne droite parallèle à l'axe. Cherchons à présent l'équation générale de la ligne droite, rapportée à un axe quelconque rs ; ayant fait DG = g, le sinus de l'angle Ods = m, le cosinus = n, à cause de y = nu – mt – g, on aura nu – mt – g – a = 0, équation générale de la ligne droite. Multiplions-la par la constante k, et supposons nk = α, mk = $-\beta$ et $(g+a)k = -b$, nous aurons l'équation α u + β t + $b = 0$ pour la ligne droite ; comme c'est l'équation générale du premier ordre entre t et u, il est clair qu'aucune équation du premier ordre entre deux coordonnées ne représente une ligne courbe, mais bien une ligne droite.

40. Toutes les fois donc qu'on aura entre les coordonnées x et y une équation de cette forme $\alpha x + \beta y - a = 0$, elle appartiendra à une ligne droite, dont on déterminera ainsi la position à l'égard de l'axe RS. Soit fait d'abord $y = 0$, on trouvera par-là sur l'axe le point C où cette droite le coupe ; car AC devient $= \frac{a}{\alpha}$; soit fait ensuite $x = 0$, y deviendra $= \frac{a}{\beta}$, qui est la valeur de l'appliquée AB à l'origine des abscisses ; et puisqu'on a deux points B et C sur la droite demandée, elle sera déterminée, et par conséquent la droite LN satisfera à l'équation proposée. Car, soit supposée une abscisse quelconque AP = x, et l'appliquée correspondante MP = y, on aura, à cause de la similitude des triangles CPM, CAB ; CP : PM : : CA : AB, c'est à dire $\frac{a}{\alpha} - x : y :: \frac{a}{\alpha} : \frac{a}{\beta}$, d'où l'on tirera $\frac{ay}{\alpha} = \frac{a^2}{\alpha\beta} - \frac{ax}{\beta}$ ou $\alpha x + \beta y = a$, qui est l'équation proposée.

41. Si α ou β =0, cette construction ne pourra plus avoir lieu ; mais ces cas sont très faciles par eux-mêmes ; car soit $\alpha = 0$, et $y = a$, il est clair que la ligne qui satisfait est une droite parallèle à l'axe, et qui en est éloignée d'une quantité = a ; si $a = 0$, ou $y = 0$, la ligne qui satisfera se confondra avec l'axe. Mais, si $\beta = 0$, et x = a, il est évident que la ligne qui satisfait est une droite perpendiculaire à l'axe, qui est éloignée de l'origine des abscisses d'une quantité = a ; c'est-à-dire, que dans ce cas il ne répond qu'une seule abscisse à toutes les appliquées, de sorte que l'abscisse cesse d'être une quantité variable. On voit donc clairement, d'après cela, comment les lignes droites peuvent être désignées par des équations entre des coordonnées perpendiculaires.



Quelques explications sont sans doute nécessaires pour bien comprendre ce texte.

Dans le premier paragraphe, Euler établit l'équation générale d'une ligne droite de façon astucieuse : il part d'une ligne parallèle à l'axe des abscisses, qui est donc une droite particulière, et, en changeant l'inclinaison de l'axe il en fait une droite quelconque dont il trouve l'équation en utilisant les formules de changement de coordonnées qu'il a établies.

Nous vous proposons en exercice de faire ce changement de coordonnées :

Exercice : Obtention de l'équation générale d'une droite.

Pour cela , on change d'axe, on prend un axe quelconque rs sur la figure précédente.

On place un point D origine sur cet axe.

On trace GD tel que G appartienne à l'axe RS et GD perpendiculaire à RS.

On trace la parallèle DO à RS passant par D

Soit MQ l'appliquée par rapport à ce nouvel axe. (donc MQ perpendiculaire à rs)

On pose : DG = g ; sin ODs = m ; cos Ods = n ; DQ = t et MQ = u

On sait de plus que PM = y.

Démonstration : Faire une figure.

On note H le point d'intersection entre MQ et DO

On note K le point d'intersection entre PM et DO ;

Les triangles DHQ et MHK sont semblables d'où ODs = HMK

En travaillant dans MHK, montrer que $\frac{y+g}{MH} = n$

De plus MQ = MH + HQ.

En travaillant dans DHQ, montrer que HQ = $\frac{m}{n}t$

Montrer alors que y = nu – mt – g.

En découle alors l'équation générale d'une droite.

Dans le paragraphe 40, Euler établit la réciproque : à partir d'une équation du premier ordre, on obtient deux points B et C et on montre, en utilisant la similitude de triangles, que tout point de la droite BC a des coordonnées satisfaisant à l'équation proposée.

Enfin dans le dernier paragraphe Euler étudie les cas particuliers des droites horizontales et verticales.

Après avoir étudié les lignes du 1er ordre, Euler passe en revue tous les autres ordres. Pour les lignes du second ordre, voici ce qu'il dit :

54. Toutes les lignes du second ordre seront comprises dans cette équation générale du second ordre

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 \quad ;$$

c'est-à-dire que nous rangerons parmi les lignes du second ordre, toutes les lignes courbes que cette équation exprime, x & y désignant les coordonnées perpendiculaires. Ces lignes courbes sont donc les plus simples de toutes, puisqu'il n'y a point de lignes courbes dans le premier ordre ; c'est pour cette raison que quelques-uns les appellent les lignes courbes du premier ordre. Mais les courbes renfermées dans cette équation sont plus connues sous le nom de *Sections coniques,* parce qu'elles résultent toutes de la section d'un cône. Ces différentes espèces de lignes sont le Cercle, l'Ellipse, la Parabole & l'Hyperbole, que nous déduirons dans la suite de l'équation générale.

Il explique ensuite comment on obtient les équations générales des lignes des ordres suivants.

Cette classification va lui permettre d'étudier les propriétés géométriques des lignes appartenant à un ordre donné (nous verrons dans le chapitre IV le traitement des lignes du second ordre). En particulier il démontre qu'une ligne appartenant à l'ordre n a au plus n points d'intersection avec une ligne droite, et que, pour déterminer une ligne du premier ordre il suffit de connaître deux points, pour une ligne du second ordre il en faut cinq, neuf pour une ligne du troisième ordre, etc…

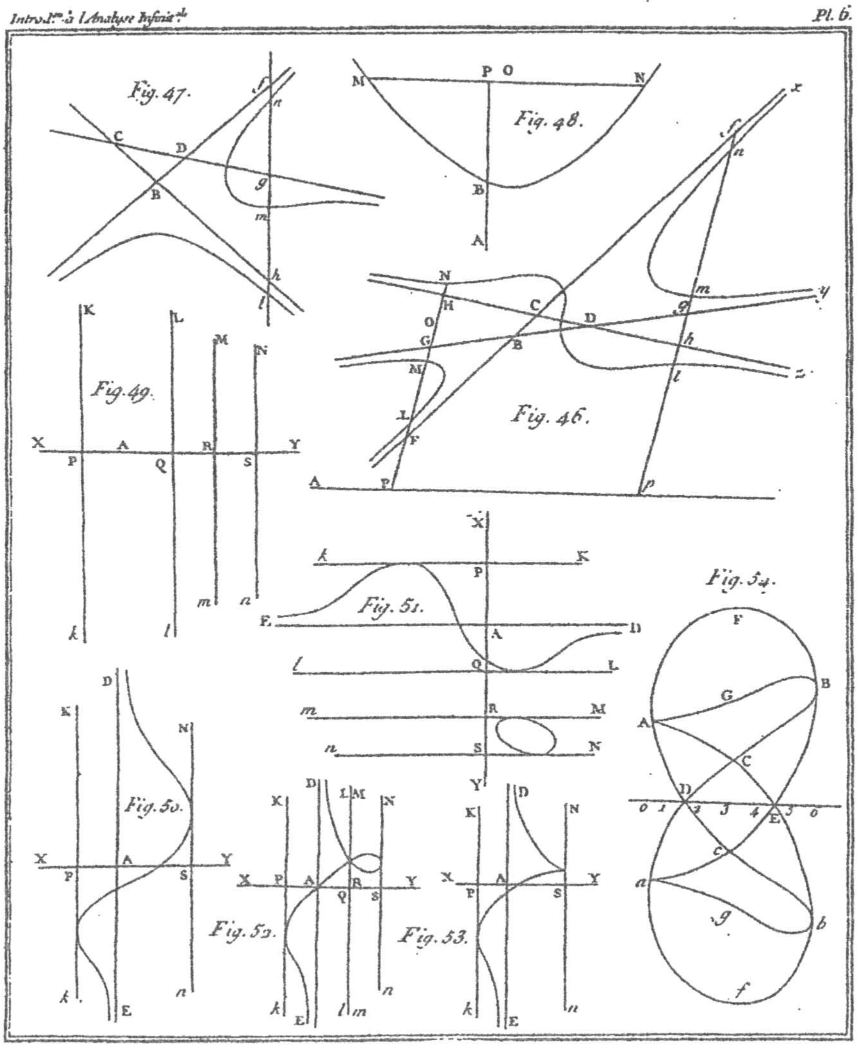


Planche 6 : Introduction à l'analyse infinitésimale, par Leonard Euler, tome second, édition de 1797

3 : Lacroix, Lamé : « Il existe une manière d'envisager la géométrie qu'on pourrait appeler géométrie analytique ».

Ce que nous appelons de nos jours « géométrie analytique », va apparaître sous cette forme moderne, à la fin du XVIII° siècle et au début du XIX° siècle. On situe d'ailleurs généralement la naissance du mot dans un ouvrage de 1797, par Sylvestre François Lacroix, *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral.*

On ne s'attendrait pas, a priori, à y trouver des pages traitant de la géométrie. Toute l'introduction est consacrée à une sorte d'histoire des mathématiques, en particulier de ce que l'on pourrait nommer, analyse, et bien sûr calcul différentiel et intégral. La plupart des grands auteurs s'attachent en général effectivement à la présentation historique de leur sujet. Lacroix souligne l'importance de la théorie des courbes et surfaces dans cette étude, et très naturellement il est amené à traiter d'une certaine sorte de géométrie, dont il va faire deux chapitres de son tome premier.

> Les deux chapitres suivants qui terminent le premier volume renferment l'application du calcul différentiel aux courbes et aux surfaces courbes ; mais cette application, au lieu d'être isolée, comme elle l'a presque toujours été jusqu'à présent, fait partie d'une théorie complète des courbes et des surfaces courbes ; et par-là le Lecteur se trouve à portée d'embrasser l'ensemble de chacun de ces objets.
>
> En écartant avec soin toutes les constructions géométriques, j'ai voulu faire sentir au Lecteur qu'il existait une manière d'envisager la géométrie, qu'on pourrait appeler ***Géométrie analytique***, et qui consisterait à déduire les propriétés de l'étendue du plus petit nombre possible de principes, par des méthodes purement analytiques, comme Lagrange l'a fait dans sa Méchanique à l'égard des propriétés de l'équilibre et du mouvement.
>
> On trouve dans les notes de la géométrie de Legendre un moyen de tirer immédiatement la théorie des triangles semblables, des conséquences de la superposition : par là on est en état de former l'équation d'une droite quelconque, et en combinant cette équation avec celle du cercle et des autres courbes, on pourrait arriver à toutes les propositions connues sur les lignes, d'une manière plus ou moins élégante, suivant le choix des moyens analytiques.
>
> Lagrange a donné, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin (année 1773), une Théorie des Pyramides, qui est un chef-d'œuvre dans ce genre ; mais Monge est, je crois, le premier qui ait pensé à présenter sous cette forme l'application de l'Algèbre à la géométrie.
>
> Qu'on ne croie pas qu'en insistant ainsi sur les avantages de l'Analyse algébrique, je veuille faire le procès à la Synthèse et à l'Analyse géométrique. Je pense au contraire, qu'on néglige trop aujourd'hui l'étude des Anciens ; mais je ne voudrais pas qu'on mêlât, comme on le fait dans presque tous les ouvrages, les considérations géométriques avec les calculs algébriques ; il serait mieux, ce me semble, que chacun de ces moyens fût porté dans

des traités séparés, aussi loin qu'il peut aller ; et que les résultats de l'un et de l'autre s'éclairassent mutuellement, en se correspondant, pour ainsi dire, comme le texte d'un livre et sa traduction.

(p. XXV-XXVI)

La « géométrie analytique » serait-elle, ainsi que l'écrit Lacroix, la géométrie sans figure ? Nous remarquerons que, dans son traité, il y a tout de même quelques figures. A la différence cependant de traités de géométrie plus traditionnels, nous constaterons que ses démonstrations ne s'appuient pas sur les figures, ou du moins les figures disparaissent des démonstrations parce qu'elles sont de suite traduites en équations, puis traitées de façon « purement algébriques », ou « purement calculatoires ».

Chapitre IV.

Théorie des Lignes courbes

Quoique le principal objet de ce Chapitre soit l'application du Calcul différentiel à la théorie des lignes courbes, j'ai cru devoir y comprendre, d'une manière succincte, la partie purement algébrique de cette théorie, afin d'offrir un ensemble complet, et de lier entr'elles des notions qui sont éparses et présentées sous des points de vue très-differens. Il ne sera question ici que des courbes qu'on peut tracer sur des plans ; on trouvera au chapitre suivant ce qui regarde les courbes tracées sur des surfaces courbes.

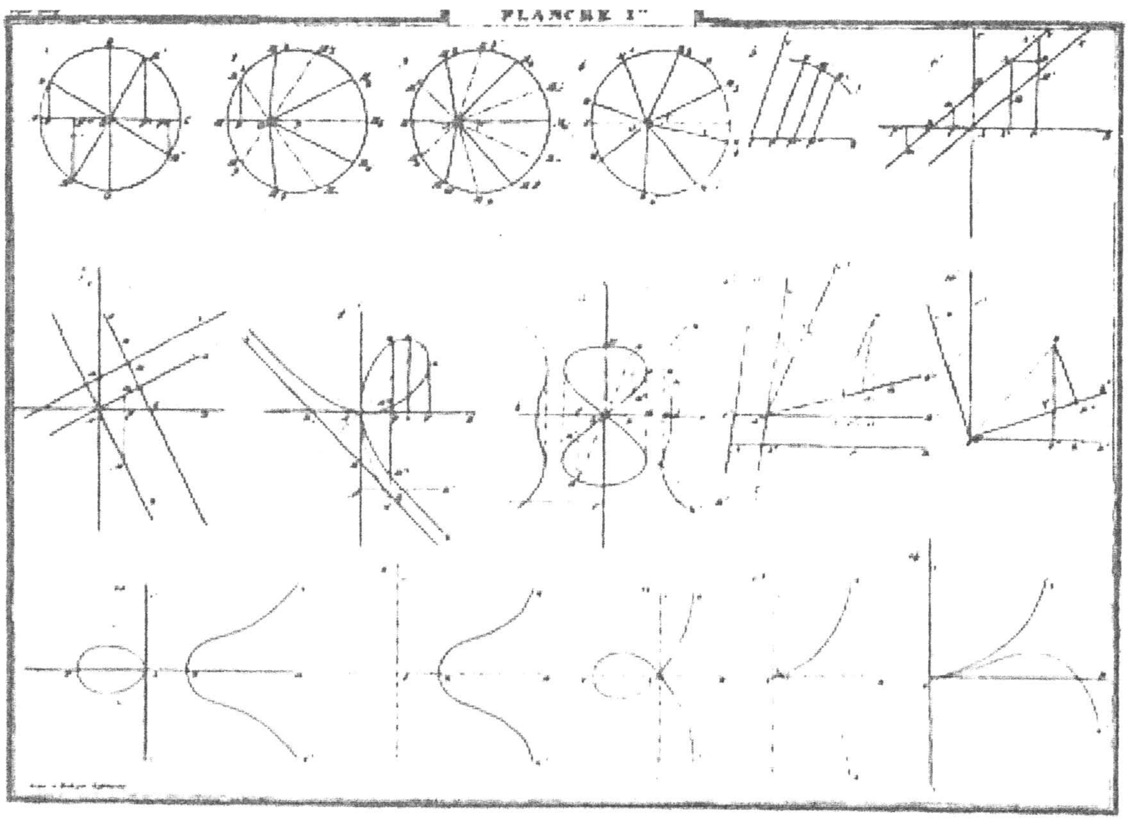
195 . On sait que toute équation renfermant deux indéterminées x et y, peut se construire en prenant sur une ligne AB, fig. 5, à partir d'un point donné A, des portions AP, AP', AP'' etc, pour représenter les valeurs de l'une quelconque des indéterminées, celle de x par exemple, et en menant par les points P, P', P'' etc, des droites égales aux valeurs correspondantes de y, et parallèles à une même droite AC, donnée de position, à l'égard de AB ; la ligne MM'M'' qui passe par tous les points ainsi trouvés, est le lieu de l'équation proposée.

