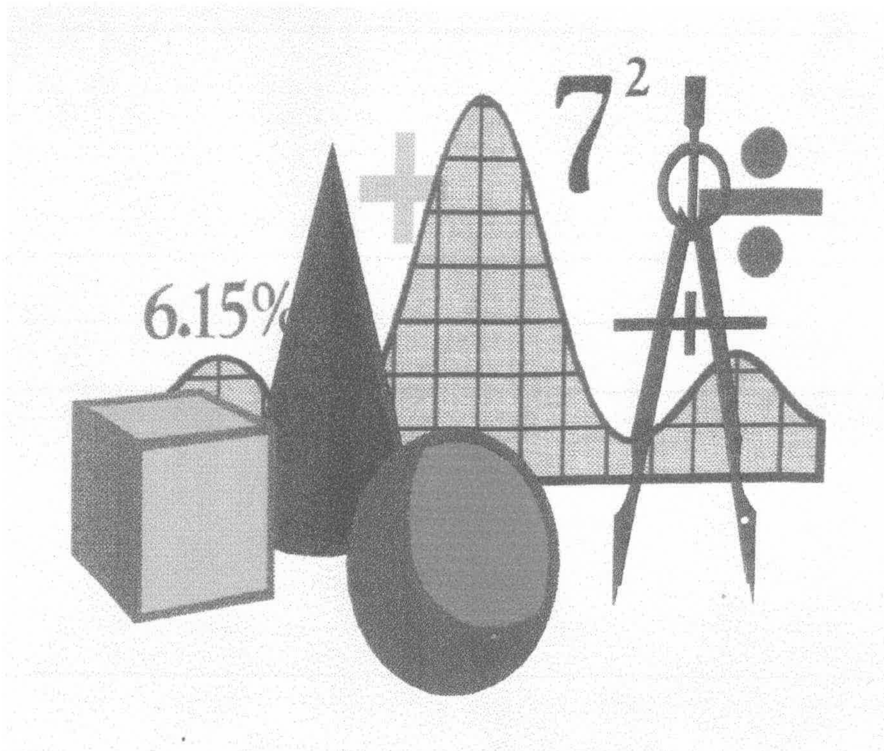
ACTIVITÉS MODULAIRES

EN

PREMIÈRE S



Ce travail sur les modules en classe de première et l'élaboration de cette brochure ont été réalisés grâce à l'aide financière apportée par la DLC au titre de l'année 1995-1996.
Je remercie l'IREM des pays de Loire.

Année 1996

Alain LAGRAIS

SOMMAIRE

AVANT PROPOS

Ce travail modulaire a été fait dans une classe de première S de 23 élèves du Lycée Sud du Mans.

Un groupe de 12 élèves et un groupe de 11.Le niveau d'ensemble était bon; pas de différences sensibles entre les deux groupes. Chaque groupe comportait 2 élèves très actifs.

Les 8 thèmes tratés ont nécessité 22 semaines à raison d'une heure de module par groupe, par semaine.

Ce travail fait tout au long de l'année venait complémenter celui qui avait été fait en 95-96 avec une autre classe de première et qui a fait l'objet d'une première brochure.

ALAIN LAGRAIS

APPROXIMATIONS AFFINES

L'objectif de ce module est d'étudier comment on peut « approcher » une fonction par une fonction affine : ce qui peut permettre par exemple de trouver des valeurs approchées simples de nombres relativement compliqués.

Premier problème : appoximation de $(1+h)^3$ pour h voisin de 0

1) Posons $f(h) = (1 + h)^3$. Développer f(h).
2) Vérifier que la fonction g définie par $g(h) = 3h + h^2$ est telle que: $f(h)=1+3h+h.g(h)$ et $\lim\limits_{h\to 0} g(h)$.
3) a) Démontrer que si h est un nombre de l'intervalle [- 1; 1] alors $|g(h)| \leq 4|h|$ et par suite $|hg(h)| \leq 4h^2$.
b) En prenant 1+3h pour valeur approchée de f (h) sur l'intervalle [- 1 ; 1] on commet une erreur absolue $|h.g(h)|$ majorée par $4h^2$. Donner une valeur approchée, à 10^{-3} près, à 2.10^{-3} près, à $0,5.10^{-1}$ près de $(1,01)^3$, $(0,98)^3$, $(3,06)^3$.
4) a) Dessiner, dans un repère (O, i, j), la courbe (C) d'équation $y = (1 + h)^3$ et la droite (D) d'équation $y= 1 + 3h$.
b) Interpréter graphiquement chacun des nombres 1 + 3h et hg(h).
c) Vérifier que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^3-1}{h} = 3$. Que peut-on en déduire pour la droite (D) ?

1) $f(h)=1+3h+3h^2+h^3$

2) $f(h)=1+3h+h(3h+h^2)$ $\qquad \lim\limits_{h\to 0}(3h+h^2)=0$

3) a) $|g(h)| = |3h+h^2| \leq 3|h|+|h|^2 \leq 4|h|$ car $|h|^2 \leq h$ donc $|hg(h)| \leq 4h^2$

b) $(1,01)^3=(1+0,01)^3=f(0,01)$

$(1,01)^3 \approx 1+3x0,01= 1,03$ $\qquad 4h^2=4x10^{-4}<10^{-3}$

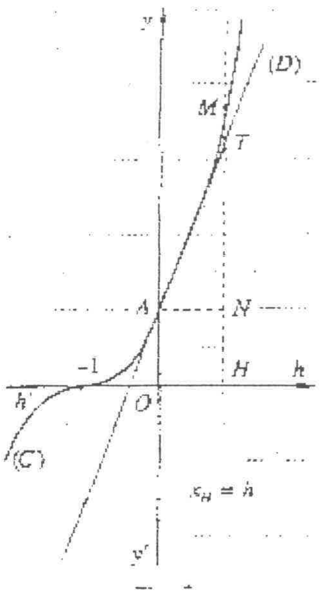
$(0.98)^3=(1-0.02)^3=f(-0.02)$

$(0.98)^3 \approx 1-3x0.02=0.96$ $\qquad 4h^2=4x4x10^{-4} \leq 16x10^{-4}<2x10^{-3}$

$(3,06)^3=3^3(1+0,02)^3=3^3f(0,02)$

$(3,06)^3 \approx 27(1+3x0,02)=27x1,06=28,62$ $\qquad 4h^2=16x10^{-4}$ $\quad 27x4h^2=432x10^{-4}<0.5x10^{-1}$

4) a)



b) 1+3h est l'ordonnée du point T
hg(h) est la distance MT .(de manière précise hg(h)=$\overline{TM}$)

c) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^3-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(3+3h+3h^2) = 3 = f'(0)$

La droite (D) est donc la tangente à la courbe au point A(0;1).

Second problème : Etude de $f(h) = \dfrac{1}{1+h}$

Soit f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(h) = \dfrac{1}{1+h}$

1) a) Vérifier que

$$\frac{1}{1+h} = 1-h+h.\frac{h}{1+h}$$

b) Posons $g(h) = \dfrac{h}{1+h}$. Quelle est la limite de g(h) quand h tend vers 0?

2) a) Vérifier que, si h est dans l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$ alors $|h.g(h)| \leq 2h^2$.

b) En prenant 1-h pour valeur approchée de $\dfrac{1}{1+h}$ (pour h compris entre $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$) on commet une erreur majorée par $2h^2$.

Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de $\dfrac{1}{1{,}03}, \dfrac{1}{0{,}95}, \dfrac{1}{2{,}04}$.

1) a) $\dfrac{1}{1+h} - (1-h+h.\dfrac{h}{1+h}) = \dfrac{1-(1-h)(1+h)-h^2}{1+h} = \dfrac{1-1+h^2-h^2}{1+h} = 0$

Donc $f(h) = 1-h+h.\dfrac{h}{1+h}$

b) $g(h) = \dfrac{h}{1+h}$ $\quad \lim\limits_{h\to 0} g(h) = 0$

2) a) $hg(h) = \dfrac{h^2}{1+h}$ $\quad \dfrac{1}{2} < 1+h < \dfrac{3}{2}$ $\quad \dfrac{2}{3} < \dfrac{1}{1+h} < 2$

$hg(h) \leq 2h^2$

b) L'erreur commise en prenant 1-h comme valeur approchée est donc majorée par $2h^2$.

$\dfrac{1}{1{,}03} = \dfrac{1}{1+0{,}03} \approx 1-0{,}03 = 0{,}97$ $\qquad 2h^2 = 2x9x10^{-4} = 18x10^{-4} \leq 10^{-2}$

$\dfrac{1}{0{,}95} = \dfrac{1}{1-0{,}05} \approx 1+0{,}05 = 1{,}05$ $\qquad 2h^2 = 2x25x10^{-4} = 10^{-2} \leq 10^{-2}$

$\dfrac{1}{2{,}04} = \dfrac{1}{2(1+0{,}02)} \approx \dfrac{1}{2}(1-0{,}02) = 0{,}49$ $\qquad 2h^2 = 4x10^{-4} < 10^{-2}$

(Ici en fait l'erreur commise est inférieure à h^2)

Troisième problème : $f(h)=\sqrt{1+h}$

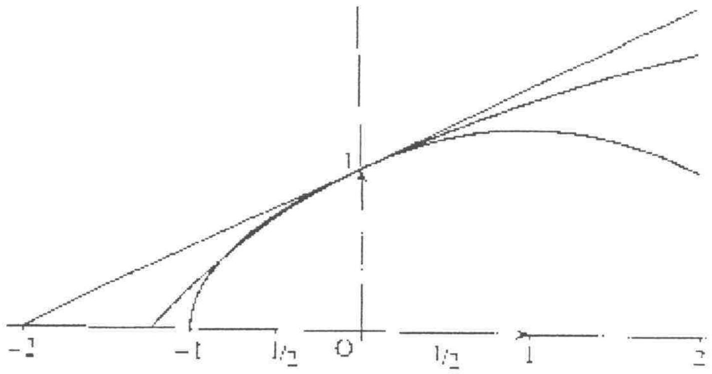
1) Quelle est la dérivee de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $]0;+\infty[$?
Calculer le nombre dérivé en 1 de f ?

2) En utilisant la définition du nombre dérivé en 1 de la fonction racine montrer que:

$$\sqrt{1+h} = 1+\frac{h}{2}+h\varphi(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0}\varphi(h)=0$$

3) On donne les représentations graphiques des fonctions définies sur [-1; +oo[par:

$$f(x)=\sqrt{1+x} \quad , \quad g(x)=1+\frac{x}{2} \quad \text{et} \quad h(x)=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}$$



Lire sur le dessin un encadrement de f pour $|x| \le \frac{1}{2}$.

Donner , en fonction de h , une majoration de l'erreur commise en prenant $1+\frac{h}{2}$ pour valeur approchée de $\sqrt{1+h}$.

4) Utiliser l'approximation précédente pour trouver une valeur approchée des réels suivants:
$\sqrt{1{,}031}$; $\sqrt{0{,}995}$; $\sqrt{1{,}01}$.
Comparer avec les résultats donnés par la calculatrice.

