

DE LA METHODE DITE D'EXHAUSTION :
 GREGOIRE DE SAINT-VINCENT
 (1584-1667)

Jean-Pierre Le Goff

INTRODUCTION

Les textes sur lesquels nous allons appuyer cette étude, sont extraits d'oeuvres d'Euclide [2], d'Archimède [1], et de l'*Opus geometricum Quadraturae circuli et sectionum conii* (1-e *Traité géométrique de la Quadrature du Cercle et des Sections coniques*), 1647, de Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) [3].

Il s'agit de quelques propositions exposant des quadratures établies par Archimède et reprises par Grégoire de Saint-Vincent, selon une méthode faisant appel à l'axiome d'Eudoxe, réénoncé par Euclide (Elément X,1), et si bien illustré par Archimède qu'il porte souvent son nom.

Notre propos est de mettre en évidence que la méthode des anciens, dont on sait qu'elle permet d'exclure le recours à tout processus infini, sort singulièrement transformée de la lecture qu'en fait Grégoire de Saint-Vincent, qui lui donnera le nom pour le moins paradoxal de "méthode d'exhaustion". Ce faisant, c'est tout le débat sur l'infini et les contradictions relevées par les Eléates qui se trouve ici réactivé au profit d'une irruption de l'infini actuel qui ouvre la voie aux Pascal et autres Newton et surtout aux Huygens et Leibniz, mais au détriment de la rigueur qui fait le mérite essentiel de la méthode des anciens.

Le jugement que portera Leibniz sur Grégoire de Saint-Vincent, prouve - une fois de plus - que le philosophe de Hanovre s'est montré plus clairvoyant que bon nombre de ses contemporains ou que bien des procureurs et censeurs de l'histoire des sciences. L'oeuvre de ce savant jésuite fut décriée en raison de son échec sur ce qui fait l'objet final de son ouvrage : la quadrature du cercle. Leibniz, au contraire, estimait à sa juste valeur l'apport du jésuite belge ; il s'exprimera en ces termes :

Et si Gregorius a sancto Vincentio quadraturam circuli et hyperbolae non absolverit, egregia multa tamen dedit. 1-e : Et si Grégoire de Saint-Vincent n'a pas résolu entièrement les quadratures du cercle et de l'hyperbole, il n'en reste pas moins qu'il a livré beaucoup [de résultats] remarquables.

(0) Le texte qui suit est en substance celui proposé dans le polycopié distribué lors d'un atelier programmé le 13 mai au colloque de Besançon ; il a été remodelé en tenant compte des interventions pertinentes qui se sont fait jour pendant la discussion. Les notes entre crochets [n] renvoient à un ouvrage de la bibliographie en fin d'article.

GREGOIRE DE SAINT-VINCENT : L'HOMME & L'OEUVRE.

Grégoire de Saint-Vincent est né à Bruges en 1584, et mort à Gand en 1667. Membre de la Compagnie de Jésus, il fut l'élève de Christophore Clavius (1537-1612), surnommé l'Euclide du XVI^e siècle. Clavius fut en effet l'auteur d'un ouvrage d'enseignement de la géométrie fort réputé, l'*Euclidis Elementorum* (Rome, 1574), et le réformateur du calendrier à la requête du pape Grégoire XIII. Grégoire de Saint-Vincent enseignera lui-même les Mathématiques dans divers collèges de la Société (Rome, Prague), et sera tuteur à la cour de Philippe IV d'Espagne. Outre son monumental ouvrage en deux volumes dont la pagination se suit sur 1225 pages (plus 4 d'errata), et qui roule sur la quadrature du cercle, il a laissé de nombreux manuscrits formant treize volumes in-folio que conserve la Bibliothèque de Bruxelles.