Réciproquement, dans toute courbe assujettie à une loi régulière par sa description, ou douée de quelque propriété commune à tous ses points, il existe toujours entre l'*abscisse* AP, et l'*ordonnée* PM, une relation constante qui exprime sa nature, et de laquelle on peut déduire toutes ses propriétés. Cette relation ne saurait dans tous les cas s'obtenir sous une forme algébrique, et de là naît la distinction des courbes, en *courbes algébriques*, et en *courbes transcendantes*(*).

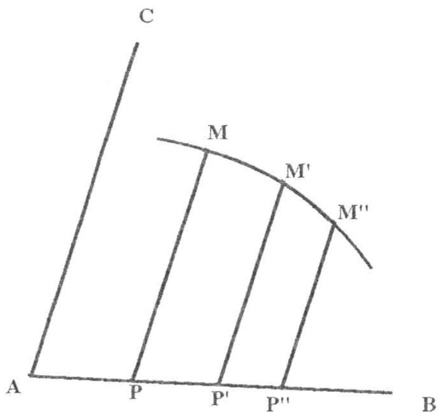
La situation respective des lignes AB et AC, qu'on nomme axes des coordonnées, ainsi que celle du point A, qui en est l'origine, sont arbitraires et font partie des conventions ;

(*) On appelle aussi ces dernières, courbes méchaniques ; mais cette dénomination ma paraît fort impropre, car la description d'une courbe quelconque, à commencer par celle du cercle, ne s'exécute que par des moyens méchaniques, et telle courbe algébrique en exige de plus compliqués que certaines courbes transcendantes.

(p. 327-328)



Voici la figure 5 extraite de la planche :



Il y a tout de même quelques planches de courbes dans la géométrie analytique selon Lacroix. Avant cependant d'examiner comment le « calcul » permet de s'en écarter plus ou moins, éclairons les allusions qu'il fait à l'ouvrage de Lagrange. La *Méchanique analytique* de Lagrange est publiée en 1788, et voici comment il commente les principes de son ouvrage : « *Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions ni raisonnements géométriques ou méchaniques, mais seulement des opérations algébriques assujetties à une marche régulière et uniforme* ».

Cette manière de voir va assez rapidement se populariser dans le milieu des mathématiciens, car elle semble prometteuse. Nous trouvons par exemple, sous la plume d'un certain Louis Alexandre Olivier de Corancez un petit opuscule, *Précis d'une nouvelle méthode pour réduire à de simples procédés analytiques les principaux théorèmes de la géométrie et la dégager des figures et constructions qu'on y a employées jusqu'à présent*. Etrangement, ce mini traité est publié à la suite de *l'Essai sur la théorie des nombres* d' Adrien Marie Legendre, en 1798. Il fait lui aussi allusion à l'ouvrage de Lagrange.

Aussi est-ce aux méthodes analytiques que les mathématiciens doivent leurs progrès depuis un siècle, et leur perfection peut seule en reculer les limites.

On ne trouve dans la Méchanique Analytique du cit. Lagrange, ni figures ni constructions géométriques ; mais seulement des opérations algébriques assujetties à une marche régulière et constante ; ainsi depuis ce grand ouvrage, qui doit seul immortaliser notre siècle, la méchanique n'est plus qu'une branche particulière de l'analyse.

La géométrie élémentaire elle-même est susceptible d'une marche analytique, et aux méthodes de démonstrations qu'on y a employées jusqu'à présent, on peut substituer les équations résultantes du rapport des quantités qu'on y considère.

Nous proposons de faire voir qu'en partant de ce principe purement analytique, on peut démontrer les divers théorèmes de la géométrie élémentaire, sans employer ni même supposer tacitement aucune espèce de figures ni constructions.

Nous nous trouvons ici aux sources d'une querelle des méthodes en géométrie, qui occupera un bonne partie du début du XIX° siècle, qui pourrait se résumer en : géométrie analytique contre géométrie synthétique ; ou encore : géométrie des figures contre géométrie des calculs. Nous trouverons une analyse de ces différentes méthodes dans l'ouvrage de Gabriel Lamé étudié plus bas. Les mathématiciens les plus acharnés finiront bien par reconnaître que chacune de ces « géométries » a ses avantages et ses inconvénients. Au demeurant ces discussions souvent âpres ont durablement marqué les esprits. La géométrie analytique est toujours plus ou moins considérée comme une géométrie où la figure est accessoire. Et selon les cas, c'est considéré comme une supériorité, ou bien au contraire, le calcul sera à la géométrie « le bâton des aveugles ».

Il est temps d'étudier comment Lacroix explique la traduction des relations entre éléments d'une figure de géométrie en simple relation entre des coordonnées qui sont des nombres et en équations.

La géométrie analytique de Lacroix se rattache plus à la tradition d'Euler qu'à celle de Descartes, puisqu'il s'agit, comme nous l'avons constaté plus haut, de la géométrie des coordonnées, un repère ayant été choisi dans le plan, valable pour toutes les courbes qui seront étudiées.

La lecture du texte nous est relativement aisée ; ici se mettent en place, effectivement, nos habitudes modernes de raisonner quand nous traitons des courbes et des coordonnées.

Nous allons nous attacher, dans un premier temps, au cas de la ligne droite.

196. De toutes les équations à deux indéterminées, la plus simple est celle du premier degré, et elle appartient à la ligne droite, la plus simple de toutes les lignes. Cette équation peut être représentée par $Cy = Ax + B$; mais en divisant par C, elle ne perdra rien de sa généralité, et on aura $y = \frac{A}{C}x + \frac{B}{C}$; faisant $\frac{A}{C} = a$, $\frac{B}{C} = b$, il viendra $y = ax + b$: c'est ainsi que nous la représenterons désormais.

Supposons d'abord que b soit nul, on aura simplement $y = ax$ ou $\frac{y}{x} = a$, c'est à dire, que dans toute l'étendue de la droite, le rapport PM à AP (fig. 6), sera constant, propriété qui n'est que l'expression de la similitude des triangles APM, AP'M' etc, et ne peut appartenir qu'à la ligne droite AX, menée par le point A, origine des coordonnées.

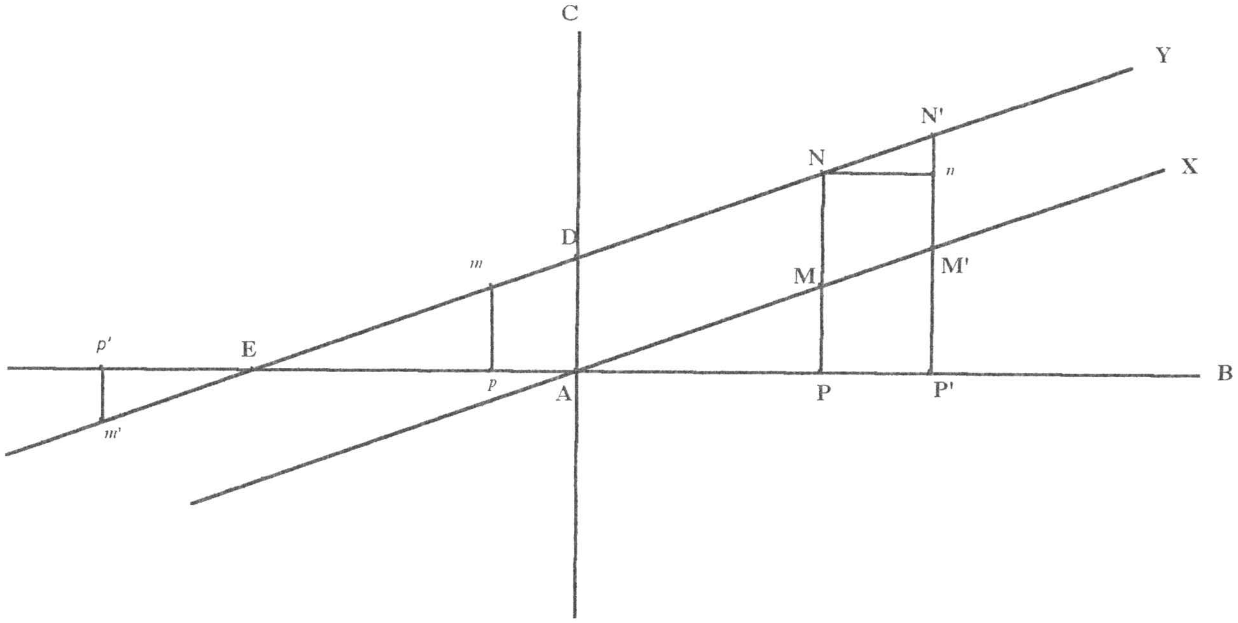


Figure 6

Questions : Comment Lacroix explique-t-il que la propriété « le rapport PM à AP est constant » « appartient à la droite AX », c'est-à-dire caractérise les points M de la droite AX ? Ajouteriez-vous quelques conditions ? Comment définiriez-vous cette droite AX ?

> Le rapport $\frac{y}{x}$ ou le coefficient *a*, dépend de l'angle que fait la droite AX avec la ligne des abscisses AB ; mais dans le triangle APM, que nous supposons rectangle, le rapport de PM à AP est égal à la tangente de l'angle PAM ; *a* représente donc la tangente de cet angle.

Comment nommez vous le coefficient *a* ?

> En considérant l'équation $y = ax + b$, on voit que la nouvelle ordonnée y ne diffère de la première, $y = ax$, qu'en ce qu'elle la surpasse de la quantité b ; d'où il suit que si on prend AD = b, et qu'on mène la ligne DY parallèle à AX, elle sera le lieu de l'équation $y = ax + b$, puisqu'on aura PN = PM + MN = PM + AD, P'N' = P'M' + M'N' = P'M'+ AD, etc, et il faut bien remarquer que le coefficient restera le même pour toutes les droites parallèles à AX.

Vous constaterez que Lacroix s'appuie énormément sur la figure pour sa démonstration, qui serait quelque peu obscure sinon.

Question : Comment nommeriez-vous ce procédé qui permet de passer des points qui correspondent à $y = ax$ à ceux qui correspondent à $y = ax + b$?

Il faut souligner la « modernité » du langage de Lacroix. Il y a cependant quelque embarras du côté des quantités négatives, qui vont être traitées à la façon d'Euler .

> Il est aisé de voir que rien, dans l'équation $y = ax + b$, ne limite les valeurs qu'on peut donner à x, et que par conséquent celles de y deviendront aussi grandes qu'on voudra ; mais en même temps, rien ne bornant le cours de la ligne DY dans l'espace indéfini BAC, on trouvera toujours des abscisses et des ordonnées assez grandes pour représenter les valeurs de y et de x qui satisferont à l'équation proposée. Faisons $x = 0$, nous aurons $y = b$; cette valeur appartiendra au point D, où la droite DY rencontre l'axe AC des ordonnées. Lorsque x sera négatif, on trouvera $y = -ax + b$, et ax étant moindre que b, y sera encore positif, mais moindre que b ou AD. Le cours de la ligne DY nous montre que cette circonstance ne peut avoir lieu que dans la partie DE correspondante à des abscisses Ap, situées, par rapport au point A, du côté opposé aux abscisses AP, qui représentent les valeurs positives de x ; c'est donc de ce côté qu'il faut prendre les valeurs négatives.
>
> Pour trouver la valeur de x qui répond au point où la ligne DY, rencontre l'axe AB des abscisses, il faut faire $y = 0$, ce qui donne $ax + b = 0$, et $x = -\frac{b}{a}$ = AE. Lorsque x, restant toujours négatif, sera devenu plus grand que la quantité $\frac{b}{a}$, y lui-même deviendra négatif. Mais au delà du point E, la ligne DY se trouve au dessous de la ligne AB ; l'ordonnée p'm' tombera donc d'un côté opposé à celui où elle était située d'abord, et par conséquent les valeurs négatives de y doivent se porter d'un côté de la ligne AB, opposé à celui qu'on a adopté pour les valeurs positives. J'observerai que rien ne détermine quel côté des abscisses ou des ordonnées on doit regarder comme positif ; mais ce choix étant une fois arrêté, les côtés opposés deviennent par cela seul négatifs. Je n'insiste sur ces remarques, que parce qu'il me semble que dans la plupart des livres élémentaires on n'a pas prouvé avec assez de soin, la nécessité de prendre les quantités négatives d'un côté opposé aux quantités positives, et c'est cependant de là que dépendent en grande partie, les diverses formes qu'affectent les lignes courbes, comme on le verra plus bas.

Questions : La lettre « x » représente-t-elle un « nombre négatif » ? Quel procédé Lacroix utilise-t-il pour parler des « quantités négatives » ? Et pourquoi cette expression ?

Dans le paragraphe reproduit ci-dessus, Lacroix d'une certaine façon essaie de dresser le tableau de signes de l'expression $ax + b$, et les conséquences graphiques. Pour ce faire, comme il ne peut penser que « x » peut être quelque chose de négatif, il passe à un moment donné à « $-x$ ». Est-ce satisfaisant pour vous ?

Son explication pour indiquer que d'un côté de l'origine, il y a les positifs, et de l'autre les négatifs vous satisfait-elle ?

Pour vous les deux équations $y=ax + b$ et $y = -ax + b$ sont –elles associées à la même droite ?

Exercices « à la façon de Lacroix »

197. Si on cherche l'équation de la ligne droite qui passe par deux points dont les abscisses soient α et α', et les ordonnées β et β' ; on mettra successivement α et α' à la place de x, β et β' à la place de y, et on aura pour déterminer a et b les deux équations :

$$\left.\begin{array}{l}\beta = a\alpha + b\\ \beta' = a\alpha' + b\end{array}\right\} \text{qui donneront} \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{\beta - \beta'}{\alpha' - \alpha} \\ b = \dfrac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha}\end{array}\right.$$

et d'où il résultera $y = \dfrac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}x + \dfrac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha}$ pour l'équation de la droite cherchée.