1) Soit u cette fonction . $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad u'(1)=\frac{1}{2}$

2) $u(1+h) = u(1) + u'(1)h + h\varphi(h)$ avec $\lim_{h\to 0}\varphi(h)=0$

$$\sqrt{1+h} = 1+\frac{h}{2}+h\varphi(h)$$

3) Pour $|x| \le \frac{1}{2}$ $\quad h(x) \le f(x) \le g(x)$

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4} \le f(x) \le 1+\frac{x}{2}$$

L'erreur commise en prenant $1+\frac{h}{2}$ pour valeur approchée de $\sqrt{1+h}$ est inférieure à $\frac{h^2}{4}$.

4) $\sqrt{1,031} = \sqrt{1+0,031} \approx 1+0,0155 = 1,0155$ Majorant de l'erreur : $3x10^{-4}$.
La calculatrice donne 1,0153 .

$\sqrt{0,995} = \sqrt{1-0,005} \approx 1-0,0025 = 0,9975$ Majorant de l'erreur : $7x10^{-6}$.
La calculatrice donne : 0,99749 .

$\sqrt{1,01} = \sqrt{1+0,1} \approx 1+0,05 = 1,05$ Majorant de l'erreur : $3x10^{-5}$.
La calculatrice donne : 1,00498 .

Commentaires

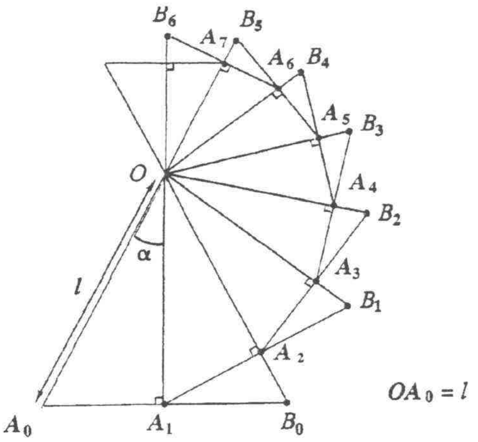
Ce module sur les approximations a nécessité 2 séances d'une heure .
Le premier problème a été fait pendant la première heure .
Les questions 1 , 2 et 3 n'ont pas posé de difficultés .
La figure de la question 4 a demandé un peu de temps .
L'interprétation de hg(h) a été longue .
Dans la question 4)c) la limite a été trouvée mais peu d'élèves ont su déduire l'interprétation graphique .(Ils oublient la définition du nombre dérivé)
Pendant la deuxième heure , pas de difficulté particulière .
J'ai essayé de montrer aux élèves la très bonne précision obtenue par ces approximations .

LES SUITES NUMERIQUES EN GEOMETRIE

Ce module comprend 3 problèmes .
Le but est d'étudier quelques applications des suites à des problèmes de géométrie .

Premier problème : Calcul de la longueur d'une ligne polygonale .

Dans le triangle isocèle OA_0B_0 , A_1 est le milieu de $[A_0,B_0]$. On note B_1 le symétrique de A_1 par rapport à (OB_0) et A_2 , le milieu de $[A_1,B_1]$. En itérant ce processus , on obtient une suite de triangles isocèles OA_nB_n .



1) - Pour $n \geq 1$, exprimer OA_n en fonction de OA_{n-1} et de α .

Dans le triangle rectangle $A_{n-1}OA_n$ on peut calculer le cosinus de l'angle $A_{n-1}OA_n$.

$$\cos\alpha = \frac{OA_n}{OA_{n-1}} \quad \text{soit} \quad OA_n = OA_{n-1}(\cos\alpha)$$

- En déduire OA_n en fonction de n , ℓ et α

La suite $(OA_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géomètrique de raison $\cos\alpha$. D'où $OA_n = OA_0(\cos\alpha)^n$
Soit $OA_n = \ell(\cos\alpha)^n$

2) - Exprimer la distance A_nA_{n+1} en fonction de la distance $A_{n-1}A_n$.

Dans le triangle rectangle $A_nA_{n+1}B_{n-1}$ l'angle $A_{n+1}A_nB_{n-1}$ est égal à α.

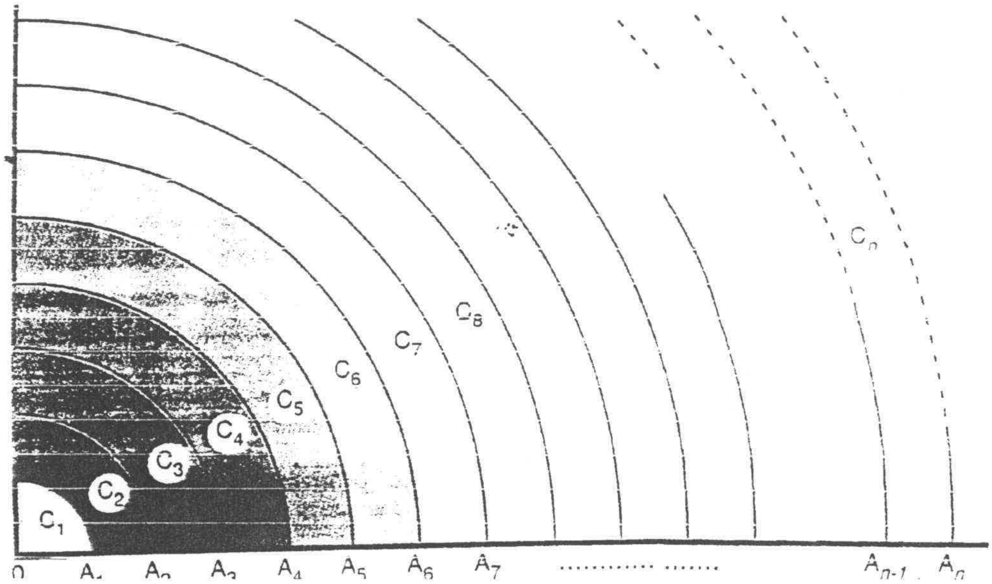
$$\cos\alpha = \frac{A_nA_{n+1}}{A_nB_{n-1}} \quad \text{or} \quad A_nB_{n-1} = A_{n-1}A_n \quad \text{d'où} \quad A_nA_{n+1} = A_{n-1}A_n(\cos\alpha)$$

- En déduire la longueur de la ligne polygonale $A_0A_1A_2....A_{n-1}A_n$.

Cette longueur L est la somme des n premiers termes de la suite géomètrique de premier terme ℓ et de raison $\cos\alpha$.

$$L = \ell\frac{1-(\cos\alpha)^n}{1-\cos\alpha}$$

PROLEME N0 2 : Les couronnes



Sur la figure ci-dessus, on a construit des quarts de cercle concentriques de centre O et de rayons respectifs $OA_1 = 1$, $OA_2 = 2$, $OA_3 = 3$, ..., $OA_{n-1} = n - 1$, $OAn = n$, où n est un entier naturel. L'unité de longueur est le centimètre.

1) Calculer les aires a_1, a_2, a_3, a_4 des couronnes C_1, C_2, C_3, C_4 et l'aire a_n de la couronne C_n.

$$a_1 = \frac{1}{4}\pi.1^2 = \frac{1}{4}\pi \qquad a_2 = \frac{1}{4}(\pi.2^2) - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4}\pi(2^2 - 1^2) = \frac{1}{4}\pi.3 = \frac{3}{4}\pi$$

$$a_3 = \frac{1}{4}\pi(3^2 - 2^2) = \frac{1}{4}\pi(5) = \frac{5}{4}\pi \qquad a_4 = \frac{1}{4}\pi(4^2 - 3^2) = \frac{7}{4}\pi$$

$$a_n = \frac{1}{4}\pi(n^2 - (n-1)^2) = \frac{1}{4}\pi(n + (n-1))(n \mp (n-1)) = \frac{\pi}{4}(2n-1)$$

Ces aires sont exprimées en cm^2.

2) Exprimer a_2, a_3, a_4 en fonction de a_1 puis exprimer a_n en fonction de a_1.

$a_2 = 3a_1 \quad a_3 = 5a_1 \quad a_4 = 7a_1 \; \ldots . a_n = (2n-1)a_1$

3) a) Par un argument de géométrie, expliquer pourqoi on a : $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \dfrac{\pi \quad n^2}{4}$

$a_1 + a_2 + \ldots . + a_n$ est égal au quart de de l'aire du disque de centre O et de rayon OA_n.

Soit $a_1 + a_2 + \ldots . + a_n = \dfrac{\pi \quad n^2}{4}$

b) Exprimer alors $a_1 + a_2 + \ldots . + a_n$ en fonction de a_1 et ~~a_n~~ n

$a_1 + a_2 + \ldots . + a_n = a_1.n^2$

4) <u>En déduire une formule qui permet de calculer la somme : $1+3+5+...+(2n-1)$</u>

De 2) et de 3)a) on peut déduire : $a_1(1+3+5+...+(2n-1))=a_1.n^2$
d'où

$$1+3+5+...+(2n-1) = n^2$$

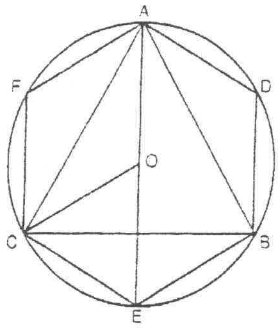
5) <u>Calculer cette somme en utilisant le fait que la suite des nombres impairs est arithmétique</u>

$$1+3+5+...+(2n-1) = \frac{n(1+(2n-1))}{2} = \frac{n(2n)}{2} = n^2$$

Troisième problème : Encadrement du nombre π

Première partie .

Une unité de longueur est choisie. (C) est un cercle de rayon 1.Le demi-périmètre de ce cercle est π . Inscrivons dans le cercle, successivement: un triangle équilatéral ABC, puis, à partir de ce triangle, un hexagone régulier ADBECF, puis à partir de cet hexagone, un dodécagone régulier (12 côtés), ... (On engendre le polygone suivant en rajoutant les sommets qui sont au milieu des arcs. Ainsi, sur la figure, D est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, c'est-à-dire que D est le point d'intersection de la médiatrice de [AB] avec le cercle (C).)



Notations

On note P_1 , le triangle ABC, P_2 l'hexagone ADBECF, P_3 le dodécagone, et ainsi de suite. On note u_n le périmètre du polygone P_n ,c_n le nombre de côtés de ce polygone, x_n la longueur de l'un de ses côtés.

1) La suite c est une suite géométrique. Pourquoi ? Déduisez-en la valeur de c_n explicitement en fonction de n.

2) Exprimez alors u_n en fonction de x_n.

3) Calculez u_1 et u_2.

4) La suite u est croissante. Par un argument de géométrie, expliquez , pourquoi.

5) A l'aide du dessin, expliquez pourquoi la suite u est majorée par 2π.

