INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

91

JUILLET 2001

mathématiques
approche
par des textes
historiques

M:A.T.H.

TOME 3

UNIVERSITE DENIS DIDEROT PARIS VII

IREM Paris 7

M:A.T.H.

mathématiques approche par des textes historiques

TOME 3

ont participé :

Michèle Bathier - Fauvet
Philippe Brin
Martine Bühler
Michèle Grégoire
Maryvonne Menez - Hallez
Marie - Françoise Jozeau
Anne Michel-Pajus
Henry Plane

La réalisation technique de l'ouvrage est due à
Nadine Locufier (reprographie)

Le bois de la couverture est celui de la page de titre de l'ouvrage Institutiones arithmeticae ad percipiendam astrologiam et Mathemeticas facultates necessariae de Hieronymus MUNYOS ; Valencia, Espagne, 1566.

SOMMAIRE

Biographie des mathématiciens cités

ARISTARQUE DE SAMOS (vers 310 av. J.C - 230 av. J.C)

CASSINI

DELAMBRE Jean-Baptiste (1749-1822)

ERATOSTHENE de CYRENE (vers 276 av. J.C- 195 av.J.C)

EUCLIDE (Alexandrie IV-III av. J.-C.)

La vie d'Euclide est peu connue. Le corpus euclidien aurait été écrit entre la mort de Platon (347 av. J.C) et la naissance d'Archimède (287 av. J.C). Il est le fondateur de l'école de mathématiques d'Alexandrie. Il a écrit de nombreux ouvrages dont *LesEléments* en 13 livres qui constituent la « bible mathématique ». Les démonstrations de géométrie sont fondées sur un raisonnement hypothético-déductif.

EULER Leonhard (1707-1783)

GALILEE (1564-1642)

Galileo Galilei est né à Pise où il fit des études de médecine. Il s'intéresse aux sciences et plus précisément à la mécanique et à ses applications. A partir de 1609, il devient le conseiller scientifique du Duc de Toscane; c'est à cette époque qu'il invente la lunette qui porte son nom et met au point ses observations astronomiques. Il poursuit ses recherches pendant un quinzaine d'années et, en 1632, il publie *Dialogues sur les deux systèmes du monde.*

KEPLER Johannes (1571-1630)

Kepler étudie à l'université de Tübingen. En 1601, il succède à Tycho-Brahé à Prague en tant qu'astronome de Rodolphe II. Astronome, observateur et mathématicien, il a publié entre autre l'*Astronomie nouvelle* en 1609 et les *Tables Rudolphines* en 1627, premiers éphémérides fondés sur ses trois lois.

LA CAILLE

LEGENDRE Adrien-Marie (1752-1833)

LEIBNIZ Gottfried William (1646-1716)

MECHAIN Pierre-François-André (1744-1804)

PICARD

VAN ROOMEN

VIETE François (1540-1603)

Diplomé de droit à l'université de Poitiers, Viète est connu comme juriste. A l'occasion des conflits avec l'Espagne, Viète décode des lettres interceptées en écriture chiffrée. Les travaux les plus importants de Viète ont trait à l'algèbre symbolique.

La section dorée dans les *Eléments* d'Euclide

Thèmes abordés : équation du second degré, identités remarquables, interaction entre les registres géométrique et algébrique.
Niveau : $1^{\text{ère}}$ (toutes sections).
Outils : calcul algébrique élémentaire (équations, identités remarquables...), calculs avec des racines carrées, théorème de Pythagore, forme canonique (ou formules de résolution) de l'équation du second degré.
Texte étudié : Euclide, les *Eléments*, livre II, traduction B. Vitrac, PUF, Paris , 1990

La section dorée

De nombreux artistes ont utilisé, pour composer harmonieusement le plan d'un bâtiment ou d'un tableau, d'une fresque, d'un bas-relief ou d'un vitrail, des dimensions dont le rapport est égal au nombre d'or. On peut citer par exemple:

- Au XX^e siècle, Le Corbusier, architecte de la "Cité radieuse" à Marseille, et auteur du *Modulor*, les peintres Mondrian, Villon...

- Les peintres de la Renaissance comme Léonard de Vinci, Botticelli, Le Titien, Dürer dont les compositions utilisent souvent des rectangles d'or.

- Les maîtres-d'œuvre des abbayes et cathédrales du Moyen-âge qui possédaient des instruments tels que les “équerres dorées” permettant de tracer rapidement des figures dont les proportions étaient égales au nombre d'or.

- Les constructeurs de l'église byzantine de Sainte Sophie à Constantinople (VI^e siècle).

- Phidias (500- 430 avant J.-C.), architecte du Parthénon à Athènes. La lettre Φ par laquelle on désigne, depuis le XX^e siècle seulement, le nombre d'or lui est dédiée.

- Les constructeurs des pyramides d'Egypte, celle de Khéops, par exemple (II^e millénaire avant J.C.)

Le plus ancien texte connu qui s'intéresse à ce rapport est celui des *Eléments* d'Euclide. Ce rapport apparaît à la proposition 11 du livre II, étudiée ci-dessous. Euclide a besoin de ce rapport au livre IV (propositions 10 et 11) des *Eléments*, pour construire un pentagone régulier inscrit dans un cercle et il procède préalablement au partage d'un segment donné selon ce rapport (dit partage en moyenne et extrême raison). Au livre VI, Euclide donne la définition suivante : *Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison, lorsque la droite entière est au plus grand segment comme le plus grand segment est au plus petit.* (Définition 3). Le problème du partage d'un segment en moyenne et extrême raison est équivalent à la résolution d'une équation du second degré. En d'autres parties de son oeuvre, dans les

Données, Euclide résout d'autres problèmes géométriques que nous traduisons aujourd'hui par des équations du second degré, mais on ne trouve pas d'étude systématique de ces problèmes.

Remarques sur les travaux en classe

Vous trouverez dans cette activité des propositions pour construire un TP ou un devoir à la maison, pouvant servir d'activité d'approche à la résolution des équations du second degré ; ce texte peut être proposé comme un problème mettant en jeu, dans un cadre moins classique, les connaissances nouvellement acquises sur les équations du second degré. Cette activité peut aussi être donnée à une classe de seconde, à condition d'aider à la résolution de l'équation $x^2 = x+1$.

Cette activité bouscule un peu les élèves très scolaires, chez qui les disciplines algèbre et géométrie restent très cloisonnées ; elle leur demande un va et vient entre les deux champs disciplinaires qui les déconcerte un peu. Elle mobilise des connaissances et des savoir-faire plus anciens (analyse d'une figure, calculs sur des racines carrées...), et fait réfléchir à la construction d'un raisonnement. Les consignes sont assez précises et souvent bien suivies par les élèves consciencieux, mais il faut les pousser un peu à prendre du recul pour bien envisager et énoncer la démarche globale : une résolution géométrique d'un problème géométrique par un procédé de construction, toutes les étapes pouvant recevoir une traduction algébrique ou numérique.

Par exemple ce travail a été mené avec des 1ères L (option maths) sous forme d'un TP, qui a représenté environ 4 heures de travail en commun, dont j'ai demandé la rédaction en devoir à la maison. Les élèves ont eu du mal à transformer seuls l'équation $x^2 + dx - d^2 = 0$ en une équation d'inconnue $\frac{d}{x}$, à exprimer la relation (r) de la question 2 en fonction de a et b, mais ils reconnaissaient bien sous ses différentes formes le partage d'un segment selon la section dorée. La lecture de la démonstration d'Euclide est ardue, il faut la soutenir par une construction faite pas à pas au tableau.

Fiche élève

I. Introduction : la section dorée

De nombreux artistes ont utilisé, pour composer harmonieusement le plan d'un bâtiment ou d'un tableau, des dimensions dont le rapport est égal au nombre d'or. C'est déjà le cas de Phidias, l'architecte du Parthénon à Athènes (V^e siècle avant J.-C.) ; c'est en son honneur que la lettre Φ a été choisie, au début du XX^e siècle, pour désigner le nombre d'or. Euclide emploie une expression qu'on traduit par "partage en extrême et moyenne raison" ; l'expression "section dorée" est de Léonard de Vinci (1452-1519).

Définition : le point H réalise "la section dorée" du segment [AB] si les deux parties inégales [AH] (la majeure) et [HB] (la mineure) qu'il définit sont telles que : "le rapport du tout à la majeure soit égal au rapport de la majeure à la mineure".

Question 1 : où l'on vérifie que le rapport $\frac{AB}{AH}$ ou $\frac{AH}{HB}$, appelé nombre d'or, ne dépend pas de la longueur AB

a) Par quelle égalité peut-on traduire la définition?

b) Soit AB = d, AH = x ; écrire une relation exprimant que H réalise la section dorée du segment [AB].

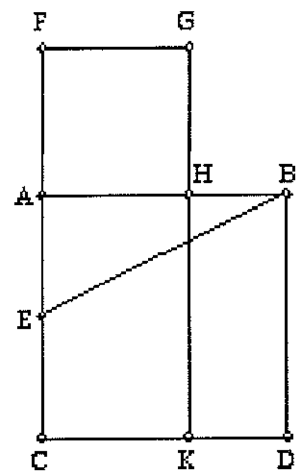
c) On pose $\Phi = \frac{d}{x}$. Montrer que $\Phi^2 = \Phi + 1$ et donner la valeur exacte de Φ, puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

II. Proposition préliminaire

Le plus ancien texte qui s'intéresse à la section dorée est celui des *Eléments* d'Euclide. Ce problème est équivalent à la résolution d'une équation du second degré, mais comme dans la plupart des textes de l'Antiquité grecque, le problème est posé en termes géométriques. Le produit de deux grandeurs a et b est pour Euclide l'aire d'un rectangle de côtés a et b, le carré a^2 est l'aire d'un carré de côté a, la somme $ab + a^2$ est l'aire des deux figures prises ensemble. Avant de résoudre le problème, à la proposition 11 du Livre II, Euclide a établi géométriquement diverses propriétés que nous reconnaissons comme des identités algébriques. (par exemple : $a(b + c) = ab + ac$; $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$) ; en voici un exemple : la proposition 6 du Livre II, sur laquelle repose la démonstration de la proposition 11.

Enoncé de la proposition II, 6

Qu'une certaine droite (1) AC *soit coupée en deux parties égales au point* E *et qu'une certaine droite* AF *lui soit ajouée en alignement. Je dis que le rectangle contenu par* CF, FA (2), *pris avec le carré sur* AE (2) *est égal* (4) *au carré sur* EF (3)



Vocabulaire d'Euclide :

(1) droite désigne chez Euclide ce que nous appelons segment de droite.

(2) rectangle contenu par CF, FA : rectangle dont les côtés ont pour longueur CF et FA

(3) carré sur AE : carré de côté AE.

(4) l'égalité des figures signifie ici l'égalité des aires de ces figures.

La proposition 6 énonce donc, en référence à la figure ci-dessous :

rectangle CFGI + carré LHNM = carré EFPM (*r*)

Question 2

a) Vérifier géométriquement la relation (r)

b) Poser d = AC, y = AF ; traduire la relation (r) et la vérifier algébriquement.

c) Poser $a = \frac{d}{2} + y$ et $b = \frac{d}{2}$.

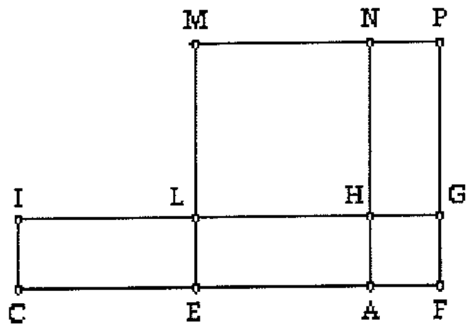
Ecrire (r) en fonction de a et b. Quelle identité remarquable reconnaît-on ?

III. La construction d'Euclide

1°) Enoncé de la proposition II, 11

Couper une droite donnée de telle sorte que le rectangle contenu par la droite entière et l'un des segments soit égal au carré sur le segment restant.

Soit la droite donnée AB. Il faut alors couper la droite AB de telle sorte que le rectangle contenu par la droite entière et l'un des segments soit égal au carré sur le segment restant.



Pour mieux comprendre le problème posé : il faut déterminer la position du point H sur le segment donné [AB] de sorte que l'aire du rectangle dont les côtés ont pour longueur AB ("la droite entière") et BH ("un des segments") soit égal au carré de côté AH (le "segment restant"). Euclide conclut la construction par "le rectangle contenu par AB, BH est égal au carré sur AH"

Question 3 : Montrer que ce problème équivaut à celui du partage du segment [AB], selon la section dorée.

2°) Construction : voici la construction proposée par Euclide

En effet, que le carré ABCD *soit décrit sur* AB. *Et que* AC *soit coupée en deux parties égales au point* E.. *Que* BE *soit jointe, et que* CA *soit conduite jusqu'en* F *; et que soit placée* EF *égale à* BE (1)*, et que le carré* FH (2) *soit décrit sur* AF *; et que* GH *soit conduite jusqu'en* K (3)*. Je dis que* AB *a été coupé en* H *de façon à rendre le rectangle contenu par* AB, BH (4) *égal au carré sur* AH.

Aide à la lecture :

(1) Le segment CA est prolongé jusqu'en F de sorte que EF = EB

(2) Le carré FH : c'est le carré ABCD ; le carré AFGH est ici désigné par sa diagonale [FH], de même, les rectangles sont souvent désignés par une de leurs diagonales.

(3) La droite (GH) coupe (CD) en K.

(4) Quel est le rectangle de la figure "contenu par AB, BH" ?

Question 4 : Vérification numérique de la construction

Soit d = AB; calculer en fonction de d: EB, AF, HB, puis $\frac{AB}{AH}$ et $\frac{AH}{HB}$.

Quel type de partage du segment [AB] a-t-on réalisé ?

3°) Démonstration d'Euclide

En effet, puisque la droite AC *a été coupée en deux parties égales au point* E *et, puisque* FA *lui a été ajoutée, le rectangle contenu par* CF, FA, *pris avec le carré sur* AE, *est donc égal au carré sur* EF (II,6) (1). *Or* EF *est égal à* EB. *Donc le rectangle contenu par* CF, FA *avec le carré sur* AE *est égal au carré sur* EB. *Mais à celui sur* EB *sont égaux ceux sur* BA, AE, (I, 47) (2), *car l'angle en* A *est droit : Donc le rectangle contenu par* CF, FA *avec le carré sur* AE *est égal à ceux sur* BA, AE. *Que le carré sur* AE *soit retranché de part et d'autre. Donc ce qui reste, le rectangle contenu par* CF, FA *est égal au carré sur* AB. [...] *Que* AK *soit retranché de part et d'autre* (3)*; le reste* FH *est donc égal à* HD. . [...] *Donc le rectangle contenu par* AB, BH *est égal au carré sur* AH.

Donc la droite donnée AB *a été coupée en* H, *de façon à rendre le rectangle contenu par* AB, BH *égal au carré sur* AH. *Ce qu'il fallait faire.*

Pour mieux comprendre :

(1) Euclide renvoie à la proposition 6 du livre II étudiée à la question 2.

(2) Euclide renvoie à la proposition 47 du livre I que nous appelons aujourd'hui "Théorème de Pythagore". Réécrire dans le langage contemporain la phrase "Au carré sur EB sont égaux les carrés sur BA, AE ".

(3) retranché de part et d'autre de l'égalité obtenue.

Question 5 : Rédiger la démonstration en réécrivant en langage actuel la suite des égalités énoncées par Euclide.

Question 6 : Commenter et comparer les démarches des questions 4 et 5.

N. B. Les extraits des *Eléments* d'Euclide sont repris de la traduction de B. Vitrac, P.U.F., Paris 1990 (tome 1, p. 335-338 et 353-357).

Une méthode de résolution d'une équation du troisième degré par François Viète

Thèmes abordés : résolution d'une équation du troisième degré, formules d'Euler et de De Moivre.

Niveau : Terminale S, temps non limité.

Outils nécessaires : études de fonctions, nombres complexes et formules de trigonométrie.

Texte étudié : *Ad problema, quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus, responsum* , Viète (1595).

Le mathématicien hollandais Adriaan Van Roomen (1561-1615) proposa un défi à ses condisciples européens : résoudre une curieuse équation du 45ème degré. François Viète (1540-1603) y reconnut des similitudes avec l'expression de sin 45θ en fonction de sin θ et réussit ainsi, par un « changement de variable », à résoudre l'équation dont il donna les 23 solutions positives. Dans *Ad problema, quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus, responsum* [1] (Paris 1595), il explique comment sa méthode permet de résoudre certains types d'équations polynomiales, dont la forme est liée aux formules de De Moivre.

La réponse de Viète inspire le problème suivant qui a été donné en devoir à la maison dans une classe de Terminale Scientifique.

Il s'agit de résoudre une équation du troisième degré particulière dans le cas dit « irréductible »[2] : la méthode de Cardan mène dans ce cas à une équation du second degré dont les solutions sont complexes, et donc à l'extraction d'une racine cubique de nombre complexe Le problème se construit autour de la méthode de Viète qui consiste à faire un changement de variable introduisant des fonctions trigonométriques, puis à utiliser l'expression de sin 3a en fonction de sin a. La partie V souligne la généralité des liens entre coefficients et racines d'une équation polynomiale, liens qui ne sont au programme du lycée que pour le second degré.

I. Préliminaires

Soit $Z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$.

1°) Mettre Z sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

2°) En déduire les égalités : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$, puis les valeurs de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

[1] « Réponse au problème qu'Adrianus Romanus a proposé à tous les mathématiciens du monde entier ».

[2] Voir Mnemosyne n°14 page 52.

3°) Développer $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3$.

4°) En déduire l'expression de sin 3α en fonction de sin α (et aussi celle de $\cos 3\alpha$ en fonction de cos α).

<u>II. Etude du nombre de solutions réelles distinctes de l'équation (*E*)</u> : $x^3 - 3x + a = 0$ $(a \in \mathrm{IR})$

1°) Montrer, en justifiant soigneusement toutes vos affirmations que si a appartient à]–2 ; 2[, (E) possède trois racines réelles distinctes x_1, x_2 et x_3 vérifiant : $-2 < x_1 < -1 < x_2 < 1 < x_3 < 2$, avec x_2 du signe de a.

2°) En indiquant rapidement la méthode employée, mais sans justifications précises, indiquer le nombre de racines réelles distinctes de (E) lorsque :

a) $a = 2$ b) $a = -2$ c) $a > 2$ d) $a < -2$.

Pour c) et d), on pourra examiner le signe de $x^3 - 3x + a$ pour $x = -a$.

<u>III. Intermède pour les latinistes</u>

Viète (1540-1603), souvent nommé le « père de l'algèbre » écrit le texte suivant à la fin du XVI[e] siècle. « 3N » est l'ancêtre de notre « 3x »et « 1N » est mis pour « x », l'inconnue du problème ; 1C désigne le cube de l'inconnue « x^3 ».

1°) Pouvez-vous traduire le texte ? (Attention! « radicem binomiae $2-\sqrt{3}$ » désigne le nombre $\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Vous interpréterez de façon analogue l'expression « radicem trinomiae a + b + c ».)

PROBLEMA I.

Data magnitudine cui æquatur 3 N – 1 C, invenire 1 N.

I. 3 N — 1 C, æquetur $\sqrt{2}$. Dico 1 N eſſe radicem binomiæ 2 — $\sqrt{3}$.
Vel etiam, $\sqrt{2}$.

II. 3 N — 1 C, æquetur radici binomiæ $\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}$. Dico 1 N eſſe radicem trinomiæ $\frac{9}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}}$ — rad. bin. $\frac{15}{8} + \sqrt{\frac{45}{64}}$.
Vel etiam, radicem binomiæ $\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}$.

III. 3 N — 1 C, æquetur radici binomiæ $\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}$. Dico 1 N eſſe radicem trinomiæ $\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}}$ + rad. bino. $\frac{15}{8} + \sqrt{\frac{45}{64}}$.
Vel etiam, rad. bino. $\sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{5}{2}$.

Sed 3 N — 1 C, æquetur 1. Ecquis vero 1 N primam, ſecundam-ve (eſt enim duplex) accurate conſtruxerit?

2°) A quel cas étudié au II se rapporte chacun des exemples de Viète ?

Plus loin dans le texte, Viète indique sa méthode de résolution que la partie IV du problème va reprendre dans notre langage moderne.

IV. Résolution de (E) : $x^3 - 3x + \sqrt{2} = 0$

1°) En utilisant les résultats obtenus au II, indiquer le nombre de racines réelles distinctes de (E) et leur localisation.

2°) x prenant ses valeurs dans]−2 ; 2[, on pose $x = 2\sin\alpha$ avec α appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

a) Pourquoi ce changement de variable est-il valide ?

b) Montrer alors que résoudre l'équation (E) dans IR revient à résoudre l'équation $\sin 3\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

c) Résoudre dans IR, puis dans $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, l'équation d'inconnue α : $\sin 3\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3°) Déduire de ce qui précède les valeurs des trois racines x_1, x_2 et x_3 de (E). Comparer les résultats avec ceux donnés par Viète.

V. Remarque sur les coefficients et les racines de l'équation

Mettre $x^3 - 3x + \sqrt{2}$ sous forme d'un produit de trois facteurs et utilise cette forme pour simplifier l'expression de $\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2} - \sqrt{2+\sqrt{3}}$ et de $\sqrt{2-\sqrt{3}} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Viète fut un des premiers à mettre en évidence les relations entre les formules trigonométriques et la résolution d'équations polynomiales. Il fut une figure dominante du XVI$^{\text{ème}}$ siècle et est célèbre pour son traité d'algèbre *Algebra Nova*, publié à partir de 1591, où il développa l'algèbre symbolique.

FRANCISCI VIETÆ

AD

PROBLEMA, QVOD OMNIBVS MATHEMATICIS TOTIVS ORBIS CONSTRUENDUM PROPOSUIT ADRIANUS ROMANUS,

RESPONSVM.