On peut donner ce résultat sous une forme plus simple ; car si on recherche l'équation $y = ax + b$, dans l'une des deux équations ci-dessus, la première par exemple, b disparaîtra, et il viendra $y - \beta = a(x - \alpha)$. Cette dernière équation sera celle d'une droite assujettie à passer par le point dont les coordonnées sont α et β, et faisant d'ailleurs avec l'axe AB un angle quelconque ; on achèvera de la déterminer en y mettant au lieu de a la valeur trouvée précédemment, et on aura $y - \beta = \dfrac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha)$

Questions : Pour bien comprendre le procédé mis en œuvre par Lacroix, nous vous proposons de déterminer l'équation de la ligne droite passant par le point de coordonnées 2 et 4, et le point de coordonnées 5 et 3. Essayez les deux façons, et rapprochez ce qui est fait de vos procédés habituels.

Vous remarquerez bien sûr que ceci ne peut s'appliquer si les deux points ont la même abscisse. Pourquoi ?

198. Pour obtenir l'équation de la ligne droite qui passerait par le point dont les coordonnées sont α et β et qui serait parallèle à la ligne représentée par l'équation $y = a'x + b'$, il suffira de substituer a' au lieu de a dans l'équation $y - \beta = a(x - \alpha)$ qui satisfait déjà à la première condition, puisque d'après le n° 196, le coefficient de x est le même dans les équations des lignes parallèles entre elles ; on aura donc pour celle u'on cherche $y - \beta = a'(x - \alpha)$.

Questions : Appliquez ce qui précède pour déterminer l'équation de la ligne droite qui passe par le point de coordonnées 7 et 4, et qui est parallèle à la ligne droite représentée par l'équation : $y = 5x + 2$.

200.Deux lignes qui se coupent ont dans leur point d'intersection les mêmes coordonnées, en sorte que pour trouver celles du point de rencontre des deux droites données par les équations $y = ax + b$, et $y = a'x + b'$, il n'y a qu'à supposer que les inconnues x et y ont la même valeur dans l'une et l'autre équation ; on aura ainsi $ax + b = a'x + b'$, ce qui donnera

$$x = \frac{b - b'}{a' - a}, \text{ et } y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}$$

On voit par ces valeurs que le point de concours est d'autant plus éloigné des axes AB et AC, que la quantité $a' - a$ est plus petite, et que x et y deviennent infinis, lorsque $a' = a$, c'est à dire, lorsque les droites proposées cessent de se rencontrer, ou sont parallèles.

Questions : Auriez-vous traité ainsi le cas de deux droites parallèles ?

Appliquez la méthode proposée par Lacroix aux deux cas suivants :

a) Intersection des deux lignes droites associées aux équations $y = 3x + 4$ et $y = -5x + 2$

b) Intersection des deux droites associées aux équations : $y = 2x - 3$ et $y = 2x + 1$

Pour ce dernier cas, vous hésiterez sûrement à appliquer tel quel le calcul de Lacroix. Pourquoi ?

Nous avons évoqué plus haut l'idée que la géométrie analytique serait une géométrie « sans figures ». On conviendra peut-être à la lumière des calculs précédents, que nous avons pu manipuler des droites, trouver leur intersection, examiner si elle étaient parallèles, ... sans en tracer une seule. Autrement dit, une fois la mise en place effectuée, des bases de cette nouvelle géométrie, où la plupart d'entre nous a fort probablement besoin des figures comme référent, les calculs seuls suffisent. L'on peut sans doute comprendre que de nombreux contemporains de Lacroix aient pu être convaincus qu'ils tenaient là les fondements d'une géométrie d'un niveau supérieur, très efficace et très puissante.

Considérons maintenant une courbe quelconque :

Eloignons nous de la simple ligne droite, qui, pour être définie totalement suppose la seule connaissance de deux points. Lacroix en effet s'intéresse à une ligne courbe quelconque, d'un ordre quelconque, voire transcendante, comme il l'a dit plus haut. Comment dans ce cas connaître la forme de la ligne ou la tracer. Voici ce qu'il propose, qui vous semblera probablement familier.

Il se préoccupe, dans ce paragraphe de l'équation : $y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0$, qu'il va transformer en une union de quatre équation que nous appellerions « fonctionnelles ».

$$y = \sqrt{48a^2 + \sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}} \text{..........(1)}$$

$$y = \sqrt{48a^2 - \sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}} \text{..........(2)}$$

$$y = -\sqrt{48a^2 + \sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}} \text{........(3)}$$

$$y = -\sqrt{48a^2 - \sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}} \text{.........(4)}$$

Il nous montre alors comment certaines transformations simples permettent de connaître les courbes correspondant aux cas 2, 3 et 4, si l'on connaît le cas 1.

205. Pour mieux connaître la figure de la courbe proposée, on peut la construire par points, c'est à dire, assigner un certain nombre de points qui, étant joints entr'eux, approcheront d'autant plus d'exprimer ses contours, qu'ils seront plus serrés.

Pour exécuter commodément cette opération, on prendra a pour l'unité, on fera successivement $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$,

$x = 4$, *etc*, et on calculera ensuite les valeurs de y, au moins par approximation.

Lorsque x =

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Etc.

L'équation (1) donne y =

9,798	9,744	9,582	9,302	8,887	8,289	6,928	imag	6,928	8,698	9,798	10,845	11,872	Etc.

Et l'équation (2) donne y =

0	1,021	2,045	3,076	4,125	5,224	6,928	imag	6,928	4,520	0	imag	imag	Etc.

On construira ces résultats en prenant arbitrairement une ligne pour représenter l'unité et en la portant sur l'axe AB, de chaque côté du point A, autant de fois qu'il est nécessaire pour exprimer les valeurs de x ; par les points où elles se terminent, on mènera parallèlement à l'axe AC des droites sur lesquelles on portera tant au dessus qu'au dessous de AB, les valeurs de y.

Pour ceux et celles qui hésiteraient sur l'interprétation de imag, ceci signifie, imaginaire. En effet, il est impossible, dans l'ensemble des nombres que nous nommons réels, de trouver la racine carrée d'une « quantité » négative. Cela n'étonnera pas ceux et celles qui sont ou ont été en terminale scientifique. Pour les autres, il suffit de savoir que dans le cas considéré, les valeurs de x qui donnent une quantité imaginaire ne correspondent à aucun point de la courbe. Et puisque nous y sommes, vous aurez sûrement reconnu ici le tableau de valeurs d'une fonction, qui permet d'ébaucher sa courbe représentative. Nous dirions maintenant, que la valeur « 7 » par exemple, ne peut faire partie de l'ensemble de définition de la fonction qui correspond à l'expression (1).

Ici, Lacroix construit un pont entre la géométrie analytique et l'étude des fonctions. Dans certains cas en effet, pour dessiner une ligne dont on connaît l'équation, il est possible de se ramener à une ou plusieurs fonctions.

Nous avions déjà souligné la filiation Euler-Lacroix, et nous en voyons ici un autre signe, puisque cet aspect fonctionnel a déjà été largement abordé chez Euler.

Si nous revenons maintenant à la liaison figure – calculs, ici, le calcul permet, si c'est nécessaire, de revenir au tracé de la courbe.

A la fin du 18° siècle, et au début du 19° siècle, la « géométrie analytique », telle celle de Lacroix, atteint ses heures de gloire. De nombreux mathématiciens se persuadent que, par cette méthode, tous les problèmes de géométrie seront effectivement résolus. La géométrie, en quelque sorte, serait une partie de l'algèbre. Nous avons cependant lu, sous la plume de Lacroix, que lui-même conseillait de toujours cultiver les anciens. La géométrie « sans calcul », celle des figures, va poursuivre son chemin, et même totalement se transformer, sous la pression de l'autre, l'analytique. La comparaison des méthodes pour la résolution des problèmes de géométrie va alors se développer.

Gabriel Lamé

Dans l'introduction à son *« Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie »*, G. Lamé précise ses objectifs : « donner quelques méthodes générales pour la solution d'un problème, suivant la manière de l'aborder, de la conduire au résultat ». Mais il précise tout de suite que c'est difficile, compte tenu de « la multiplicité des moyens dont la Géométrie, dont l'Algèbre même peuvent se servir pour arriver au but proposé ». Néanmoins, pour résoudre certains types de problèmes tels que la recherche de lieux géométriques, d'intersection de lignes, de surfaces, il indique que la méthode algébrique est préférable à la méthode géométrique. Il explique en quoi elle consiste et donne quelques recommandations :

> Cette méthode consiste principalement à mettre les problèmes en équation, c'est-à-dire, à l'énoncer algébriquement. Il faut ensuite manier les équations, les données primitives, de façon à obtenir des résultats prompts et satisfaisants, but que l'on n'atteint pas aisément. Cependant la marche sûre et méthodique de cette analyse, la symétrie, la variété des éliminations, conduisent à des équations finales où la réponse à la question se trouve écrite. Ainsi parvenu au résultat algébrique, il reste à le traduire dans le langage de l'énoncé proposé ; c'est là le terme, le fini de l'ouvrage ; mais souvent l'écueil du Mathématicien, un obstacle que la solidité du raisonnement peut seule surmonter.
> [...] Il faut étudier l'énoncé d'un problème de Géométrie, avant de l'exprimer en Analyse ; commencer par écrire les données, par les mettre en équation. S'agit-il d'un point ? deux conditions, deux coordonnées suffisent pour le déterminer sur un plan ; il en faut trois lorsqu'il est situé d'une manière quelconque dans l'espace. S'agit-il d'un lieu géométrique continu ? Il sera exprimé par une ou deux équations entre trois variables. Si c'est une ligne plane, il suffit d'une seule équation qui établisse une relation entre les deux coordonnées de chacun de ses points. C'est ainsi que l'Algèbre traduit un énoncé géométrique dans son propre langage, pour le présenter, pour le travailler ensuite à sa manière.
> Viennent ensuite des éliminations, des transformations, dont l'utilité n'est point incertaine ; il ne faut jamais perdre

de vue le résultat désiré, chercher constamment le plus court chemin pour y arriver. La Géométrie, lorsqu'elle est seule employée à la recherche d'une solution, dévie souvent de sa route, pour aller à la découverte ; la bonne Analyse au contraire, connaît l'endroit où elle doit frapper, et s'y dirige sans détours.

[...] Quand les données d'un problème peuvent être placées par rapport aux axes coordonnés, de manière à simplifier les équations, sans en troubler la symétrie, il faut toujours en profiter ; mais si cette simplification de position anéantit cette même symétrie, en détruisant les quantités qui pourraient la faire apercevoir, elle n'est plus qu'apparente, et il vaut mieux placer les axes coordonnés d'une manière arbitraire.

p. 24-25-26.

Ensuite il examine divers types de problèmes géométriques : des problèmes d'intersections de droites, de lignes, de plans, de surfaces, des recherches de lieux géométriques, des déterminations de courbes et de surfaces passant par des points donnés, etc... Les méthodes proposées ne sont pas exclusivement algébriques.

Nous nous intéresserons à la façon dont il présente et résout les problèmes d'intersections. Il énonce d'abord le principe qu'il qualifie d' «évident » :

Si l'on combine les équations de deux lieux géométriques d'une manière quelconque, l'équation résultante exprime un troisième lieu géométrique, sur lequel se trouve l'intersection des deux premiers.

[...] Je supposerai d'abord que les trois lieux géométriques soient du même degré D, je désignerai par E = 0, E'= 0, E''= 0 leurs équations. Si on multiplie respectivement les deux premières par deux indéterminées *m* et *m'* , et qu'on les ajoute ensuite, l'équation *m*E + *m'*E'= 0, résultante de cette combinaison, sera du même degré que les équations proposées, et pourra représenter, vu l'indétermination du rapport *m/m'* , tout lieu géométrique du degré D, passant par les intersections des lignes ou surfaces, représentées par les équations E = 0, E'= 0. Mais puisque le lieu géométrique du degré D, dont l'équation est E''= 0, doit aussi passer par ces mêmes intersections, il doit aussi pouvoir être représenté par l'équation *m*E + *m'*E'= 0 ; on peut donc disposer et du rapport et de l'une des deux indéterminées *m* et *m',* pour identifier les polynomes *m*E + *m'*E' et E'' ; ce qui conduira en général à autant de relations entre *m, m'* , et les coefficients des équations proposées, que l'équation du degré D entre deux ou trois variables, peut admettre de coefficients. Si on élimine ensuite les indéterminées *m* et *m'* , on aura les relations définitives qui doivent exister entre les coefficients des équations proposées, pour exprimer analytiquement la communauté d'intersection des lieux géométriques qu'elles représentent.

p. 28-29

L' «évidence » étant une notion très subjective, il est sans doute nécessaire d'éclaircir certains points. Voyons d'abord comment Lamé met en pratique sa méthode sur le problème suivant :

PROBLEME I. *Trouver les conditions nécessaires pour que trois droites passent par un même point.*

Solution. Soient les équations des trois droites, ainsi qu'il suit :

$$\left.\begin{array}{r} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \\ a''x+b''y+c''=0 \end{array}\right\} (1);$$

l'élimination de x et y entre elles, donnera sur-le-champ, pour la condition cherchée, l'équation

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''=0 \quad (2)$$

Mais on peut parvenir au même résultat, par un procédé un peu différent qui, à la vérité, n'a dans le cas présent aucun avantage marqué sur celui-là, mais qui nous sera fort utile pour les autres recherches auxquelles nous aurons ensuite à nous livrer.

En prenant la somme des produits des deux premières équations (1) par deux multiplicateurs indéterminés *m, m',* il viendra $(am+a'm')x+(bm+b'm')y+(cm+c'm')=0 \quad (3)$, équation qui, à cause de l'indétermination des multiplicateurs m et m', est propre à représenter toutes les droites qui passent par l'intersection des deux premières droites (1).

Si donc on veut que ces droites se coupent en un même point, il devra être possible de disposer des indéterminées m et m', de manière à faire coïncider la troisième équation (1) avec l'équation (3). Cela donnera $am+a'm'=a'', \ bm+b'm'=b'', \ cm+c'm'=c'' \quad (4)$; et, en éliminant m et m' entre ces trois équations, on retombera de nouveau sur l'équation (2).

p.31

Vous remarquerez que Lamé présente l'équation de la droite sous la forme ax + by + c = 0, à la manière d'Euler, et non plus, comme nous l'avons vu précédemment chez Lacroix, sous la forme y = ax + b.

Avant de rentrer dans les détails de la solution du problème, encore une remarque : cette méthode qui consiste à faire des combinaisons linéaires d'équations ne vous rappelle-t-elle rien ? Relisez la troisième méthode proposée par Aubert et Papelier pour démontrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes.

Examinons maintenant la solution du problème proposé par Lamé.