1) A chaque stade de la construction on multiplie par 2 le nombre de côtés du polygone . c'est donc une suite géomètrique de raison 2 .

$$c_n=c_1.2^{n-1} \quad \text{soit } c_n=3.2^{n-1}$$

2) $u_n=c_nx_n$ Soit $u_n=3.2^{n-1}x_n$

3) $u_1=3.x_1$. Pour calculer x_1 (longueur du côté du triangle ABC), on peut utiliser dans le triangle rectangle ABE

$$\cos E\hat{A}B = \frac{AB}{AE} \quad \text{d'où} \quad AB = AE\cos\frac{\pi}{6}$$

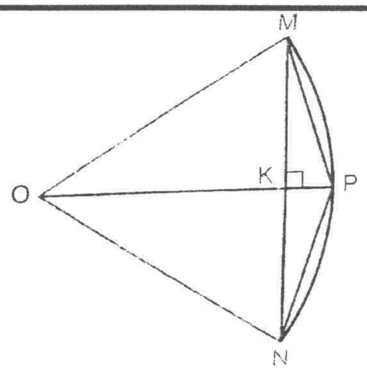
$$AB = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = x_1 \quad u_1 = 3\sqrt{3}$$

Le triangle AOD est équilatéral donc AD= $x_2 = \frac{1}{2}$ $\quad u_2 = 6.\frac{1}{2} = 3$

4) Dans le triangle ADB , AD+DB>AB . Donc $u_2 > u_1$.
On peut généraliser : Pour passer du polygone P_n à P_{n+1} on prend le milieu de chacun des arcs et donc la somme des longueurs des 2 côtés du polygone P_{n+1} est supérieure à la longueur du côté de P_n . Donc $u_{n+1} > u_n$.

5) Pour chaque polygone P_n , la longueur du côté est inférieure à la longueur de l'arc de cercle correspondant . Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < 2\pi$ (longueur du cercle)

Deuxième partie



Pour mieux approximer le nombre pî on souhaite aller plus loin dans le calcul des termes u_n. Plutôt que de refaire à chaque étape le calcul du périmètre du polygone P_n on pose le problème plus général: comment calculer le côté MP du polygone P_{n+1} (de $3 \times 2^{n+1}$ côtés), en fonction du côté MN du polygone P_n (de 3×2^n côtés) ?

1) Démontrer que $OK=\sqrt{1-MK^2}$ et $KP=\sqrt{MP^2-MK^2}$

2) En remarquant que OK+KP=1 démontrer que : $x_{n+1}=\sqrt{2-\sqrt{4-x_n^{\,2}}}$

3) En utilisant une calculatrice programmable , calculer u_{10} .

1) $OK=\sqrt{1-MK^2}$ (Triangle rectangle OKM)

$KP=\sqrt{MP^2-MK^2}$ (triangle rectangle MKP)

2) $OK+KP=1 \qquad MK=\frac{1}{2}MN=\frac{1}{2}x_n \qquad {x_{n+1}}^2=MP^2=MK^2+KP^2$

$MK^2=\frac{1}{4}{x_n}^2 \quad KP^2=(1-OK)^2$ avec $OK=\sqrt{1-\frac{1}{4}{x_n}^2}$

$KP^2=(1-\sqrt{1-\frac{1}{4}{x_n}^2})^2 \qquad {x_{n+1}}^2=(1-\sqrt{1-\frac{1}{4}{x_n}^2})^2+\frac{1}{4}{x_n}^2$

$=1+1-\frac{1}{4}{x_n}^2-2\sqrt{1-\frac{1}{4}{x_n}^2}+\frac{1}{4}{x_n}^2=2-2\sqrt{1-\frac{1}{4}{x_n}^2}=2-\sqrt{4-{x_n}^2}$ d'où $x_{n+1}=\sqrt{2-\sqrt{4-{x_n}^2}}$

3) $u_n=3.2^{n-1}x_n \quad u_{10}=3.2^{\cancel{n-1}\,9}x_{10} \quad u_{10}=6{,}283181058 \quad \frac{u_{10}}{2}=3{,}141590529$

(Les 5 premières décimales sont celles de π)

Commentaires

Ce module sur les suites en géométrie a nécessité 4 séances .
Le premier problème a été traité lors de la première séance . Pas de difficulté particulière une fois que le dessin a été fait ; ce qui a demandé un bon quart d'heure .
Le deuxième problème a été entièrement traité lors de la seconde séance . Là non plus pas de difficulté particulière ; seul le résultat de la question 5) a surpris les élèves .
Le troisième problème a été jugé plus difficile ; la première partie a été faite en trente minutes Par contre la question 2) de la deuxième partie a nécessité beaucoup de temps .
Enfin , il a fallu consacrer une séance entière à l'utilisation de la calculatrice programmable pour le calcul de u_{10} . (difficulté dûe en particulier à la diversité des calculatrices .)

Troisième problème : Le tiroir à chaussettes .

> Dans son tiroir à chaussettes, un garçon possède quatre chaussettes noires, six blanches et deux rouges, indiscernables au toucher. Un jour de panne d'électricité, ce garçon choisit deux chaussettes au hasard. Quelle est la probabilité qu'il se promène avec des chaussettes de couleurs différentes ?

Il y a équiprobabilité du tirage pour une chaussette quelconque.
Désignons par A l'événement: « les deux chaussettes choisies sont de couleurs différentes ».
L'événement contraire est l'événement A: « les deux chaussettes sont de même couleur ».
Compte tenu de l'expérience aléatoire, une issue possible est un tirage au hasard de deux chaussettes parmi les 12 du tiroir: on tire des paires ; donc le nombre de ces choix est $\frac{12x11}{2} = 66$.

Intéressons nous à l'événement $\overline{A}$. Il s'écrit: « tirer 2 noires, ou tirer 2 blanches ou tirer 2 rouges », c'est-à-dire $\overline{A} = N \cup B \cup R$, avec N: « tirer 2 noires », B: « tirer 2 blanches », et R: « tirer 2 rouges ». Ces événements sont incompatibles, ils ne peuvent être réaliser en même temps. Nous savons donc que

$p(\overline{A}) = p(N)+p(B)+p(R)$.

Événement N: on tire 2 noires parmi les 4 noires.
Il y a $\frac{4x3}{2}$ soit 6 cas favorables à N donc $p(N) = \frac{6}{66}$

Evénement B: on tire 2 blanches parmi les 6 blanches.
Il y a $\frac{6x5}{2}$ soit 15 cas favorables à B donc $p(B) = \frac{15}{66}$.

Evénement R: il n'y a qu'un cas favorable à F . D'où $p(R) = \frac{1}{66}$

D'où $p(\overline{A}) = \frac{6}{66}+\frac{15}{66}+\frac{1}{66} = \frac{22}{66} = \frac{1}{3}$. Par conséquent $p(A) = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Mais on peut aussi procéder directement pour p(A). A est réalisé s'il tire: soit 1 noire et 1 blanche, soit 1 noire et 1 rouge, soit 1 blanche et 1 rouge.
«Tirer 1 noire et 1 blanche »: le nombre des cas favorables est 4 x 6 soit 24.
«Tirer 1 noire et 1 rouge »: le nombre des cas favorables est 4 x 2 soit 8.
«Tirer 1 blanche et 1 rouge »: le nombre des cas favorables est 6 x 2 soit 12.
Donc le nombre des issues favorables à A est: 24+8+12 soit 44 et $p(A) = \frac{44}{66} = \frac{2}{3}$.

PROBABILITES EN PREMIERE S

L'objectif de ce module est d'étudier , à travers quelques situations très simples , les premiers problèmes de dénombrement et de probabilité .

Premier problème : Le problème de Galilée .

Le Prince de Toscane demanda un jour au physicien Galilée: « Pourquoi lorsqu'on lance trois dés, obtient-on plus souvent la somme 10 que la somme 9. Bien que ces sommes soient obtenues chacune de six façons différentes ? »

Effectivement 9 peut être considéré comme les sommes suivantes, au nombre de 6:

1 + 2 + 6
1 + 3 + 5
1 + 4 + 4
2 + 2 + 5
2 + 3 + 4
3 + 3 + 3

10 peut être aussi considéré comme une somme de six façons différentes.

1 + 3 + 6
1 + 4 + 5
2 + 2 + 6
2 + 3 + 5
2 + 4 + 4
3 + 3 + 4

Mais ces douze événements ne sont pas équiprobables.

· La somme 1 + 2 + 6 peut être aussi obtenue par 1 + 6 + 2 ou 6 + 2 + 1;etc.
Il faut donc trouver tous les triplets dont les éléments sont les trois naturels distincts 1, 2, 6: il y en a 3 x 2 soit 6. Toute somme dont les trois termes sont distincts peut être obtenue de six façons différentes.

·La somme 1+ 4 + 4 est aussi 4 + 4 + 1.
Le nombre 1 , distinct des deux autres, peut être soit le premier soit le deuxième, soit le troisième, c'est- à-dire de trois façons différentes. Toute somme dont deux termes sont égaux est obtenue de trois facons différentes.

· Quant à la somme 3 + 3 + 3 , elle ne peut être obtenue que d'une façon.

Soit l'événement A: « le total est 9 ». Le nombre des issues favorables à A est donc:
6+6+3+3+6+1 soit 25.
Soit l'événement B: « le total est 10 ». Le nombre des issues favorables à B est:
6+6+3+6+3+3 soit27.

Deuxième problème :

L'objectif de cet exercice est d'étudier la probabilité de faire apparaître au moins un 6 lors de lancers successifs d'un dé cubique non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1) On lance le dé deux fois de suite. On gagne si on fait apparaître au moins un 6.

a) Déterminer le nombre total de résultats distincts que l'on peut obtenir.
b) Déterminer le nombre de résultats distincts qui ne font jamais apparaître un 6.
c) En déduire le nombre de résultats comportant au moins un 6.
d) Calculer le rapport R du nombre de cas gagnants à celui des perdants (on donnera le résultat sous forme de fraction irréductible). Calculer la probabilité P de gagner.

2° Reprendre les questions a), b), c) et d) lorsqu'on lance le dé une seule fois, deux fois, trois fois, quatre fois de suite. On indiquera les résultats dans un tableau .

3° Quel est le nombre minimum de lancers tels que $P>\frac{1}{2}$?

1) a) 36 (il y a 6x6 couples de résultats possibles)

b) 25 (il y a 5x5 couples de résultats possibles)

c) 36-25 = 11

d) $R = \frac{11}{25}$; $P = \frac{11}{36}$

2)

Nombre de lancers	1	2	3	4
Nombre total de cas	6	36	216	1296
Nombre de cas perdants	5	25	125	625
Nombre de cas gagnants	1	11	91	671
Rapport R	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{91}{125}$	$\frac{671}{625}$
Probabilité de gagner P	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{91}{216}$	$\frac{671}{1296}$

3) D'après ce tableau , le nombre minimum de lancers pour que P soit supérieure à $\frac{1}{2}$ est 4 .

Troisième problème : Le tiroir à chaussettes .