SI toto terrarum orbe non errat ADRIANVS ROMANVS, dum Mathematicos totius terrarum orbis unius sui Problematis solutioni vix censet idoneos, non ille saltem Gallias, nec Galliarum Lycia suo dimensus est radio. Cedat ROMANO Belga, cedat ROMANVS Belgæ, vix siner Gallus à ROMANO vel Belga gloriam suam sibi præripi. Ego qui me Mathematicum non profiteor, sed quem, si quando vacat, delectant Mathematices studia, Problema ADRIANICVM ut legi ut solvi, nec me malus abstulit error. Sic trihorio ingens prodii Geometra. Neque vero placet barbarum idioma, id est, Algebricum. Geometrica Geometrice tracto, Analytica Analytice. Curabo tamen ut me, sive quasi Geometram sive novum Analystam, vulgus Algebristarum satis exaudiat.

CAPVT I.

Proponentis Adriani Romani verba.

PRimum igitur Adriani Romani proponentis ipsa verba refero, ne immutato quidem commate.

PROBLEMA MATHEMATICVM OMNIBVS ORBIS MATHEMATICIS AD CONSTRVENDVM PROPOSITVM. "

"Si duorum terminorum prioris ad posteriorem proportio sit, ut 1 (45) ad "
"45 (1) − 3795 (3) + 9,5634 (5) − 113,8500 (7) + 781,1375 (9) − 3451,2075 (11) + 1, "
"0530, 6075 (13) − 2, 3267, 6280 (15) + 3, 8494, 2375 (17) − 4, 8849, 4125 (19) "
"+ 4, 8384, 1800 (21) − 3, 7865, 8800 (23) + 2, 3603, 0652 (25) − 1, 1767, 9100 "
"(27) + 4695, 5700 (29) − 1494, 5040 (31) + 376, 4565 (33) − 74, 0459 (35) + "
"11, 1150 (37) − 1, 2300 (39) + 945 (41) − 45 (43) + 1 (45) deturque terminus "
"posterior, invenire priorem.

Viète Opera Mathematica recognita F. à Schooten, Leyde, 1646, p 305.

Galilée : Les satellites de Jupiter

Thèmes abordés : introduction à la notion de fonction, exemple de fonction périodique, représentation de fonction.
Niveau : Seconde.
Outils nécessaires : coordonnées dans un repère.
Texte étudié : extrait de *Istoria e demonstrazioni interno alle machine solari* de Galilée, Rome 1613.

Dans *Istoria e demonstrazioni interno alle machine solari* publié à Rome en 1613, Galilée (1564-1642) reproduit avec précision les observations qu'il vient de faire, en mars, sur les positions des quatre satellites de Jupiter qu'il a découverts trois ans auparavant, et qu'il a nommés "planètes médicéennes" en hommage à son mécène Cosme de Médicis. Sur le document ci-joint, le rond figure Jupiter et les points en ligne les quatre satellites actuellement nommés Callisto, Ganymède, Europe et Io. Certains jours il n'en figure que trois par suite d'occultation par Jupiter. Ce document a fait l'objet d'une activité en classe de seconde. Cette activité n'utilise qu'une partie des observations de Galilée. Aussi nous vous proposons tout d'abord une lecture guidée plus approfondie du document.

Lecture du document

Construisons un graphique : en abscisse portons les temps (1cm par journée), en ordonnée les distances à la planète telles que relevées sur le dessin (on utilisera chaque jour l'observation la plus voisine de 3h).

I. Etude de CALLISTO

C'est le satellite ayant la plus grande orbite, l'éloignement maximal apparaît être de 5,2 cm. Notons $d_1 = 5{,}2$. Les points ainsi relevés suggèrent sur le graphique une sinusoïde. De fait, si on considère l'orbite comme un cercle décrit par un point d'un mouvement uniforme, ce que l'on observe est le projeté de ce point sur un diamètre de l'orbite, projeté dont le mouvement est sinusoïdal. La période de cette sinusoïde se révèle être de 16 jours ($T_1 = 16$). Elle correspond donc à la durée d'une révolution de Callisto autour de Jupiter.

II. Etude de GANYMEDE

Procédons de même. Une fois éliminés les relevés concernant Callisto, les plus grandes élongations correspondent à Ganymède. On a $d_2 = 3$. Une autre sinusoïde apparaît de période $T_2 = 7$. Il faut cependant se méfier : le 1er mars, Ganymède n'est pas en deuxième position. La suite des observations révélera que, ce jour, le satellite figure à gauche de Jupiter.

III. Et la troisième loi de Képler [1]?

On calculera : $\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^3 = \left(\frac{5{,}2}{3}\right)^3 \approx 5{,}21$ et $\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{16}{7}\right)^2 \approx 5{,}22$. Pouvait-on espérer mieux !

IV. Etude d'EUROPE

Les points restant sont plus difficiles à utiliser. Les élongations les plus importantes paraissent être de 1,9 cm. Cherchons à suivre ce point (d_3 = 1,9). Demandons donc à cette troisième loi de Kepler la période de la sinusoïde espérée. $\left(\frac{T_3}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{d_3}{d_1}\right)^3$ donne $T_3 = 3{,}5$. Une période de 3 jours et demi convient bien pour une sinusoïde rassemblant les observations sur ce satellite. On notera qu'en faisant jouer la loi de Kepler avec Ganymède, c'est-à-dire en écrivant $\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{d_3}{d_2}\right)^3$, on arrive au même résultat pour T_3.

V. Etude de IO

Une étude similaire pour le quatrième satellite offre bien moins de précision.
Il semble toutefois que l'amplitude maximale se situe vers 1,2 cm. (d_4 = 1,2).

On aurait alors : $\left(\frac{T_4}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{d_4}{d_1}\right)^3$ donc $T_4 \approx 1{,}8$.

Si on trace une sinusoïde de période 1,8 et d'amplitude 1,2 peut-on y placer ce qui correspond aux observations restantes ? On retiendra les extrema d'amplitudes opposées les 5 et 11 mars correspondant à 3 périodes et demi. Il faut aussi tenir compte du fait qu'une heure de décalage dans l'observation correspond à un arc de 8 degrés sur l'orbite. En effet, en 1,8 jour, c'est-à-dire en environ 43 heures, Io parcourt 360° sur son orbite ; donc en 1 heure, il parcourt $\frac{360°}{43} \approx 8{,}3°$. Il semble que l'ensemble des points relevés ne s'accorde pas trop mal avec la sinusoïde.

VI. Et les résultats du XX^e siècle ?

Les données utilisées actuellement sont :

	T	D exprimé en rayon R de Jupiter	d échelle : 1cm. pour 5R
CALLISTO	16j. 0h. 16mn. soit 16,01j.	26,2	5,2
GANYMEDE	7j. 3h. 42mn. soit 7,15j.	14,9	3
EUROPE	3j. 13h. 13mn. soit 13,55j.	9,4	1,9
IO	1j. 18h. 28mn. soit 1,77j.	5,9	1,2

Dans ce tableau, T est la période de révolution du satellite considéré autour de Jupiter, D sa distance moyenne à Jupiter et d cette distance ramenée à l'échelle du document présenté.

On ne peut que reconnaître les qualités d'observateur de Galilée !

---

[1] Képler énonce sa troisième loi dans *Harmonia Mundi* (1619) : les périodes de révolution de deux planètes autour du Soleil et les grands axes de leurs trajectoires respectives sont liés par la relation : $\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^3$.

Pour plus de précisions, voir *Ciel, passé, présent*, Gilbert Walusinski (Brochure APMEP, n° 51, 1981) et *Le calcul, l'Imprévu*, Ivar Ekeland (Seuil, 1984).

Activité en Travaux Dirigés

Les remarques précédentes permettent de construire en seconde une activité d'introduction au cours sur les fonctions. Cette activité a été menée en une heure de Travaux Dirigés. Elle permet de faire découvrir une fonction qui n'est donnée ni algébriquement, ni numériquement, ni par un procédé géométrique. Cette fonction, qu'on peut reconnaître plus tard comme une fonction trigonométrique, est un exemple "naturel" de fonction périodique ; le tracé de la courbe permet d'obtenir certaines données astronomiques : la période de Callisto, la vérification de la troisième loi de Kepler et la prédiction de la position de Callisto à une date donnée.

Le document donné aux élèves comprend la page de Galilée en latin (voir page 15) et l'énoncé ci-dessous. Galilée présente des observations faites en mars. Nous avons adopté la convention que "Dies 1", "Dies 2", etc. correspondaient au "1er mars", "2 mars", etc. Nous avons commenté oralement les observations de Galilée à l'aide d'un rétroprojecteur : il faut expliquer aux élèves ce que représentent le rond et les points, leur indiquer comment faire les mesures, etc. Pour différencier les positions de Callisto à droite et à gauche de Jupiter, nous avons utilisé l'expression "distance algébrique".

Commentaires de l'énoncé :

Les jours 6 et 14 ne figurent pas dans l'aide au graphique car il est difficile de distinguer Callisto des autres satellites ces jours-là ; l'omission des deux points correspondants n'empêche pas d'obtenir une "belle" courbe.

La question 2°) b) donne lieu à deux réponses légèrement différentes selon que les élèves considèrent 5 avril moins une période ou 5 avril moins deux périodes. On peut alors justifier ce décalage par le fait qu'une observation réelle présente toujours une certaine erreur.

GALILEE : LES SATELLITES DE JUPITER

La page jointe est une photocopie d'un livre de Galilée paru en 1613. Galilée a reproduit avec précision les observations qu'il vient de faire sur les satellites de Jupiter. Le rond figure Jupiter et les points en ligne les satellites Callisto, Ganymède, Europe et Io. Certains jours, il n'en figure que trois par suite d'occultation par Jupiter (un satellite passe devant ou derrière Jupiter et n'est donc pas visible). Nous allons étudier plus particulièrement le mouvement de Callisto : il s'agit du satellite ayant la plus grande orbite. A chaque instant t, on peut associer la "distance algébrique" Jupiter-Callisto : ceci définit une fonction dont nous allons tracer la courbe représentative.

L'échelle choisie pour le graphique est la suivante : en abscisse, 1cm représente une journée ; en ordonnée, nous prendrons la même échelle que Galilée, donc nous reporterons les distances mesurées sur le dessin (en comptant les distances positivement lorsque Callisto est à droite de Jupiter et négativement lorsqu'il est à gauche). Vous placerez sur le graphique les points pour lesquels des indications sont données ci-dessous, puis vous tracerez la courbe.

Des remarques pour vous aider à faire le graphique :

1°) Chaque jour, choisir l'observation la plus proche de 3h.

2°) Jours 1 à 4 : Callisto est le satellite le plus éloigné à droite de Jupiter.

3°) Jour 5 : Callisto est occulté par Jupiter.

Jours 7 à 12 : Callisto est le satellite le plus éloigné à gauche de Jupiter.

Jour 13 : occultation.

Jours 15 à 20 : Callisto est le satellite le plus éloigné à droite de Jupiter.

Questions :

Les observations sont faites au mois de mars. "Dies 1" est le 1er mars, "Dies 2" le 2 mars, etc.

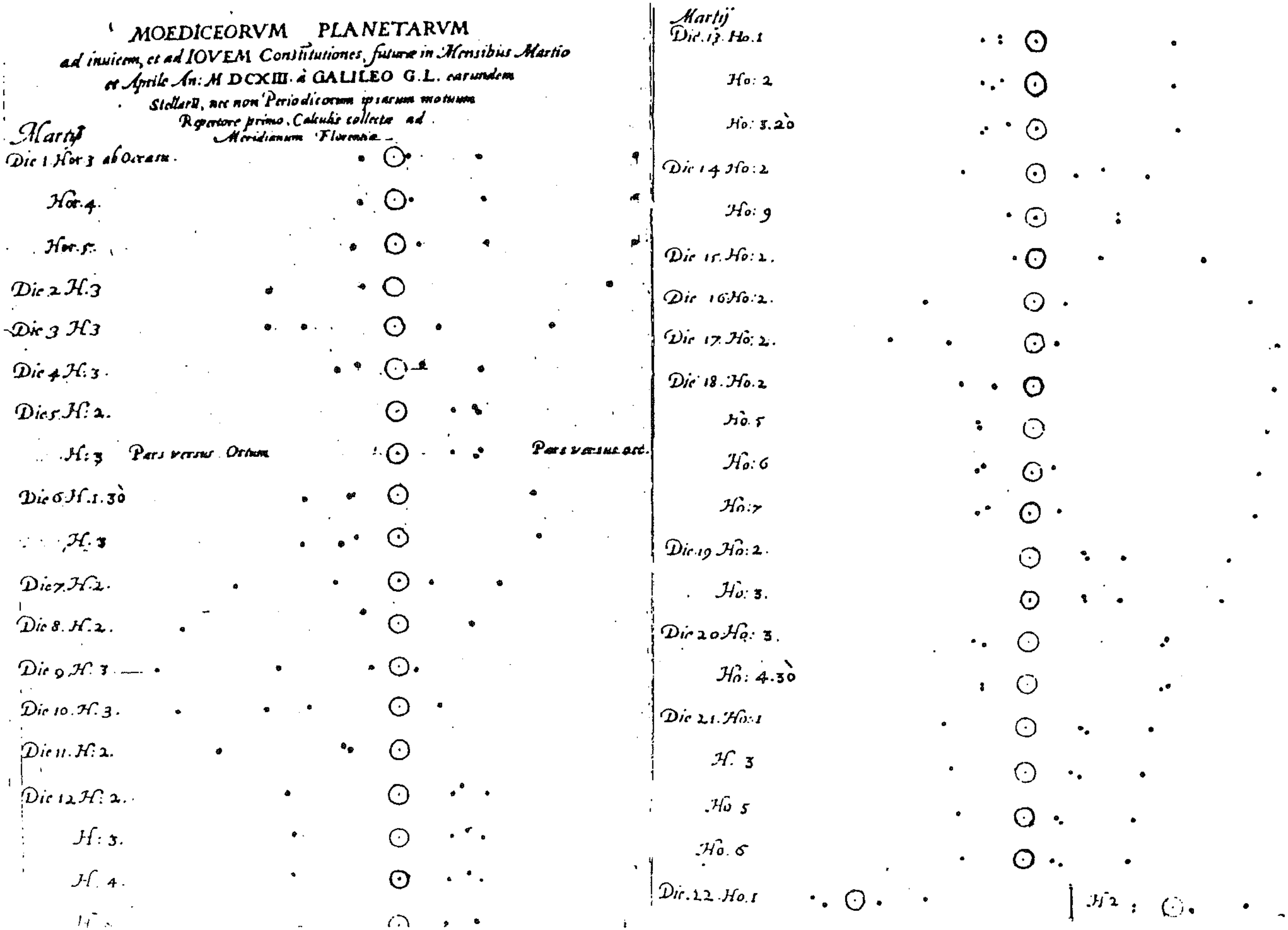
1°) Quelle est la durée T_1 (au jour près) d'une révolution de Callisto autour de Jupiter ?

2°) a) Quelle est la durée minimum d'observation nécessaire pour pouvoir prédire la position de Callisto à une date donnée ?

b) Quelle est, à l'échelle du graphique, la distance de Callisto à Jupiter le 5 avril ?

3°) Quelle est l'élongation maximale d_1 de Callisto (i.e. la distance maximale Callisto-Jupiter) ?

4°) Le même travail mené avec Ganymède donne l'élongation maximale $d_2 = 3$ et la période $T_2 = 7$ jours. Calculer $\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^3$ et $\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2$. Que constate-t-on ?


MOEDICEORVM PLANETARVM
ad inuicem, et ad IOVEM Constitutiones, futuræ in Mensibus Martio et Aprile An: M DCXIII. à GALILEO G.L. earundem Stellarũ, nec non Periodicorum ipsarum motuum Repertore primo, Calculis collectæ ad Meridianum Florentiæ.
Martij
Die 1. Hor 3 ab Occasu.
Hor. 4.
Hor. 5.
Die 2 H. 3
Die 3 H 3
Die 4 H: 3.
Die 5 H: 2.
H: 3
Pars versus Ortum
Pars versus occ.
Die 6 H. 1. 30
H: 3
Die 7 H. 2.
Die 8. H. 2.
Die 9 H. 3
Die 10. H. 3.
Die 11. H: 2.
Die 12 H: 2.
H: 3.
H. 4.
Martij
Die. 13. Ho. 1
Ho: 2
Ho: 3. 20
Die 14 Ho: 2
Ho: 9
Die 15. Ho: 2.
Die 16 Ho: 2.
Die 17. Ho: 2.
Die 18. Ho. 2
Ho. 5
Ho: 6
Ho: 7
Die 19 Ho: 2.
Ho: 3.
Die 20 Ho: 3.
Ho: 4. 30
Die 21. Ho: 1
H. 3
Ho 5
Ho. 6
Die. 22. Ho. 1
H 2

La mesure du méridien

Thèmes abordés : la mesure du méridien.

Niveau : Post-bac.

Outils nécessaires : trigonométrie plane et sphérique, développements limités.

Textes étudiés : *La mesure de la terre,* Picard, 1671 ; *Eléments de géométrie,* Legendre, 1794 ; *Base du système métrique décimal,* Delambre, 1806 - 1810.

La mesure des distances terrestres est une préoccupation qui remonte à l'Antiquité, que ce soit pour l'établissement de cartes ou pour des recherches plus théoriques sur le système du monde. Le souci de précision devint plus aigu quand la volonté égalitariste de la Révolution française choisit le méridien terrestre, bien commun à tous les humains, comme base d'un système universel de mesure.

Ce sujet a donné lieu à plusieurs projets pluridisciplinaires, souvent liés à des commémorations historiques.

- En 1989, plusieurs classes du lycée Gérard de Nerval à Luzarches ont participé à l'opération menée par Denis Guedj, intitulée la Méridienne, qui consistait à faire revivre à des élèves les observations effectuées par Delambre et Méchain sur la ligne méridienne entre Dunkerque et Perpignan. Avec leur professeur de physique des élèves ont tracé un méridien dans la cour du lycée. Ils ont réalisé une exposition présentant leurs travaux relatifs à la mesure du méridien autour de Saint Martin du Tertre, une des stations de la triangulation de Delambre et Méchain, voisine de Luzarches. Cette exposition fut présentée dans les écoles et les mairies des communes alentour.

- La même année, la Cité des sciences et de l'industrie proposait une exposition sur les savants à la Révolution française et une classe de 1ère S du lycée Lavoisier a fait un "séjour" d'étude d'une semaine -une "classe Villette" - dont un des thèmes était la mesure de la terre et de l'univers. Les principes et l'histoire du système métrique y furent présentés et des mesures de distances par triangulations, à l'aide de théodolites prêtés par l'armée, ont été effectuées dans le Parc de la Villette.

- Certaines des activités ont été reprises lors d'un projet d'établissement pluridisciplinaire en commémoration de l'œuvre de Lavoisier, entrepris en 1994.

Les activités décrites ci-dessous sont aussi des exercices proposés en travaux pratiques dans les classes de 1ères S, en liaison avec le cours de trigonométrie ou de géométrie dans l'espace (à propos de la sphère). L'exercice "Étude de la réduction au centre" donne l'occasion de réfléchir sur l'usage de l'approximation classique de sin x par x (pour x petit).

I. Deux poids, deux mesures

Sous l'Ancien Régime, les unités et étalons de mesures étaient fort nombreux, et, le plus souvent différaient d'une région à l'autre. Les étalons étaient déposés dans les églises ou les palais seigneuriaux, sous la protection des autorités religieuses ou temporelles. L'extension du commerce au Moyen Âge fit ressentir le besoin d'unifier étalons et mesures. Au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, le développement scientifique et la centralisation du pouvoir rendirent ce besoin de plus en plus évident et ressenti par des catégories sociales de plus en plus nombreuses : paysans, artisans, commerçants...

L'empereur Charlemagne avait déjà suggéré de choisir le "pied du Roi" ($\cong$ 0,3248 mètre) comme étalon universel. Cette unité avait été adoptée par les ordres monastiques bâtisseurs, mais d'autres communautés continuaient à utiliser des unités diverses. En 1670, Gabriel Mouton, abbé de Lyon suggéra de choisir pour unité universelle le "milliare", le soixantième du degré de méridien, qui est devenu le mille marin (1,852 km). Mais malgré de nombreuses tentatives de ce genre, jusqu'à la Révolution française, jamais la volonté politique ne fut assez forte pour imposer une décision unificatrice face aux intérêts des seigneurs ou des corporations qui savaient tirer parti de la confusion. En 1789, les cahiers de doléances sont pleins de réclamations dans ce sens : "Que toutes les sortes de grains soient mesurées avec la même unité, pour ne pas léser les plus pauvres..." Plus de 800 unités différentes étaient en usage au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle: arpents pour les champs, perches pour les prés, daurées pour les vignes, aune-carrée pour les pièces d'étoffe ; on pesait les fruits en poinçonnées, le blé au muid, le sel au setier, les poudres d'apothicaire à la livre, à l'once, en drachmes ou en scrupules... (cf. l'exercice de l'Annexe 1, pour le collège)

En 1790, l'Assemblée Constituante demande à l'Académie des Sciences de déterminer un système de mesure qui puisse être accepté par le monde entier, sans particularité liée à aucune situation particulière. La commission, composée en particulier des mathématiciens et physiciens Lagrange, Laplace, Monge, Condorcet, du chimiste Lavoisier,... hésite sur différentes définitions possibles, rejette par exemple l'idée proposée pour la première fois par Picard au XVIIème siècle, de choisir la longueur du pendule battant la seconde, car cette longueur diffère selon les latitudes; la commission décide finalement de fixer pour unité de longueur la dix-millionième partie du quart du méridien[1] terrestre et la nomme "mètre" (du grec metron, mesure). Cette définition témoigne de l'esprit égalitariste de la Révolution française, puisque sous les pieds de chaque être humain passe un méridien et que tous les méridiens sont égaux. L'Académie des Sciences se propose donc de remesurer une portion du méridien terrestre (à l'aide de l'étalon le plus précis dont les astronomes disposent à l'époque, la toise du Pérou, nommée ainsi, car elle avait été utilisée lors d'opérations géodésiques au Pérou quelques dizaines d'années plus tôt). L'unité de poids est définie à partir de l'unité de longueur puisque c'est le poids d'un cube de 0,1 mètre de côté d'eau distillée à la température de zéro degré[2]. On adopte également le principe de division décimale des unités (cf Annexe 3).