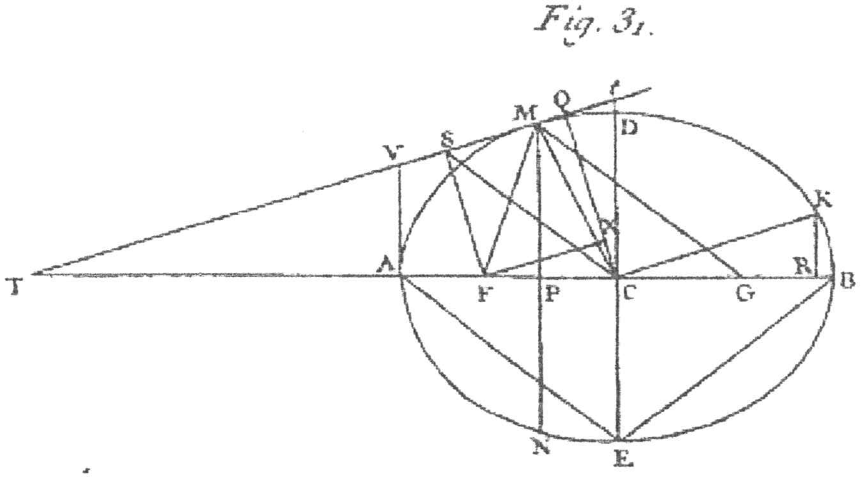
En fait il propose deux méthodes : la première, « évidente » sans doute, n'est pas détaillée. Il suffit de chercher les coordonnées de l'intersection des deux premières droites (ce qui implique que $ab'-a'b\neq 0$) : on trouve $x=\dfrac{bc'-b'c}{ab'-a'b}$ et $y=\dfrac{a'c-ac'}{ab'-a'b}$ puis on écrit que les coordonnées de ce point vérifient l'équation de la troisième droite ; on obtient alors la relation indiquée. Cette méthode est celle utilisée par Lacroix. On remarquera que ni Lacroix ni Lamé ne se préoccupent de l'éventuelle nullité des dénominateurs.

La deuxième méthode proposée est la mise en pratique du « principe évident » énoncé plus haut. (3) est bien l'équation d'une droite et tout point dont les coordonnées satisfont simultanément aux deux premières équations, vérifie aussi l'équation (3). Il identifie alors les coefficients de cette équation avec ceux de l'équation de la troisième droite et obtient les trois relations (4). Nous vous laissons le soin de terminer le calcul indiqué par Lamé.

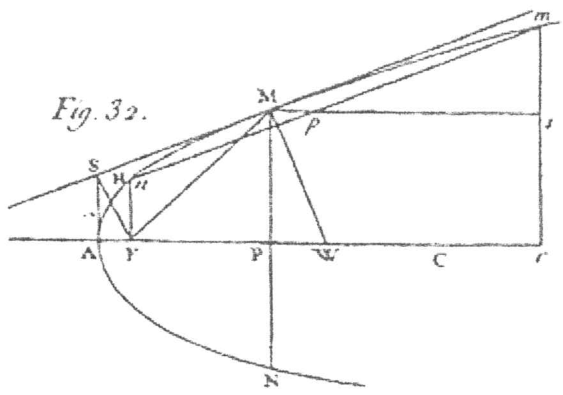
Lamé propose ainsi divers problèmes d'intersection (lignes du second ordre, plans, surfaces),des caractérisations de divers types de surfaces (cylindrique, conique, de révolution), des recherches de lieux, qu'il résout de manière analytique. Au cours de la résolution de ces problèmes, il établit par ailleurs des théorèmes qu'il utilisera plus loin pour résoudre des problèmes de façon purement géométrique.

Pour Lamé, le calcul algébrique est vraiment devenu un outil de démonstration et il n'hésite pas, au cours de la résolution d'un problème de géométrie, à mêler calcul algébrique et considérations géométriques, ce que Lacroix ne voulait pas qu'on fît.

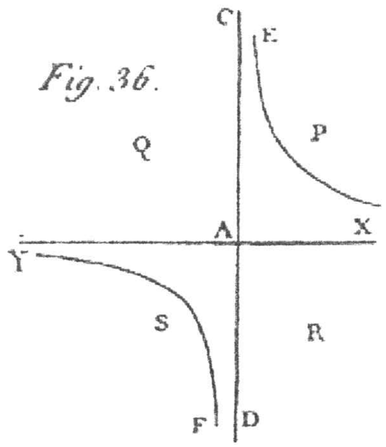
Introduction à l'analyse infinitésimale par Leonard Euler ; planche 4



Ellypse



Parabole



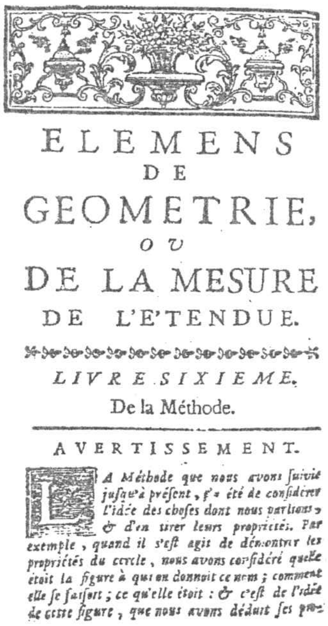
Hyperbole

4. Lamy, Euler : « Des sections du cône. La méthode la plus simple pour connaître leurs principales propriétés »

« Qu'est-ce que la géométrie analytique ? » avons-nous demandé à nos collègues. Si l'on avait posé cette question (pas tout à fait sous cette forme puisque l'expression « géométrie analytique » n'est apparue qu'à la fin du XVIII° siècle) à Descartes, Lamy, Lacroix, Euler, ils auraient peut-être répondu comme Lamy : « la méthode la plus simple pour connaître [les] principales propriétés [des sections coniques] ».

En effet, tous se sont intéressés aux différentes sections d'un cône par un plan et au moyen de les décrire algébriquement.

Dans ce chapitre, nous allons regarder plus particulièrement les travaux de Lamy et d'Euler sur ce sujet.


ELEMENS
DE
GEOMETRIE,
OU
DE LA MESURE
DE L'ETENDUE.

LIVRE SIXIEME.

De la Méthode.

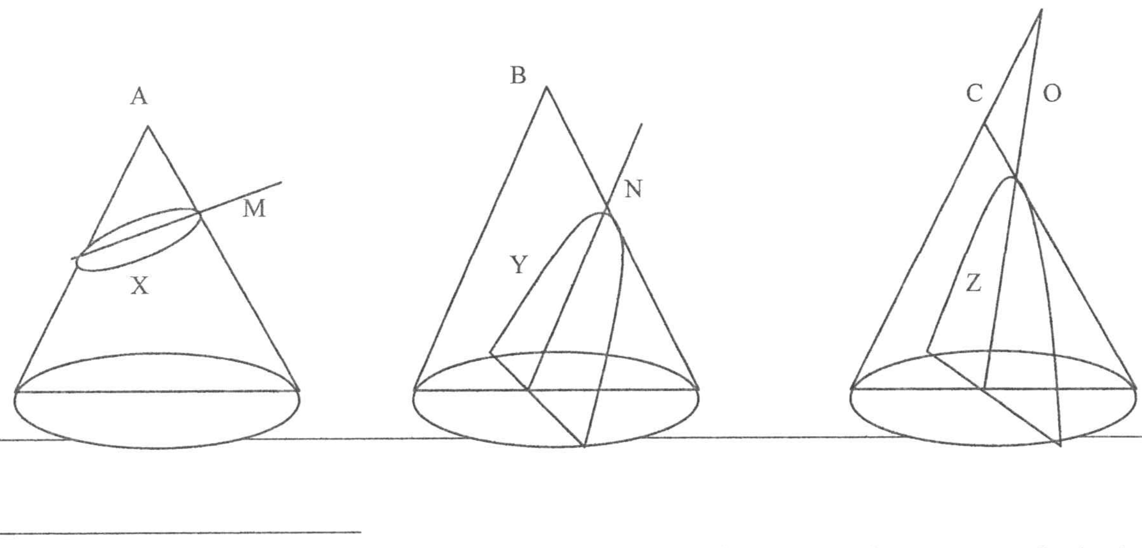
AVERTISSEMENT.

La Méthode que nous avons suivie jusqu'à présent, s'a été de considérer l'idée des choses dont nous parlions, & d'en tirer leurs propriétés. Par exemple, quand il s'est agit de démontrer les propriétés du cercle, nous avons considéré quelle étoit la figure à qui on donnoit ce nom ; comment elle se faisoit ; ce qu'elle étoit : & c'est de l'idée de cette figure, que nous avons déduit ses pro-

Bernard Lamy

Dans l'ouvrage de Lamy, *« Elemens de géométrie ou de la mesure de l'étendue » (édition de 1731),* figure une partie intitulée *« Introduction aux sections coniques ».* Dans le premier chapitre de cette partie, Lamy décrit d'abord les différentes façons de couper un cône droit par un plan (p.424-425) :

> Soit imaginé un Cône droit.
>
> 1° Si on le coupe par un plan qui passe par son axe, il est clair que cette Section sera un triangle, dont les côtez seront les côtez mêmes du Cône, & la base le diamètre du cercle de la base du Cône.
>
> *Je suppose dans la suite, que le plan coupant, de quelque manière qu'il coupe le Cône, est perpendiculaire sur le plan de ce triangle.*
>
> 2° Si le plan coupant est parallèle à la base du Cône, la Section est un cercle, comme il est évident.
>
> 3° Si le plan coupant n'étant pas parallèle à la base, rencontre l'axe du Cône, & ses deux côtez (je veux dire les deux côtez de ce triangle, qui est la section du Cône par un plan qui passe par son axe) cette Section, ou le contour de cette Section représentera une ligne courbe qu'on nomme *Ellipse* ou *Ovale.* Telle est la figure X, formée dans la Cône *A* par le plan coupant suivant la ligne *M.*
>
> 4° Si le plan coupant ne coupe qu'un des côtez dudit triangle, & que la Section soit parallèle à l'autre côtez, cette Section ou le contour de cette Section sera une autre Courbe, qui s'appelle *Parabole.* Telle est la figure Courbe Y, formée dans le cône *B* par le plan qui le coupe, suivant la ligne *N*, parallèle au côtez.
>
> 5° Si le plan coupant ne coupe qu'un seul côtez, de manière que ce plan prolongé puisse rencontrer l'autre côtez dudit Cône ou Triangle aussi prolongé au-dessus du sommet, cette section ou le contour d'icelle est ce que l'on nomme *Hyperbole*[1]. Telle est la figure Z formée dans le Cône *C* par le plan coupant , suivant la ligne *O.*



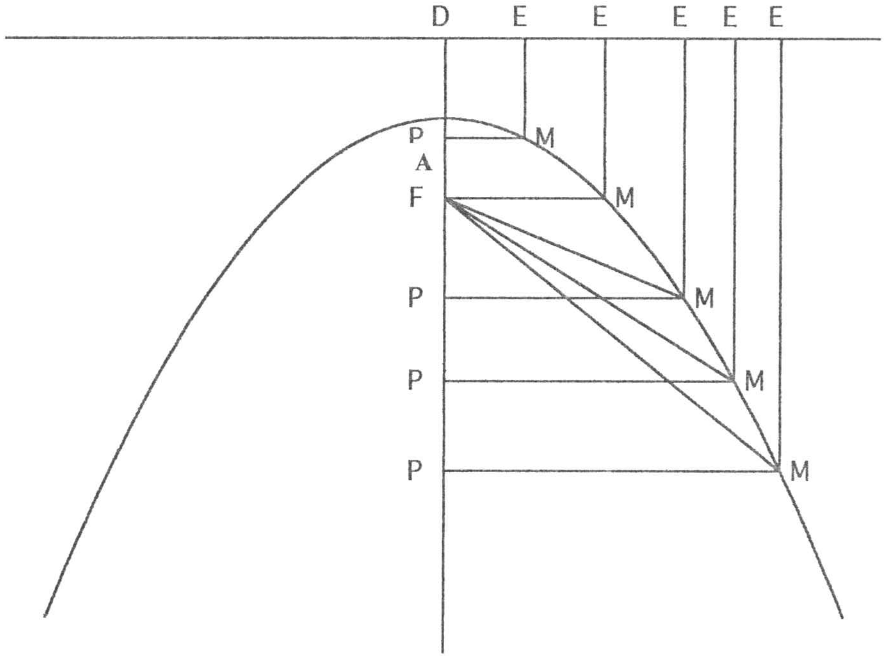
[1] Les mots *ellipse, parabole, hyperbole* qui désignent les sections coniques ont été donnés par Apollonius (III° siècle avant J.C). Ces mots, empruntés aux pythagoriciens, désignent le manque (en grec $\varepsilon\lambda\lambda\iota\pi\eta\varsigma$), la comparaison, la ressemblance (en grec $\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\eta$), l'excès (en grec $\upsilon\pi\varepsilon\rho\beta o\lambda\eta$).

Ensuite, dans les chapitres suivants, pour chacune des sections coniques, Lamy donne d'abord une autre définition géométrique en introduisant la directrice et le foyer, puis, à partir de cette nouvelle définition, il trouve une équation de la section, et enfin il démontre qu'il s'agit bien du même objet géométrique que celui défini dans le premier chapitre.

Nous allons examiner de plus près le cas de la parabole qui est traité au chapitre deux (p.427-428).

DEFINITION PREMIERE

La ligne droite DE est donnée avec le point F[2]*, hors de cette ligne. DE est la directrice de la Courbe, dont on parle. La ligne FD est perpendiculaire sur cette directrice DE. Si cette perpendiculaire est coupée au point A, de sorte que FA = AD , & que de chaque point de la Courbe comme M ayant mené sur DE une perpendiculaire & une autre ligne au point F, ces deux lignes soient égales, que ME = MF, soit nommée cette Courbe, Parabole.*



Après avoir indiqué une construction point par point de la courbe ainsi définie, il donne une seconde définition, ainsi que les notations qu'il va utiliser par la suite (p. 429) :

[2] Ce point F est le *foyer* , la droite DE est la *directrice*.

DEFINITION II

Une ligne toujours double de FD, ou quadruple de FA, ou de AD s'appelle le Paramètre de la Parabole.

Soit nommé a ce Paramètre ; l'Ordonnée PM soit nommée y, & l'Abscisse[3] PA soit nommée x.

Ces définitions et notations étant données, il va maintenant caractériser algébriquement la courbe qu'il a appelée parabole. C'est l'objet du théorème I suivi d'un corollaire (p. 429-430) :

THEOREME I

Le rectangle fait du Paramètre & de l'Abscisse est égal au quarré de l'Ordonnée. Ou cette Ordonnée est une moyenne proportionnelle entre le Paramètre et l'Abscisse.

FA ou AD *fig.preced.* soit nommé b. L'Abscisse AP a été nommée x. Donc PD ou ME = $b + x$, & FP = $x - b$ ou $b - x$, selon que le point P se trouve au-dessus ou au-dessous du Foyer F. Le Paramètre a est Quadruple de AD ou de AF, & partant de b ; ainsi $a = 4b$. Il faut démontrer que $ax = yy$. Selon la première Définition MF = EM ; mais EM = PA + AD = $b + x$. Donc $MF^2 = bb + 2bx + xx$. Et puisque FP = $b - x$: donc $FP^2 = bb - 2bx + xx$. Or $FM^2 - FP^2 = PM^2 = yy$. Donc $bb + 2bx + xx - bb + 2bx - xx = yy$. Mais $+bb - bb = 0$, & $+ xx - xx = 0$; reste donc $2bx + 2bx$, ou $4bx = yy$. Or $4b$ est la valeur du Paramètre a ; partant $ax = yy$, ou $a.y : : y.x$; ce qu'il fallait prouver.