> Dans son tiroir à chaussettes, un garçon possède quatre chaussettes noires, six blanches et deux rouges, indiscernables au toucher. Un jour de panne d'électricité, ce garçon choisit deux chaussettes au hasard. Quelle est la probabilité qu'il se promène avec des chaussettes de couleurs différentes ?

Il y a équiprobabilité du tirage pour une chaussette quelconque.
Désignons par A l'événement: « les deux chaussettes choisies sont de couleurs différentes ».
L'événement contraire est l'événement A: « les deux chaussettes sont de même couleur ».
Compte tenu de l'expérience aléatoire, une issue possible est un tirage au hasard de deux chaussettes parmi les 12 du tiroir: on tire des paires ; donc le nombre de ces choix est
$\frac{12x11}{2} = 66$.

Intéressons nous à l'événement $\overline{A}$. Il s'écrit: « tirer 2 noires, ou tirer 2 blanches ou tirer 2 rouges », c'est-à-dire $\overline{A} = N \cup B \cup R$, avec N: « tirer 2 noires », B: « tirer 2 blanches », et R: « tirer 2 rouges ». Ces événements sont incompatibles, ils ne sauraient se réaliser en même temps. Nous savons donc que

peuvent être

$p(\overline{A}) = p(N)+p(B)+p(R)$.

Événement N: on tire 2 noires parmi les 4 noires.

Il y a $\frac{4x3}{2}$ soit 6 cas favorables à N donc $p(N) = \frac{6}{66}$

Evénement B: on tire 2 blanches parmi les 6 blanches.

Il y a $\frac{6x5}{2}$ soit 15 cas favorables à B donc $p(B) = \frac{15}{66}$.

Evénement R: il n'y a qu'un cas favorable à F . D'où $p(R) = \frac{1}{66}$

D'où $p(\overline{A}) = \frac{6}{66} + \frac{15}{66} + \frac{1}{66} = \frac{22}{66} = \frac{1}{3}$. Par conséquent $p(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Mais on peut aussi procéder directement pour p(A). A est réalisé s'il tire: soit 1 noire et 1 blanche, soit 1 noire et 1 rouge, soit 1 blanche et 1 rouge.
«Tirer 1 noire et 1 blanche »: le nombre des cas favorables est 4 x 6 soit 24.
«Tirer 1 noire et 1 rouge »: le nombre des cas favorables est 4 x 2 soit 8.
«Tirer 1 blanche et 1 rouge »: le nombre des cas favorables est 6 x 2 soit 12.
Donc le nombre des issues favorables à A est: 24+8+12 soit 44 et $p(A) = \frac{44}{66} = \frac{2}{3}$.

Commentaires :

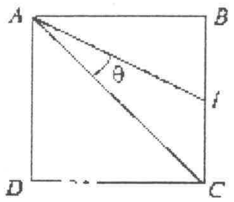
Ces trois problèmes ont été traités pendant 2 modules .
Le premier problème a été assez vite trouvé (20 minutes environ) . Les élèves ont vu que le triplet (3,3,3) par exemple « sortait » moins souvent que (2,3,4). Aucune difficulté dans le second problème qui a été fait pendant la même séance .
Par contre , le troisième a nécessité toute la deuxième heure :
Un élève a tout de suite proposé de passer par l'événement contraire mais les élèves ont eu beaucoup de mal à calculer p(N).p(B).p(R) . La méthode directe : 1 noire,1 rouge etc...a été trouvée plus facilement .

APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

Ce module comprend quatre exercices . L'objectif est d'utiliser le produit scalaire pour faire des calculs d'angles et de distances.
Les trois premiers exercices ont pour objectif des calculs d'angles et le quatrième un calcul de distance.

Premier exercice :

On considère un carré ABCD de côté a et on appelle I le milieu de [BC].
Evaluer l'angle IAC .



Evaluons de deux manières différentes le produit scalaire $\vec{AI}.\vec{AC}$:

A l'aide de la relation $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$, nous obtenons:

$\vec{AI}.\vec{AC} = AI \times AC \times \cos\theta$. Le calcul de AC et AI s'effectue grâce au théorème de Pythagore:

$AC = a\sqrt{2}$ et $AI = a\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (puisque $BI = \dfrac{a}{2}$) .

Ainsi : $$\vec{AI}.\vec{AC} = a^2\frac{\sqrt{10}}{2}\cos\theta.$$

Mettons en jeu les propriétés algébriques du produit scalaire, compte tenu de
$\vec{AI} = \dfrac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})$ (I est le milieu de [BC]).

Il vient: $$\vec{AI}.\vec{AC} = \frac{1}{2}(\vec{AB}.\vec{AC}+\vec{AC}^2).$$

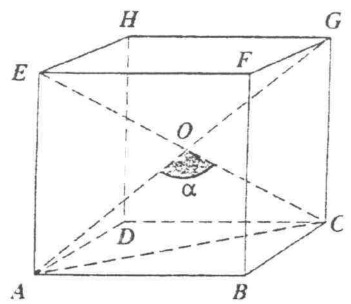
Or $\vec{AB}.\vec{AC} = \vec{AB}^2$ ($\vec{AC}$ se projette orthogonalement sur $\vec{AB}$), nous avons:
$$\vec{AI}.\vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2+AC^2) = \frac{1}{2}(a^2+2a^2),$$

Soit : $$\vec{AI}.\vec{AC} = \frac{3}{2}a^2.$$

Les deux expressions que nous avons obtenues du produit scalaire $\vec{AI}.\vec{AC}$ conduisent à la relation :
$$a^2\frac{\sqrt{10}}{2}\cos\theta = \frac{3}{2}a^2 \text{ ,d'où nous tirons } \cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}, \text{ soit } \cos\theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$
Ce qui donne $\theta \approx 18{,}43°$.

Exercice 2 :

Sous quel angle voit-on la la diagonale d'une face d'un cube à partir du centre de ce cube ?



Soit a l'arête du cube et calculons les côtés tu triangle AOC en fonction de a .
AOC est isocèle en O .

$AC = a\sqrt{2}$ et $AG = a\sqrt{3}$ $AO = OC = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

En utilisant le théorème d'Al-Kashi ,on peut écrire :

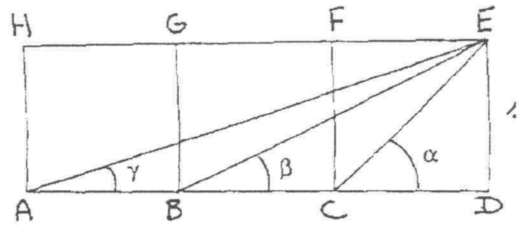
$AC^2 = AO^2 + OC^2 - 2AO.OC \cos\alpha$; d'où :

$$2a^2 = \frac{3a^2}{2} - \frac{3a^2}{2}\cos\alpha \quad \text{et donc :} \quad \cos\alpha = -\frac{1}{3}$$

On obtient $\alpha \approx 109°28'16''$.

Exercice 3 :

On considère trois carrés de côté 1 disposés comme sur la figure .
Montrer que : $\alpha = \beta + \gamma$



$\alpha = \frac{\pi}{4}$; $BE^2 = BD^2 + DE^2$ d'où $BE = \sqrt{5}$; de même $AE^2 = AD^2 + DE^2$ d'où $AE = \sqrt{10}$

$$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad , \quad \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad , \quad \sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos(\beta + \gamma) = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma$$

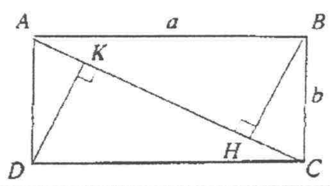
On en déduit :

$$\cos(\beta + \gamma) = \frac{6}{\sqrt{5}\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Conclusion : $\beta + \gamma = \frac{\pi}{4} = \alpha$.

Exercice 4 :

On considère un rectangle ABCD ; H et K sont les projetés orthogonaux de B et D sur (AC).
Calculer la distance HK en fonction des longueurs des côtés a = AB et b = BC .



Nous allons calculer le produit scalaire $\vec{CA}.\vec{BD}$ de deux façons :

$\vec{CA}.\vec{BD} = \vec{CA}.\vec{HK}$ puisque $\vec{HK}$ est le projeté orthogonal de $\vec{BD}$ sur $\vec{AC}$.

Donc $\vec{CA}.\vec{BD} = CA \text{x} HK = \sqrt{a^2 + b^2} \text{x} HK$.

$\vec{CA}.\vec{BD} = \vec{CA}.(\vec{BA} + \vec{AD}) = \vec{CA}.\vec{BA} + \vec{CA}.\vec{AD}$.

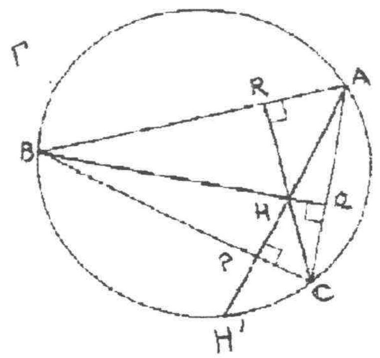
Or $\vec{CA}.\vec{BA} = \vec{BA}^2 = a^2$ et $\vec{CA}.\vec{AD} = \vec{DA}.\vec{AD} = -b^2$; d'où $\vec{CA}.\vec{BD} = a^2 - b^2$

En égalant les deux expressions , on obtient :

$\sqrt{a^2 + b^2}\,HK = a^2 - b^2$; d'où $HK = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

<u>Exercice 4</u> :
Dans un triangle, le symétrique de l'orthocentre par rapport à l'un quelconque des côtés est sur le cercle circonscrit .

ABC est un triangle , Γ est son cercle circonscrit , P , Q , R sont respectivement les pieds des hauteurs issues de A , B et C . H est l'orthocentre du triangle ABC .



1) Pourquoi les points P et Q sont-ils sur le cercle de diamètre [AB]?
Déduire de cela que:

$$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HQ}.$$

2) Démontrer que: $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HQ} = \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HR} = \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HP}$.

3) Pourquoi a-t-on: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BP}.\overrightarrow{PC}$?

En écrivant: $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HC}$, montrer que $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{PH}$. En écrivant: $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PA}$, montrer que $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PH}$.

En déduire que $\overrightarrow{BP}.\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PH}$.

4) On note H' le point où (AP) coupe le cercle Γ. Pourquoi a-t-on $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PH'} = \overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PC}$?

En déduire alors que $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PH'} = -\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PH}$ et que H' est symétrique de H par rapport à (BC).

1) Les angles AQB et APB sont droits , donc les points P et Q sont sur le cercle de diamètre [AB] .

$\boldsymbol{\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HQ}}$ (1) (Chacun de ces produits scalaires représente la puissance du point A par rapport au cercle de diamètre [AB]).

2) De même les points Q et R appartiennent au cercle de diamètre [BC].

Donc $\boldsymbol{\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HQ} = \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HR}}$ (2) (Puissance du point H par rapport à ce cercle).

En comparant les deux égalités (1) et (2) on obtient la double égalité demandée .