---

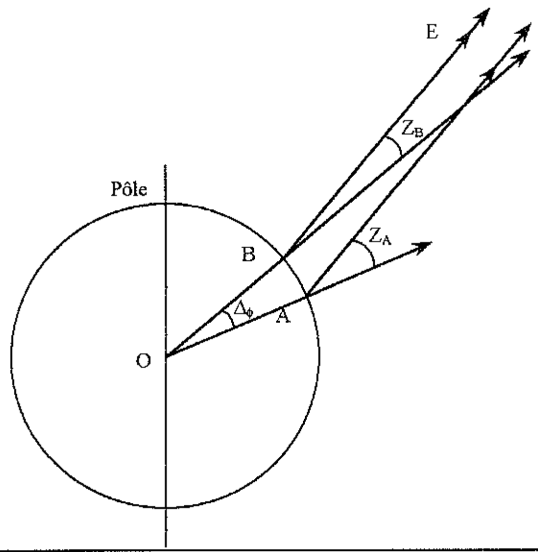
[1] Tout grand cercle passant par les pôles est un méridien

[2]Les mesures expérimentales sont faites à basse température (environ 6°), par Lavoisier et Fortin, puis ramenées par des calculs théoriques à 0°. Quelques années plus tard, le kilogramme sera défini de la même façon, mais en prenant l'eau à 4°, température de densité maximale de l'eau.

II. La mesure de la terre avant 1789

La mesure d'un méridien terrestre avait déjà été faite précédemment de façon plus ou moins précise. Aristarque, qui, au IV^{ème} siècle avant J.C., défendait un système héliocentrique du monde avait estimé à 400000 stades ($\cong$ 63000 km) la circonférence de la terre ; Archimède donnait pour estimation 300000 stades, mais on ne connaît rien de leurs méthodes. La plus ancienne connue est celle d'Eratosthène d'Alexandrie, au III^{ème} siècle avant J.-C. Il a mesuré la distance entre Syène (Assouan aujourd'hui) et Alexandrie, deux villes situées approximativement sur le même méridien, mesuré l'angle Δ_Φ, égal à la différence de latitude entre les deux villes, et il en a déduit la circonférence de la terre, environ équivalente à 39000 km. La qualité de l'approximation est excellente, probablement par un heureux hasard, les différentes erreurs se compensaient (cf. activité 1 ci-dessous et, en Annexe 2 le texte de Duhem (1861-1916), extrait de *Le système du monde*, réédition Hermann, Paris 1976).

ACTIVITE 1 : La méthode d'Eratosthène



Des points A et B on vise la même étoile E (le soleil pour Eratosthène). L'étoile E étant très éloignée, on considère que les rayons de visée sont parallèles.

1°) Démontrer que $\Delta_\Phi = Z_A - Z_B$.

2°) Connaissant Δ_Φ et la longueur de l'arc AB, comment peut-on en déduire la circonférence de la terre ?

La mesure de la terre était le souci des cartographes, mais aucune mesure précise du méridien ne fut tentée avant 1669, année où Colbert demanda à l'Académie des Sciences nouvellement créée, de dresser une carte du Royaume. L'astronome Picard (1620-1682) fut chargé de mesurer la distance entre Sourdan et Malvoisine, correspondant à un degré du méridien de Paris. (cf. activité 2). Louis XIV remercia ces Messieurs de l'Académie pour la carte de France qu'ils établirent, bien que, en conclusion de leurs calculs et observations, le territoire de son royaume se révélât moins étendu que ce que laissaient croire les cartes précédentes.

Picard appliqua la méthode de triangulation inventée par le mathématicien flamand Frisius (1508-1555), et appliquée vers 1617 par Snellius qui travailla toute sa vie à l'établissement d'une carte des Pays Bas. Les mesures de longueurs sont beaucoup plus difficiles à réaliser que les mesures d'angles; c'est pourquoi on ne mesure avec le maximum de précision qu'une seule petite distance appelée base, sur laquelle s'appuie une chaîne de triangles dont on ne mesure que les angles. Picard mesura la distance Juvisy-Villejuif, d'environ 11 km, puis les angles d'une chaîne de 13 triangles. A l'aide de la formule $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$, il put calculer les côtés des triangles et leurs projections sur la ligne méridienne. Les côtés des triangles étaient d'environ 40 km de long. Picard utilisait, pour mesurer les angles, un quart de cercle dont le rayon était d'environ un mètre ; la précision des mesures était d'environ 5 secondes par degré d'angle.

ACTIVITE 2 : Extrait du rapport de Picard

Dans le document ci-dessous, Picard fournit les mesures angulaires qu'il a effectuées pour déterminer la distance entre Mareuil et Malvoisine, supposées situées sur le même méridien. Il donne aussi la distance AB (entre Juvisy et Villejuif), mesurée sur le terrain.

1°) Reconstituer, à l'aide d'une formule de trigonométrie à rappeler, les différentes étapes du calcul de Picard.

N.B. Dans la pratique, les erreurs de mesures étant très fréquentes, la somme des angles d'un triangle n'est pas toujours égale à 180°, ce qui explique la remarque de Picard au *IV*.

2°) En considérant le triangle GDE, calculer en toises, la distance GE. En déduire la distance en km.

N.B. Une toise vaut 6 pieds ; son équivalent en mètres est environ 1,949.

34 *Mesure de la Terre,*

qui ne donnoient les minutes que de six en six, ils n'ont pas laissé d'approcher de la justesse autant qu'il étoit nécessaire, pour faire voir qu'on ne s'étoit pas trompé aux conclusions.

I. TRIANGLE ABC.
Pour connoître le côté AC.

C A B.........54°...4'...35".
A B C.........95...6...55.
A C B.........30...48...30.
A B.......15663..*Toises de mesure actuelle.*
Donc A C......11012..*Toises 5 pieds.*
Et B C.......8954..*Toises.*

II. TRIANGLE ADC.
Pour DC *&* AD.

D A C.........77°...25'..50".
A D C.........55......0...10.
A C D.........47...34...0.
A C.....11012..*Toises 5 pieds.*
Donc D C.....13121..*Toises 3 pieds.*
Et A D.......9922..*Toises 2 pieds.*

III. TRIANGLE DEC.
Pour DE *&* CE.

D E C.........74°...9'..30".
D C E.........40...34...0.
C D E.........65...16...30.
D C.....13121...*Toises 3 pieds.*
Donc D E.......8870...*Toises 3 pieds.*
Et C E.....12389...*Toises 3 pieds.*

par M. l'Abbé Picard. 35

IV. TRIANGLE DCF.
Pour DF.

D C F.........113°...47'...40".
D F C.........33...40...0.
F D C.........32...32...20.
D C......13121....*Toises 3 pieds.*
Donc D F.......21658....*Toises.*

Notez que dans ce quatriéme triangle, l'angle DFC a été augmenté de 10", qui manquoient à la somme des trois angles.

V. TRIANGLE DFG.
Pour DG *&* FG.

D F G.........92°...5'...20".
D G F.........57...34...0.
G D F.........30...20...40.
D F.....21658....*Toises.*
Donc D G.....25643....*Toises.*
Et F G.......12963....*Toises 3 pieds.*

Ensuite de ces cinq triangles, il a été facile de conclure la distance GE entre Malvoisine & Mareuil, sans supposer aucune nouvelle Observation.

Picard estima le degré de méridien à 57060 toises, ce qui correspond à environ 111,210 km (la toise utilisée par Picard était d'environ 1,949 m). La valeur exacte du degré de méridien est de 111,111...km. De nouvelles mesures furent faites au XVIIIème siècle par plusieurs membres de la famille des Cassini, astronomes à l'Observatoire de Paris, la dernière fut réalisée en 1740 par La Caille.

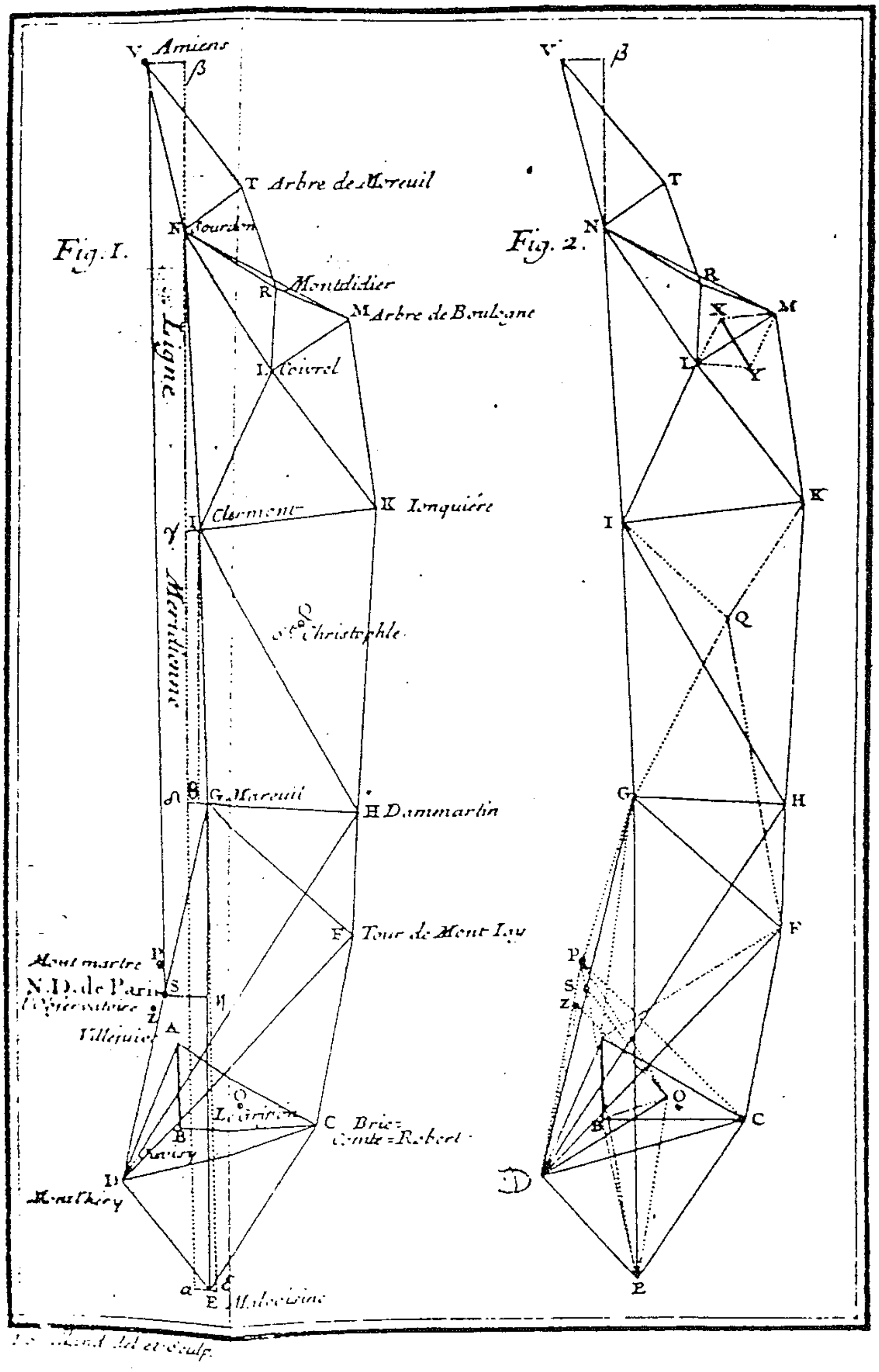
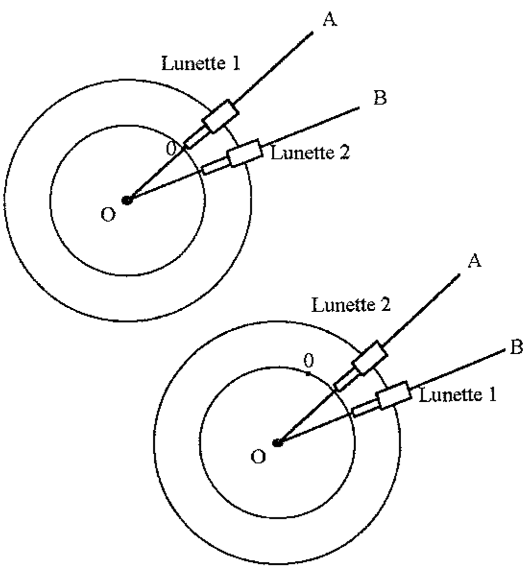


Fig. 1.
Amiens
Arbre de Mareuil
Sourdon
Montdidier
Arbre de Boulogne
Coivrel
Clermont
Ionquière
Ligne Meridienne
St Christophle
G. Mareuil
H Dammartin
Tour de Mont Lyu
Mont martre
N.D. de Paris
l'Observatoire
Villejuive
Le Griffon
C Brie=Conte=Robert
Mont'Lhery
Malvoisine
Fig. 2.

III. La mesure du méridien par Delambre et Méchain

Les mesures du méridien réalisées par La Caille devaient être revérifiées pour permettre une définition acceptable du mètre. Ce furent les astronomes Pierre Méchain (1744-1804) et Jean-Baptiste Delambre (1749-1822) qui en furent chargés. Leurs opérations durèrent 7 ans, de 1792 à 1799, et elles furent entravées par toutes sortes de difficultés : outre les difficultés naturelles, les intempéries, les inégalités du terrain, dans les Pyrénées en particulier... Méchain tomba très malade, il fut même temporairement paralysé ; la guerre fut déclarée entre la France et l'Espagne ; les astronomes furent pris pour des espions, parfois pour des contre-révolutionnaires ; ils furent arrêtés, emprisonnés, leurs signaux de mesures furent détruits à plusieurs reprises... Leurs aventures sont racontées par Denis Guedj dans *La Méridienne*.

Les instruments de mesure avaient été améliorés depuis la dernière mesure de La Caille ; Delambre et Méchain commandèrent à l'ingénieur Lenoir des "cercles-répétiteurs", instruments qu'il avait construits en 1784 pour les mesures concernant la jonction entre les méridiens de Greenwich et de Paris, sur une idée de l'astronome allemand Tobie Mayer, adaptée par l'ingénieur Borda à la mesures des angles terrestres. Le résultat de la mesure d'un angle est toujours entaché d'erreurs. Parmi celles-ci, on peut citer les erreurs de pointé, les erreurs de lecture et les erreurs de division du limbe (cercle gradué). Pour diminuer ces erreurs, il a été fait usage du cercle répétiteur (cf. figure ci-dessous). L'avantage de ce cercle est d'atténuer considérablement les erreurs de division et les erreurs de lecture. En effet, la méthode de répétition consiste à prendre plusieurs mesures successives du même angle sur le cercle horizontal de l'instrument en ajoutant successivement les arcs mesurés aux précédents, sans jamais revenir au zéro de la graduation, et en divisant la dernière mesure lue par le nombre de répétitions exécutées. [3]

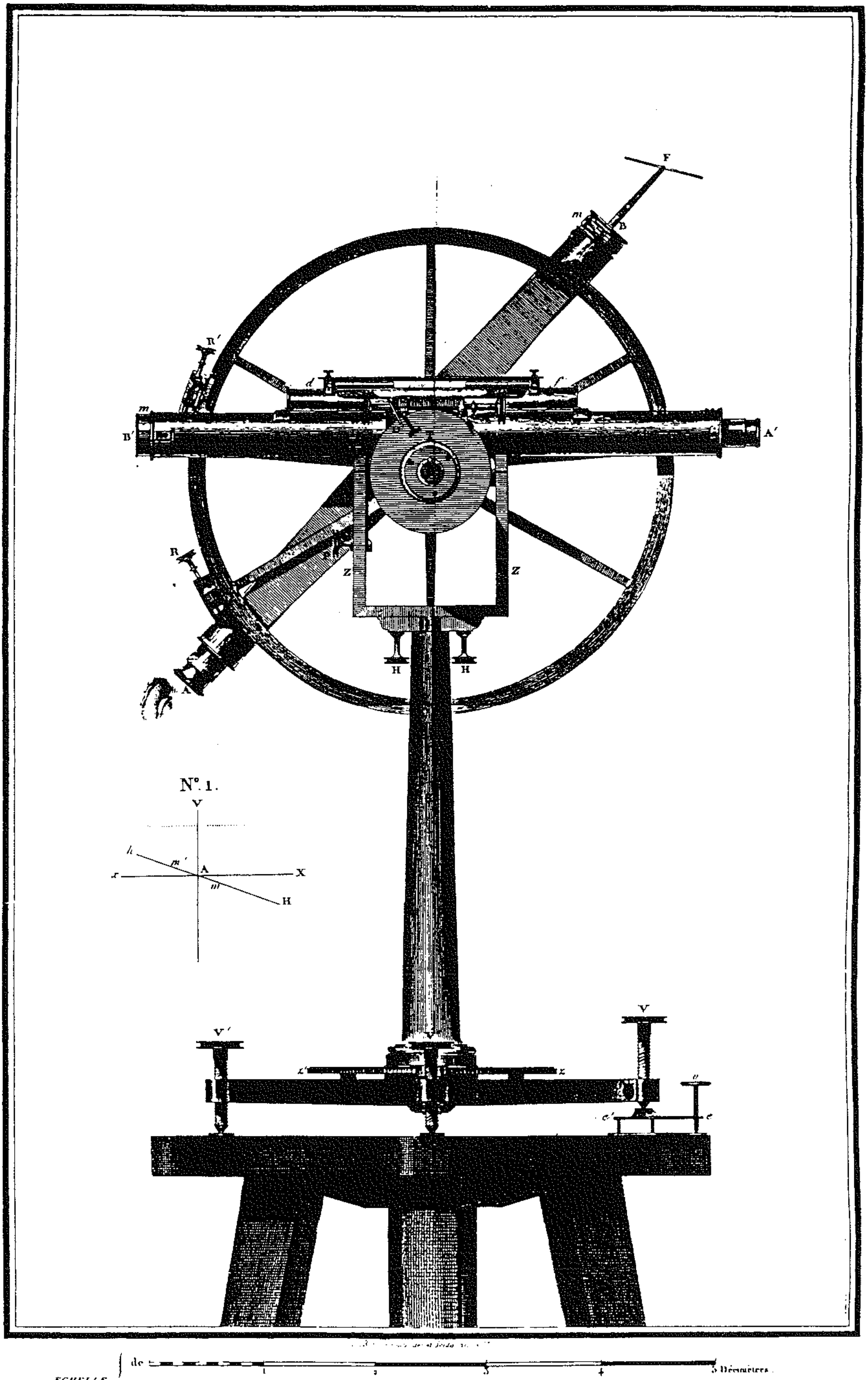


L'angle AOB est visé n fois : la lunette 1, placée en face de la graduation 0, vise d'abord le point A ; la lunette 2 vise le point B ; (si la lecture était faite immédiatement, la graduation lue serait α) ; puis la lunette 2, rendue temporairement solidaire du limbe vise A et la lunette 1 vise B (la graduation lue serait alors $\cong 2\alpha$), etc. ;

Deux lectures seulement sont faites, une au début et l'autre à la fin. La lecture finale n'intervient qu'après au moins un tour complet du limbe, ce qui permet de compenser les erreurs de division résultant de la graduation du limbe.

C'est pourquoi les astronomes suivent la recommandation de Laplace qui conseillait de faire trois séries de vingt répétitions.

[3] Avec le cercle répétiteur, la mesure se fait dans le plan de l'angle, d'où la nécessité ensuite de faire une réduction à l'horizon.


F
m
B
R′
d
f
m
B′
A′
R
Z
Z
H
H
A
N°. 1.
V
h
m′
A
x
X
m
H
V′
V
z′
z
c′
c
ECHELLE
de 1 2 3 4 5 Décimètres.
de 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 Pouces

C'est ainsi que dans l'extrait du Rapport de Delambre et Méchain, *"Base du système métrique décimal"*, (document ci-dessous), on peut noter 24, 36, 18 puis 20 mesures successives du même angle, angle entre le Panthéon et Dammartin et dont le sommet est le clocher de Saint Martin du Tertre. (p. 94 à 97)

SAINT-MARTIN DU TERTRE.

St.-Martin du Tertre.

XXII.

Le clocher de Saint-Martin du Tertre a été rebâti en 1745, c'est-à-dire environ cinq ans après les opérations de la *Méridienne vérifiée*. Déja cependant il menace ruine. Il n'est pas à la même place que l'ancien clocher. $dH = 3^t 5$.

La charpente est dans le plus mauvais état, et nous ne pouvions faire le moindre mouvement sur notre échafaud sans faire tout trembler. Cette station d'ailleurs a été très-rude par les vents impétueux et les pluies continuelles.

Entre Dammartin et Saint-Christophe.
Cinquième série.

24 15025243 6285934583 = 56° 20′ 2″8

F. et B. n° 1. Cette dernière série paroît devoir mériter la préférence. Je n'y ai pas pris de part moi-même. La taille du citoyen le Français se prêtoit mieux à l'espace que nous avions, et lui permettoit de faire porter le poids de son corps sur les auvents du clocher. Aussi les deux séries qu'il a observées s'accordent très-passablement avec la dernière, dans laquelle les deux observateurs ont toujours conservé la même position. St.-Martin du Tertre.

$r = 0^t 5$ $y = 296°\ 3'\ 50''$	+ 6″2
Centre	56° 20′ 9″0
	+ 0″41
Horizon	56° 20′ 9″41

Entre le Panthéon et Dammartin.