COROLLAIRE

Dans la Parabole les quarrez des Ordonnées sont entr'eux comme les parties de l'Axe prises entre son sommet & la rencontre de ces mêmes Ordonnées.

Le Paramètre a est toujours le même ; mais x qui est l'Abscisse est plus petite ou plus grande, selon que l'Ordonnée[4] est plus près ou plus éloigné du sommet A. Or puisqu'on a toujours $yy = ax$, en quelque endroit que l'on prenne l'Ordonnée ; donc les yy ou les quarrez des Ordonnées sont entr'eux comme les x ou les Abscisses.

[3] Les mots *ordonnée* et *abscisse* ont été définis dans le chapitre I : l'*ordonnée* est la distance d'un point M de la courbe à l'axe ; l'*abscisse* est la distance du sommet de la courbe au projeté de M sur l'axe.
[4] Ici *ordonnée* désigne aussi le segment [PM].

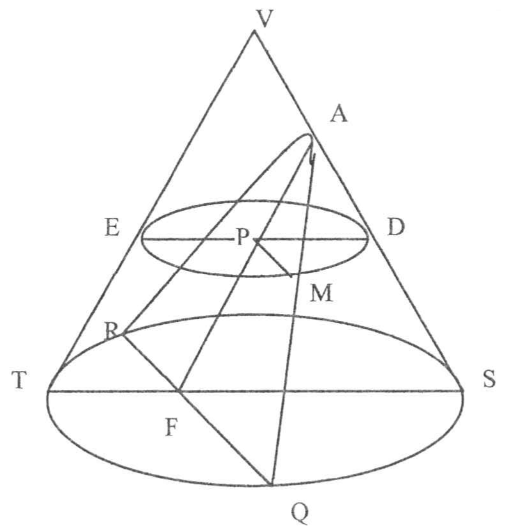
Maintenant il va démontrer que la courbe qu'il vient d'étudier est bien une parabole (p. 431):

THEOREME II

Cette Section Conique qu'on nomme Parabole *est la même Courbe que celle qu'on vient de définir & de décrire.*

SVT est un Cône droit coupé par un plan selon AF parallèle au côté TV ; il faut prouver que la Section QAR, qui est une Parabole, a les propriétéz de la ligne courbe dont on vient de parler. Quelle que soit la ligne QAR, concevons que sur la ligne AF, les lignes PM & QF sont des perpendiculaires sur AF, que je nomme l'axe de cette Courbe. PM & QF en sont ainsi les Ordonnées, par conséquent pour prouver que cette Parabole QAR est cette Courbe dont on vient de parler, il s'agit de prouver que les quarrés MP^2 & QF^2 & de toutes les autres Ordonnées, sont entr'eux comme les parties AP, AF de l'Axe qu'elles coupent ; car cela étant il faut, selon le Corollaire précédent, que la Courbe QAR soit une telle ligne.

Concevons que le Cône droit SVT est coupé au point M par un plan parallèle à sa base. Cette Section PME est donc un cercle. Soit SQT un autre cercle parallèle à DME. La ligne MP est l'Ordonnée de la Parabole QAR, & du cercle DME, étant perpendiculaire tant sur ED que sur AF, d'autant qu'elle est la commune Section du plan du cercle & de celui de la Parabole, qui par la construction, coupe celui du triangle à angles droits. Il en est de même de QF, qui est aussi Ordonnée tant au cercle qu'à la Parabole. Donc $DP\times PE = MP^2$ & $SF \times FT = FQ^2$: Donc $DP\times PE$. $SF \times FT$: : MP^2. FQ^2 ; mais PE = FT : Donc PM^2 . FQ^2 : : DP . SF. Or à cause des triangles semblables DPA & SFA, AP . AF : : DP . SF : Donc MP^2 . FQ^2 : : AP .AF : Donc par le Corollaire précédent QAR est de la nature de cette ligne dont on a parlé dans ce chapitre, qui est aussi la Section Conique qu'on appelle *Parabole.*



Cette démonstration est peut-être un peu plus difficile à suivre que celle du théorème précédent aussi allons-nous la commenter :

Dans le premier paragraphe, Lamy explique sa démarche. Le fait que PM et FQ soient perpendiculaires à AF vient de la précision qu'il a donnée lors de la description de la façon de couper un cône : « *Je suppose dans la suite, que le plan coupant, de quelque manière qu'il coupe le Cône, est perpendiculaire sur le plan de ce triangle* ».

Le deuxième paragraphe est la démonstration proprement dite. Dans celle-ci il utilise deux fois les théorèmes suivants : *Tout triangle inscrit dans un demi-cercle est un triangle rectangle.* Et *Dans un triangle rectangle la hauteur est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.* Quant à la notation a . b : : c . d , nous rappelons qu'elle signifie $a \div b = c \div d$.

Lamy va procéder de la même façon avec les deux autres sections coniques : après avoir donné la définition faisant intervenir le foyer, la directrice et le rapport de EM à MF (qui vaut 1 dans le cas de la parabole), il trouve une relation entre les abscisses et les ordonnées qui caractérise la courbe, puis il démontre que la courbe obtenue par section d'un cône par un plan est bien la même. La caractérisation algébrique lui permet aussi d'établir diverses propriétés métriques des sections coniques.

Comme nous l'avons fait remarquer lors de l'étude du précédent texte de Lamy, il n'y a pas de repère au sens habituel du terme : on ne repère pas de points par leurs coordonnées ; les mots *ordonnée* et *abscisse* n'ont pas la même signification que pour nous ; ils désignent des segments ou leurs longueurs.

Leonhard Euler

Dans notre chapitre 2, Euler nous a menés sur le chemin des divisions des courbes suivant leur ordre, et notre première étape s'est faite sur le premier ordre, celui des lignes droites.

Poursuivant notre lecture de *l'Introduction à l'Analyse infinitésimale*, nous trouvons alors, naturellement, les courbes du second ordre.

Comme le premier ordre des lignes ne comprend que la ligne droite dont la nature est déjà assez connue par les éléments de géométrie, passons aux lignes du SECOND ORDRE, et examinons les avec un peu plus d'attention, tant parce que ce sont les courbes les plus simples, que parce qu'elles sont un usage très étendu dans toute la haute géométrie. Ces lignes, qu'on désigne aussi sous le nom de SECTIONS CONIQUES, jouissent d'un grand nombre de propriétés remarquables, qui étaient connues des anciens géomètres ou qui ont été découvertes par les modernes. La connaissance en est jugée si nécessaire, que la plupart des auteurs ont accoutumé de les expliquer immédiatement après la géométrie élémentaire. (p. 39-40)

Ces courbes du second ordre, nous dit Euler, sont les sections coniques, celles dont l'étude était presque un des premiers objectifs de cette nouvelle géométrie, ainsi que nous l'avons noté. Nous pouvons comparer ce qui va suivre, à l'étude que Lamy a effectuée sur la parabole par exemple. Nous assistons ici à un renversement des choses. Euler considère d'abord les équations, pour retrouver les propriétés des courbes. Puisque ce sont des courbes du second ordre, il va étudier tout ce qui les rassemble, puis ce qui les différencie, à partir de leur équation générale.

54 – Toutes les lignes du second ordre seront comprises dans cette équation générale du second ordre

$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2$;

c'est-à-dire que nous rangerons parmi les lignes du second ordre, toutes les courbes que cette équation exprime, x et y désignant les coordonnées perpendiculaires. (...). Mais les courbes renfermées dans cette équation sont plus souvent connues sous le nom de *Sections coniques*, parce qu'elles résultent toutes de la section d'un cône. Ces différentes espèces de lignes sont le Cercle, l'Ellypse, la Parabole et l'Hyperbole, que nous déduirons dans la suite de l'équation générale.

Après une étude des propriétés générales des lignes du second ordre, à partir de cette équation, Euler précise :

131 – Mais, quoique toutes ces propriétés soient communes à toutes les lignes du second ordre, cependant elles diffèrent beaucoup entre elles par leur figure ; c'est pourquoi il convient de les distribuer en différents genres, afin d'avoir plus de facilité pour en distinguer les différentes figures, et pour découvrir les propriétés qui conviennent à chaque genre particulier.

Pour découvrir ces propriétés particulières, Euler s'attache d'abord à transformer la forme de l'équation, en choisissant judicieusement les axes. Le mot « judicieusement » n'est pas superfétatoire, et c'est là que l'on trouve la touche du bon mathématicien, même du bon

géomètre. C'est la connaissance des courbes, l'idée de jouer des symétries apparues, qui vont permettre le choix du « bon repère ». C'est aussi cela la géométrie des coordonnées.
Ainsi, choisissant un « bon » axe des abscisses et son origine, Euler est arrivé à la conclusion que toutes les courbes de la famille du second ordre ont une équation de la forme : $yy = a + bx + \gamma xx$.

> 137 – Nous avons donc trois espèces de lignes du second ordre, l'Ellypse, la Parabole et l'Hyperbole, qui différent tellement entre elles, qu'il est impossible de les confondre ensemble. Car leur différence essentielle consiste dans le nombre de leurs branches infinies ; l'Ellypse n'en a aucune et est renfermée toute entière dans un espace fini, la Parabole en a deux, et l'Hyperbole quatre. Ainsi, après avoir considéré en général, dans le chapitre précédent, les propriétés des sections coniques, il nous reste à examiner les propriétés particulières de chaque espèce.

Ces courbes ont été réunies par la force de l'équation, malgré leurs différences visuelles. Là où le géomètre met l'accent sur la vision géométrique de la section d'un cône, pour en déduire des propriétés, l'analyste Euler, met l'accent sur la forme de l'équation.
Suivons le dans cette voie.
En donnant diverses valeurs à a, b et γ, on obtient différentes sortes de courbes, la différence la plus marquante étant obtenue par la valeur de γ, qui peut être positive, négative, ou nulle. Euler a montré effectivement que c'est là que se tient la différence sur les branches infinies.

Examinons d'abord le cas où γ a une valeur négative.
Parmi les valeurs possibles, il en est une qui donnera une sorte d'équation qui vous sera sûrement familière. En effet, lorsque $\gamma = -1$, l'équation obtenue s'écrira : $yy = a + bx - xx$, où l'on reconnaîtra : $x^2 + y^2 - bx - a = 0$.
Question : Vous avez peut-être reconnu un cercle. Pouvez-vous préciser son centre et son rayon ? Est-ce toujours un cercle ? que peut-il se passer ?

Euler a signalé dans son étude générale, que parfois, pour certaines abscisses il n'y avait pas d'ordonnée . Il ne s'y attarde donc pas ici dans cette étude particulière. En revanche, il expose clairement que les cercles sont des cas particuliers d'Ellipse, celles-ci correspondant donc au cas où γ prend une valeur négative.

En réalité, Euler n'est pas encore très à l'aise avec la notation des valeurs négatives[5] ; il préfère donc noter cette équation : $yy = a + bx - \gamma xx$, où γ a une valeur positive.

Etudions cette courbe à la manière d'Euler.

Tout d'abord, en choisissant pour axe des abscisses un diamètre de l'ellipse et pour origine des abscisses son centre, on peut écrire l'équation de l'ellipse sous une forme encore plus simple : $y^2 = \alpha - \beta x^2$, où β est strictement positif. Euler met alors en évidence des éléments caractéristiques de cette courbe.

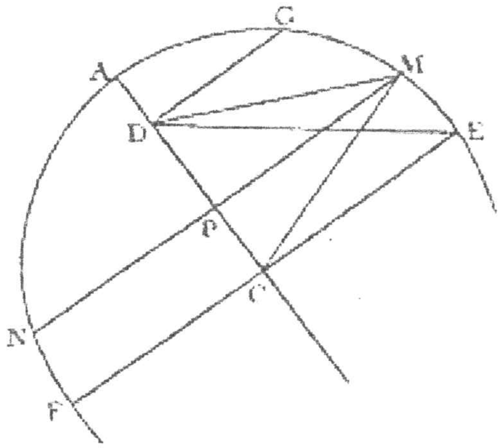


Fig. 29.

Lisons Euler :

126. Soit donc CA et CE deux demi-diamètres conjugués d'une section conique qui se coupent au centre C à angle droit ; on les nomme ordinairement DIAMETRES PRINCIPAUX. Soit l'abscisse CP $= x$, l'appliquée PM $= y$, nous aurons, comme nous l'avons vu, $yy = \alpha - \beta xx$; et en supposant les demi-diamètres principaux AC $= a$, CE $= b$, nous trouverons $\alpha = bb$, et $\beta = \frac{a^2}{b^2}$; ce qui donne $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$.

[...]

127. Si du centre C, que nous avons pris pour origine des abscisses, nous menons la droite CM, elle sera $= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} + xx}$; ce qui fait voir que, si b=a, ou CE = CA, on aura CM $= \sqrt{bb} = b = a$; dans ce cas toutes les droites menées du centre C à la courbe seront donc égales entre elles ; & comme c'est là la

[5] Nous vous renvoyons par exemple à notre deuxième promenade : *Quand les moins que rien et les imaginaires mènent au réel.*

propriété du cercle, il est clair que la section conique dont les deux diamètres conjugués principaux sont égaux entre eux, est un cercle, dont l'équation rapportée aux coordonnées perpendiculaires sera, en faisant CP=x et PM=y, $yy = a^2 - x^2$, & le rayon de ce cercle sera CA=a.

§128 Mais si b n'est pas égal à a, on ne pourra jamais avoir pour CM une expression rationnelle en x. Cependant il y aura sur l'axe un autre point D d'où toutes les droites[6] DM menées à la courbe peuvent être exprimées d'une manière rationnelle ; pour le trouver, faisons CD = f ; à cause de DP = f − x, on aura

$DM^2 = ff - 2fx + x^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} = b^2 + f^2 - 2fx + \frac{(a^2 - b^2)x^2}{aa}$; expression qui deviendra un quarré, si $ff = \frac{(aa - bb)(bb + ff)}{aa}$, ou si $0 = aa - bb - ff$; ce qui donne $f = \pm\sqrt{(a^2 - b^2)}$. Il y aura donc sur l'axe AC un double point tel que nous le cherchons, & l'un & l'autre sera à une distance du centre $CD = \sqrt{(a^2 - b^2)}$. On aura

$DM^2 = aa - 2x\sqrt{(a^2 - b^2)} + \frac{(aa - bb)x^2}{aa}$, & $DM = a - \frac{x\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$.

[…]

129. Cette propriété remarquable, qui convient aux points D déterminés comme nous venons de le faire, a paru digne d'attention ; & comme ces mêmes points du diamètre principal ont encore beaucoup d'autres propriétés qui les distinguent, on leur a donné des noms particuliers. On les appelle FOYERS de la section conique.

La lecture de ce texte appelle quelques commentaires :

Dans le texte ci-dessus, vous avez pu constater qu'Euler manipule essentiellement des grandeurs positives. A la ligne 3 du paragraphe 128 il écrit ainsi DP = f − x.

1) Est-ce que vous écririez cette égalité dans tous les cas ?

Dans le cas de la figure proposée auriez-vous fait la même chose ?