3) $\mathbf{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BP}.\overrightarrow{PC}}$ (3) car le projeté orthogonal de $\overrightarrow{BA}$ sur (PC) est $\overrightarrow{BP}$.

$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HC}$ donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BA}.(\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{HC}$ or $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{HC} = 0$ car (HC) est une hauteur du triangle ABC ; on a donc :

$\mathbf{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{PH}}$ (4)

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PA}$ donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{PH} = (\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PA}).\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{BP}.\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PH}$ or $\overrightarrow{BP}.\overrightarrow{PH} = 0$

car (PH) est une hauteur du triangle ABC ; on a donc :

$\mathbf{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PH}}$ (5)

On compare les égalités (3),(4),(5) ; on en déduit :

$\mathbf{\overrightarrow{BP}.\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PH}}$ (6)

4) $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PH'} = \overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PC}$ (C'est la puissance du point P par rapport au cercle Γ.)

On en déduit : $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PH'} = -\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PH}$ (On a changé le signe dans l'égalité (6))

Or H,P,H',A sont alignés ; donc $\overrightarrow{PH'} = -\overrightarrow{PH}$

Conclusion : H' est le symétrique de H par rapport à (BC) .

Exercice 5 :

Une unité de longueur étant choisie, on considère dans un plan un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 2a et AC = a où a est un réel positif donné.

1) Déterminer et construire l'ensemble E , des points M du plan tels que:

$$\left\|\vec{MA}+\vec{MB}-\vec{MC}\right\| = \left\|2\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MC}\right\|$$

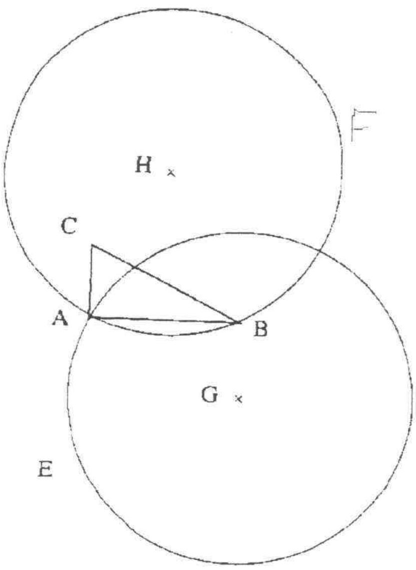
2°) On désigne par H le point du plan tel que:

$$\vec{AH} = \frac{1}{2}\vec{AB}+2\vec{AC}.$$

a) Démontrer que H est le barycentre des points A , B et C affectés de coefficients que l'on déterminera.

b) On considère l'ensemble des points M du plan tels que:

$-3MA^2+MB^2+4MC^2=k$. Pour quelle valeur du nombre réel k , cet ensemble contient-il le point A ? Pour cette valeur préciser l'ensemble obtenu, noté F et le construire.



1) · Pour tout M, $\vec{MA}+\vec{MB}-\vec{MC} = \vec{MG}$ où G est le barycentre du système (A,1); (B,1); (C,-1)

donc $\left\|\vec{MA}+\vec{MB}-\vec{MC}\right\| = MG.$

$2\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MC} = -\vec{AB}-\vec{AC}$

(la somme des coefficients est nulle).

$\left\|2\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MC}\right\|^2 = \left\|-\vec{AB}-\vec{AC}\right\|^2 = AB^2+AC^2 = 5a^2$ car $\vec{AB}.\vec{AC} = 0.$

Donc $M \in E \Leftrightarrow MG = a\sqrt{5}$

E est donc le cercle de centre G et de rayon $a\sqrt{5}$;

($A \in E$ car $\left\|\vec{AB}-\vec{AC}\right\| = \left\|-\vec{AB}-\vec{AC}\right\|$ puisque $\vec{AB}.\vec{AC} = 0$)

2) a) $2\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) + 4(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC})$ donc $-3\underbrace{\overrightarrow{AH}}_{\overrightarrow{HA}} + \overrightarrow{HB} + 4\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{O}$.
Ainsi H est le barycentre de (A,-3); (B,1); (C,4)).

b) Soit C_k l'ensemble des points M vérifiant: $-3MA^2+MB^2+4MC^2=k$.
$A \in C_k \Leftrightarrow k = -3AA^2 + AB^2 + 4AC^2 = 8a^2$

$-3MA^2 + MB^2 + 4MC^2 = -3(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})^2 + (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB})^2 + 4(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HC})^2$

$= 2MH^2 - 3HA^2 + HB^2 + 4HC^2 + 2\overrightarrow{MH}.(-3\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + 4\overrightarrow{HC})$
Ce dernier vecteur est le vecteur nul par définition du barycentre .
On obtient donc : $-3MA^2 + MB^2 + 4MC^2 = 2MH^2 - 3HA^2 + HB^2 + 4HC^2$
Posons α le réel $- 3HA^2 + HB^2 + 4HC^2$
$A \in F$ donc $2AH^2 + \alpha = 8a^2$ donc $M \in F \Leftrightarrow 2MH^2 + \alpha = 2AH^2 + \alpha \Leftrightarrow MH = AH$
F est donc le cercle de centre H passant par A .

Commentaires :

Ce module sur les applications du produit scalaire a demandé trois séances .
Les deux premiers exercices ont été faits lors de la première heure .
Dans le premier , plusieurs élèves ont vite compris qu'il fallait considérer le produit scalaire : $\vec{AI}.\vec{AC}$. La première expression a été immédiate . Beaucoup moins ont pensé à utiliser : $\vec{AI} = \frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})$: après il n'y pas eu de difficulté .
Dans le deuxième , la question a été posée sans la figure et la traduction de la question n'a pas été simple ; par contre les élèves ont tout de suite pensé au théorème d'Al-Kashi .
Aucune difficulté rencontrée dans l'exercice 3 .
La solution du 4 a été plus longue à venir . Un élève a proposé après 10 minutes d'évaluer le produit scalaire $\vec{CA}.\vec{BD}$.
Lors de la troisième séance on a traité l'exercice 4 et l'exercice 5 ; la puissance d'un point par rapport à un cercle avait été abordée en T.P. après le cours sur les produits scalaires . Ce résultat : le symétrique de l'orthocentre par rapport au cercle circonscrit a été retrouvé ultérieurement en application des réflexions .Dans l'exercice 5 , c'est la première question qüi a posé le plus de problème , surtout l'évaluation de $\left\|-\vec{AB}-\vec{AC}\right\|$.
Il faut noter que plusieurs exercices sur le barycentre avaient été faits avant ce module .

CERCLES

L'objectif de ce module est d'étudier à travers 4 exercices des problèmes de construction d'ensembles de points et des problèmes de lieux en utilisant des propriétés simples des cercles et des angles .

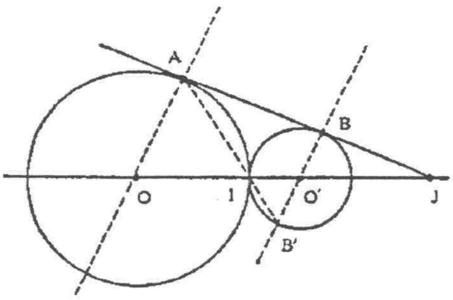
Premier problème : Démontrer qu'une droite passe par un point fixe .

On considère deux cercles C(O,R) et C(O', R') avecR' < R, tangents en I.
1. A est un point de C et B un point de C' tels que (OA)//(O'B).
Démontrer que lorsque A et B varient, la droite (AB) passe par point fixe.
2. A est un point de C, et D un point de C' tels que (IA) ⊥ (ID).
Démontrer que lorsque A et D varient, la droite (AD) passe par un point fixe.

Les deux cercles sont tangents en I . Donc les points I , O , O' sont alignés

Si OO' = R + R', les cercles sont tangents extérieurement ; si OO' = R-R' ils sont tangents Intérieurement

1) a) Supposons que les cercles sont tangents extérieurement.
Pour un point A choisi sur le cercle C on peut envisager deux points B et B' diamétralement opposés sur C'.



* Considérons les points A et B . Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{O'B}$ sont colinéaires et de même sens : $\overrightarrow{O'B} = \dfrac{R'}{R}\overrightarrow{OA}$.

Il existe donc une homothétie de rapport $\dfrac{R'}{R}$ qui transforme O en O' et A en B. Son centre J est aligné, d'une part avec O et O', d'autre part avec A et B .

$\overrightarrow{JO'} = \dfrac{R'}{R}\overrightarrow{JO}$ donc J est un point fixe de (OO').

$R'\overrightarrow{JO} - R\overrightarrow{JO'} = \overrightarrow{O}$ donc J est le barycentre de ((O,R'); (O', -R)).

La droite (AB) passe par ce point fixe J, centre de l'homothétie positive qui transforme C en C'. Dans le cas où (OA) ⊥ (AB), la droite (AB) est la tangente commune extérieure aux deux cercles: elle passe par J.

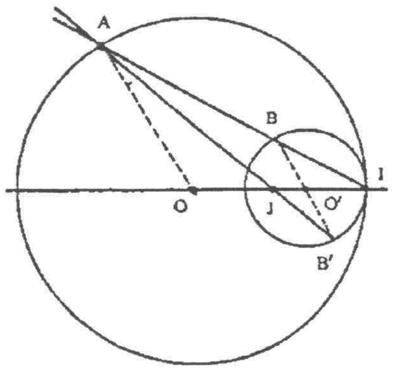
* Considérons les points A et B'. On a, dans ce cas , $\overrightarrow{O'B'} = -\frac{R'}{R}\overrightarrow{OA}$.

L'homothétie qui transforme le couple (O,A) en (O',B') est l'homothétie négative qui transforme C en C'.

Or $\frac{\overline{IO'}}{\overline{IO}} = -\frac{R'}{R}$; son centre est le point I. La droite (AB') passe par ce point fixe.

On remarque que $\frac{\overline{IO}}{\overline{IO'}} = -\frac{\overline{JO}}{\overline{JO'}}$.

b) Dans le cas de cercles tangents intérieurement , le point I est alors le centre de l'homothétie positive qui transforme C et C', et J est le centre de l'homothétie négative .

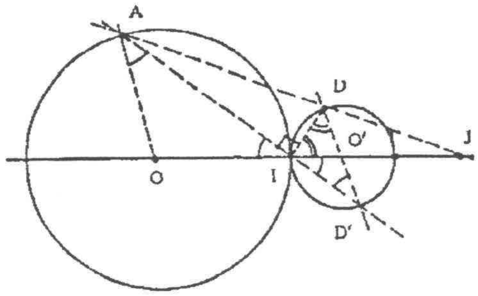


2) La droite (AI) coupe le cercle C' en D'.

Puisque DID' est droit, les points D et D' sont diamétralement opposés sur le cercle C'. Si on peut prouver que (OA)//(O'D), on est ramené au cas précédent. Dans le triangle isocèle OAI: $O\hat{A}I = O\hat{I}A$. Or $O\hat{I}A$ et $D\hat{I}O'$ sont complémentaires .