36	3041^{g}629	84^{g}48969	= 76° 2′ 26″6	D. puis B.
18	1520^{g}817	84^{g}48936	= 76° 2′ 27″06	F. n° 1.
			76° 2′ 26″83	
$r = 0^t 21181$	$y = 6°\ 56'\ 53''$		+ 2″48	
			76° 2′ 29″31	
20	1689^{g}792	84^{g}4896	= 76° 2′ 26″30	D. n° 1.
$r = 0^t 37153$	$y = 10°\ 51'\ 10''$		+ 3″98	
			76° 2′ 30″28	
Première série			76° 2′ 29″08	
Seconde série			76° 2′ 29″54	
Moyenne			76° 2′ 29″63	
			+ 1″20	
Horizon			76° 2′ 30″83	

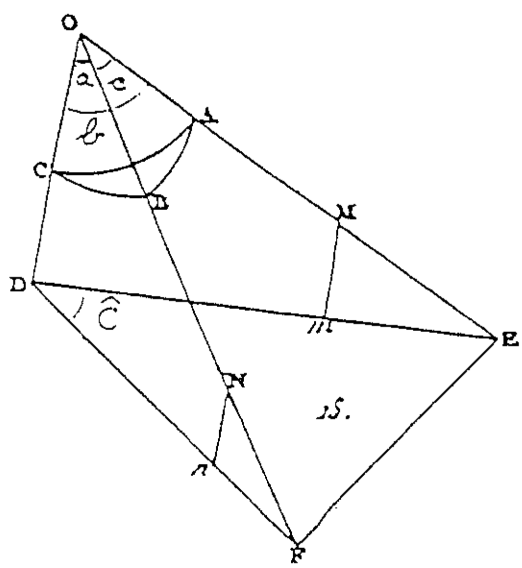
Le document est lu et commenté aux élèves :

- la première ligne indique que Delambre (noté D.) puis son adjoint Bellet (B.) ont réalisé 36 mesures de l'angle qui a pour sommet le clocher de St Martin du Tertre et pour côtés les directions du Panthéon et de Dammartin. Le cercle répétiteur indique 3041,629 grades[4]; la 36ème partie, 84,48969, convertie en degrés vaut 76° 2' 26" 6. La seconde ligne indique que Le Français (F), autre collaborateur de Delambre a fait une série de 18 mesures du même angle avec le premier cercle-répétiteur (n°1) dont la moyenne est 76° 2' 27" 06. La moyenne des deux mesures de l'angle est faite à la troisième ligne. Une série supplémentaire de 20 mesures de l'angle est encore reprise par Delambre avec ce même cercle-répétiteur (D. n°1), mentionnée à la ligne 6.

- une correction, intitulée "réduction au centre" est effectuée aux lignes 4 et 7. C'est le cas lorsque le cercle répétiteur ne peut, pour des raisons pratiques, être exactement placé au centre C de la station (clocher d'église, sommet de tour par exemple) ; c'est ce point qui a été visé depuis le sommet précédent de la chaîne de triangles et qui servira également de mire aux mesures suivantes. Delambre calcule la différence entre l'angle effectivement mesuré AOB et l'angle théorique ACB. L'activité 3 étudie et démontre la formule de correction.

- sur les dernières lignes figure une correction intitulée "réduction à l'horizon", nécessaire lorsque l'angle mesuré c n'est pas situé dans un plan horizontal. Delambre calcule alors la mesure de la projection C sur le plan horizontal de l'angle c, à l'aide d'une formule qui a été établie sur la demande spécifique de Delambre, par le mathématicien Legendre, par l'intermédiaire de la trigonométrie sphérique.

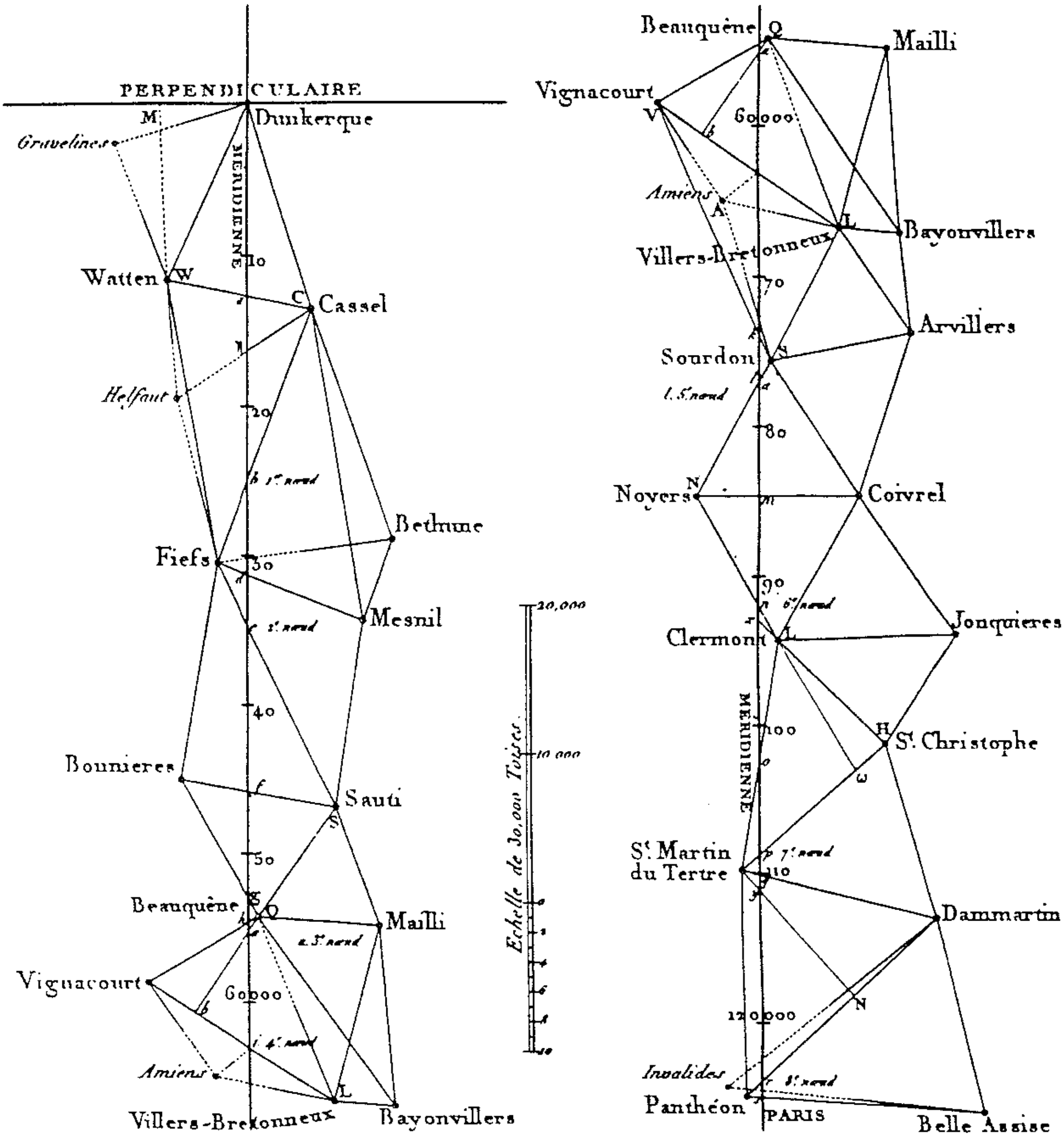
$$\sin^2 \frac{1}{2} C = \frac{\sin \frac{a-b+c}{2} \sin \frac{b+c-a}{2}}{\sin b \sin a}$$



- d'autres corrections ont encore été pratiquées par Delambre, qui n'apparaissent pas dans cette page du rapport ; en particulier, celles qui tiennent compte de la sphéricité de la terre (cf. Annexe 4).

[4] La mesure décimale des angles en grades avait été également instituée par la commission des Poids et Mesures, mais les tables de sinus à la disposition des astronomes n'existaient que pour des angles mesurés en degrés.

CHAINE DES TRIANGLES
de Dunkerque à Barcelone
mesurée par MM. Delambre et Méchain.

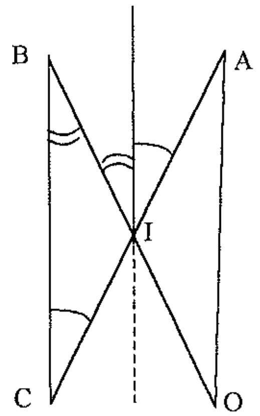


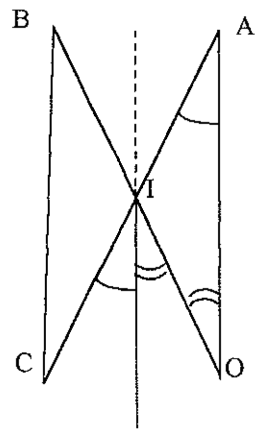
ACTIVITE 3 : Étude de la "Réduction au centre"

Le point C est la position du signal visé dans les mesures précédentes (clocher, sommet de tour ou de montagne, ...). Il est appelé centre de la station. S'il n'est pas accessible pour y poser le cercle répétiteur, on place celui-ci en un point O, le plus proche possible de C. L'angle mesuré est donc AOB (noté $\hat{O}$), alors que l'angle dont on doit tenir compte dans la chaîne des triangles est ACB, noté $\hat{C}$. On pose y = BOC , $\hat{O}$ = AOB , $\hat{A}$ = OAC, $\hat{B}$ = OBC, r = OC, G = BC , D = AC.

Δ // (BC) , Δ'//(AO)

1°) En utilisant les angles auxiliaires introduits dans la figure, montrer que : $\hat{C} = \hat{O} + \hat{A} - \hat{B}$.





2°) En utilisant la formule des sinus, montrer que $\sin\hat{B} = \dfrac{r\ \sin y}{G}$ et que $\sin\hat{A} = \dfrac{r\ \sin(\hat{O}+y)}{D}$.

3°) Si les angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ étaient mesurés en radians, et puisqu'ils sont petits (la distance OC est très petite par rapport aux distances CA et CB de l'ordre de 40 km), on pourrait écrire $\sin\hat{A} \cong \hat{A}$ et $\sin\hat{B} \cong \hat{B}$.

Si x" est la mesure en secondes d'un angle, quelle est sa mesure en radians ?

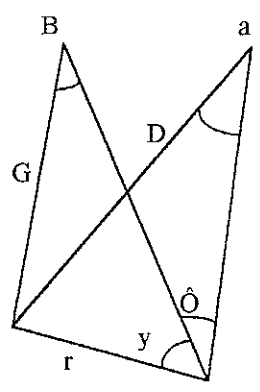
Considérons un angle d'une seconde ; sa mesure y en radians peut être confondue avec son sinus.

Donner une approximation[5] de sin(1").

En déduire l'approximation sin (x") ≅ x sin(1")

4) En déduire la formule approchée de réduction au centre

$$ACB \cong \hat{O} + \frac{r\sin(\hat{O}+y)}{D\sin(1'')} - \frac{r\sin y}{G\sin(1'')}$$



Vérifier la correction faite par Delambre (à la ligne 20 du document titré "Saint Martin du Tertre": r = o^{t} 5 y = 296° 3' 50" + 6" 2)[6] en prenant pour G et D une approximation des distances BC et AC estimées à l'aide de l'échelle de la carte.

[5] Remarquer que dans cette dernière approximation, bien que l'angle reste petit, x peut prendre des valeurs assez grandes.

[6] r vaut une demi-toise.

IV. Les conclusions de Delambre et Méchain et leur postérité

Les deux astronomes présentent leurs conclusions en 1799 à une commission de scientifiques de diverses nations d'Europe, correspondant à l'Italie, l'Espagne, le Portugal, la Suisse, au Danemark, aux Pays-Bas d'aujourd'hui. Ceux-ci approuvent, après trois mois d'étude soigneuse des rapports de Delambre et Méchain, leur définition du mètre et du kilogramme. Des étalons en platine doivent être construits. Le nouveau mètre mesure 3 pieds 11296 lignes de la Toise du Pérou. Le système métrique est institué. Le consul Bonaparte est favorable à son adoption, mais empereur, il transige et autorise également l'usage des anciennes mesures; à la Restauration, la monarchie rétablit l'usage des anciennes mesures. Mais en 1837 l'usage du système métrique devient obligatoire en France. En 1869, une commission internationale du Mètre réunit plus de trente nations et les étalons français en platine iridié sont adoptés par tous les participants. Pour répondre aux exigences croissantes de précision des recherches les plus variées, le mètre est, en 1960, redéfini comme 1650763,73 longueurs d'onde dans le vide de la radiation émise entre deux niveaux du krypton 86. Les performances des lasers étant supérieures à celles des lampes à krypton, le mètre reçoit, en 1983, une nouvelle définition: la distance que traverse la lumière dans le vide en 1/299792458 de seconde.[7]

Bibliographie

Delambre *Base du système métrique décimal*, Paris 1806 - 1810.

Legendre A.M. *Éléments de Géométrie*, Paris, 1794.

Picard *La mesure de la terre*, 1671.

Boyé A., Lefort X. *Mesurer aussi bien la terre que le ciel*, IREM des Pays de Loire, 1991.

Guedj D. *La méridienne*, Seghers, 1987.

Guedj D. *La révolution des savants*, Découvertes Gallimard, 1989.

Lefort X. *L'histoire de la carte de France de Cassini, Un P.A.E. interdisciplinaire d'histoire des mathématiques en classe de seconde,* Repères IREM n°14, janvier 1994.

Observatoire de Paris *Une mesure révolutionnaire: le mètre*, Paris, 1988.

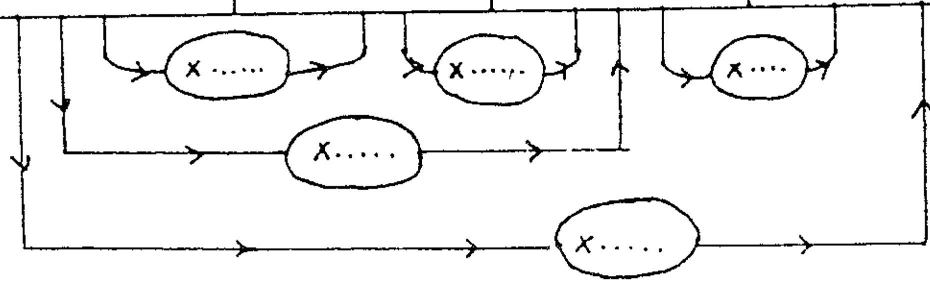
CRDP d'Amiens Exposition sur l'histoire du système métrique.

[7] Depuis 1967, la seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.

ANNEXE 1

NOMS des ANCIENNES MESURES.	LEUR VALEUR en LITRES.
N.° 1.	litres.
La barrique de vin de 100 pots . . .	196,900.
La pot de 2 bouteilles ou de 6 roquilles ou de 3 grands pintons.	1,969.
La bouteille de 2 petits pintons . . .	0,984.
La velte d'huile de 4 pots	7,876.
2.	
La barrique de 80 pots.	204,640.
Le pot de 2 bouteilles.	2,558.
La bouteille	1,279.
3.	
La barrique de 105 pots	210,000.
Le pot de 2 bouteilles ou de 3 pouchons.	2,000.
La bouteille	1,000.

	barrique	pot	bouteille	velte d'huile
valeur en litres				



ANNEXE 2 : J. Duhem , *Le système du monde* (tome 2) , Hermann, Paris 1965 , p.5 et 6.

Au temps d'Archimède, la circonférence terrestre avait été déjà l'objet d'une mesure beaucoup plus exacte que celle dont se contente le géomètre syracusain ; l'auteur de cette mesure était Ératosthène.

Né dans la cité africaine de Cyrène 275 ans avant J.-C., Ératosthène étudia à Alexandrie, puis à Athènes ; il revint à Alexandrie, appelé par Ptolémée III Évergète qui l'attacha à sa cour ; en 236, il fut mis à la tête de la célèbre bibliothèque ; ayant perdu la vue en 195, il se laissa, en 194, volontairement mourir de faim.

Les renseignements les plus sûrs que nous ayons sur l'opération par laquelle Ératosthène a mesuré un arc du méridien terrestre sont ceux de Cléomède ; il les tirait sans doute des écrits de Posidonius et nous les a conservés [2] dans sa *Théorie du mouvement circulaire des corps célestes*.

Selon le récit de Cléomède, Ératosthène aurait supposé, comme point de départ de sa détermination, que les deux villes de Syène et d'Alexandrie étaient sous le même méridien et qu'elles étaient distantes de cinq mille stades. Il aurait admis aussi ce postulat : On peut regarder comme parallèles entre eux tous les rayons envoyés par n'importe quel point du Soleil à n'importe quel point de la Terre ; « car les mathématiciens font l'hypothèse que ces rayons se comportent ainsi », ajoute Cléomède ; et, en effet, cette hypothèse équivaut bien à l'une de celles qu'Aristote prend soin d'attribuer explicitement aux mathématiciens qui ont mesuré la circonférence terrestre.

Syène, selon Ératosthène, est exactement située sous le tropique du Cancer ; au jour du solstice d'été, à midi, les gnomons ne portent aucune ombre ; le Soleil est au zénith. Le même jour et à la même heure, un gnomon dressé à Alexandrie [3] porte une ombre dont la longueur, comparée à la hauteur de la tige de l'appareil, permet de connaître la hauteur du Soleil au-dessus de l'horizon. Selon le récit de Cléomède, il s'en faut du cinquantième de quatre angles droits que cette hauteur atteigne 90° ; c'est donc là la différence de latitude entre Syène et Alexandrie.

Dès lors, l'arc qui sépare ces deux villes, et dont la longueur connue est de cinq mille stades, représente un cinquantième du méridien terrestre, en sorte que la longueur même de ce méridien est de 250.000 stades.

Dans ce récit de Cléomède, nous reconnaissons aisément non le procès-verbal minutieusement détaillé des mesures qu'Ératosthène a dû réellement effectuer, mais un exposé grandement simplifié. Syène et Alexandrie sont, pour la commodité du raisonnement, supposées sous le même méridien alors que les longitudes de ces villes diffèrent de plus de 3°. La distance des deux cités, leur différence de latitude sont présentées sous forme de nombres ronds. Il est clair que nous avons sous les yeux une exposition accommodée au goût de lecteurs qui aiment la simplicité.

Quelles furent les observations réellement faites par Ératosthène ? Quelles précautions prit-il pour les rendre aussi exactes que possible ? Le rapport de Cléomède nous le laisse ignorer. Nous en sommes réduits à admirer la justesse du résultat obtenu par Ératosthène sans connaître les raisons qui l'expliquent. Elle est bien remarquable, d'ailleurs, cette justesse ; si, comme il est vraisemblable , le stade d'Ératosthène valait 157 mètres 50 centimètres, la mesure du géomètre de Cyrène attribue au méridien terrestre 39.375 kilomètres au lieu de 40.000.

2. Cleomedis *De motu circulari corporum caelestium* lib. I, cap. X ; éd. Hermannus Ziegler, Lipsiae, 1891, pp. 90-103.

3. En réalité, Ératosthène a mesuré la hauteur du Soleil à Alexandrie à l'aide de la σκάφη, sorte de cadran solaire inventé par Aristarque de Samos.

ANNEXE 3 A.M. Legendre, *Eléments de géométrie*, traité de trigonométrie, 3ème éditon, 1800

Division de la circonférence.

1. Jusqu'à ces derniers temps les géomètres s'étoient accordés à diviser la circonférence en 360 parties égales appelées *degrés*, le degré en 60 *minutes*, la minute en 60 *secondes*, etc. Ce mode présentoit quelques avantages dans la pratique, à cause du grand nombre de diviseurs de 60 et de 360 : mais il entrainoit avec lui l'inconvénient des nombres complexes, et il nuisoit souvent à la rapidité du calcul.

Les savants, à qui on doit l'invention du nouveau systéme des poids et mesures, ont pensé qu'il y auroit un grand avantage à introduire la division décimale dans la mesure des angles. En conséquence ils ont regardé, comme unité principale, le quart de circonférence ou le *quadrans*, mesure de l'angle droit, et ils ont divisé cette unité en 100 parties égales appelées *degrés*, le degré en 100 *minutes*, et la minute en 100 *secondes*.

Nous n'emploierons désormais que la nouvelle division ou la division décimale de la circonférence. C'est celle qui convient le mieux à la nature de notre arithmétique, et qui est la plus propre à abréger les calculs.

ANNEXE 4

Lecture d'un extrait des *Eléments de Géométrie* de Legendre (1800), expliquant comment ramener la résolution d'un triangle sphérique très-peu courbe à celle d'un triangle rectiligne.

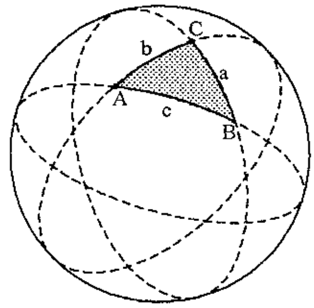
Ce théorème a été établi par Legendre à la demande de Delambre et Méchain:

Etant proposé un triangle sphérique dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère, si de chacun de ses angles on retranche le tiers de l'excès de la somme des trois angles sur deux droits, les angles ainsi diminués deviendront les angles d'un triangle rectiligne, dont les côtés sont égaux en longueur à ceux du triangle sphérique proposé.

I Formules fondamentales de la trigonométrie sphérique. Soient A, B, C, trois points d'une sphère Σ de centre O, n'appartenant pas à un même grand cercle.

Définitions

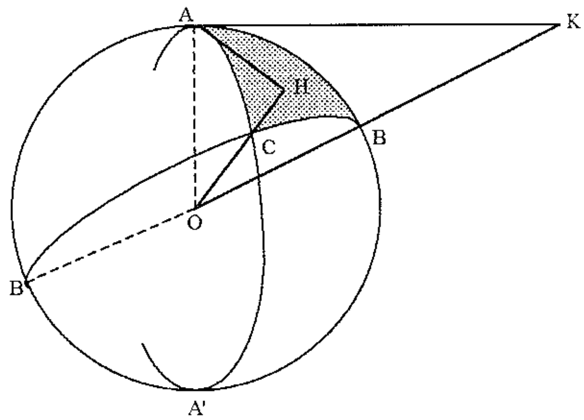
1. On appelle triangle sphérique la portion de la surface de la sphère comprise entre 3 arcs de grands cercles, inférieurs à un demi-cercle.