2) Si non, rédigez à la manière actuelle la fin du calcul que fait Euler.

Dans le chapitre suivant, Euler dégage les propriétés géométriques de l'ellipse à partir de son équation. Parmi celles-ci, nous vous proposons d'examiner celle qui permet de construire concrètement une ellipse. Les foyers sont notés F et G.

140. Si on mène de chaque foyer à un point M de la courbe les droites FM & GM ; nous avons vu ci-dessus qu'on aurait $FM = AC - \frac{CF.CP}{AC} = a - \frac{x\sqrt{(aa - bb)}}{a}$, & $GM = a + \frac{x\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$; & par conséquent FM+GM=2a.

[6] Le mot « droite » désigne à la fois le segment et sa longueur.

Donc, si à un point quelconque M de la courbe on mène des deux foyers les droites FM & GM, leur somme sera toujours égale au plus grand axe AB=2a ; ce qui nous fait connaître une propriété remarquable des foyers, & nous fournit en même temps un moyen facile de décrire mécaniquement l'Ellypse.

Euler vient donc de mettre en évidence une propriété intéressante des foyers. Nous vous proposons en exercice de démontrer qu'il s'agit d'une propriété caractéristique de l'ellipse, c'est-à-dire que, étant donnés deux points F et F' et un réel positif a, l'ensemble des points M du plan vérifiant FM + F'M = 2a est une ellipse.

Indication : On travaillera en utilisant des coordonnées dans un repère bien choisi.

Après avoir étudié le cas où γ prend une valeur négative, revenons aux autres cas.

Lorsque $\gamma = 0$, nous obtenons une équation du type $yy = a + bx$, dans laquelle vous reconnaîtrez une parabole.

Examinons maintenant le cas où $yy = a + bx + \gamma xx$, γ prenant une valeur positive.

Attachons nous particulièrement à l'étude de la particularité des quatre branches infinies. Lisons Euler sur ce sujet :

134- En faisant x infini, dans ce cas le terme γxx deviendra infiniment plus grand que les autres a + bx, et par conséquent l'expression yy = a + bx + γxx obtient une valeur positive ; l'appliquée y aura pareillement un double valeur infiniment grande, l'une positive, l'autre négative ; la même chose arrive si on fait $x = -\infty$; dans ce dernier cas, l'expression yy = a + bx + γxx aura encore une valeur infinie positive. C'est pourquoi, lorsque γ est une quantité positive, la courbe a quatre branches qui s'étendent à l'infini ; deux qui répondent à l'abscisse $x = +\infty$, et deux à l'abscisse $x = -\infty$. Ces sortes de courbes qui ont quatre branches infinies, sont censées constituer un genre de lignes du second ordre, et sont connues sous le nom d'HYPERBOLES.

Questions : Cette démonstration vous satisfait-elle ?

Vous avez l'habitude, probablement, d'étudier des limites de fonctions en l'infini.

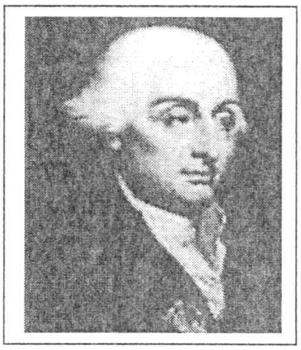
Pouvez-vous transformer l'équation de l'hyperbole en l'union de deux courbes de fonctions, et réécrire alors la démonstration.

Que pensez-vous de la façon dont Euler démontre finalement que y devient infini ?

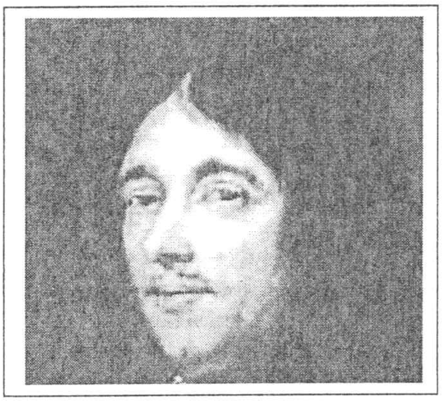
En utilisant des principes équivalents, essayez de démontrer, à la façon d'Euler, que les paraboles ont seulement deux branches infinies, tandis que les ellipses n'en ont pas, c'est à dire "n'ont pas de point à l'infini".

L. Euler

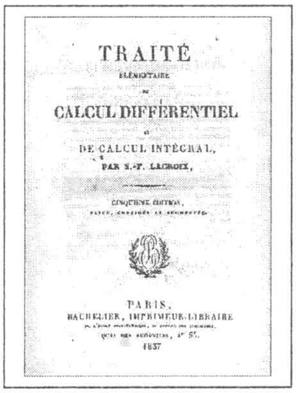
R. Descartes



J.L.Lagrange



P. de Fermat

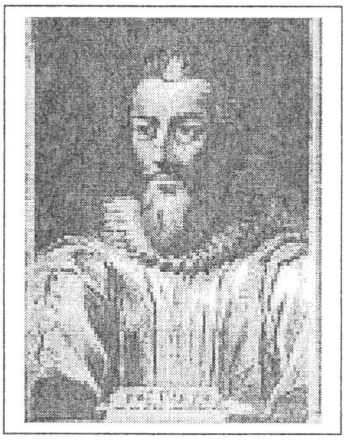


TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
DE
CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET
DE CALCUL INTÉGRAL,
PAR S.-F. LACROIX,

CINQUIÈME ÉDITION,
REVUE, CORRIGÉE ET AUGMENTÉE.

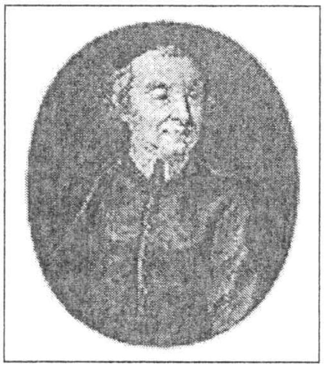
PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.
1837

Traité de Lacroix



F. Viète

G. Lamé



B. Lamy

5 . Des différents visages de la géométrie analytique

Au terme de cette promenade, revenons aux questions qui nous étaient posées, ou que nous avons pu rencontrer au long du chemin. Nous nous appuierons pour cela sur un manuel belge, « *Cours de géométrie analytique plane* », par V. Falisse, à l'usage de l'enseignement moyen, daté de 1873. A la même époque, en France, nous n'avons trouvé ce genre de manuel qu'au niveau des classes de mathématiques spéciales. Nous trouvons ici, au contraire, une présentation assez élémentaire, de ce que l'on classe sous l'appellation « géométrie analytique », en cette fin de XIX° siècle, à la fois très ancrée sur les différentes traditions depuis Descartes, et très proche de nos conceptions contemporaines. Nous y trouverons une sorte de rétrospective de nos différentes étapes, une sorte de panorama sur les différents points de vue aperçus.

Comment définir la « géométrie analytique » ?

1- Objet de la géométrie analytique – La géométrie analytique a pour objet de montrer comment on doit s'y prendre pour appliquer l'algèbre à la résolution des questions de géométrie, et réciproquement comment on parvient à traduire, en géométrie, les résultats de l'analyse.

2- Pour mesurer les quantités d'une certaine espèce, on les compare à une grandeur de la même espèce que l'on prend pour unité, et on les représente ainsi par des nombres. On conçoit par là que les questions de géométrie peuvent se ramener à des questions de nombres, et qu'une relation entre les dimensions d'une figure n'est autre chose qu'une équation entre les nombres qui les mesurent.

(p. 1)

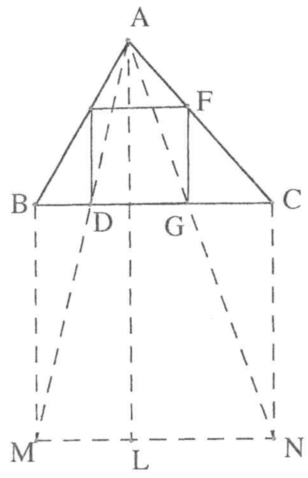
Nous retrouvons là l'objet de La Géométrie de Descartes : se ramener à des relations entre nombres, par le choix d'une unité.

Qu'y a-t-il d'analytique dans la géométrie analytique ?

Nous y retrouvons aussi l'analyse, qui justifie à elle seule le nom « d'analytique ».

Eclaircissons ce qui précède par un exemple facile à traiter.

Problème : Inscrire un carré dans un triangle. Soit ABC le triangle donné. **Supposons le problème résolu**, et soit EFGD le carré cherché. Représentons par a la base BC du triangle, par h, la hauteur AH, et par x le côté ED du carré.



Les triangles semblables ABC et AEF donneront $\frac{BC}{EF} = \frac{AH}{AI}$

Ou $\frac{a}{x} = \frac{h}{h-x}$, d'où l'on tire : $x = \frac{ah}{a+h}$, ou, ce qui revient au même $\frac{a+h}{h} = \frac{a}{x}$.

La distance x est donc une quatrième proportionnelle aux trois longueurs a +h, h et a. pour construire cette quatrième proportionnelle, faisons sur le côté BC le carré BCMN en deux points qui seront précisément les sommets D et G du carré cherché. En effet, les triangles semblables AMN et ADG donnent : $\frac{AL}{AH} = \frac{MN}{DG}$ ou $\frac{a+h}{h} = \frac{a}{DG}$. Donc DG est x.

(p. 2)

Nous voyons ici apparaître la construction géométrique des lignes résultant d'une opération algébrique, à la manière de Descartes.

Comme il s'agit aussi d'un manuel d'enseignement, nous allons trouver, à partir de cet exemple, la méthode à suivre pour résoudre par l'algèbre un problème de géométrie, explicitée très clairement :

> Sans avoir besoin de multiplier les exemples, on voit, par ce qui précède, que la résolution par l'algèbre d'un problème de géométrie se compose de trois parties :
> 1° La mise en équation ; 2° la résolution des équations obtenues ; 3° la construction des formules trouvées.
> De ces trois parties, la seconde est simplement une question d'algèbre, et, par conséquent, nous n'avons pas à nous en occuper ici : quant aux deux autres, elles sont essentiellement du ressort de la géométrie analytique ; mais avec cette différence que la mise en équation d'un problème n'est soumise à aucune règle certaine, tandis que la construction des racines des équations que l'on obtient est assujettie à une méthode régulière et uniforme. En conséquence, nous allons nous occuper d'abord de la construction des expressions algébriques, puis nous ferons connaître les préceptes qu'il convient de suivre pour mettre en équation les problèmes de géométrie.
>
> (p. 3)

Pour compléter cette mise en forme, il faut prendre conscience de ce qui fait aussi l'efficacité de la méthode : « supposer le problème résolu », autrement dit, la part analytique de cette géométrie. Nous avons souvent oublié cette part de la recherche, habitués que nous sommes maintenant à manipuler cette sorte de calcul.

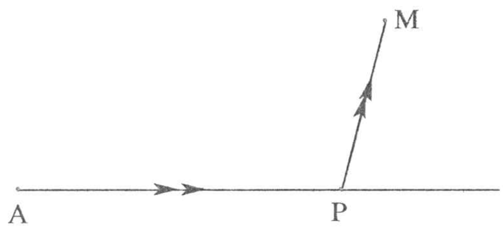
> MISE DES PROBLEMES EN EQUATION .- Il n'y a pas de règle fixe pour mettre en équation les problèmes de géométrie ; tout ce qu'on peut dire de plus général sur ce sujet, se réduit au précepte suivant :
>
> On suppose le problème résolu, on trace toutes les lignes connues et inconnues dans la position qu'elles doivent occuper les unes les autres, ainsi que les lignes auxiliaires que l'on jugera nécessaires pour établir leur dépendance mutuelle ; on représentera par les premières lettres de l'alphabet les nombres qui mesurent les lignes connues, et par les dernières lettres de l'alphabet les nombres qui mesurent les lignes inconnues ; puis sans faire aucune distinction entre les unes et les autres, on établira les équations qui, d'après l'énoncé du problème, et les théorèmes de géométrie, lient entre elles les différentes lignes. On formera ainsi autant d'équations qu'en comporte l'énoncé de la question.
>
> (p. 20)

Outre la mise en exergue de la part analytique de la recherche, Falisse nous rappelle ici que pour « calculer » sur des lignes, nous devons les nommer par des lettres, aussi bien les connues que les inconnues, ce que nous devons, rappelons le, à François Viète, même si le choix des lettres est une part de l'héritage de Descartes.

Géométrie des coordonnées ?

Nous avons pu noter lors de nos premières étapes que les axes de coordonnées, ou bien même les coordonnées, n'ont pas été de suite liés à cette géométrie, contrairement à ce que l'on pourrait imaginer. Il n'y en avait pas, au sens mathématique du terme chez Descartes. Les coordonnées sont apparues, peu à peu, souvent avec un repère lié à la figure étudiée, parfois dans un repère choisi à l'avance ; elles sont alors associées à des « changements de repères judicieux », comme nous l'avons vu chez Euler. La notion de coordonnées elle-même reste longtemps considérée comme la mise en relation d'une longueur de segment avec une autre longueur de segment. Le geste est présent.

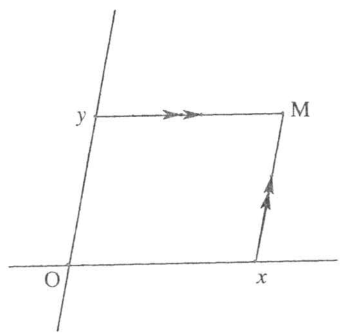
Premier geste :



On choisit AP = x, puis on élève PM =y, selon une certaine direction. PM est alors souvent nommé l'appliquée.

Deuxième geste :

Dans la conception plus contemporaine, les coordonnées de M sont un couple de nombres choisis, et reportés sur deux axes de coordonnées.



Le geste est totalement différent ; la hiérarchie entre x et y, entre l'abscisse et l'ordonnée, disparaît plus ou moins. C'est peut-être là une difficulté supplémentaire.

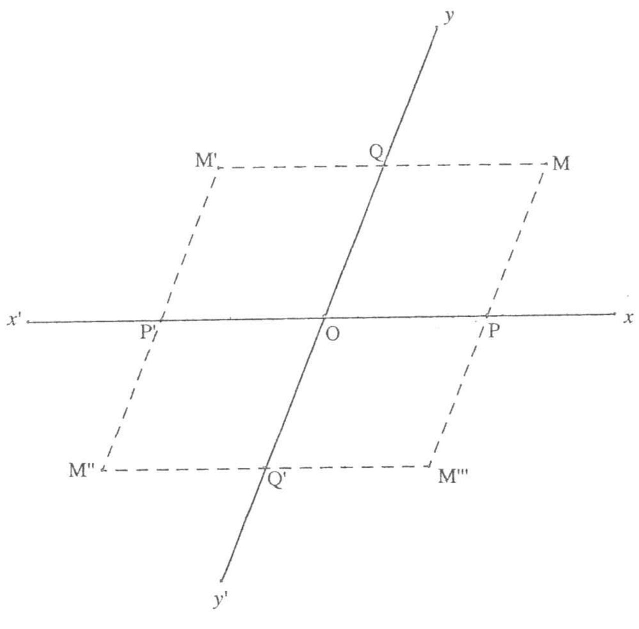
Revenons à notre texte de Falisse qui résume bien cette nouvelle conception.