Dans le triangle isocèle O'ID: $D\hat{I}O' = O'\hat{D}I$.

Dans le triangle rectangle DID', les angles $O'\hat{D}I$ et $I\hat{D}'D$ sont complémentaires.



Il en résulte que les angles $O\hat{A}I$ et $I\hat{D}'D$ sont égaux.

Ces deux angles occupent la position d'angles alternes-internes: sécante (AD') coupant les droites (OA) et (DD').

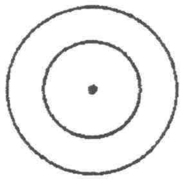
Il en résulte que (OA) est bien parallèle à (DO').

La droite (AD) passe donc par le centre J de l'homothétie positive qui transforme le cercle C en C' (voir question 1).

Si les cercles sont tangents intérieurement, la droite (AD) passe par le centre de l'homothétie négative.

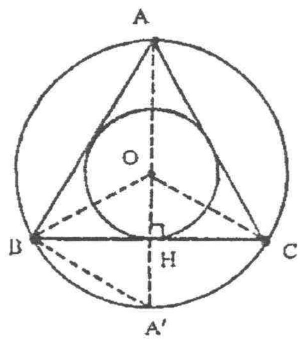
Deuxième problème : Construire un triangle connaissant ses cercles inscrits et circonscrits .

On donne deux cercles concentriques. Peut-on construire un triangle tel que l'un des cercles soit son cercle circonscrit et l'autre le cercle inscrit ?



Analyse :
Si un tel triangle ABC existe, le point O est à la fois centre du cercle circonscrit, donc point de concours des médiatrices des cotés, et point de concours des bissectrices.
Le triangle ABC est donc équilatéral, ce qui suppose $\widehat{BAC} = 60°$ et $\widehat{BOC} = 120°$.
La droite (AO) coupe alors l'arc $\overset{\frown}{BC}$ en A', milieu de cet arc: OB= OA' et $\widehat{BOA'} = 60°$.
Donc le triangle OBA' est équilatéral.

Par conséquent $OH = \frac{1}{2}OA'$



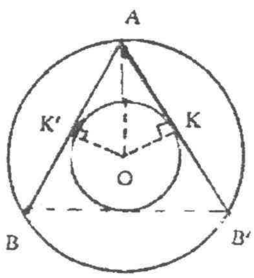
Ainsi, pour que ce triangle ABC existe, il est nécessaire que le rayon R du grand cercle soit le double du rayon r du petit cercle.

Cette condition est-elle suffisante?

Si l'on choisit A sur le grand cercle, on trace les tangentes (AK) et (AK') au petit cercle.On a:

$\sin K\hat{A}O = \sin K'\hat{A}O = \frac{OK}{OA} = \frac{1}{2}$ d'où $K\hat{A}O = K'\hat{A}O = 30°$ et $K\hat{A}K' = 60°$.

On va montrer que (BB') est tangente au petit cercle en calculant la distance de O à cette droite.

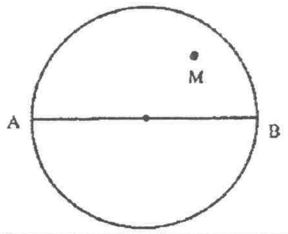


Les droites (AB) et (AB') sont symétriques par rapport à (AO) . Soit H le projeté orthogonal de O sur (BB') .L'angle $H\hat{O}B'$ est égal à 60° car $A\hat{O}B' = 120°$.

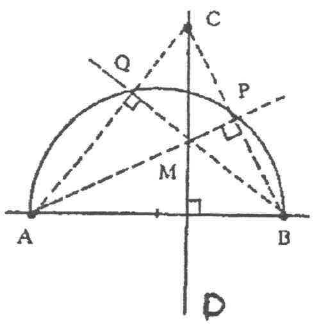
$\cos H\hat{O}B' = \frac{OH}{OB'} = \frac{OH}{R}$ d'où $OH = \frac{1}{2}R$. Donc (BB') est tangente au petit cercle .

Troisième problème : Construction à la règle sans compas .

On donne un cercle et un diamètre [AB] de ce cercle.
M étant un point quelconque du plan , comment construire à la règle seule, la perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point M.



a) *Tout d'abord , si M est à l'intérieur du cercle sans être sur la droite (AB).*



Analyse:

Soit D la perpendiculaire à construire. [AB] est un diamètre .
La droite (AM) recoupe le cercle en P donc (AP) ⊥ (PB).
La droite (BM) recoupe le cercle en Q donc (BQ) ⊥ (QA).
Les deux droites (BP) et (AQ) se coupent en C.
(BQ) et (AP), deux hauteurs du triangle CAB, sont sécantes en M. Ce point M est donc l'orthocentre de CAB, donc la troisième hauteur D passe aussi par le point C.

Construction:

On trace (AM) pour obtenir P, puis (BM) pour obtenir Q.(AQ) et (BP) se coupent en C.
La droite (CM) , troisième hauteur du triangle CAB , est donc la droite D cherchée.

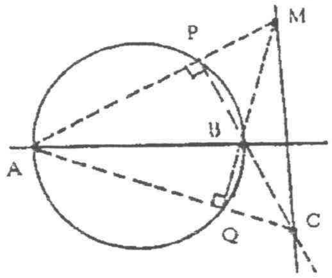
Discussion:

Cette construction est-elle possible pour tout point M ?

b) *Si M est un point du cercle* , P et Q sont en M donc la construction est impossible.

c) *Si M est un point de la droite (AB)* , les droites (AM) et (BM) sont confondues et la construction est impossible.

d) *Si M à l'extérieur du cercle , mais non situé sur (AB).*

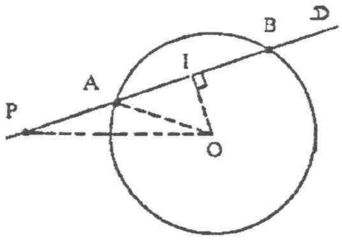


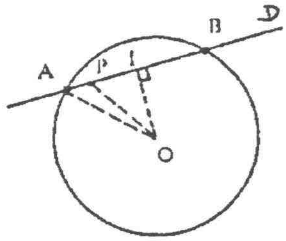
On fait une construction analogue, avec les droites (AM) et (BM) pour obtenir les points P et Q. (BP) et (AQ) se coupent en C, M est encore l'orthocentre de ABC, mais il est à l'extérieur du triangle.

Quatrième problème : puissance d'un point par rapport à un cercle .

C est un cercle de centre O et de rayon R. P est un point du plan. Par P, on mène une droite variable D qui coupe C en A et B.
1) Démontrer que le produit $\overline{PA}x\overline{PB}$ est indépendant de la sécante choisie. Ce réel est appelé puissance de P pur rapport au cercle . On la note C(P). Etudier le signe de C(P) suivant la position de P par rapport au cercle C.
2) Quel est l'ensemble des points M dans chacun des cas suivants :
a) $C(M) = R^2$; b) $C(M) = -R^2$; c) $C(M) = -\frac{1}{2}R^2$; d) $C(M) = -2R^2$.

1) Les points P, A, B étant alignés, on a : $\overline{PA}x\overline{PB} = \vec{PA}.\vec{PB}$.





Soit I le milieu de [AB]. (OI) est la mediatrice de [AB].

$\vec{PA}.\vec{PB} = (\vec{PI}+\vec{IA}).(\vec{PI}+\vec{IB})$; $\vec{PA}.\vec{PB} = (\vec{PI}+\vec{IA}).(\vec{PI}-\vec{IA}) = PI^2 - IA^2$

Or $PI^2 = PO^2 - OI^2$ et $IA^2 = AO^2 - OI^2$ donc $PI^2 - IA^2 = PO^2 - AO^2$

Posons OP = d. D'où$PI^2 - IA^2 = \overline{PA}x\overline{PB} = d^2 - R^2$.

Ce réel d^2-R^2 ne dépend que du cercle et de la position de P.

C(P) > O équivaut à d > R , soit P extérieur au disque.
C(P) = O équivaut à d = R , soit P sur le cercle.
C(P) < O équivaut à d < R , soit P élément du disque.

2) a) $c(M) = R^2$ d'où OM^2-$R^2 = R^2$ donc $OM^2 = 2R^2$ et donc $OM = R\sqrt{2}$
L'ensemble des points M est le cercle de centre O et de rayon $R\sqrt{2}$

b) $c(M) = -R^2$ d'où $OM = 0$. L'ensemble cherché est le point O .

c) $c(M) = -\frac{1}{2}R^2$ d'où $OM = \frac{R\sqrt{2}}{2}$. L'ensemble cherché est le cercle de centre O et de rayon $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

d) $c(M) = -2R^2$ d'où $OM^2 = -R^2$. L'ensemble cherché est donc vide .

Commentaires .

Ce travail sur les cercles a nécessité 3 modules .

Le premier problème a demandé une heure .
Dans la question 1) , il a fallu suggéré qu'il existait des transformations permettant de passer de C à C' . Très peu d'élèves avaient pensé à envisager le point B' diamétralement opposé à B et ils ne trouvaient donc que l'homothétie de rapport positif ; de même , plusieurs élèves se contentaient d'étudier le cas où les 2 cercles étaient tangents extérieurement .
Dans la question 2) plusieurs élèves ont vu qu'il fallait démontrer que (OA) était parallèle à (OD) mais deux élèves seulement ont trouvé seuls la démonstration .

Le deuxième et le troisième problème ont été traités lors de la deuxième séance : les élèves ont vite vu que le triangle serait équilatéral mais un seul élève a su prouver que R devait être égal à 2r ; les deux cercles concentriques de rayons r et 2r étant donnés , la construction du triangle a été assez vite faite .
Le troisième problème a été fait en une petite demi-heure ; les élèves n'ont pas su démarrer , le tracé de la perpendiculaire leur semblant évident mais oubliant que c'était à la règle seule . Je leur ai suggéré de prendre d'abord M à l'intérieur : ils ont assez vite reconnu en M l'orthocentre du triangle ABC .

Le problème 4 a été assez bien fait : l'idée d'utiliser le point I pour évaluer le produit scalaire $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB}$ a tout de suite été proposé par un élève dans chacun des deux groupes .

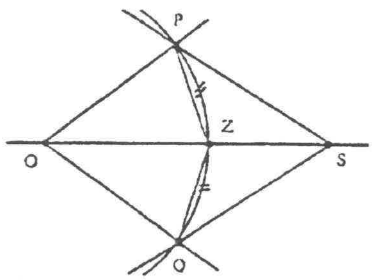
CONSTRUCTIONS DE POLYGONES

L'objectif de ce module est de construire quelques polygones particuliers.
On commencera par une méthode de construction d'un octogone régulier puis d'un dodécagone régulier .
Le deuxième problème sera consacré à la construction d'un pentagone régulier .

Premier problème : Construire un polygone à 2n côtés à partir d'un polygone à n côtés .