2. Ces arcs sont les côtés du triangle sphérique. On désignera, suivant l'habitude, la mesure de l'arc AB par c, celle de l'arc AC par b et celle de l'arc BC par a. Ces mesures d'arcs sont égales aux mesures des angles au centre qui interceptent ces arcs [8]. Ainsi, par exemple, mes BOC = a. On peut donc écrire: cos BOC = cos a.

3. Les angles du triangle sont les angles de plans. Ainsi, l'angle A est l'angle des plans (OAC) et (OAB). Cet angle est aussi égal à l'angle des tangentes en A aux grands cercles définissant les côtés.

1°) Soit un triangle sphérique ABC d'une sphère Σ de centre O. La tangente en A à l'arc AB coupe la droite (OB) en K, la tangente en A à l'arc AC coupe la droite (OC) en H. On note A l'angle HAK et a l'angle BOC.



a) Quelle est la nature des triangles HAO et KAO ?

b) Compléter les formules suivantes :

$HK^2 = AH^2 + ... - 2 ....$

$HK^2 = HO^2 + ... - 2HO.KO...$

AK = ...tan c AH = AO....

OK = AO/... OH = AO/...

c) En déduire que : $\cos A = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$ (1)

d) Ecrire deux autres formules analogues.

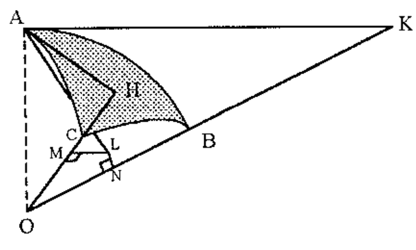
2°) Soit une sphère Σ de centre O et un triangle sphérique ABC. On appelle L la projection orthogonale de A sur le plan (OBC). On appelle M et N les projections orthogonales de L sur (OB) et sur (OC).

a) Démontrer que (AN) est perpendiculaire à (OC) puis comparer l'angle ANL et l'angle C du triangle sphérique. De même, comparer l'angle AML et l'angle B.

c) Etablir que AL = R sin b sin C et que AL = R sin c sin B.

d) En déduire que : $\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$ (2)

Les formules (1) et (2) sont les formules fondamentales de la trigonométrie sphérique.



[8] On sera attentif au fait que, dans le texte de Legendre, a, b, c désignent les longueurs des côtés du triangle sphérique, c'est -à-dire des longueurs d'arcs de grands cercles, et non les mesures des arcs , qui sont alors égales , en radians, à $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}$ où r désigne le rayon de la sphère. Sur une sphère de rayon 1 et lorsque les angles sont mesurés en radians, la mesure de l'arc est égale à la longueur de l'arc.

II. Etude du théorème de Legendre

Pour cette partie, on a besoin des développements limités des fonctions sinus et cosinus.

§. V. *Résolution des triangles sphériques dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère.*

cv. Lorsque les côtés a, b, c, sont très-petits par rapport au rayon de la sphère, le triangle proposé est peu différent d'un triangle rectiligne; et, en le considérant comme tel, on peut en avoir une première solution approchée, mais on néglige de cette manière l'excès de la somme des angles sur 200°. Pour avoir une solution plus approchée, il faut tenir compte de cet excès, et c'est ce qu'on peut faire très-aisément, au moyen d'un principe général que nous allons démontrer.

Soit r le rayon de la sphère sur laquelle est situé le triangle proposé; si l'on imagine un triangle semblable tracé sur la sphère dont le rayon est 1, les côtés de ce triangle seront $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}$, et on aura $\cos A = \dfrac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}$. Mais puisque r est fort grand par rapport à a, b, c, on aura d'une manière très-approchée, $\cos\frac{a}{r} = 1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{2.3.4r^4}$, $\cos\frac{b}{r} = 1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{2.3.4r^4}$, $\cos\frac{c}{r} = 1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{2.3.4r^4}$, $\sin\frac{b}{r} = \frac{b}{r} - \frac{b^3}{2.3r^3}$, $\sin\frac{c}{r} = \frac{c}{r} - \frac{c^3}{2.3r^3}$. Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, et négligeant les termes où b et c ont plus de quatre dimensions, on aura

$$\cos A = \frac{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2r^2} + \dfrac{a^4-b^4-c^4}{24r^4} - \dfrac{b^2c^2}{4r^4}}{\dfrac{bc}{r^2}\left(1 - \dfrac{b^2}{6r^2} - \dfrac{c^2}{6r^2}\right)}.$$

Multipliant les deux termes de cette fraction par $1 + \frac{b^2+c^2}{6r^2}$, et réduisant, on aura

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24bcr^2}$$

Il s'agit ici de degrés décimaux (c'est-à-dire de grades) et non de degrés sexagésimaux. (Voir annexe 3).

a, b, c sont les longueurs des côtés ; $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ sont les longueurs d'arcs sur la sphère de rayon 1 ou les mesures des arcs en radians.

Il faut noter qu'à partir d'ici, les angles et les arcs sont considérés comme mesurés en radians, pour utiliser les développements limités de cosinus et sinus .

Soit maintenant A' l'angle opposé au côté a, dans le triangle rectiligne dont les côtés seroient égaux en longueur aux arcs a, b, c; on aura $\cos A' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ et $4b^2c^2\sin^2 A' = 2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$. Donc

$$\cos A = \cos A' - \frac{bc}{6r^2}\sin^2 A'$$

Soit $A = A' + x$, on aura en rejetant le quarré de x, $\cos A = \cos A' - x\sin A'$, d'où l'on voit que $x = \frac{bc}{6r^2}\sin A'$. et puisque x est du second ordre par rapport à $\frac{b}{r}$ et $\frac{c}{r}$, il s'ensuit que ce resultat est exact aux quantités près du quatrième ordre. On aura donc

$$A = A' + \frac{bc}{6r^2}\sin A'$$

Mais $\frac{1}{2}bc\sin A'$ est l'aire du triangle rectiligne dont a, b, c sont les trois côtés, laquelle ne diffère pas sensiblement de celle du triangle sphérique proposé. Donc, si l'une ou l'autre aire est appelée α, on aura $A = A' + \frac{\alpha}{3r^2}$, ou $A' = A - \frac{\alpha}{3r^2}$.

On auroit semblablement $B' = B - \frac{\alpha}{3r^2}$, $C' = C - \frac{\alpha}{3r^2}$, et il en résulte $A'+B'+C'$ ou $200^\circ = A+B+C-\frac{\alpha}{r^2}$. On peut donc considérer $\frac{\alpha}{r^2}$ comme étant l'excès de la somme des trois angles du triangle sphérique proposé sur deux angles droits. Cela posé, on a ce théorème remarquable qui réduit la résolution des triangles sphériques très-petits, à celle des triangles rectilignes.

x est très petit,

donc $\cos x \cong 1$ et $\sin x \cong x$

Etant proposé un triangle sphérique dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère, si de chacun de ses angles on retranche le tiers de l'excès de la somme des trois angles sur deux droits, les angles ainsi diminués deviendront les angles d'un triangle rectiligne, dont les côtés sont égaux en longueur à ceux du triangle sphérique proposé, ou en d'autres termes :

Le triangle sphérique très-peu courbe dont les angles sont A, B, C, *et les côtés opposés* a, b, c, *répond toujours à un triangle rectiligne qui a les côtés de même longueur* a, b, c, *et dont les angles opposés sont* $A-\frac{1}{3}\varepsilon$, $B-\frac{1}{3}\varepsilon$, $C-\frac{1}{3}\varepsilon$, ε *étant l'excès de la somme des angles du triangle sphérique proposé sur deux angles droits*.

Remarquons qu'il faudrait écrire, $\pi = A+B+C-\frac{a}{r^2}$, puisque $\frac{a}{r^2}$ est exprimé en radians.

CVI. L'excès ε ou $\frac{\alpha}{r^2}$, qui est proportionnel à l'aire du triangle, peut toujours se calculer *a priori* par les données du triangle sphérique considéré comme rectiligne. Si deux côtés b, c, sont donnés avec l'angle compris A, on aura l'aire $\alpha = \frac{1}{2}bc\sin A$; si on donne un côté a et les deux angles adjacents B, C, on aura l'aire $\alpha = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin B\sin C}{\sin(B+C)}$.

Ensuite on aura $\epsilon = \frac{\alpha}{r^2} R$, R étant le nombre de secondes comprises dans le rayon, et de cette manière ϵ sera exprimé en secondes.

Si on veut appliquer ces formules aux triangles tracés sur la surface de la terre, considérée comme sphérique (1), il faudra supposer que les côtés a, b, c, ainsi que le rayon de la terre r sont exprimés en mètres. Or, puisque le quart du méridien $\frac{1}{2}\pi r$ est égal à 10000000 mètres, on en conclut log. $r = 6.8038801$; d'un autre côté le rayon R exprimé en secondes, a pour logarithme 5,8038801. Donc si au logarithme de l'aire α exprimée en mètres quarrés, on ajoute le logarithme constant 2.196119, et qu'on retranche 10 unités de la somme, on aura le logarithme de l'excès ϵ exprimé en secondes.

Connoissant ϵ on retranchera ou on supposera retranché $\frac{1}{3}\epsilon$ de chaque angle du triangle sphérique proposé, et alors dans le triangle rectiligne formé par les côtés a, b, c, et les angles $A' = A - \frac{1}{3}\epsilon$, $B' = B - \frac{1}{3}\epsilon$, $C' = C - \frac{1}{3}\epsilon$, on aura les données nécessaires pour en déterminer toutes les parties. Ainsi on connoîtra en même temps celles du triangle sphérique proposé.

R est le coefficient de proportionnalité permettant de passer des radians en secondes. R est en fait, la mesure en "secondes" d'un arc de grand cercle terrestre dont la longueur est celle du rayon. La "seconde" ici employée est une seconde décimale (10^{-4} grade).

On obtient ainsi $R = \frac{2}{\pi}10^6$.

r étant la mesure en mètres du rayon de la terre, on a : $r = \frac{2}{\pi}10^7$, d'où l'on tire :

log R = log r - 1

(le logarithme utilisé étant le logarithme décimal).

Ainsi log r $\cong$ 6,80388016 et log R $\cong$ 5,8038801

Par ailleurs,

$\varepsilon = \frac{\alpha R}{r^2} = \frac{100\pi}{2} \times \alpha 10^{-10}$ d'où

$\log \varepsilon = \log \frac{100\pi}{2} + \log \alpha - 10$.

Legendre appelle "logarithme constant" le nombre $\log \frac{100\pi}{2} \cong 2{,}196119$ et obtient ainsi une relation directe entre log ε et log α.

Exemple : C = 123° 19' 99,23" log a $\cong$ 4,5891503 log b $\cong$ 4,5219271

$\log(\frac{1}{2}ab\sin C) = \log a + \log b + \log \sin C - \log 2 \cong 8{,}78055$

$\log \varepsilon \cong 2{,}196119 + 8{,}78055 - 10 \cong 0{,}97667$ donc $\varepsilon \cong 9{,}48$ secondes ; $(1/3)\varepsilon \cong 3{,}24$ secondes

et puisque $C' = C - (1/3)\varepsilon$; on obtient C' = 123° 19' 96,07".

Question subsidiaire :

Évaluer l'ordre de grandeur de l'erreur commise lorsqu'on confond A et A' dans le cas où r est le rayon de la terre et où b et c sont les côtés des triangles d'une triangulation du premier ordre c'est-à-dire valent à peu près 40 km. Les approximations faites par Legendre sont-elles justifiées ?

Le volume de la pyramide

Thèmes abordés : patrons de solides, calculs de volumes de solides, et pour la partie IV, que l'on peut omettre : limites de suites.

Niveau : $1^{ère}$ ou Terminale scientifiques.

Outils nécessaires : volume d'un prisme. Orthogonalité dans l'espace.

Pour la partie IV : récurrence ou égalité de deux polynômes, limites de suites.

Texte étudié : extrait des *Eléments de Géométrie*, Legendre, $12^{ème}$ édition, Paris, 1823.

Mesurer de façon élémentaire un solide consiste à établir son rapport à un volume pris pour unité. La pyramide triangulaire est un solide simple dont le calcul du volume n'est pas immédiat. On peut, à son propos, tenter de faire faire aux élèves le lien entre la notion commune de volume et des notions plus abstraites liées à la mesure d'un volume : limites, somme des termes d'une suite, intégrale...

Un des exemples proposés ici est un problème destiné à une activité de type travaux dirigés pour des élèves de première ou de terminale scientifiques, qui commence par des constructions mettant en évidence qu'un prisme à base triangulaire peut être décomposé en trois pyramides de même nature. Dans certains cas particuliers, il est évident que ces pyramides ont même volume : lorsque ces pyramides sont superposables ou symétriques. Pour démontrer que, dans le cas général, les trois pyramides ont le même volume, le problème introduit la lecture d'un extrait des *Eléments de Géométrie* de Legendre.

Adrien-Marie Legendre (1752-1833) est un mathématicien important pour tous les domaines des mathématiques, principalement en théorie des nombres et pour la théorie des intégrales elliptiques. Ses *Eléments de Géométrie*, dont la première édition date de 1794, qu'il remanie au fil des éditions successives, dans le souci de "satisfaire l'esprit, tout en composant des éléments très rigoureux", ont dominé l'enseignement de cette discipline pendant plus d'un siècle. Dans les éditions précédant la douzième, la démonstration du calcul du volume de la pyramide est plus proche de la démonstration par exhaustion des *Eléments* d'Euclide.

Les démonstrations de ce résultat sont de nature infinitésimale, mais le raisonnement de Legendre évite tout recours à l'infini, grâce à un raisonnement par l'absurde. La preuve de Legendre annonce la formulation technique précise du concept de limite qu'on n'expose actuellement plus aux élèves de lycée. Elle permet aussi d'aborder, dans une dernière partie qui peut être omise, une autre méthode, annonciatrice de l'usage des sommes de Riemann, pour définir le volume de la pyramide.

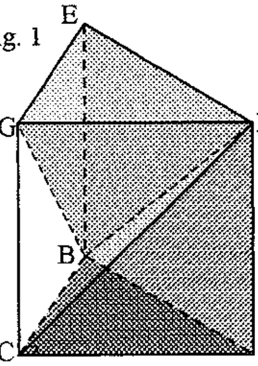
Problème

Attention ! Le but du problème est de démontrer la formule donnant le volume d'une pyramide. Il ne faut donc pas l'utiliser au cours du problème. Mais on suppose connu le volume d'un prisme : V = Bh.

I. Constructions

Un prisme droit est un prisme dont les arêtes parallèles sont perpendiculaires aux bases.

Fig. 1

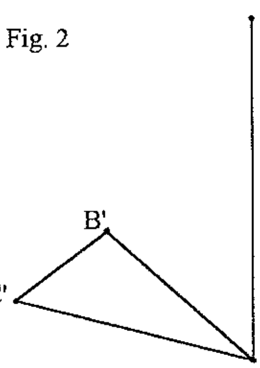


1°) On découpe le prisme droit BCDEFG de hauteur a et de base BCD triangle rectangle isocèle en C de côté a, en trois pyramides BCDF, EFGB et BCGF (figure 1). Dessiner les patrons de ces trois pyramides. Les construire et les assembler pour former le prisme. Comparer les patrons et les trois pyramides. Quelle relation entre les volumes du prisme et des pyramides peut-on conjecturer ?

2°) On considère maintenant le prisme droit B'C'D'E'F'G' de base B'C'D', où B'C' = a, C'D' = 2 a, $\widehat{B'C'D'}$ = 60°, D'F' = 3 a.

a) Que dire de l'angle $\widehat{C'B'D'}$? Dessiner ce prisme en complétant la figure ci-contre.

Fig. 2



b) Découper le prisme de manière analogue à la question 1 et préciser les longueurs des arêtes des trois pyramides.

c) Construire les patrons et les assembler pour reformer le prisme.

En quoi la situation diffère-t-elle de celle de la question 1 ?

d) Montrer que, pour chaque couple de pyramides, on peut mettre en évidence une hauteur commune et des bases correspondantes d'aires égales.

II. Lecture de la proposition XVII du livre 6 des *Eléments de Géométrie* de Legendre

N.B. Legendre dit que des solides (resp. surfaces) sont "équivalents" lorsqu'ils ont même volume (resp. même aire).

Les questions posées se réfèrent aux paragraphes successifs du texte joint.

1°) Préciser les hypothèses et la conclusion recherchée. Quel mode de raisonnement emploie Legendre ? Le prisme de base ABC et de hauteur A*x* est, plus loin dans le texte, désigné par ABCX. Que représente-t-il ?

2°) Posons $n = \dfrac{AT}{k}$. Préciser la transformation de l'espace par laquelle ABC a pour image DEF, et celle qui transforme *abc* en *def*. Quel prisme inscrit dans *sabc* a même volume que DEFG ?

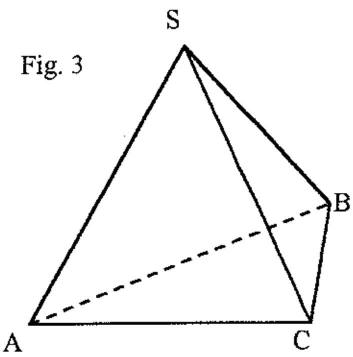
3°) Quelle est la propriété énoncée ? L'établir. On notera V et v les volumes de SABC et de *sabc*.

4°) Combien de prismes ont été construits dans chaque pyramide ? On notera, en partant du sommet de chaque pyramide, $P_1, P_2, .. P_i, ..$, les prismes construits autour de SABC, et $p_1, p_2, ..., p_i, ...$, les prismes inscrits dans *sabc*. Ecrire avec ces notations les inégalités énoncées par Legendre. Comment conclut-il ?

III. Application au volume de la pyramide

Soit SABC la pyramide quelconque représentée ci-contre. Compléter la construction du prisme ABCSPQ de base ABC et d'arête AS. Montrer que ce prisme se décompose en trois pyramides de même volume que SABC. Que peut-on en déduire pour le volume de SABC ?

Fig. 3



IV. Une autre méthode pour calculer le volume V de la pyramide SABC

En s'inspirant de la figure de Legendre, construire une pyramide de hauteur h coupée par des plans équidistants et parallèles à la base ABC qui définissent des prismes intérieurs $p_1, p_2, ...$, et des prismes extérieurs $P_1, P_2, ..$ à cette pyramide. Soit $\frac{h}{n}$ la hauteur commune de ces prismes.

1°) Calculer le volume des prismes p_1, p_2, puis p_i. En déduire le volume v_n de la réunion des prismes intérieurs à SABC.

2°) Montrer que $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ soit par récurrence, soit en utilisant la méthode suivante :

a) Montrer que l'on peut trouver un polynôme P défini par $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (où a, b, c, d sont des réels), qui vérifie $P(1) = 0$ et, pour tout réel x, $P(x+1) - P(x) = x^2$.

b) Que valent $P(2) - P(1)$, $P(3) - P(2)$, ..., $P(n+1) - P(n)$?

En déduire que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = P(n+1)$.

3°) Calculer le volume V_n des prismes extérieurs à la pyramide.

4°) Expliquer pourquoi pour tout entier n, $v_n < V < V_n$. Quelle est la limite de la suite (v_n) et la limite de la suite (V_n) ? Que peut-on en déduire pour V ?

Remarques sur le travail en classe

Avant d'aborder le problème avec les élèves, il faut bien leur faire remarquer que, son objet étant de démontrer la formule $V = \frac{1}{3}h$, il ne faut pas l'utiliser dans le cours du problème.

Les constructions de patrons et de solides pourront être faites à la maison plutôt qu'en classe. A la première question, il faut assembler un patron différemment des deux autres, l'une des trois pyramides étant l'image des deux autres par une réflexion par rapport à un plan. On peut éventuellement se dispenser (à la question I, 2°) c) des constructions des pyramides et se contenter d'étudier leurs dimensions ; on peut alors faire conclure sur la différence entre cette question et la précédente : les trois pyramides n'ont plus les mêmes dimensions et il n'est donc pas évident qu'elles aient deux à deux le même volume. C'est là qu'intervient le résultat énoncé dans le texte de Legendre, qui permet de comparer les volumes des trois pyramides.

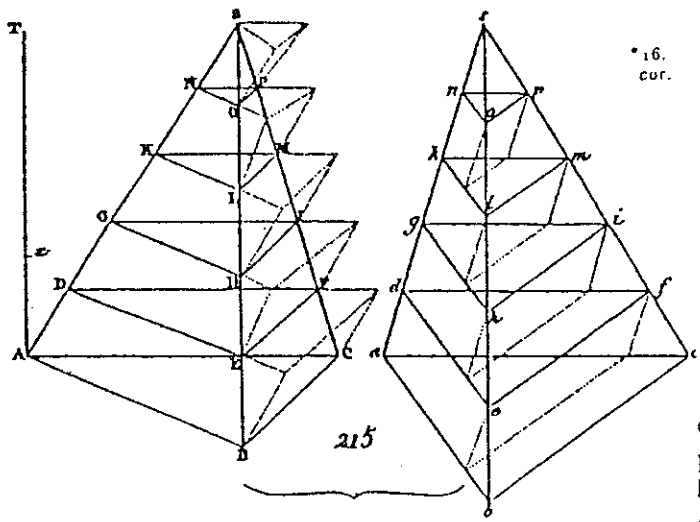
La lecture du texte, tout à fait compréhensible par les élèves, est très utile pour continuer le problème. Il est cependant souhaitable pour certains élèves de mener cette lecture en classe.

A la question II, 2°), on suggère de faire appel à une homothétie de l'espace ; les élèves n'ont en général aucune difficulté à envisager une telle transformation et ses propriétés, et donnent, par analogie avec les homothéties du plan, la relation entre les aires de deux triangles homothétiques. Cet outil permet de comparer rapidement les volumes des prismes autour de l'une ou l'autre pyramide. Si on veut absolument éviter les homothéties dans l'espace, on peut utiliser des homothéties dans les plans des faces.