Résolution de problèmes par la mise en équation :

Tout est alors prêt pour déterminer les relations entre les coordonnées et résoudre un problème en géométrie analytique, à l'aide des équations des lignes considérées.

Il se pourrait que la solution du problème consiste en un seul point, qu'il faudra reconnaître. Et l'on pourrait parler de « l'équation » d'un point, nom auquel nous sommes peu habitués, mais qui semble tout à fait approprié. Ceci se passe dans ce qu'on appelle en général les problèmes déterminés.

EQUATIONS DU POINT. Si l'on convient de représenter généralement par x et y l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque, le point particulier M dont l'abscisse OP = a, et l'ordonnée MP = OQ = b, sera représenté par le système des deux équations x = a, y = b ; celles du point M′ seront x = – a et y = + b ; celles du point M″ x = – a, y = – b ; et pour le point M‴ on aura x = a, y = – b. Il est facile de voir que les coordonnées du point P sont x = a, y = 0 ; celles du point Q, x = 0 , y = b ; et celles de l'origine x = 0, y = 0.



(…)

Remarque : On désigne souvent, pour abréger, par point (a, b), point (x', y'), les points qui ont pour coordonnées x = a, y = b, ou x = x', y = y'.

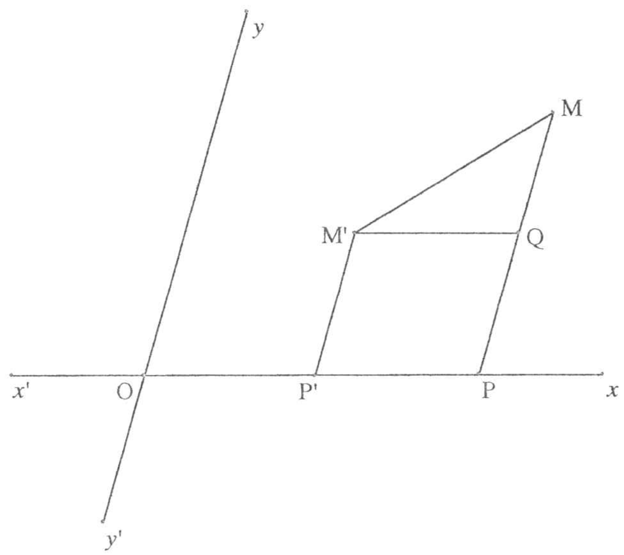
(p. 31)

Puisqu'il s'agit de mettre en relation des longueurs, la notion de distance est évidemment utile. Elle est commune lorsque les axes sont rectangulaires. Notre auteur belge souligne qu'il est possible aussi de calculer les distances dans un repère où les axes sont obliques. Il suffit d'utiliser ce que nous nommons depuis un passé très récent la formule d'Al Kashi.

Exercice :

Supposons que l'angle $\widehat{XOY} = \theta°$, et que les points M et M' aient respectivement pour coordonnées (x ; y) et (x' ; y').

Calculer MM'.

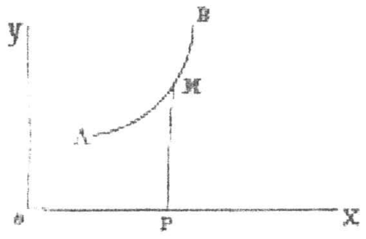


Nous sommes à la fin du XIX° siècle, et comme nous l'avons souvent souligné, les négatifs posent quelques problèmes. Dans l'exercice précédent, « il faut faire attention aux signes des coordonnées ». Ceci se passera par exemple si les points M et M' ne sont pas dans le même quadrant, pour le calcul de certaines longueurs.

Lorsque le problème est indéterminé, sa solution réside en général en un lieu géométrique.

> Un lieu géométrique est l'ensemble de tous les points qui jouissent d'une propriété commune. En général ces points se succèdent avec continuité sur une ligne droite ou courbe.
>
> (p. 36)

Pour définir ce lieu, au moins depuis Euler, la notion de fonction est plus ou moins sous-jacente.

> Soit une ligne plane quelconque AB, qui représente un lieu. Traçons dans le plan deux axes OX et OY, et représentons par x et y les deux coordonnées OP et MP d'un point M quelconque du lieu ; quand le point M se meut sur la ligne, les deux coordonnées varient simultanément, et si l'on donne à l'abscisse une valeur OP, l'ordonnée du point de la courbe qui a pour abscisse OP est complètement déterminée. (...) Il résulte de là que la variation de l'abscisse entraîne celle de l'ordonnée ; ainsi les deux coordonnées sont fonctions l'une de l'autre.
>
> 
>
>
> (...)
>
> L'équation d'un lieu géométrique est l'expression de la relation constante qui existe entre les coordonnées de chacun de ses points .
>
> (p. 37)

C'est là que réside sûrement l'essence et la puissance de la géométrie analytique. Nous pourrons conclure, avec V. Falisse :

> Toute la géométrie analytique est fondée sur la corrélation qui, ainsi que nous venons de le montrer, existe entre une équation et un lieu géométrique. De là un double but à remplir. Si une courbe est définie par une propriété géométrique, nous aurons à déduire de cette propriété l'équation qui devra être satisfaite par les coordonnées d'un point de la courbe. Si, d'un autre côté, on nous donne une équation, nous aurons à déterminer la forme de la courbe qu'elle représente, ainsi que les propriétés géométriques de cette courbe.
>
> (p. 41-42)

Nous sommes restés à un niveau élémentaire de cette géométrie, qui, au cours du temps s'est aussi nourrie des évolutions de ce que l'on nomme géométrie pure, qu'elle a nourrie aussi. Elle s'est emparée de la géométrie projective, de la géométrie vectorielle, a conquis bien sûr l'espace. Elle s'est aussi installée dans notre enseignement secondaire, avec ses heures de gloire et ses déclins. Ce n'est pas seulement une question de mode, mais aussi d'efficacité, de philosophie, quand elle s'adresse à la formation de l'esprit géométrique, à la nature même de ce qu'est la géométrie : nombres et /ou figures ? Au demeurant elle est devenue incontournable, mais en est-on à « aucun problème qui ne soit résolu » ?

ANNEXE

Quelques exercices pour mieux appréhender les différents visages de la géométrie analytique :

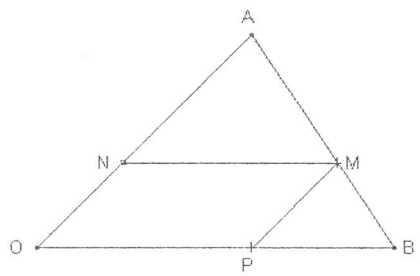
Un repère lié à la figure :

On donne un angle O d'un triangle, et la somme des côtés[1] qui le comprennent ; trouver le lieu du point M où le côté opposé à cet angle est partagé dans un rapport donné $m : n$.

(Exercice proposé dans le livre de V.Falisse)

Correction donnée par Falisse :

Prenons pour axes les côtés qui comprennent l'angle ; soit $\frac{AM}{BM}=\frac{m}{n}$ le rapport donné. On déduit de la similitude des triangles $OB=\frac{(m+n)x}{m}$, $OA=\frac{(m+n)y}{n}$. Portant ces valeurs dans l'équation de condition OB + OA = s, on trouve pour l'équation du lieu $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=\frac{s}{m+n}$; c'est une ligne droite.



Des problèmes de lieu :

Un problème de lieu résolu grâce à la géométrie analytique :

Trouver le lieu des centres des rectangles inscrits dans un triangle.

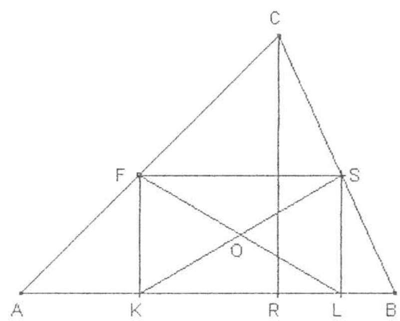
(Exercice proposé dans le livre de Falisse)

Correction proposée par Falisse :

Prenons CR et AB pour axes. Soient CR = h, BR = a, AR = b.

Les équations de BC et de AC seront :

$\frac{y}{h}+\frac{x}{a}=1$, $\frac{y}{h}-\frac{x}{b}=1$. Soit $y=\beta$ l'équation d'une parallèle FS à la base ; nous trouverons les abscisses des points S et F, où cette parallèle rencontre les droites BC et AC, en faisant $y=\beta$ dans leurs équations. Nous tirons de la première



[1] Il faut comprendre « somme des **longueurs** des côtés ». Les nombres m et n sont bien sûr positifs.

$\frac{\beta}{h}+\frac{x}{a}=1, \quad x=RL=a\left(1-\frac{\beta}{h}\right)$ et de la seconde $\frac{\beta}{h}-\frac{x}{b}=1, \quad x=RK=-b\left(1-\frac{\beta}{h}\right)$.

Des abscisses des points F et S, on déduit celle du point milieu de FS, $x=\frac{a-b}{2}\left(1-\frac{\beta}{h}\right)$, qui est évidemment l'abscisse du centre du rectangle ; d'ailleurs l'ordonnée de ce centre est $y=\frac{1}{2}\beta$.

Pour trouver la relation qui existe entre cette abscisse et cette ordonnée, quelque soit β, il suffit d'éliminer β entre leurs expressions. En portant, par exemple, dans la première, la valeur $\beta=2y$, tirée de la seconde, on trouve $2x=(a-b)\left(1-\frac{2y}{h}\right)$, ou $\frac{2x}{a-b}+\frac{2y}{h}=1$, pour l'équation du lieu cherché. C'est une droite qui joint le milieu de la hauteur au milieu de la base[2].

Un exercice pour « faire de la géométrie analytique » :

On donne deux axes de coordonnées rectangulaires : x'Ox et y'Oy, le point A sur x'Ox tel que $\overline{OA}=6$, le point B sur y'Oy tel que $\overline{OB}=3$.

1° Quelle est l'équation de la droite AB ?

2° Un point M variable décrit la droite AB. On désigne son abscisse par x et son ordonnée par y. Soient P et Q les projections de M sur les axes x'x et y'y et N le point intérieur au segment PQ tel que $\frac{NP}{NQ}=\frac{1}{2}$.

Calculer en fonction de x et y les coordonnées de N que l'on désignera par X et Y.

3° Quelle relation lie X et Y ? En déduire le lieu de N que l'on construira avec précision.

(d'après le Concours d'entrée à l'Ecole Normale de Besançon, 1950.

tiré d'un recueil d'annales : « Les problèmes d'algèbre au BEPC et au B.E et au concours d'entrée à l'E.N ».)

Correction proposée dans ce recueil :

1° Equation de AB : fonction y = ax + b, b = +3. Les coordonnées de A vérifient l'équation $y = ax + 3$ ou $0 = 6a + 3$, d'où $a=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{x}{2}+3$.

[2] Ici aussi, de manière implicite, tous les nombres sont positifs. Le lieu cherché est en réalité un segment de la droite trouvée.

2° La similitude des triangles[3] QNN'' et QPO permet d'écrire $\frac{NN''}{PO}=\frac{QN}{QP}$ ou $\frac{X}{x}=\frac{2}{3}$;

$X=\frac{2x}{3}$. Et $\frac{QN''}{QO}=\frac{QN}{QP}$ ou $\frac{y-Y}{y}=\frac{2}{3}$, d'où $Y=\frac{y}{3}$.

3° y est lié à x par la relation $y=-\frac{x}{2}+3$, donc $Y=\frac{1}{3}\left(-\frac{x}{2}+3\right)=-\frac{x}{6}+1$, mais $X=\frac{2x}{3}$. On peut donc avoir $X+4Y=\frac{2x}{3}-\frac{4x}{6}+4$ ou $X+4Y=4$. Cette relation peut se transformer en $Y=-\frac{X}{4}+1$. Les points N ont leurs coordonnées liées par la relation $Y=-\frac{X}{4}+1$. Ils se déplacent donc sur une droite d'équation $Y=-\frac{X}{4}+1$, limitée aux points x = 0, y = +1 et x = +4, y = 0, sur les axes OY et OX, puisque M se déplace sur BA.

Un repère choisi « judicieusement » et l'apparition d'une fonction :

Soit un cercle de centre O et de rayon 2 (unité : le centimètre). On trace, par O, deux axes rectangulaires x'x et y'y. x'x coupe ce cercle en A et B. Une droite passant par A coupe le cercle en C et Oy en D. On suppose que OAC = 60°.

1° Calculer les coordonnées des points C et D.

2° Quelle est la fonction représentée par la droite AD ?

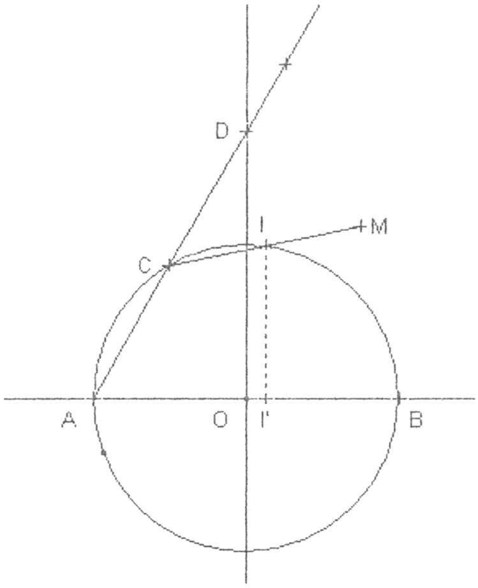
3° Soit M un point d'abscisse a et d'ordonnée b. Calculer a et b sachant que l'abscisse du milieu I du segment CM est égale à $+\frac{1}{2}$ et que le point I se trouve sur le demi-cercle ACB.

(B.E. Toulouse, 1950.

tiré d'un recueil d'annales : « Les problèmes d'algèbre au BEPC et au B.E et au concours d'entrée à l'E.N ».)

[3] Le point N'' est le projeté de N sur l'axe y'Oy.

Correction proposée dans ce recueil :



Remarque : cette correction s'appuie largement sur les propriétés géométriques de la figure. Nous vous laissons le soin d'en chercher une autre n'utilisant que l'outil de la géométrie analytique (des éléments de corrigé sont donnés en fin d'ouvrage).

Démonstration d'une propriété géométrique :

On considère un parallélogramme ABCD et un trapèze IJKL de bases (IJ) et (KL) inscrit dans le parallélogramme de façon que $I \in [AB]$, $K \in [BC]$ et $L \in [CD]$, I, J, K et L étant différents des sommets du parallélogramme.

On se propose de montrer que les droites (IK), (JL) et (AC) sont concourantes.

On considère le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

1° Montrer qu'il est possible d'écrire J(a,0), I(0,b), K(1,c) et L(d,1) avec :

a, b, c et d éléments de]0, 1[.

$a(1-c) = b(1-d)$ (1)

2° Ecrire l'équation de (JL) et calculer les coordonnées du point d'intersection de (JL) et (AC) en fonction de a, b, c, d.

3° Reprendre la question 2° en remplaçant la droite (JL) par la droite (IK).

4° Conclure grâce à la relation (1).