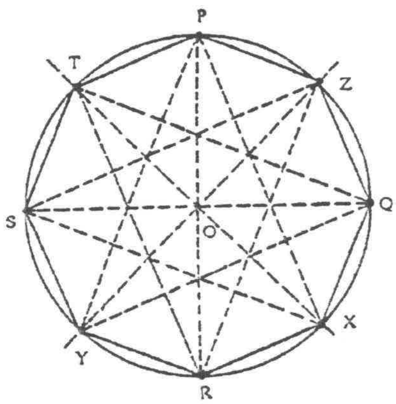
Montrer que si l'on s'est donné un polygone régulier à n côtés, on peut toujours construire un polygone régulier à 2n côtés à l'aide seulement de la règle et du compas.
Application: construction des octogones réguliers, des dodécagones réguliers.

Si P et Q sont deux sommets consécutifs du polygone régulier à n côtés, il suffit de savoir trouver Z milieu de l'arc $\overset{\frown}{PQ}$. OZ est bissectrice de $\widehat{POQ}$. On sait construire une bissectrice à la règle et au compas. On trace ainsi de proche en proche, les milieux des arcs tels que PQ.



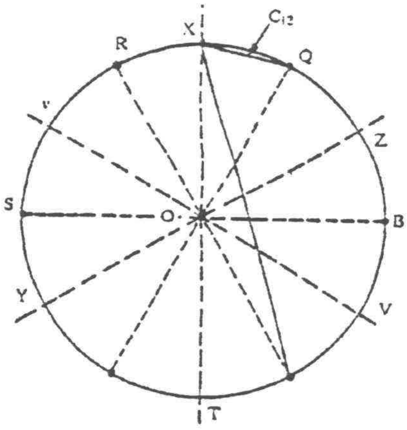
· **Construction d'octogones réguliers** .

On construit d'abord les sommets du carré inscrit PQRS, ce que l'on sait faire à la règle et au compas. On construit ensuite la bissectrice de $\widehat{QOP}$: elle nous donne deux points Z et Y De même pour la bissectrice de ROQ.
En joignant les points consécutifs, on obtient un octogone convexe. Si partant de P, on joint les points de «2 en 2 », on retrouve le carré PQRS. Si on joint les points de «3 en 3 », on obtient un octogone étoilé: c'est le seul moyen d'obtenir un octogone étoilé.



· Construction de dodécagones réguliers .

On construit d'abord les sommets de l'hexagone régulier inscrit dans un cercle (Six coups de compas). On construit ensuite les bissectrices de $\widehat{QOP}$, de $\widehat{QOR}$ puis $\widehat{ROS}$: chacune donne deux nouveaux points de division. En joignant les points consécutifs, vous obtenez le dodécagone régulier convexe. Le côté du dodécagone étoilé s'obtient en joignant les points de «5 en 5 ». Il n'y a pas d'autre dodécagone étoilé!



Deuxième problème : Construction d'un pentagone régulier .

1) Calcul préalable de $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{5}$, $\sin\frac{2\pi}{5}$, $\sin\frac{4\pi}{5}$

a) Calculer cos5x en fonction de cosx

b) Développer $(1-t)(4t^2+2t-1)^2$ et en déduire que $1-\cos 5x = (1-\cos x)(4\cos^2 x+2\cos x-1)^2$

c) Démontrer que $\cos\frac{2\pi}{5}$ *et* $\cos\frac{4\pi}{5}$ sont solutions de l'équation $4t^2+2t-1=0$

d) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{5}$, $\sin\frac{2\pi}{5}$, $\sin\frac{4\pi}{5}$

a) $\cos 5x = \cos(x+4x) = \cos x\cos 4x - \sin x\sin 4x$

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2(2\cos^2x-1)^2 - 1 = 8\cos^4x - 8\cos^2x + 1$

$\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$

$2\sin 2x\cos 2x = 4\sin x\cos x(2\cos^2x-1)$

$$\begin{aligned}\cos 5x &= \cos x(8\cos^4x - 8\cos^2x + 1) - \sin x(4\sin x\cos x(2\cos^2x-1))\\ &= 8\cos^5x - 8\cos^3x + \cos x - 8\sin^2x\cos^3x + 4\sin^2x\cos x\\ &= \cos x(8\cos^4x - 8\cos^2x + 1 - 8\cos^2x(1-\cos^2x) + 4(1-\cos^2x))\\ &= \cos x(16\cos^4x - 20\cos^2x + 5)\end{aligned}$$

$\mathbf{\cos 5x = 16\cos^5x - 20\cos^3x + 5\cos x}$

b) $(1-t)(4t^2+2t-1)^2 = (1-t)(16t^4 + 4t^2 + 1 + 16t^3 - 4t - 8t^2)$

$= (1-t)(16t^4 + 16t^3 - 4t^2 - 4t + 1)$

$= \cancel{16t^4 + 18t^3 - 2t^2 + 1 - 16t^5 - 8t^4 + 2t^2} - t$ $\quad 16t^4+16t^3-4t^2-4t+1-16t^5-16t^4+4t^3+4t^2-t$

$= -16t^5 + 20t^3 - 5t + 1$

Or $1-\cos 5x = 1 - 16\cos^5x + 20\cos^3x - 5\cos x = (1-\cos x)(4\cos^2x + 2\cos\cancel{^2}x - 1)^2$

c) si $x = \frac{2\pi}{5}$ $\quad \cos 5x = \cos 2\pi = 1$ et $\cos x \neq 1$ donc $\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation

$4t^2+2t-1=0$ de même on vérifie que $\cos\frac{4\pi}{5}$ est solution de l'équation .

d) Le discriminant de cette équation est $\Delta=20$; les solutions sont donc

$$t' = \frac{-2-2\sqrt5}{8} = \frac{-1-\sqrt5}{4} \quad et \quad t'' = \frac{-1+\sqrt5}{4}$$

Or $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$ et $\cos\frac{4\pi}{5} < 0$ car $\frac{2\pi}{5} \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ *et* $\frac{4\pi}{5} \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$

Conclusion : $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt5}{4}$ *et* $\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt5}{4}$

$$\sin^2\frac{2\pi}{5} = 1 - \left(\frac{-1+\sqrt5}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1+5-2\sqrt5}{16} = \frac{10+2\sqrt5}{16} = \frac{5+\sqrt5}{8}$$

Donc $\sin\frac{2\pi}{5}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ *car* $\sin\frac{2\pi}{5}>0$

De même $\sin^2\frac{4\pi}{5}=1-(\frac{-1-\sqrt{5}}{4})^2=1-\frac{1+5+2\sqrt{5}}{16}=\frac{10-2\sqrt{5}}{16}=\frac{5-\sqrt{5}}{8}$

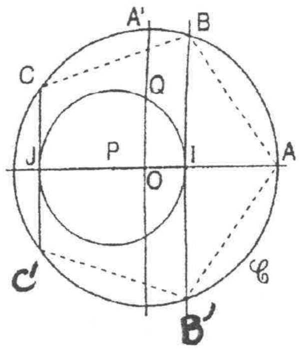
Donc $\sin\frac{4\pi}{5}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ *car* $\sin\frac{4\pi}{5}>0$

2) Construction d'un pentagone régulier

Tracer un cercle C de centre O et deux rayons perpendiculaires [OA] et [OA'].Placer le point P tel que $\overline{OP}=-\frac{1}{4}\overline{OA}$ (OA=1)

Noter Q le milieu de [OA']. Le cercle de centre P, de rayon PQ, coupe la droite (OA) en I et J. Les tangentes en I et J à ce cercle recoupent le cercle C en quatre points qui forment avec A un pentagone régulier.

Pour le prouver, il suffit de démontrer que $A\hat{O}B=\frac{2\pi}{5}$ et $A\hat{O}C=\frac{4\pi}{5}$



Démontrons que $A\hat{O}B=\frac{2\pi}{5}$

Calculons OI

$PQ^2=OP^2+OQ^2=(\frac{1}{4})^2+(\frac{1}{2})^2=\frac{5}{16}$ $\quad PQ=\frac{\sqrt{5}}{4}$ d'où $PI=\frac{\sqrt{5}}{4}$

$OI=\frac{\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\cos\frac{2\pi}{5}$ or $\cos(A\hat{O}B)=OI$ donc $A\hat{O}B=\frac{2\pi}{5}$

$OJ=OP+PJ=\frac{\sqrt{5}}{4}+\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ or $\cos(A\hat{O}C)=-OJ=\frac{-\sqrt{5}-1}{4}=\cos\frac{4\pi}{5}$ donc $A\hat{O}C=\frac{4\pi}{5}$

<u>**Conclusion**</u> $A\hat{O}B=\frac{2\pi}{5}$ $B\hat{O}C=\frac{2\pi}{5}$ donc $C\hat{O}J=\pi-\frac{4\pi}{5}=\frac{\pi}{5}$

Par symétrie orthogonale par rapport à la droite (OA), on en déduit que le polygone ABCC'B' a cinq angles au centre égaux . C'est donc un polygone régulier.

Commentaires :

Ce module a nécessité 2 séances .
Le premier problème a été vite traité (une demi-heure); par contre la construction du pentagone a demandé une séance et demie ; lors de la première demi-séance . les élèves ont linéarisé cos5x .
La fin des calculs préliminaires. à savoir les cosinus et sinus de $\frac{2\pi}{5}$ et $\frac{4\pi}{5}$ ainsi que la construction du pentagone lui-même ont été faites pendant la deuxième séance . La question la plus délicate a été le calcul de la distance OI pour justifier que l'angle $\widehat{AOB}$ était égal à $\frac{2\pi}{5}$.

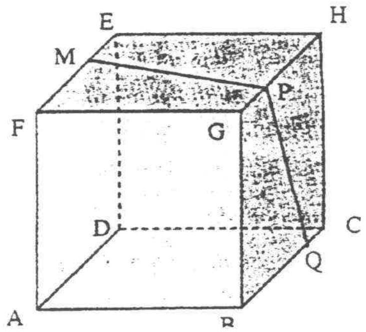
SECTIONS PLANES DE SOLIDES

L'objectif est de revoir les propriétés des droites et plans de l'espace ainsi que de faire des calculs mètriques et également des constructions .
Ce module comprend trois problèmes .

Premier problème : coupe du cube et du tétraèdre .

A. Cube

ABCDEFGH est un cube de 10 cm d'arête. M est le point de [EF] tel que EM =4 cm, P est le point de [GH] tel que GP=3cm et Q le point de [BC] tel que CQ=4 cm.

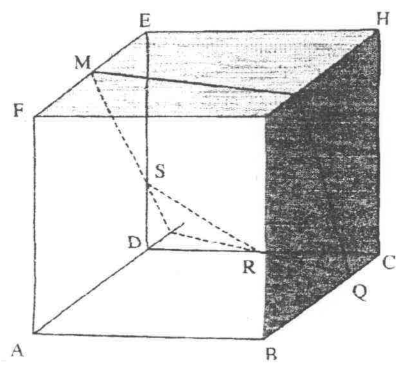


1° Quelle est la direction de la droite d'intersection du plan (MPQ) avec le plan de face (ABCD) ? Justifier la réponse.