Legendre A.M. *Eléments de Géométrie*, 12° édition, 1823.

Livre VI, proposition XVII

Legendre *Elémens de Géométrie*



215

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

Deux pyramides triangulaires qui ont des bases équivalentes et des hauteurs égales, sont équivalentes.

fig. 215. 1. Soient SABC, *sabc* les deux pyramides dont les bases ABC, *abc*, que nous supposons placées sur un même plan, sont équivalentes et qui ont même hauteur TA; si ces pyramides ne sont pas équivalentes, soit *sabc* la plus petite et soit A*x* la hauteur d'un prisme qui étant construit sur la base ABC, serait égal à leur différence.

2. Divisez la hauteur commune AT en parties égales plus petites que A*x*, et soit *k* une de ces parties; par les points de division de la hauteur, faites passer des plans parallèles au plan des bases; les sections faites par chacun de ces plans dans les deux pyramides, seront
* 16. cor. équivalentes *, telles que DEF et *def*, GHI et *ghi*, etc. Cela posé, sur les triangles ABC, DEF, GHI, etc., pris pour bases, construisez des prismes extérieurs qui aient pour arêtes les parties AD, DG, GK, etc. du côté SA; de même sur les triangles *def*, *ghi*, *klm*, *etc.*, pris pour bases, construisez dans la seconde pyramide des prismes intérieurs qui aient pour arêtes les parties correspondantes du côté *sa*; tous ces prismes partiels auront pour hauteur commune *k*.

3. La somme des prismes extérieurs de la pyramide SABC est plus grande que cette pyramide, la somme des prismes intérieurs de la pyramide *sabc* est plus petite que cette pyramide; donc par ces deux raisons la différence entre les deux sommes de prismes devra être plus grande que la différence entre les deux pyramides.

4. Or à partir des bases ABC, *abc*, le second prisme extérieur DEFG est équivalent au premier prisme intérieur *defa*, puisque leurs bases DEF, *def*, sont équivalentes et qu'ils ont une même hauteur *k*; sont équivalents par la même raison le troisième prisme extérieur GHIK et le second intérieur *ghid*, le quatrième extérieur et le troisième intérieur, ainsi de suite jusqu'au dernier des uns et des autres. Donc tous les prismes extérieurs de la pyramide SABC, à l'exception du premier ABCD, ont leurs équivalents dans les prismes intérieurs de la pyramide *sabc*. Donc le prisme ABCD est la différence entre la somme des prismes extérieurs de la pyramide SABC et la somme des prismes intérieurs de la pyramide *sabc*; mais la différence de ces deux sommes est plus grande que la différence des deux pyramides; donc il faudrait que le prisme ABCD fût plus grand que le prisme ABCX; or au contraire il est plus petit, puisqu'ils ont une même base ABC, et que la hauteur *k* du premier est moindre que la hauteur A*x* du second. Donc l'hypothèse d'où l'on est parti ne saurait avoir lieu; donc les deux pyramides SABC, *sabc*, de bases équivalentes et de hauteurs égales, sont équivalentes.

Une approximation de π

Thème abordé : approximation de π.

Niveau : Terminale S.

Outils nécessaires : calcul différentiel et intégral.

Texte étudié : extrait de l'*Introduction à l'analyse infinitésimale* d'Euler (1748), Réédition A.C.L. éditions, Paris, 1987.

L'activité que nous proposons ici à partir d'un texte d'Euler (1707-1783) est destinée aux élèves de Terminale S. Il s'agit d'un problème d'approximations d'intégrales qui permet d'écrire $\frac{\pi}{4}$ comme limite d'une série (la série de Leibniz (1644-1716) : $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$). L'originalité d'Euler est de se préoccuper d'améliorer la convergence très lente de cette série et ses méthodes de calcul sont accessibles à nos élèves.

Le texte sur lequel s'appuie cette activité est extrait de *l'Introduction à l'Analyse infinitésimale (*1748), qui est considérée comme le premier livre d'analyse "moderne". A partir du développement en série entière du binôme $(1+x)^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathrm{R})$, et par une manipulation hardie d'infiniment petits et d'infiniments grands, Euler obtient successivement les développements en série de e^{z}, $\ln(1+z)$, $\cos z$, $\sin z$ et enfin d'Arc tan t, obtenu par l'intermédiaire de logarithmes imaginaires (voir annexe). C'est le développement d'Arc tan t qui conduit alors Euler à la "série de Leibniz" : $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\dots$.

C'est le passage où Euler utilise cette série que nous avons choisi de faire étudier aux élèves, après leur avoir fait obtenir un développement limité d'Arc tan t par des méthodes conformes au programme (intégration d'inégalités), qui permettent de majorer l'erreur commise en remplaçant Arc tan t par un polynôme. Euler se préoccupe d'amélioration de la rapidité de convergence : il remplace la célèbre série par la somme de deux autres séries en montrant que : $\frac{\pi}{4}=\mathrm{Arctan}\frac{1}{2}+\mathrm{Arc\,tan}\frac{1}{3}$. La lecture du texte permet donc une comparaison de vitesse de convergence et donne aux élèves un moyen d'obtenir le début du développement décimal de π. La fin du problème, qui peut être omise si le travail est jugé trop long ou trop compliqué, explique comment on peut trouver d'autres formules avec des Arc tan pour améliorer encore la convergence.

Ce travail est aussi bien sûr l'occasion de placer Euler dans son contexte historique et de parler de l'émergence du concept de fonction.

Problème

Le texte présenté est extrait de l'*Introduction à l'Analyse Infinitésimale* d'Euler (1748).

I. Activités préliminaires

Soit F définie sur IR par : $F(t)=\int_0^t \frac{1}{1+x^2}dx$.

1°) a) Justifier l'existence et la dérivabilité de F.

b) Calculer F' (t) et déterminer le sens de variation de F.

2°) a) Montrer : pour $x \in$ IR, $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\frac{x^8}{1+x^2}$.

b) En déduire : F(t) = P(t) + R(t) où P est un polynôme de degré 7 et $R(t)=\int_0^t \frac{x^8}{1+x^2}dx$.

c) Montrer : pour $t \in [0,1]$, $0 \leq R(t) \leq \frac{t^9}{9}$.

3°) Soit G définie sur $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par G(z) = F (tan z) .

a) Justifier la dérivabilité de G et calculer G' (z) pour z appartenant à I.

b) Calculer G(0) .

c) Déduire des deux questions précédentes que, pour z appartenant à I, G(z) = z.

4°)a) Dans le texte joint, Euler utilise une fonction qu'il note "A.tang.", qui est la fonction réciproque de la fonction tangente (actuellement notée Arc tan). Pour définir cette fonction Arc tan, on restreint la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Dans notre problème, comment a été notée cette fonction Arc tan ?

A l'aide des questions précédentes, interpréter les lignes 1 à 5 du texte joint.

b) Expliciter le "&c" (et caetera) de la ligne 5.

5°) a) Calculer F(1) et $F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

b) Expliquer le sens des lignes 5 à 9 en précisant le sens du mot "série" et du "&c" de la ligne 7.

II. Approximation de π

1°) a) Calculer P(1) à 10^{-2} près par défaut et déduire du I. un encadrement de F(1) – P(1), puis un encadrement de π. Quelle est l'amplitude de cet encadrement ?

b) Lire les lignes 10 à 20 du texte. Dans ce texte, on peut comprendre l'adjectif "inassignable" appliqué à un rapport de nombres comme "inexprimable à l'aide de calculs algébriques simples sur des entiers". Comment doit-on choisir l'arc z pour éviter l'inconvénient noté par Euler ?

c) Lire les lignes 20 à 30.

Expliquer la signification de l'expression "partie aliquote de la circonférence". Retrouver à l'aide de la partie I une approximation de $\text{Arc}\tan(\frac{1}{\sqrt{3}})$ et en déduire un encadrement de π (mener les calculs intermédiaires à 10^{-4} près). Quelle est l'amplitude de l'encadrement obtenu ?

2°) Amélioration de l'approximation

a) Lire les lignes 32 à 42.

Vérifier les calculs d'Euler ; en particulier, démontrer la formule donnant tan (a+b).

b) On suppose que $\tan a = \frac{1}{2}$. Calculer tan b avec $a+b = \frac{\pi}{4}$.

Que valent $F\left(\frac{1}{2}\right)$ et $F\left(\frac{1}{3}\right)$?

Calculer $P\left(\frac{1}{2}\right)$ et $P\left(\frac{1}{3}\right)$ à 10^{-6} près par défaut. Majorer $R\left(\frac{1}{2}\right)$ et $R\left(\frac{1}{3}\right)$.

c) Lire la fin du texte. Expliquer, avec les notations du problème, l'égalité des lignes 46-47.

Déterminer un encadrement de π (en explicitant la démarche suivie) et comparer l'amplitude de l'encadrement à celle du 1°) c).

III. Fabriquons nos formules

L'erreur commise en calculant Arc tan t par l'intermédiaire du polynôme $t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}$ est d'autant plus faible que t est petit ; aussi Euler préfère-t-il utiliser la formule $\frac{\pi}{4} = \text{Arc}\tan\frac{1}{2} + \text{Arc}\tan\frac{1}{3}$ plutôt que $\frac{\pi}{4} = \text{Arc}\tan 1$. Le but de la partie III du problème est d'inventer d'autres formules de ce type afin d'améliorer encore la précision du calcul.

1°) Premier essai

a) Exprimer tan 2a à l'aide de u = tan a, en utilisant la formule citée dans le texte d'Euler donnant tan (a+b) en fonction de tan a et tan b.

b) On pose $\frac{\pi}{4} = 2a+b$. Exprimer tan b à l'aide de tan 2a (suivre la méthode et les calcules d'Euler ligne 40 du texte), puis à l'aide de u = tan a.

Calculer tan b lorsque $u = \tan a = \frac{1}{3}$ et en déduire que : $\frac{\pi}{4} = 2\text{Arc}\tan\frac{1}{3} + \text{Arc}\tan\frac{1}{7}$.

2°) La formule de John Machin (1680-1752)

On donne : $\tan 4a = \dfrac{4u - 4u^3}{1 - 6u^2 + u^4}$ toujours avec u = tan a et on pose $\frac{\pi}{4} = 4a + b$.

a) Exprimer tan b à l'aide de u = tan a.

b) Calculer tan b lorsque $u = \frac{1}{5}$.

c) En déduire : $\frac{\pi}{4} = 4\text{Arc}\tan\frac{1}{5} - \text{Arc}\tan\frac{1}{239}$.

d) Quelle est la précision du calcul lorsqu'on utilise cette formule ?

En poussant plus loin le développement limité d'Arc tan t et à l'aide de cette formule, John Machin calcula 100 décimales de π en 1706.

3°) Une formule plus sophistiquée

On donne : $\tan 3a = \dfrac{3u - u^3}{1 - 3u^2}$ toujours avec $u = \tan a$ et on pose $\dfrac{\pi}{4} = 3a + b$.

a) Exprimer $\tan b$ à l'aide de $u = \tan a$.

b) Calculer $\tan b$ lorsque $u = \dfrac{1}{4}$.

c) On pose $\operatorname{Arc}\tan\dfrac{5}{99} = c + d$. Combien vaut $\tan(c + d)$? Calculer $\tan d$ en fonction de $\tan c$.

Calculer $\tan d$ lorsque $\tan c = \dfrac{1}{20}$ et écrire une nouvelle formule donnant $\dfrac{\pi}{4}$ à l'aide de trois Arctangentes.

Annexe : Les méthodes d'Euler pour obtenir des développements en série

Dans la préface de l'*Introduction à l'analyse infinitésimale*, Euler décrit l'ouvrage : "*Je me suis d'abord étendu dans le premier livre sur les fonctions de variables*". C'est effectivement sur ces définitions qu'ouvre le chapitre premier du livre I :

" 4 - *une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes.* "

1 - *Il faut ensuite remarquer principalement la division des fonctions : uniformes et multiformes*".

Rappelons que c'est la reconnaissance du caractère multiforme des logarithmes de nombres imaginaires qui a permis à Euler de mettre un terme à la célèbre "controverse entre messieurs Leibniz (1644-1716) et Bernoulli (1667-1748) sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires"[1].

Les cinq premiers chapitres du livre I traitent des fonctions algébriques. "*Passant ensuite des puissances aux quantités exponentielles, qui sont elles-mêmes des puissances, dont les exposants sont variables, leur développement m'a fourni une idée fort naturelle et à la fois fort féconde des logarithmes.*" (Préface).

Le chapitre VI commence en effet par un exposé sur "la quantité exponentielle a^z ", où Euler explique ce qu'il entend par a^z où z est un exposant variable :

"*Mais si l'on substitue à z des fractions, comme* $\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{4};\frac{3}{4}$, *&, on aura pour résultats les quantités* $\sqrt{a}\,;\sqrt[3]{a}\,;\sqrt[3]{a^2}\,;\sqrt[4]{a}\,;\sqrt[4]{a^3}$ *; & ; lesquelles considérées en elles-mêmes, ont deux ou un plus grand nombre de valeurs, puisque l'extraction des racines en fournit toujours plusieurs. Cependant on n'admet ordinairement dans ce cas, que les valeurs qui se présentent les premières, c'est-à-dire, celles qui sont réelles & positives, parce que la quantité* a^z *est regardée comme une fonction uniforme de z. Ainsi* $a^{\frac{5}{2}}$ *tiendra un certain milieu entre* a^2 *&* a^3, *& sera par conséquent une quantité du même genre ; & quoique* $a^{\frac{5}{2}}$ *ait la double valeur* $-aa\sqrt{a}$ & $+aa\sqrt{a}$, *cependant on ne tient compte que de la dernière. Il en est de même si l'exposant z a des valeurs irrationnelles ; mais comme il est difficile dans ce cas de concevoir le nombre de valeurs que renferme la quantité proposée, on se contente de considérer la seule valeur réelle. Ainsi* $a^{\sqrt{7}}$ *sera une valeur déterminée comprise entre les limites* a^2 *et* a^3. "

C'est à partir de cette notion de quantité exponentielle qu'Euler définit le logarithme.

"102 - *Si étant donné le nombre a, on peut conclure de chaque valeur de z, celle de y* ($y = a^z$) *réciproquement ayant pris pour y une valeur quelconque positive, on conçoit qu'il existe pour z un nombre convenable pour que* $a^z = y$ *; cette valeur de z , en tant qu'elle peut être regardée comme une fonction de y, s'appelle ordinairement le LOGARITHME de y. La théorie des logarithmes suppose donc l'existence d'un nombre constant représenté par a, que pour cette raison, on appelle la Base des logarithmes*".

De cette définition, Euler tire les propriétés habituelles des logarithmes ainsi que l'établissement des tables.

---

[1] Euler *Mémoire de l'Académie des Sciences de Berlin*, 1751 (voir l'article de Jean-Luc Verley dans *Fragments d'histoire des mathématiques* n° I - Brochure APMEP N°41 - 1981)

Le chapitre VII est consacré au "*Développement des quantités exponentielles et logarithmes en série*".

La méthode d'Euler repose sur le développement du binôme et une manipulation hardie de quantités infiniment petites ou infiniment grandes.

Si ω est un infiniment petit (positif), a^{ω} est infiniment proche de 1, il pose donc $a^{\omega} = 1 + k\omega$, k dépendant de a. Mais alors [2] :

$$\begin{aligned} a^{i\omega} &= (1+k\omega)^{i} \\ &= 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{2!}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{3!}k^3\omega^3 + \ldots \end{aligned}$$

Si z est un nombre fini et si on prend $i = \frac{z}{\omega}$, i est un infiniment grand. Comme $\omega = \frac{z}{i}$, on a :

$$a^z = 1 + \frac{i}{1!}k\frac{z}{i} + \frac{i(i-1)}{i^2}\frac{k^2z^2}{2!} + \frac{i(i-1)(i-2)}{i^3}k^3z^3 + \ldots, \text{ et,}$$

comme i est infiniment grand, $\frac{i}{i} = \frac{i(i-1)}{2!} = \frac{i(i-1)(i-2)}{3!} = \ldots = 1$.

Donc : $$a^z = 1 + kz + \frac{k^2z^2}{2!} + \frac{k^3z^3}{3!} + \ldots.$$

Une méthode analogue donne le développement en série du logarithme. Toujours pour ω infiniment petit, donc pour a^{ω} infiniment proche de 1, soit $a^{\omega} = 1 + k\omega$ (où k est un nombre réel dépendant de a), avec i infiniment grand dans $z = i\omega$, Euler pose : $(1+k\omega)^i = a^{i\omega} = 1 + x$ et obtient : $\ell(1+x) = \ell(a^{i\omega}) = i\omega$. (Euler note $\ell(y)$ le logarithme de base a de y).

Mais alors : $1 + k\omega = (1+x)^{\frac{1}{i}}$ donc $k\omega = (1+x)^{\frac{1}{i}} - 1$. D'où : $\ell(1+x) = i\omega = \frac{i}{k}\left((1+x)^{\frac{1}{i}} - 1\right)$.

Un travail de même type que celui mené plus haut pour la fonction exponentielle conduit alors au développement de $\ell(1+x)$, puis en changeant x en $-$x, à ceux de $\ell(1-x)$, et de $\ell\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Il est alors pratique de choisir comme base du logarithme le nombre a qui correspond à k =1, donc défini par $a^{\omega} = 1 + \omega$. Si on applique à ce nombre, pour z = 1, le développement obtenu précédemment pour a^z, on trouve : $a = a^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$ nombre qu'Euler désigne par e et dont il donne une approximation décimale (2,718281828459045235360 28).

Le développement fournit pour z quelconque : $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots$.

Et on a aussi, parce que $e^{\omega} = 1 + \omega$ pour ω infiniment petit,

$$e^z = e^{i\omega} = (1+\omega)^i = (1+\frac{z}{i})^i \text{ avec i infiniment grand.}$$

[2] Ici, i désigne un nombre réel qui, plus loin, sera un infiniment grand. Euler note $\sqrt{-1}$ ce que nous désignons habituellement par i.

C'est aussi le développement du binôme qui est à l'origine des séries donnant les fonctions trigonométriques. La connaissance des formules actuellement nommées de De Moivre (1667-1754) amène Euler à affirmer : $(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz$ puis à partir de $\cos nz = \dfrac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2}$, en prenant z infiniment petit et n infiniment grand, il assure que sinz = z, cosz = 1 et $\nu = nz$ est fini.

D'où :
$$\cos v = \frac{\left(1+\sqrt{-1}\frac{v}{n}\right)^n + \left(1-\sqrt{-1}\frac{v}{n}\right)^n}{2}.$$

Par conséquent, d'une part, le développement du binôme et une manipulation tout aussi satisfaisante des infiniment grands, analogue à celle qui a été faite pour les logarithmes, lui donne le développement en série de cosz (de même pour sinz) ; d'autre part, le fait que $e^{\sqrt{-1}v} = \left(1+\sqrt{-1}\frac{v}{n}\right)^n$ pour n infiniment grand donne les célèbres formules d'Euler : $\cos v = \dfrac{e^{\sqrt{-1}v} + e^{-\sqrt{-1}v}}{2}$ et $\sin v = \dfrac{e^{\sqrt{-1}v} - e^{-\sqrt{-1}v}}{2\sqrt{-1}}$.

En revenant à la variable z, on obtient donc l'arc z comme logarithme de quantités imaginaires dépendant de cosz et de sinz. En effet : $e^{\sqrt{-1}z} = \cos z + \sqrt{-1}\sin z$ et $e^{-\sqrt{-1}z} = \cos z - \sqrt{-1}\sin z$ donc :
$$e^{2\sqrt{-1}z} = \frac{\cos z + \sqrt{-1}\sin z}{\cos z - \sqrt{-1}\sin z}$$

et finalement :
$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\ell\left(\frac{\cos z + \sqrt{-1}\sin z}{\cos z - \sqrt{-1}\sin z}\right)$$

c'est-à-dire : $z = \dfrac{1}{2\sqrt{-1}}\ell\left(\dfrac{1+\sqrt{-1}\tan z}{1-\sqrt{-1}\tan z}\right)$.

Il en déduit le développement de l'arctangente qui conduit à la "série de Leibniz" : $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dots$.

Faiſons donc $tang.\ z = t$, de ſorte que z ſoit l'arc dont la tangente eſt t, & que nous déſignerons ainſi: *A. tang. t*, ce qui donne $z = A\ tang.\ t$. La tangente t étant connue, l'arc correſpondant ſera $z = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} -$ &c. Puis donc qu'en ſuppoſant la tangente t égale au rayon 1, l'arc z devient $=$ à l'arc de 45° ou $z = \frac{\pi}{4}$, nous trouverons $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ &c; ſérie que LEIBNITZ a donnée le premier pour exprimer la valeur de la circonférence du cercle.

141. Mais pour obtenir promptement, au moyen d'une telle ſérie, la longueur d'un arc de cercle, il eſt clair qu'on doit prendre pour la tangente t une fraction aſſez petite. Ainſi, on trouveroit facilement, à l'aide de cette ſérie, la longueur de l'arc z, dont la tangente t ſeroit $\frac{1}{10}$; car cet arc ſeroit $z = \frac{1}{10} - \frac{1}{3000} + \frac{1}{500000} -$ &c. ſérie dont on peut aiſément obtenir la valeur par le moyen des décimales; mais la meſure d'un tel arc n'apprendroit rien pour la longueur de toute la circonférence, parce que le rapport de l'arc, dont la tangente $= \frac{1}{10}$, à la circonférence entiere eſt inaſſignable. C'eſt pourquoi, dans cette recherche, on doit prendre un arc qui ſoit une partie aliquote de la circonférence, & dont la tangente aſſez petite puiſſe être exprimée commodément. On choiſit ordinairement pour remplir ce but l'arc de 30° dont la tangente $= \frac{1}{\sqrt{3}}$, parce que les tangentes des arcs plus petits, qui ont un rapport commenſurable avec la circonférence, ſont trop irrationnelles. Ainſi, à cauſe de l'arc de $30° = \frac{\pi}{6}$, on aura $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3 \cdot 3\sqrt{3}} + \frac{1}{5 \cdot 3^2\sqrt{3}} -$ &c. & $\pi = \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot 3} + \frac{2\sqrt{3}}{5 \cdot 3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7 \cdot 3^3} +$ &c. Et c'eſt par le moyen de cette ſérie, & avec un travail incroyable, qu'on eſt venu à bout de trouver la valeur de π que nous avons donnée ci-deſſus.