(Géométrie 1ère S et E, collection Terracher. 1991)

Eléments de corrigé des questions posées au cours des chapitres

Chapitre I

Exercice Lamy :

On aurait pour équation de cercle :

$$\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+y^2=\frac{m^2}{4}$$

Chapitre III

Exercices « à la façon de Lacroix »

197. **Questions :** A(2 ;4) et B(5 ;3)

Première façon :

$$\left.\begin{array}{l}4=2a+b\\3=5a+b\end{array}\right\}\text{d'où } y=\frac{3-4}{5-2}x+\frac{5\times4-2\times3}{5-2} \quad \text{soit } y=-\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$$

Deuxième façon :

$$y-4=\frac{3-4}{5-2}(x-2) \quad \text{soit } y-4=-\frac{1}{3}(x-2)$$

198. **Questions :** A(7 ;4)

$y-4=5(x-7)$ soit $y = 5x-31$

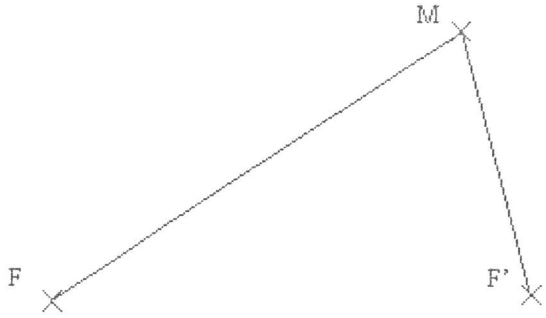
199. **Questions :**

Non, on aurait comparé les coefficients directeurs.

a)
$$x=\frac{4-2}{-5-3}=-\frac{1}{4}$$
$$y=\frac{-5\times4-3\times2}{-5-3}=\frac{13}{4}$$

b) $a=a'$, les droites sont parallèles et elles sont ici distinctes, il n'y a donc pas de point d'intersection.

Chapitre IV



Regardons quel est l'ensemble des points M du plan tels que $FM + F'M = 2a$.

Choisissons un repère « judicieux » : l'axe des abscisses est porté par la droite (FF'), l'origine est le milieu de [FF']. Notons y l'appliquée de M. On peut écrire

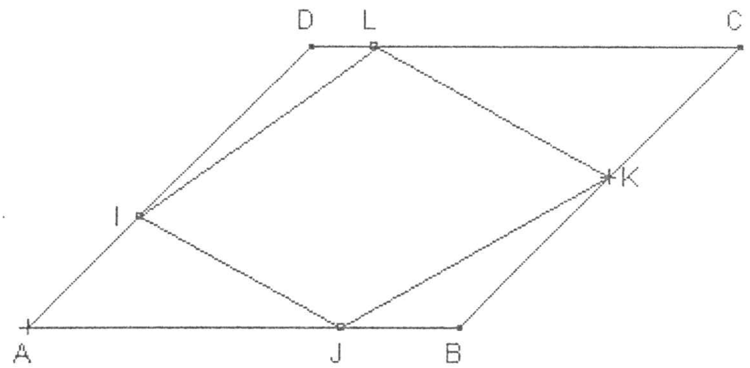
$$FM^2 = (f-x)^2 + y^2 \text{ et } F'M^2 = (f+x)^2 + y^2$$

On a donc : $\sqrt{(f-x)^2 + y^2} + \sqrt{(f+x)^2 + y^2} = 2a$

En élevant deux fois au carré on obtient $y^2 = b^2 - \dfrac{a^2}{b^2}x^2$

ce qui est l'équation d'une ellipse « à partir des axes conjugués principaux ».

Annexe



1° Dans le repère indiqué $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ il est facile de donner les coordonnées des points de la figure : A(0,0) ; B(1,0) ; C(1,1) ; D(0,1) ; I(0,b) ; J(a,0) ; K(1,c) ; L(d,1).

La relation (1) est la traduction de la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$.

2° Equation de (JL) : $y = \dfrac{1}{d-a}(x-a)$; équation de (AC) : $y = x$; le point G, intersection de ces deux droites a donc pour coordonnées : $x = \dfrac{a}{1+a-d}$; $y = \dfrac{a}{1+a-d}$.

3° Equation de (IK) : $y = (c-b)x + b$; le point H, intersection de (IK) et (AC) a donc pour coordonnées : $x = \dfrac{b}{1-c+b}$; $y = \dfrac{b}{1-c+b}$

4° Les points G et H sont confondus si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées, c'est-à-dire :

$$\frac{a}{1+a-d} = \frac{b}{1-c+b} \Leftrightarrow a(1-c+b) = b(1+a-d) \Leftrightarrow a - ac + ab = b + ab - bd \Leftrightarrow a(1-b) = b(1-d)$$

et on reconnaît la relation (1). Les points G et H sont donc confondus, et, par conséquent, les droites (IK), (JL) et (AC) sont concourantes.

Biographies :

DESCARTES René (1596-1670) est né en Touraine et mort Stockholm. Il fut un des fondateurs de la biologie, un physicien de talent, un mathématicien et un des premiers grands philosophes modernes. A partir de 1628 il s'installa en Hollande pour pouvoir travailler en paix à son oeuvre scientifique et philosophique. Il publia en 1637 son "*Discours de la Méthode*" dont "*La Géométrie*", seul ouvrage de Descartes sur les mathématiques, est un appendice.

EULER Leonhard (1707-1783) est né à Bâle. Son père, pasteur calviniste d'un village voisin mais ancien élève de Jacques Bernoulli, l'initia aux mathématiques. Entré à l'Université de Bâle pour y étudier la théologie, Euler attira l'attention de Jean Bernoulli par ses aptitudes en mathématiques et devint l'ami de ses fils Nicolas, Daniel et Jean. Ceux-ci, établis à l'Académie de Saint-Pétersbourg le firent venir en Russie. Euler resta à Saint-Pétersbourg de 1727 à1741 puis se rendit à l'Académie de Berlin sur l'invitation du roi de Prusse où il resta jusqu'en 1766, date à laquelle Catherine II de Russie l'invita à revenir à Saint-Pétersbourg où il resta jusqu'à sa mort. Euler était doué d'une mémoire phénoménale, d'une intelligence aiguë et universelle et, bien qu'il fût devenu pratiquement aveugle en 1767, il continua de travailler jusqu'à sa mort. Il fut un mathématicien particulièrement fécond dans toutes les branches des mathématiques : théorie des nombres, analyse, nombres complexes, trigonométrie, équations différentielles, géométrie analytique et différentielle des courbes et des surfaces. C'est à lui que l'on doit l'usage des symboles e, π et i, la notation fonctionnelle fx, le symbole $\sum$ pour indiquer la sommation.

FERMAT Pierre de (1601-1665) est né à Beaumont-de-Lomagne et mort à Castres. Fils d'un riche négociant en cuir, Pierre de Fermat fait des études de droit à Toulouse, puis Bordeaux et enfin Orléans. En 1631 il achète une charge de conseiller au Parlement de Toulouse. C'est un amateur en mathématiques, au sens élogieux du terme : il lit et annote les œuvres de Diophante traduites par Bachet de Méziriac (c'est dans la marge de son exemplaire qu'est énoncé son fameux théorème), il correspond avec le cercle de Mersenne, en particulier avec Blaise Pascal avec qui il établit les prémisses du calcul des probabilités. Fermat a été un précurseur dans de nombreux domaines : théorie des nombres, probabilités, calcul infinitésimal, géométrie analytique. Mais n'ayant pas ou peu publié, son œuvre a eu peu de retentissement à son époque.

LACROIX Sylvestre (1765-1843) est né et mort à Paris. Issu d'une famille pauvre, il fit néanmoins de solides études. A quinze ans il devint l'élève de Gaspard Monge qui, voyant le talent exceptionnel de son élève pour les mathématiques, le fit nommer professeur de mathématiques à l'Ecole des gardes de la Marine, à Rochefort. Il enseigna successivement à Paris, puis à Besançon, puis de nouveau à Paris où il fut l'assistant de Monge, pour son cours de géométrie descriptive, puis son collègue à l'Ecole Polytechnique. En 1815 il quitta l'Ecole Polytechnique pour enseigner à la Sorbonne. Parmi ses ouvrages, le plus célèbre est le *Traité de calcul différentiel et du calcul intégral (1797-1798).* L'œuvre de Lacroix eut un grand retentissement sur l'enseignement des mathématiques non seulement en France mais aussi à l'étranger.

LAME Gabriel (1795-1870) né à Tours dans une famille modeste, il dut, pour gagner sa vie, travailler dès seize ans comme clerc de notaire à Paris. Dans la bibliothèque de ce notaire se trouvait un livre de Legendre : ce fut pour lui une illumination si bien que, à l'insu de sa famille, il entra au lycée Louis-le-Grand puis à l'Ecole Polytechnique en 1814. C'est à cette époque qu'il écrivit *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie.* A la sortie de l'Ecole Polytechnique il intégra l'Ecole des Mines. En 1820 il fut désigné pour aller former en Russie les futurs ingénieurs des voies de communication. A son retour en France en 1830 il occupa un poste d'ingénieur du chemin de fer de Paris à St Germain puis la chaire de physique à l'Ecole Polytechnique. Il fut élu à l'Académie des Sciences en 1844. En 1850 il devint professeur de Physique mathématique à la Sorbonne.

LAMY Bernard (1640-1715) né au Mans, il fut élève au collège de l'Oratoire de cette ville. Il fut ordonné prêtre en 1657 et enseigna dans les établissements de cet ordre à Vendôme, Saumur puis Angers. Son enseignement reflétait les idées neuves de l'époque, tout particulièrement en mathématiques. Ces idées nouvelles n'étant pas du goût du pouvoir en place, on l' «exila » de 1676 à 1686 dans le diocèse de Grenoble. C'est pendant cette « retraite » forcée qu'il publie divers ouvrages : un « Traité de mécanique. De l'équilibre des solides et des liqueurs » en 1679 ; les « Elémens de mathématiques ou traité de la grandeur en général » en 1680, ouvrage qui eut huit éditions jusqu'en 1765 ; les « Elémens de géométrie ou mesure de corps » en 1685, réédités six fois jusqu'en 1758 ; les « Entretiens sur les sciences » en 1684, réédités quatre fois jusqu'en 1752. Ces multiples rééditions montrent l'importance que la pensée de Lamy exerça sur l'enseignement tout au long du 18ème siècle. Il meurt à Rouen le 29 janvier 1715.

VIETE François (1540-1603) né à Fontenay-le-comte, en Vendée, il fit des études de droit à Poitiers puis une carrière d'avocat, de conseiller au Parlement, puis devint Maître des requêtes de l'Hôtel du Roi de 1580 à 1584. Durant ses moments libres (entre 1564 et 1568, puis entre 1584 et 1589) il put réfléchir à ses grandes découvertes. Ses contributions mathématiques touchent les domaines de l'arithmétique, de la trigonométrie, de l'astronomie et surtout de l'algèbre. L'ouvrage qui rendit célèbre Viète fut son fameux traité d'algèbre "*In artem analyticam isagoge*", publié à Tours en 1591, dans lequel il codifie l'usage des lettres pour désigner les grandeurs : les voyelles pour les quantités inconnues, les consonnes pour les quantités connues.

BIBLIOGRAPHIE

[1]Artigues, C., Bellecave, Y., Terracher, P-H., *Math, 1° S et E, Géométrie*, Paris, Hachette, 1991.

[2] Aubert P., Papelier G., *Exercices de géométrie analytique à l'usage des élèves de mathématiques spéciales*, tome 1, Troisième édition, Paris, Vuibert, 1924.

[3] Boyer, C. B ., *History of analytic geometry*, Dover, 1956.

[4] Casey, J., *A treatrise on the analytical geometry of the point, line, circle and conic sections*, second edition, London, Longmans, 1893.

[5] Comte, A., *Traité élémentaire de géométrie analytique à deux et à trois dimensions*, Paris, Carilian et Dalmont, 1843.

[6] Corancez (de), L. A.. O., « Précis d'une nouvelle méthode pour réduire à de simples procédés analytiques les principaux théorèmes de la géométrie et la dégager des figures et constructions qu'on y a employées jusqu'à présent », additif à *La méchanique analytique*, Lagrange, 1788.

[7] Descartes, R., « La géométrie », in *Descartes, œuvres complètes*, par Adam et Tannery, Paris, Cerf, 1897-1913.

[8] Descartes, R., *Règles pour la direction de l'esprit* , Paris, Vrin, 1970.

[9] Descartes, R., *Discours de la méthode plus La Dioptrique, Les Météores et La Géométrie*, Paris, Fayard, 1987.

[10] Euler, L., *Introduction à l'analyse infinitésimale*, tome second, traduite du latin en français, avec des notes et éclaircissements, par J. B. Labey, Paris, Barrois, 1979.

[11] F. G. M., Cours d'algèbre élémentaire, Tours, Mame, 1902.

[12] F.I.C., Eléments d'algèbre, Tours, Mame, 1885.

[13] Falisse, V., *Cours de géométrie analytique plane*, Mons, 1873.

[14] Fermat, P., « Ad locos planos et solidos isagoge », in *Œuvres de Fermat*, tome I, par Adam et Tannery, Paris, Gauthier-Villars,

[15] Glaeser, G., « Comment l'histoire de la géométrie analytique peut aider les professeurs dans leur enseignement », in *L'ouvert*, n° 44, Strasbourg, 1986.

[16] Godeaux, L., *Les géométries*, Paris, Armand Colin, 1937, reprint Jacques Gabay, 1997.

[17] IREM, *Analyse et démarche analytique, Les neveux de Descartes*, Actes du XI° colloque inter IREM, épistémologie et histoire des mathématiques, Reims, 1996.

[18] L'HOSPITAL (DE), G. F., *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations dans les problèmes tant déterminez qu'indéterminez*, Paris, Montalant, 1720.

[19] LACAILLE, N., L.(ABBE DE.), *Leçons élémentaires de mathématiques*, Courcier, quatrième édition, Paris, 1806.

[20] LACROIX, S. F., *Traité du calcul différentiel et intégral*, tome 1, Paris, Duprat, 1797.

[21] LAGRANGE J., L., « Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires », in *Nouveaux mémoires de l'Académie des sciences et belles lettres de Berlin*, 1773.

[22] LAGRANGE, J. L, *La méchanique analytique*, Paris, Desaint, 1788.

[23] LAME, G., *Examen des différentes méthodes pour résoudre les problèmes de géométrie*, Paris, Hermann, 1818.

[24] LAMY, B., *Géométrie ou la mesure de l'étendue*, cinquième édition, Paris, 1710.

[25] PAPELIER G., AUBERT P., *Exercices de géométrie analytique à l'usage des élèves de mathématiques spéciales*, tome 1, Troisième édition, Paris, Vuibert, 1924

[26] PICARD, A., BODARD, G., *Les problèmes d'algèbre au B.É.P.C. et au B.É. et au concours d'entrée à l'É.N.*, Nathan, 1952.

[27] TRESSE, A., THYBAUT, A., *Cours de géométrie analytique*, Paris, Armand Colin, 1904.

[28] VIETE, F., « Les zététiques », in, *La nouvelle algèbre de Monsieur Viète*, Vaulézard, Paris, Jacquin, 1630.

Table des matières :

Achevé d'imprimé
sur les presses de
l'Université de Nantes
le 30 novembre 2007