2° En déduire le tracé, sur la perspective cavalière, des points R et S, intersections respectives du plan (MPQ) avec les droites (DC) et (ED).

3° Calculer les longueurs DR et DS.

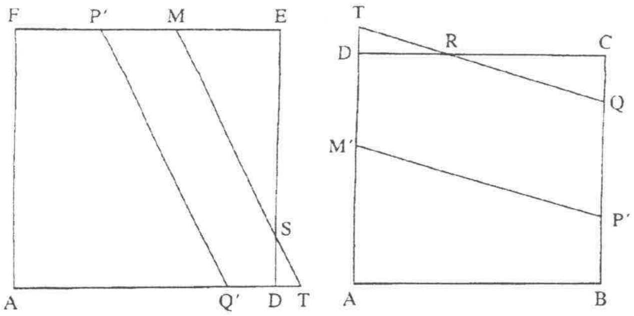
Objectif : effectuer des tracés sur une perspective cavalière .



1) C'est la parallèle à (MP) passant par Q. (2 plans parallèles coupent un plan suivant deux droites parallèles)

2) La droite (QR) est parallèle à (MP), la droite (MS) est parallèle à (PQ). Les droites (QR) et (MS) se coupent en T sur la droite (AD).

3)

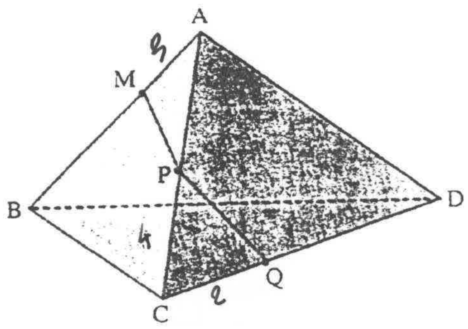


Le tracé des carrés ADEF et ABCD permet de calculer simplement DR et DS. Les points P' et Q' sont les projetés orthogonaux de P et de Q sur la face (ADEF), la droite (P'Q') est parallèle à (PQ). On en déduit DS = 2 cm et DT= 1 cm.

De même DR= $\frac{10}{3}$ cm.

B. Tétraèdre

ABCD est un tétraèdre régulier de 10 cm d'arête. M est le point de [AB] tel que AM = 3 cm, P est le point de [AC] tel que CP=4 cm et Q le point de [CD] tel que CQ=2 cm.

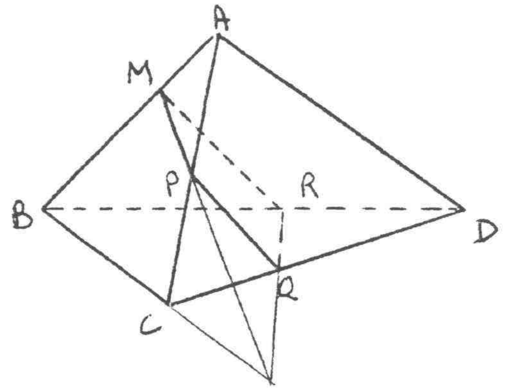


1° Tracer sur une perspective cavalière l 'intersection des droites (MP) et (BC). En déduire le point d'intersection R du plan (MPQ) et de la droite (BD).

2° Calculer la longueur DR. Quelle est la .nature du quadridilatère MPQR ?

3° Donner la position relative des droites (PQ) et (AD) (sécantes, parallèles, non coplanaires). Justifier la réponse. Quelle est la position relative de la droite (PQ) et du plan (MPQ) ? Que peut-on en déduire pour l 'intersection des plans (MPQ) et (ABD) ?

1)

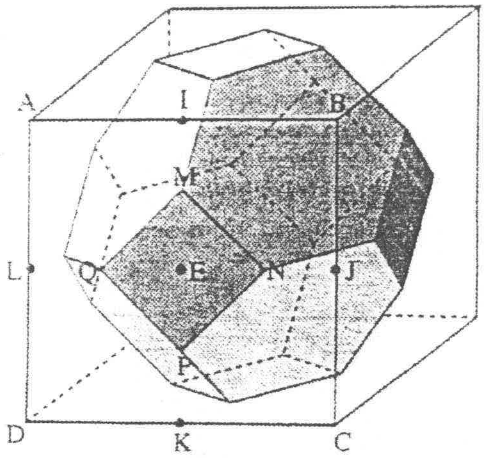


2) $\frac{AM}{AP} = \frac{1}{2}$ donc (MP) est orthogonale à (AB) (triangle rectangle en M) , on en déduit:

BS = 2BM = 14, d'où CQ = CS = 4 cm.
On a donc CQS = 30° et DR= $\frac{1}{2}$ DQ = 3 cm.
Le quadrilatère MPQR est un trapèze.

3) Les droites (PQ) et (AD) sont parallèles puisque $\frac{CP}{CA} = \frac{CQ}{CD}$; l'intersection des deux plans (MPQ) et (ABD) est donc parallèle à (PQ).

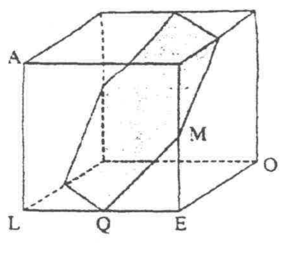
Second problème : polyèdre le Lord Kelvin .



Soit (C) un cube d'arête a. On construit un carré MNPQ tels que I, J, K et L sont les milieux des côtés, E est le centre du carré ABCD et M, N, P,Q sont les milieux de [EI], [EJ], [EK] et [EL]. On procède de même sur les autres faces du cube. Les points obtenus sont les sommets du polyèdre de Lord Kelvin. On veut calculer le volume de ce polyèdre.

1° On appelle O le centre du cube. Représenter en perspective cavalière le cube (C_1) contenu dans (C) d'arête $\frac{a}{2}$ et ayant pour diagonale [AO] ainsi que la face hexagonale (F)dont [MQ] est l'un des côtés.

2° Montrer que le plan de (F) est plan médiateur de [AO]. En déduire le volume de la partie du polyèdre inclus dans (C_1) puis le volume du polyèdre.

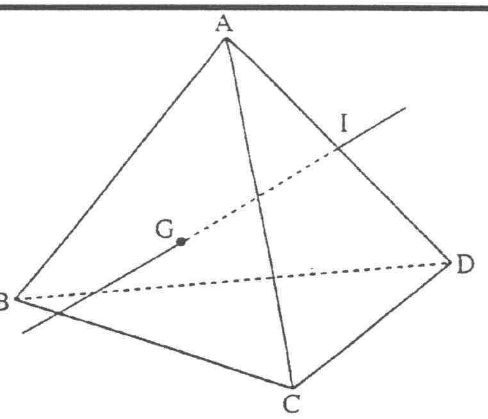


Le plan de (F) passe par les milieux des arêtes du cube de (C_1), c'est donc le plan médiateur de [AO] . Il partage (C_1) en deux volumes isométriques.

Le volume du polyèdre de Lord Kevin est donc $\frac{1}{2}a^3$.

<u>Troisième problème</u> : Construction d'intersections dans le tétraèdre .

L'un des objectifs de cet exercice est l'utilisation du calcul barycentrique .
L'autre est bien entendu des constructions dans l'espace .



ABCD est un tétraèdre; on appelle I le milieu de [AD] et G le centre de gravité du triangle ABC.
1) Tracer sur la perspective cavalière, l'intersection des plans (BGI) et (ACD).
En déduire la construction de l'intersection des plans (BGI) et (BCD).

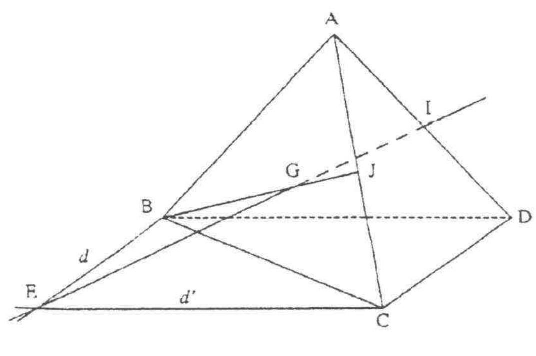
2) Tracer l'intersection du plan (BCD) et du plan (CGI).

3) Montrer que la droite (IG) est sécante au plan (BCD). On appelle E leur intersection. Faire une figure dans le plan de coupe (AGD). Préciser la position du point E dans le plan (BCD) .

4° On veut établir vectoriellement le résultat précédent:

a) Démontrer que $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = 3\vec{IG}$, puis $\vec{IB} + \vec{IC} - \vec{ID} = 3\vec{IG}$.

b) Soit M le barycentre de (B, 1), (C, 1) et (D, -1). Placer M dans le plan (BCG) et montrer que M vérifie $\vec{IB} + \vec{IC} - \vec{ID} = \vec{IM}$. En déduire que M est un point de (IG). Conclure.



1) La droite (BG) coupe le segment [AC] en son milieu J. Les plans (BGI) et (BCD) contiennent deux droites parallèles (CD) et (IJ). Leur intersection est la droite d parallèle à (CD) passant par B.

2) De même l'intersection des plans (CGI) et (BCD) est la droite d' parallele à (BD) passant par C.

3) La droite (IG) commune au plan (BGI) et (CGI) coupe le plan (BCD) au point d'intersection E de *d* et de *d'*. CDBE est donc un parallélogrannme.

4) a) G est centre de gravité du triangle ~~BCD~~ ABC donc $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = 3\vec{IG}$ or $\vec{IA} = -\vec{ID}$
donc $\vec{IB} + \vec{IC} - \vec{ID} = 3\vec{IG}$.

b) M est barycentre de (B ;1), (C; 1), (D; - 1) donc d'une part $\vec{IB} + \vec{IC} - \vec{ID} = \vec{IM} = 3\vec{IG}$,

d'autre part $\vec{DM} = \vec{DB} + \vec{DC}$. On en déduit que M est un point de (IG) et que CDBM est un parallélogramme.

Commentaires .

Ce module sur les sections planes de solides a nécessité 4 séances d'une heure .
La première séance a été consacrée à la coupe du cube . Peu d'élèves ont construit correctement les points R et S dans la question 2) ; d'autre part les calculs de DR et DS ont été longs ; il a fallu aider les élèves en construisant les figures planes AFED et ABCD .
La seconde séance a été entièrement consacrée à la coupe du tétraèdre . La question 2) était difficile , notamment le calcul de DR ; peu d'élèves ont proposés trapèze comme nature du quadrilatère ; ils essayaient à tout prix de trouver un parallélogramme , voir un rectangle . (la question est un peu piège)
Pendant la troisième séance on a traité le polyèdre de Kelvin . Pas de grosse difficulté ; il a tout de même fallu environ une demi-heure pour construire la figure de la question 1). Le volume a été trouvé immédiatement . On a donc commencé le troisième problème ; difficulté dans la question 1) : les élèves ayant beaucoup de mal à voir que la droite d est parallèle à (CD) .
Il a fallu la quatrième heure entière pour terminer ce problème .