142. Ce calcul eſt d'autant plus pénible, que tous les termes ſont irrationnels, & que chacun d'eux n'eſt gueres plus petit, que le tiers de celui qui précede; mais on pourra remédier ainſi à cet inconvénient: prenons toujours l'arc de 45° ou $\frac{\pi}{4}$. Quoique cet arc ait une valeur exprimée par une ſérie à peine convergente $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ &c; conſervons-le cependant, & imaginons-le partagé en deux arcs a & b, de maniere que $a + b = \frac{\pi}{4} = 45°$. Puis donc que $tang.\ (a + b) = 1 = \frac{tang.\ a + tang.\ b}{1 - tang.\ a\ tang.\ b}$, nous aurons $1 - tang.\ a\ tang.\ b = tang.\ a + tang.\ b$ & $tang.\ b = \frac{1 - tang.\ a}{1 + tang.\ a}$. Soit maintenant $tang.\ a = \frac{1}{2}$; nous trouverons $tang.\ b = \frac{1}{3}$; alors les deux arcs a & b ſeront exprimés par une ſérie rationnelle beaucoup plus convergente que la précédente, & leur ſomme donnera la valeur de l'arc $\frac{\pi}{4}$. Donc . . . .

$$\pi = 4\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} - \text{\&c.} \\ \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} - \text{\&c.} \end{array}\right\}$$

On auroit donc pu trouver de cette maniere la longueur de la demi-circonférence beaucoup plus promptement qu'on ne l'a fait, en ſe ſervant de la ſérie que nous avons donnée auparavant.

Différences finies et Sommation de séries par une méthode de Leibniz ou la naissance d'une vocation mathématique

Thèmes abordés : suites, initiation aux séries.
Niveau: Terminale scientifique, Post-bac.
Outils utilisés : suites arithmétiques et géométriques.
Texte étudié : Leibniz, *Histoire et origine du calcul différentiel*, écrit sans doute en 1714, publié en 1849.

En 1672, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), arrive à Paris. Agé de 26 ans, il est chargé par le Prince de Hanovre d'une mission diplomatique. Bachelier à seize ans, il a déjà beaucoup étudié en Allemagne, mais il s'intéresse plus à la logique et à l'invention d'une machine à calculer qu'aux mathématiques. Il rencontre à Paris Huygens (1629-1695), la gloire scientifique de l'époque, et lui parle d'une découverte, fondée sur des réflexions logiques, qui lui semble intéressante pour calculer les sommes de séries (cette découverte est exposée après la question 3°)a)).

Huygens décide alors de tester le jeune homme, et lui demande de calculer la somme de la série $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+$etc... (série du 2°) e)). Leibniz réussit brillamment, généralise la méthode et, encouragé par ce succès, décide de se mettre sérieusement aux mathématiques !

C'est cette méthode que nous vous présentons ici.

A partir d'une suite u, de terme général u_n, on peut définir une suite du par :

$(du)_n = u_{n+1} - u_n$, nommée suite des différences premières associées à u.

1°) Déterminer (du) dans les cas suivants :

a) $u_n = n$; b) $u_n = n^2$; c) $u_n = n^3$; d) $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$; e) $u_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{2}$; f) $u_n = \frac{1}{n}$.

2°) A partir d'une suite u, de terme général u_n, on peut définir une suite Su par :

$(Su)_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$, nommée suite-somme associée à u.

Déterminer Su dans les cas suivants :

a) $u_n = a$ (où a est une constante réelle ; b) $u_n = q^n$ si $q\neq 1$; c) $u_n = n$; d) $u_n = 2n + 1$ (on peut utiliser le 1°)b)) ; e) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ pour $n>0$ et $u_0 = 0$ (utilisez 1°)e). Si vous n'avez pas trouvé, essayez encore après la question 3°)a)).

3°) La découverte de Leibniz :

a) Montrer que : $(S(du))_n = u_{n+1} - u_0$.

Dans toute la suite, les textes encadrés sont extraits de *Histoire et origine du calcul différentiel* où Leibniz raconte ses découvertes en parlant de lui à la troisième personne.

Lire l'extrait suivant :

> Il observait que, à partir de ceci : "A = A" ou à partir de son équivalent : "A - A = 0" (comme on peut le voir au premier abord, sans aller plus loin), on tire une très belle propriété des différences à savoir :
>
> $$A \ \underset{+L}{\underline{-A+B}} \ \underset{+M}{\underline{-B+C}} \ \underset{+N}{\underline{-C+D}} \ \underset{+P}{\underline{-D+E}} - E = 0$$
>
> Si maintenant, on pose que A, B, C, D, E sont des quantités croissantes et que les différences des deux quantités consécutives B-A, C-B, D-C, E-D, sont appelées L, M, N, P, il s'ensuit alors que :
>
> $$A + L + M + N + P - E = 0, \qquad \text{ou :} \qquad L + M + N + P = E - A,$$
>
> c'est-à-dire que la somme des différences entre termes consécutifs (quel que soit le nombre) est égale à la différence entre les deux termes extrêmes.

Réécrire les résultats du 3°)a) avec les notations de Leibniz.

b) Montrer que : $(d(Su))_n = u_{n+1}$.

4°) Lire le texte suivant :

> Il [Leibniz] considéra que n'importe quel terme d'une suite pouvait, la plupart du temps, être désigné par une notation générale, par laquelle on peut se référer à une suite simple. Par exemple, si le terme général de la suite des naturels 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, etc. est appelé x, on appellera le terme général de la suite des carrés x.x ou de celle des cubes x^3 etc. ; le terme général de la suite des nombres triangulaires, c'est-à-dire que 0, 1, 3, 6, 10, etc. s'écrira $\frac{x(x+1)}{1.2}$, ou $\frac{xx+x}{2}$.[1]
>
> N'importe lequel des nombres pyramidaux : 0, 1, 4, 10, 20, etc. ... s'écrira $\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}$, soit $\frac{x^3+3xx+2x}{6}$, et ainsi de suite. Et de cette façon, au moyen d'un calcul général, on peut trouver la suite obtenue par différence d'une suite donnée, et quelquefois aussi la suite obtenue par somme [d'une suite donnée], lorsqu'elle est exprimée numériquement.

---

[1] Si x est la suite des naturels, sa suite-somme est la suite des nombres triangulaires, la suite-somme de celle-ci est la suite des nombres pyramidaux, etc… Leibniz note ainsi x ce que nous désignerions plutôt par n. On remarquera le progrès par rapport à la notation de l'extrait précédent !

Par exemple, xx est un nombre carré, le carré qui lui est immédiatement supérieur est xx + 2x + 1, la différence des deux est 2x + 1, c'est à dire que la suite des nombres impairs est la " suite-différence " des nombres carrés. En effet, si x désigne 0, 1, 2, 3, 4, etc., 2x + 1 désigne 1, 3, 5, 7, 9. De la même manière, la différence entre x^3 et $x^3 + 3xx + 3x + 1$ est $3xx + 3x + 1$, c'est pourquoi tel est le terme général de la suite-différence de la suite des cubes.

5°) Montrer que :

a) Si u et v sont deux suites : $d(u + v) = du + dv$.

b) Si u est une suite et k un réel quelconque : $d(ku) = k\,du$.

6°) Soit u la suite numérique réelle définie par $u_n = \alpha n^3 + \beta n^2 + \gamma n + \delta$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des constantes réelles.

a) Déterminer $(du)_n$.

b) Soit v définie par $v_n = n^2$. Comment faut-il choisir $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pour que $du = v$?

Ceci implique-t-il que $(Sv)_n = u_{n+1}$? (on peut utiliser 3°)a)).

Déterminer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pour que $(Sv)_n = u_{n+1}$. En déduire une expression rationnelle de $1^2+2^2+...+n^2$ en fonction de n.

c) Calculer $1^2 + 2^2 + ... + 9^2$ et $1^2 + 2^2 + ... + 100^2$.

Lire la suite du texte :

Par conséquent, si la valeur du terme général d'une suite donnée peut s'exprimer à l'aide d'une variable x, qui ne figure ni au dénominateur, ni en exposant, il semblait que l'on pût toujours trouver la suite-somme d'une suite donnée. Par exemple, si l'on cherche la somme des nombres carrés, comme il était certain que la variable x ne pouvait être supérieure à la puissance cubique, l'auteur supposait que son terme général était $z = \ell x^3 + mxx + nx$ où dz doit être xx . Il en résultera $dz = \ell\, d(x^3) + md\,(xx) + n$ (en posant que dx = 1). Mais $d(xx) = 2x + 1$ et $d(x^3) = 3xx + 3x + 1$ (d'après ce qui a été déjà trouvé). Donc :

$$\begin{aligned} dz = 3\,\ell xx + 3\,\ell\, x &+ \ell \\ + 2\,mx &+ m \\ &+ n = xx \end{aligned}$$

donc $\ell = \frac{1}{3}$, $m = -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + n = 0$ ou $n = \frac{1}{6}$, c'est-à-dire que le terme général de la suite-somme des carrés est : $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x$, soit $\frac{2x^3 - 3xx + x}{6}$.

Par exemple, si l'on veut la somme des 9 ou 10 premiers carrés à partir de 1 jusqu'à 81, ou de 1 jusqu'à 100, on prend pour x la valeur 10 ou 11, (nombre immédiatement supérieur à la racine du dernier carré), et $\frac{2x^3 - 3xx + x}{6}$ sera $\frac{2000 - 300 + 10}{6} = 285$, ou $\frac{2.1331 - 3121 + 11}{6} = 385$.

Il n'est pas beaucoup plus difficile de faire la somme de 100 ou 1000 nombres carrés grâce à cette formule abrégée.

7°) Leibniz affirme plus loin :

> En dernier lieu, il vit aussi une manière d'appliquer le calcul différentiel aux suites de nombres quand la variable entre dans l'exposant, comme dans le cas d'une progression géométrique, où, si l'on pose b comme base, le terme général est b^x, en désignant par x les nombres naturels. Donc le terme général de la suite-différence sera : $b^{x+1} - b^x = b^x (b - 1)$.
>
> Par conséquent, il est manifeste que la suite-différence d'une progression géométrique donnée est aussi une progression géométrique proportionnelle à la progression donnée. De là, on obtient la somme d'une progression géométrique.

Soit u une suite géométrique de raison b ($b \neq 1$).

a) Ecrire la relation liant u_n et $(du)_n$ indiquée dans le texte encadré ci-dessus.

b) Quelle est l'opération permettant de passer de u à du ?

c) Quelle est la nature de la suite du ? La suite Su est-elle de même nature ?

d) Déterminer, en utilisant ce qui précède, une expression de $(Su)_n$ à l'aide de u_{n+1} et u_0.

8°) Dans l'extrait suivant, Leibniz donne une méthode permettant de calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, puis de montrer que S_n tend vers $\frac{1}{2}$ quand $n \to \infty$.

Pour les calculs, il utilise une suite auxiliaire u définie à priori par $u_n = \frac{e}{bn+c}$, ainsi que la suite $-(du)$.

Lire le texte suivant, puis expliciter les calculs nécessaires à la démonstration du résultat sur la limite de S_n.

> [...] soit x = 1 , ou 2, ou 3, etc..; le terme général de la série $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \text{etc...}$ est $\frac{1}{4x^2+8x+3}$; on cherche le terme général de la série-somme ; on examine par la méthode la plus simple si on peut l'obtenir sous la forme suivante : $\frac{e}{bx+c}$; on aura :
>
> $$\frac{e}{bx+c} - \frac{e}{bx+b+c} = \frac{eb}{b^2x^2+b^2x+bc+2bcx+c^2} = \frac{1}{4x^2+8x+3}$$
>
> En identifiant ces deux formules on obtient :
>
> $b = 2$, $eb = 1$, donc : $e = \frac{1}{2}$, $b^2 + 2bc = 8$, soit : $4 + 4c = 8$ ou $c = 1$, et enfin : $bc + c^2 = 3$, ce qui en découle.
>
> Donc le terme général de la série-somme est : $\frac{\frac{1}{2}}{2x+1}$, soit $\frac{1}{4x+2}$ [...]

Lettre de Leibniz à La Roque : la quadrature arithmétique du cercle par la méthode des métamorphoses

Thème abordé : expression de π comme somme d'une série.

Niveau : Terminale S, Post-Bac.

Outils nécessaires : géométrie du triangle, suite géométrique, intégrale.

Texte étudié : Lettre de Leibniz à la Roque, in *Leibnizen mathematische Schriften*, publiés par C.I. Gerhardt, Halle, 1850-1863, Rééd. Georg Olms Verlag, Hildesheim 1962, tome V, p. 88.

« A chaque fois qu'on demandait à Jericho pourquoi il était mathématicien - il pouvait s'agir d'un ami de sa mère ou d'un collègue un peu curieux ne s'intéressant absolument pas à la science - il secouait la tête en souriant et assurait qu'il n'en avait aucune idée. Si on insistait, il lui arrivait, non sans modestie, de les orienter vers la définition que donnait G.H. Hardy dans sa célèbre *Apology* : « Un mathématicien, c'est comme un peintre ou un poète, c'est un faiseur de formes ». Si cela ne satisfaisait toujours pas, il essayait de s'expliquer en citant l'illustration la plus basique qui lui venait à l'esprit : π - 3,14 - le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre. Calculez π à la millième décimale, assurait-il, ou même à la millionième ou davantage, et vous ne verrez aucune forme, aucun motif dans cette suite infinie de chiffres. Elle apparaît aléatoire, chaotique, sans beauté. Pourtant Leibniz et Gregory peuvent prendre le même nombre et en tirer un motif d'une élégance cristalline : $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots$ et ainsi à l'infini. Une telle forme n'avait aucune utilité pratique, mais était tout simplement belle - aussi sublime pour Jericho qu'une voix dans une fugue de Bach - et si ses interlocuteurs ne comprenaient toujours pas ce qu'il entendait par là, alors, tristement, il renonçait à leur expliquer en estimant que c'était une perte de temps.»

Robert HARRIS *Enigma*, Pocket, 1997, p.83[1].

Pour le héros de ce roman, comme pour Leibniz (1646-1716), ce résultat est le symbole de l'activité mathématique : dévoiler l'élégance et la simplicité des lois cachées qui régissent les mathématiques. La procédure infinie n'est pas un obstacle pour Leibniz : il explique que la simplicité de la loi de progression permet à l'esprit d'embrasser d'un seul regard la totalité de la série, qu'il identifie à la valeur exacte de $\frac{\pi}{4}$.

[1] Cette fiction policière, très facile à lire, raconte l'histoire d'un jeune mathématicien, Tom Jericho, élève de Turing (1912-1954). Il travaille pendant la dernière guerre mondiale à Bletchley Park, le centre britannique de décryptage des messages allemands, aidé des premiers ordinateurs. Le suspense haletant est entretenu par les vilains espions (dont une ravissante dont il tombe amoureux), qui contrecarrent ses efforts. *L'apologie d'un mathématicien* de Hardy (1877-1947), lui même célèbre mathématicien moderne, est le livre de chevet de Tom. Ce roman pourrait d'ailleurs faire l'objet d'un travail interdisciplinaire réunissant mathématiques (cryptographie), français, anglais et histoire.
On notera la "définition littéraire" de π : 3.14

Toute sa vie, Leibniz fera référence avec nostalgie à ce résultat de jeunesse, obtenu vers 1672, pendant son séjour à Paris où il a été envoyé pour une mission diplomatique. Il en rappelle les circonstances dans *Historia et Origo*[2], et le publie dans le *De vera proportione circuli*[3] assorti de ce curieux schéma :

Numero Deus

I

im pare gaudet

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\ etc$$

La méthode qui permet à Leibniz d'aboutir à ce résultat, et qu'il nomme « méthode des métamorphoses » est aussi très précieuse à ses yeux, car elle permet d'unifier toute une classe de problèmes considérés précédemment comme indépendants : calculs de longueurs, aires, volume, moments, angles.... le principe étant de se ramener à une quadrature, c'est-à-dire au calcul d'une aire délimitée par les axes et une courbe auxiliaire, nommée justement « quadratrice ». Il "métamorphose" la courbe de départ en une autre. L'équation de cette nouvelle courbe est obtenue par des raisonnements géométriques sur les triangles semblables. Pour réaliser ensuite la quadrature de cette nouvelle courbe, il utilise la méthode des séries infinies, initiée par Mercator (1619–1687) et largement développée par Newton (1642–1727), qui revient à intégrer terme à terme le développement en série de la fonction donnée : ce que Leibniz nomme « quadrature arithmétique ». Cette méthode est particulièrement développée dans une *Lettre à La Roque*, qui était le Directeur du *Journal des Scavants*, probablement datée de 1673.

Notons que Gregory (1661–1708) avait déjà donné le développement de ce que nous appelons Arctan dans une *Lettre à Collins* de 1673. La série "de la quadrature arithmétique" se trouve aussi dans un manuscrit en sanscrit de l'astronome indien Nilakantha (vers 1444–après 1501).

Le problème qui suit est proposé comme aide à la lecture de ce texte.

Problème : la quadrature du cercle à la manière de ... Leibniz

Les deux parties, bien que liées, sont largement indépendantes. Le but du problème est de trouver une expression de π sous forme de limite d'une suite de rationnels.

I. Etude d'une fonction et approximation d'une aire

On définit la fonction f sur l'intervalle [0,1] par : $f(x) = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$.

1°) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 8 cm). On étudiera la position de la courbe par rapport à sa tangente au point d'abscisse $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

---

[2] *Histoire et origine du calcul différentiel*, cf. "Différences finies de séries par une méthode de Leibniz..."dans cette brochure.

[3] Leibniz, *Naissance du calcul différentiel*, traduit et commenté par Parmentier, Vrin, 1989, p. 70-81.

2°) Donner une interprétation géométrique du nombre $A = \int_0^1 f(x)dx$.

Le but des questions suivantes est de déterminer une suite convergeant vers A.

3°) a) Montrer que, pour tout n de IN et pour tout x de IR, on a :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

b) En déduire une expression de A comme somme de nombres rationnels et d'une intégrale (qu'on ne cherchera pas à calculer).

c) On pose $R_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+4}}{1+x^2}dx$ et $u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{2n+3}$.

Montrer que $|R_n| < \frac{1}{2n+5}$ et en déduire $\lim_{n\to\infty} u_n$.

d) Donner une valeur approchée par défaut à 10^{-3} près de u_5 ; u_{50}; u_{500}.

II. Métamorphose d'un cercle

1°) Lire le texte suivant, extrait d'une lettre de Leibniz au Directeur du *Journal des Scavants*.

> Je me suis servi de ce lemme : trois paralleles BC, GE, HF (Fig. 1) passant par les trois angles d'un triangle BEF et un des costez EF estant prolongé jusqu'à la rencontre d'une des paralleles en C, le rectangle[4] sous l'intervalle BC entre le point de rencontre C et l'angle B, par lequel passe cette parallele , et sous GH, la distance des deux autres paralleles GE, HF, c'est à dire le rectangle PGH (en supposant BGH normale à BC, et CP égale et parallele à BG) sera le double du triangle BEF.

Pour démontrer ce lemme, projetons orthogonalement B en C' sur (EF) et E en F' sur (HF).

a) Montrer que les triangles BCC' et EFF' sont semblables.

b) En déduire que BC'× EF = BC × EF'.

c) Conclure.

Fig. 1

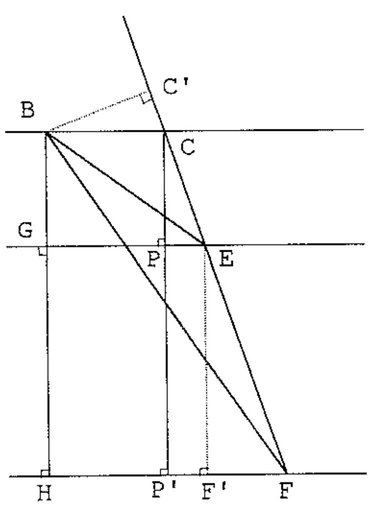
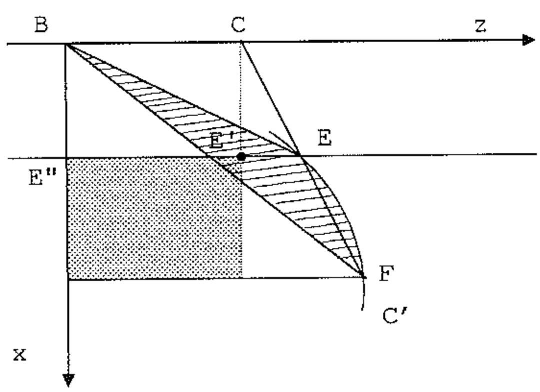


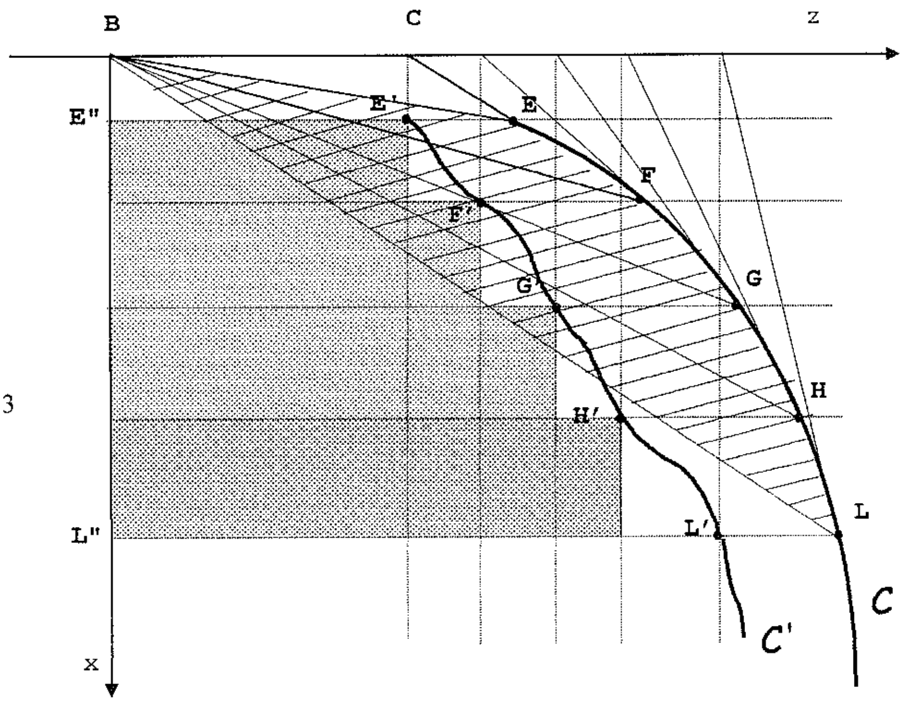
Fig. 2



[4] En bref, il s'agit du rectangle PGHP' de la Fig 1.

2°) Voici ce qu'explique Leibniz dans la suite de sa lettre : soit B un point donné, qui sera pris comme origine du repère formé par les axes (Bz) et (Bx). Soient E et F deux points d'une courbe $\mathcal{C}$. Si E et F sont très proches, on pourra confondre la droite (EF) et la tangente à $\mathcal{C}$ en E, et le triangle BEF avec le triangle mixtiligne délimité par les droites (BE), (EF) et la courbe $\mathcal{C}$.

Fig. 3

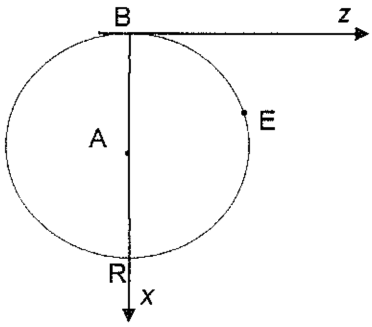


On reprend alors (Fig 2) la construction de la figure 1 : la droite (EF) est la tangente à $\mathcal{C}'$ en E, elle coupe (Bz) en C et on appelle E (au lieu de P) le projeté orthogonal de C sur la parallèle (E''E) à (Bz) passant par E. D'après le lemme, l'aire du rectangle grisé est égale au double de celle du triangle hachuré. On réitère l'opération en remplaçant E par F, et ainsi de suite (continuer le grisé et les hachures...). On obtient ainsi une courbe $\mathcal{C}'$ décrite par E' quand E décrit $\mathcal{C}$ (Fig. 3).

L'aire grisée, assimilée à celle du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}'$ et les droites (Bx), (E''E'), (L''L') est le double de l'aire hachurée, assimilée à celle du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$ et les droites (BE) et (BL). La courbe $\mathcal{C}$ s'est métamorphosée en la courbe $\mathcal{C}'$, que Leibniz nomme « quadratrice », et le calcul, nouveau, de l'aire du triangle mixtiligne est remplacé par celui, classique, de l'aire sous une courbe donnée.

3°) Leibniz utilise ensuite ce résultat pour déterminer une expression de l'aire d'un cercle de rayon a.

Fig. 4



a) Reproduire la figure 4 et tracer le point C, intersection de la tangente à $\mathcal{C}$ en E avec (Bz) et le point E' de la courbe $\mathcal{C}'$ correspondant au cercle de centre A et de rayon AB = a.

b) Nous allons chercher l'équation de la « quadratrice » $\mathcal{C}'$ correspondante dans le repère orthonormé Bxz .

Soit G le projeté orthogonal de E sur (Bx). On a donc BG = CE' = x et BC = GE' = z. Montrer que les triangles BCA et GBE sont semblables. En déduire : $EB^2 = CA^2 \times \frac{GB^2}{BC^2}$, puis : $\frac{BR}{GB} = \frac{CA^2}{BC^2}$.

c) En déduire une équation de $\mathcal{C}'$ comme expression de x en fonction de z.

4°) Lire l'extrait suivant de la Lettre de Leibniz , et le commenter, en élucidant les notations. On pourra se reporter à la figure originale p. 61.

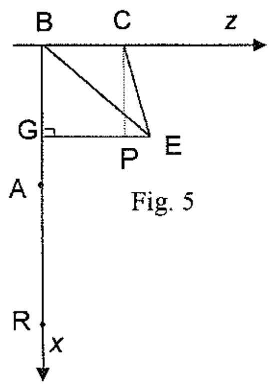


Fig. 5

Car la courbe E(E)((E)) estant un arc de cercle, la courbe des *interceptées, sçavoir BP(E)((P)), se pourra rapporter à l'angle* droit RBC par cette equation $\frac{2az^2}{a^2+z^2} \sqcap x$, appellant BG ou CP, x et BC ou GP, z, c'est à dire RB sera à BG en raison doublée de AC à BC, comme il est aisé de demonstrer.

Que signifie l'expression : " RB sera à BG en raison doublée de AC à BC" ?

5°) Utilisation de la métamorphose

a) Donner une expression, à l'aide d'une intégrale, de l'aire A1 du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}'$, la droite (Bz) et celle d'équation $z = a$. (Fig. 6).

b) En déduire une expression de l'aire A2 du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}'$, la droite (Bx) et celle d'équation x = a.

c) Utiliser le 2°) pour donner une expression, à l'aide d'une intégrale, de l'aire A4 du quart de cercle ABE.

6°) Quadrature Arithmétique du cercle

On prend maintenant $a = 1$. Exprimer A4 comme limite d'une suite de nombres rationnels.
Quelle est la valeur exacte de A4 ?
Conclure pour π.

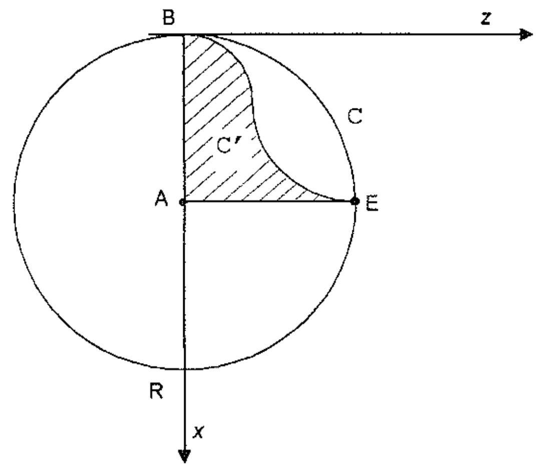


Fig. 6

7°) Calcul d'un secteur circulaire

En fait, la méthode de Leibniz lui donne un résultat plus général : l'aire d'un secteur circulaire BAE d'angle au centre α est $\mathcal{A} = \frac{\alpha}{2}$; le cas que nous avons étudié correspond donc à $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

La quadrature Arithmétique du Cercle et de ses parties peut estre comprise dans ce théorème : le rayon du Cercle estant l'unité et la tangente BC de la moitié BD d'un arc donné BDE estant appelée b, la grandeur de l'arc sera : $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} + \frac{b^9}{9} - \frac{b^{11}}{11}$ *etc.* Or les arcs estant trouvez, il est aisé de trouver les espaces, et le corollaire de ce theoreme est que le Diametre et son quarré estant 1, le Cercle est $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ *etc.*

Notons que BC = b = $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, et que le développement donné correspond à $\mathcal{A} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)$ = arctan b. Il s'agit de la grandeur de l'aire du secteur, et non de la grandeur de l'arc.

Lettre à La Roque, directeur du Journal des Savants.

Monsieur

La quadrature Arithmetique du Cercle et de ses segments ou secteurs, que j'ay trouvée et communiquée à plusieurs excellens Geometres il y a déjà quelques années, leur a paru assez extraordinaire, et ils m'ont exhorté d'en faire part au public. Mais comme je n'aime pas d'écrire un volume farci d'un grand nombre de propositions repassées pour donner une seule qui soit nouvelle et considerable, j'ay recours à Vostre Journal qui nous donne le moyen de publier un theoreme sans faire un livre.

Quadrature Arithmetique est, qui exprime la grandeur de la figure proposée par un rang infini de nombres rationaux ou commensurables à une grandeur donnée, ce qui suffit pour l'Arithmetique lorsqu'on ne le sçauroit faire par un nombre rationel fini, car l'arithmetique ne connoist les nombres irrationaux qu'autant qu'elle les peut exprimer par les rationels soit finis soit infinis. Et il n'est pas difficile de donner même un rang infini de nombres rationaux égal à une racine sourde, ce que je croy d'avoir fait le premier, en......*) la division dans une extraction continuée.

La quadrature Arithmetique du Cercle et de ses parties peut estre comprise dans ce theoreme: Le rayon du Cercle estant l'unité, et la tangente BC de la moitié BD d'un arc donné BDE estant appellée b, la grandeur de l'arc sera: $\frac{b}{1}-\frac{b^3}{3}+\frac{b^5}{5}-\frac{b^7}{7}+\frac{b^9}{9}-\frac{b^{11}}{11}$ etc. Or les arcs estant trouvez, il est aisé de trouver les espaces, et le corollaire de ce theoreme est que le Diametre et son quarré estant 1. le Cercle est $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ etc. L'usage de cette quadrature est qu'outre la beauté d'un theoreme aussi simple et aussi surprenant que celuy-ci. vous avons un moyen de trouver les angles par les costez et à rebours; item les espaces ou portions des Cercles, Ellipses, Cones, Spheres, Spheroides et de leur surfaces, le tout par une simple addition de nombres rationaux ou grandeurs commensurables au defaut même de tables toutes calculées, et sans polygones, dont le calcul demande une extraction perpetuelle de racines, outre qu'ainsi on approchera bien viste; car si b par exemple ou BC estoit $\frac{1}{10}$ du rayon, b^{11} seroit $\frac{1}{100000000000}$ et par consequent toutes les puissances plus hautes pourront negligées hardiment. Ce qui serviroit à continuer les tables, et à les rendre plus exactes sans beaucoup de peine.

Or comme il n'y a rien de si important que de voir les origines des inventions qui valent mieux à mon avis que les inventions mêmes, à cause de leur fecondité et par ce qu'elles contiennent en elles la source d'une infinité d'autres qu'on en pourra tirer par une certaine combinaison (comme j'ay coûtume de l'appeller) ou application à d'autres sujets lors qu'on s'avisera de la faire comme il faut; j'ay crû estre obligé de faire part au public de l'origine de celle-cy. J'ay donc consideré, que les quadratures que nous avons trouvées jusqu'icy par l'analyse ordinaire, dependent des regles Arithmetiques de trouver les sommes des rangs reglés, ou des progressions de nombres rationaux. Mais les ordonnées du cercle estant irrationelles, j'ay taché de transformer le cercle en une autre figure, du nombre de celles que j'appelle rationelles, c'est à dire dont les ordonnées sont commensurables à leurs abscisses. Pour cet effect j'ay fait le dénombrement de quantité de Metamorphoses, et les ayant essayées par une combinaison tres aisée (car je pourrois par ce moyen écrire en une heure de temps une liste de plus de 50 figures planes ou solides, differentes, et neantmoins dependentes de la circulaire) j'ay trouvé bientost le moyen que je m'en vays expliquer. J'ay crû cependant à propos de remarquer cecy en passant pour justifier ce que j'avois dit autrefois de l'utilité des combinaisons pour trouver des choses que l'algebre et si vous voulez, l'analyse même telle que nous l'avons ne sçauroit donner. Or le moyen que les combinaisons m'ont offert sert à trouver un nombre infini de figures commensurables à une figure donnée. Pour cet effect je me suis servi de ce lemme: Trois paralleles BC, GE, HF (fig. 1), passant par les trois angles d'un triangle BEF et un des costez EF estant prolongé jusqu'à la rencontre d'une des paralleles en C, le rectangle sous l'intervalle BC entre le point de rencontre C et l'angle B, par lequel passe cette parallele, et sous GH, la distance des deux autres paralleles GE, HF, c'est à dire le rectangle PGH (en supposant BGH normale à BC, et CP égale et parallele à BG) sera le double du Triangle BEF. De même, si HQ égale à BM, le rectangle QHN sera égal au double Triangle BFL. Et si ces bases EF, FL etc. sont infiniment petites, et continuées pour remplir*) tout l'Espace EB((E))LFE à la courbe EFL((E)), et de même si GH, HN etc. sont infiniment petites afin que les rectangles PGH, QHN etc. remplissent tout l'espace PG((G))((P))QP à la courbe PQ((P)), tout cet espace sera le double de l'autre espace. Et puisque FEC, LFM, ((E))((C)) seront les touchantes de la premiere courbe, le theoreme se pourra enoncer generalement ainsi: Si d'une courbe E((E)) on mene à un costé AB d'un angle droit ABC les ordonnées EG, ((E))((G)), à l'autre costé BC les touchantes EC, ((E))((C)), alors la somme des interceptées BC, ((B))((C)) entre le point de l'angle B et le point de la rencontre des touchantes C ou ((C)) appliquées normalement à l'axe AB ou GP, ((G))((P)), c'est à dire la figure PG((G))((P))QP sera le double de l'espace EB((E))E compris entre une portion de la premiere courbe et les droites qui joignent les extremités de cette portion au point B.

Le troisieme *Corollaire* est la *quadrature Arithmetique* du Cercle. Car la courbe E(E)((E)) estant un arc de cercle, la courbe des interceptées, sçavoir BP(E)((P)), se pourra rapporter a l'angle droit RBC par cette equation $\frac{2az^2}{a^2+z^2} \sqcap x$, appellant BG ou CP, x et BC ou GP, z, c'est à dire RB sera à BG en raison doublée de AC à BC, comme il est aisé de demonstrer. D'ou il s'ensuit premierement que celuy qui trouvera une regle de donner par abregé la somme d'un tel rang, quoyque fini, de nombres rationaux: $\frac{2,1}{1+1}$ ou $\frac{2}{2}$, $\frac{2,4}{1+4}$ ou $\frac{8}{5}$, $\frac{2,9}{1+9}$ ou $\frac{18}{10}$, $\frac{2,16}{1+16}$ ou $\frac{32}{17}$ etc. sans estre obligé de les adjouter ensemble l'un apres l'autre, aura achevé la quadrature du cercle, parceque c'est la progression des ordonnées CP de la figure BCPB, dont la quadrature donneroit celle du Cercle. Mais à present ce n'est pas encor la quadrature Arithmetique. Et pour y arriver il faut se servir de la belle methode de Nicolaus Mercator, selon laquelle, puisque *a* estant l'unité et $\frac{x}{2}$ égal à $\frac{z^2}{1+z^2}$, la méme x sera égale à $z^2-z^4+z^6-z^8$ etc. à l'infini, et la somme de toutes les x égale à la somme de toutes les z^2-z^4 etc. Or la premiere de toutes les z estant infiniment petite, et la derniere estant d'une certaine grandeur, comme BC que nous appellerons b, la somme de toutes les z^2 sera $\frac{b^3}{3}$, et la somme de toutes z^4 sera $\frac{b^5}{5}$ etc. (par la quadrature des paraboles), donc la somme de toutes les x ou l'espace BCPB, ou la difference du rectangle CBG et du double segment du cercle BEB sera $\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} - \frac{b^9}{9}$ etc. donc (par une suite assez aisée de la Geometrie ordinaire) l'arc BDE sera $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7}$ etc. le rayon estant 1 et BC, touchante de la moitié de l'arc, estant appellée b. Ce qu'il falloit demonstrer. J'avoue que cette demonstration ne pourra pas estre entendue de tout le monde, parcequ'elle suppose bien des choses qui ne sont connues qu'à ceux qui sont versez dans les nouvelles decouvertes et qui sçavent manier les characteres ou symboles. Mais il n'y en a que trop pour ceux-cy: et il faudroit un volume pour satisfaire aux autres. On pourroit prouver aussi le rapport qu'il y a entre la figure des interceptées B((G))((P))PB et le cercle, en supposant la quadrature de la Cissoeide trouvée par Mons. Hugens, comme il m'a fait remarquer. Mais la demonstration que je viens de donner m'a servi de principe d'invention et est feconde eu theoremes nouveaux. S'il y a lieu d'esperer qu'on pourra jamais arriver à une raison analytique, exprimée en termes finis, du Diametre à la circonference, je croy que ce sera par cette voye, car quoyque les expressions soyent infinies, nous ne laissons pas quelques fois d'en trouver les sommes: et pour cet effect je donneray pour conclusion l'observation suivante, qui me paroist tres curieuse:

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{35}$ $\frac{1}{48}$ $\frac{1}{63}$ $\frac{1}{80}$ $\frac{1}{99}$ $\frac{1}{120}$ etc. dont la somme $\sqcap$ $\frac{3}{4}$ la progression estant continuée à l'infini

$\frac{1}{3}$. $\frac{1}{15}$. $\frac{1}{35}$. $\frac{1}{63}$. $\frac{1}{99}$. etc. . . . . . $\sqcap$ $\frac{1}{2}$

. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{24}$. $\frac{1}{48}$. $\frac{1}{80}$. $\frac{1}{120}$ etc. . . . . . $\sqcap$ $\frac{1}{4}$

$\frac{1}{3}$ . . . $\frac{1}{35}$ . . . $\frac{1}{99}$. etc. . . . . . $\sqcap$ *pendet ex quad. circl.*

$\frac{1}{8}$ . . . $\frac{1}{48}$ . . . $\frac{1}{120}$ etc. . . . . . $\sqcap$. pendet ex quad. hyperbol.

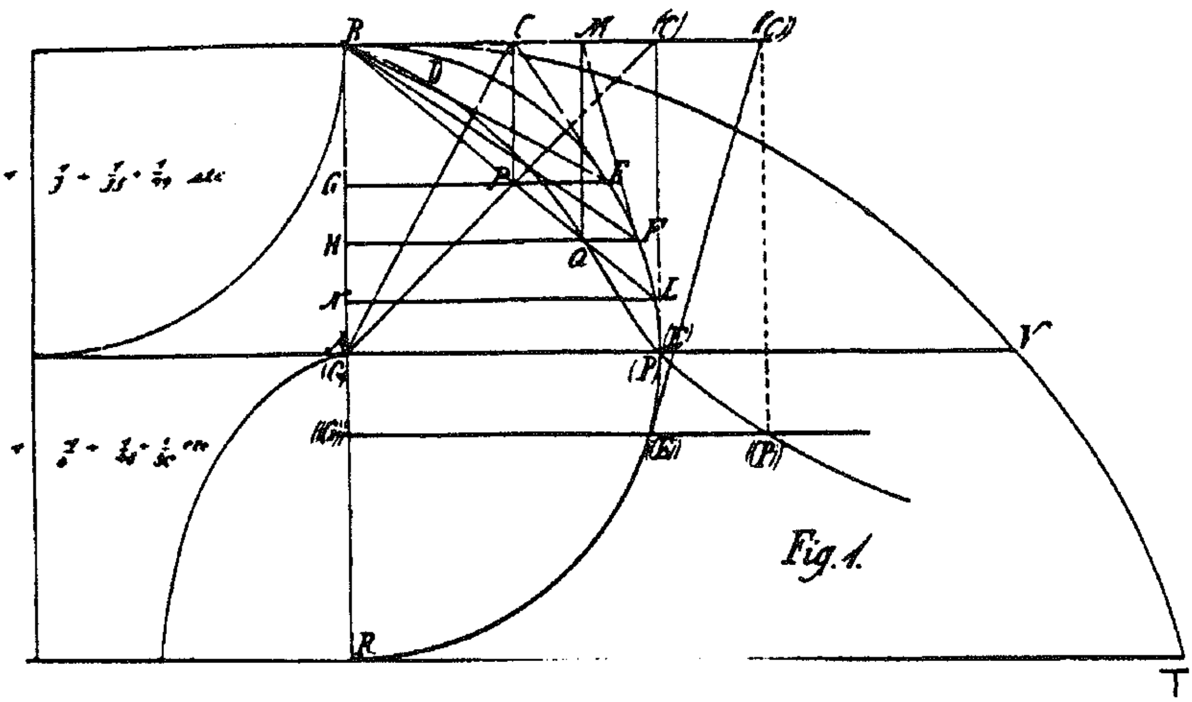


Fig. 1.

Leibnizen mathematische Schriften publiés par C. I. Gerhardt, Halle, 1850-1863, Réed. Georg Olms Verlag , Hildesheim 1962, tome V, p. 88.

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB :

http://iremp7.math.jussieu.fr

- Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7

Case 7018

2 place Jussieu

75251 Paris cedex 05

TITRE : MATHEMATIQUES : APPROCHE PAR DES TEXTES HISTORIQUES (TOME 3)

AUTEUR : GROUPE I.R.E.M. : MATHEMATIQUES : APPROCHE PAR DES TEXTES HISTORIQUES.

DATE : JUILLET 2001

RESUME :

Nous poursuivons la publication de documents pédagogiques utilisant des textes historiques originaux.

Les huit documents proposés sont destinés plutôt à des lycéens. Le premier et une partie du quatrième peuvent être utilisés au Collège et les derniers dans l'enseignement supérieur. Ils ont tous été expérimentés en classe.

Les thèmes sont variés, touchant aussi bien à l'algèbre, à la géométrie ou à l'analyse. Certaines activités ont un aspect culturel et interdisciplinaire (nombre d'or, astronomie).

Les outils mathématiques nécessaires aux élèves sont en rapport avec les programmes des lycées et indiqués au début de chaque activité.

MOTS-CLES : Spécialité : MATH - HISTOIRE
Autres : TEXTES HISTORIQUES
PRATIQUE - ENSEIGNANTS

Editeur : IREM
Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE
Dépôt légal : Juillet 2001
ISBN : 2-86612-193-7
IREM Université Paris VII Denis Diderot
Case 7018
2, place Jussieu 75 251 Paris Cedex 05
Tel : 01 44 27 53 83