L'on apprend dans la préface de son ouvrage, que Grégoire de Saint-Vincent était en possession de l'essentiel de ses méthodes de quadrature et de cubature vers 1625, c'est-à-dire avant la mise au point, vers 1629, par Cavalieri (1598-1647) de ses propres conceptions sur ce qui devait s'appeler *les indivisibles* (1635). Les méthodes de Grégoire de Saint-Vincent s'inspiraient des travaux de Simon Stevin (Bruges, 1548, Leyde, 1620), auteur du *De praxi Geometriae* suivant le titre donné par Snellius, son traducteur, et de Luca Valerio (≈1553-1618), auteur du *De centro gravitatis solidorum*, Rome, 1604, et d'un *Traité de la quadrature de la parabole* par une méthode différente de celle d'Archimède. Mais le jésuite belge devait perdre ses manuscrits au cours de l'un de ses voyages, ce qui en retarda la publication : Montucla, qui a manifestement lu la préface de Grégoire de Saint-Vincent, signale qu'il avait composé un traité de la Quadratrice dont le manuscrit fut la proie des flammes lors de la prise de Prague par les Suédois en 1631 et que ses écrits furent en partie perdus pendant le sac de la ville (1). Il reprit, plusieurs années après, le manuscrit de l'*Opus geometricum* (le frontispice parle d'un *Problema austriacum*) : les restes sauvés des flammes par le père Rodrigue Arriaga avaient été expédiés à Vienne où ils stationnèrent dix ans, loin de leur auteur dévolu à d'autres tâches d'enseignement, avant de lui revenir. L'ouvrage fut finalement achevé et proposé à l'impression : le Général de la Compagnie, Vincent Caraffa hésitait à rendre public un travail dont l'issue n'était pas certaine et qui pouvait jeter le discrédit sur son auteur et sur l'ordre tout entier ; il reprocha même à son subordonné belge le frontispice tapageur, mais Grégoire de Saint-Vincent s'entêta contre ces réticences, l'ouvrage parut en 1647, à Anvers, et se trouva ainsi au centre d'une fameuse polémique scientifique [17].

L'*Opus geometricum* de Grégoire de Saint-Vincent comporte de nombreuses innovations, dont voici un aperçu, suivi d'une description de l'ouvrage.

Son projet est bien de quarrer le cercle, mais après avoir échoué en utilisant la spirale - dont il est, par parenthèse, le premier à noter l'analogie avec la parabole, " qui s'écrit " $x = r$ et $y = r\theta$, si l'une s'écrit $r = a\theta$ et l'autre $x^2 = ay$, analogie repérée aussi par Cavalieri, et reprise par De Sluze et Pascal -, puis la quadratrice, il s'oriente vers la quadrature des coniques (segment de parabole, ellipse et segment d'hyperbole rapportée à ses asymptotes), dont il espère déduire celle du cercle, en usant une fois encore d'une analogie, qui tient cette fois à l'appartenance du cercle à l'espèce étudiée, ce qui n'est pas sans faire penser au point de vue arguésien.

(1) Voir Montucla, J.F., *Histoire des Mathématiques*, Tome II, pp. 79 à sqq., & troisième supplément au Tome IV, *Histoire de la Quadrature du Cercle* [12], et *Histoire des Recherches sur la Quadrature du Cercle* [13].

Notons que notre propos ne sera pas d'étudier l'ouvrage ni le " mal-fondé " des prétentions de son auteur en matière de quadrature du cercle. Notre étude se propose de donner une idée du contexte dans lequel apparaît la dénomination de " méthode d'exhaustion ", et donc de livrer quelques extraits.

Pour mener à bien son projet, Saint-Vincent va - excusez du peu - :

1°) systématiser la génération de volumes par une méthode dite *Ductus plani in planum* (Duction d'une aire plane sur une aire plane), qui le conduit à imaginer une espèce d'arithmétique générale des grandeurs (en l'occurrence à définir ce qui s'apparente au produit de deux surfaces) ;

2°) systématiser l'étude de ces volumes, que nous appelons onglets, ou coins, qui furent l'objet de certaines études d'Archimède et de Képler, et qui jouent un grand rôle dans les travaux de Huygens et Pascal, travaux qui préparent eux-mêmes le calcul des intégrales doubles (2) ;

3°) ramener la quadrature du segment d'hyperbole à la mise en relation de deux progressions, l'une arithmétique et l'autre géométrique (sans introduire cependant la notion de logarithme d'invention récente par John Napier (1550-1617) et Henry Briggs (1556-1630) : ce sera l'apport d'Alphonse-Antoine de Sarasa, en 1649, dans sa réponse aux objections de Mersenne (3), puis de Mercator, en 1667) ; la proposition remarquable qu'il énonce à ce sujet se situe au livre VI (prop. 109, p.586) et établit en substance que :

Si les abscisses d'une hyperbole équilatère croissent en progression géométrique, les aires des surfaces découpées entre l'hyperbole et son asymptote par les lignes ordonnées correspondantes, croissent en progression arithmétique.

La réciproque porte le n° 130, p. 597. Il faut noter de surcroît que Grégoire de Saint-Vincent va généraliser et systématiser l'usage des progressions géométriques de raison contractante, telle qu'Archimède le mit en oeuvre avec quelques rapports élémentaires, comme un demi ou un quart ;

4°) effectuer des rapprochements entre les coniques, qui ne sont pas sans intérêt pour l'histoire de leur théorie ;

5°) enfin, et surtout, systématiser les idées de Valério et Stevin en matière de " passage à la limite ", en définissant la somme d'une série comme une grandeur réelle, *terminus* d'une progression que celle-ci ne peut atteindre à aucun stade fini de son évolution mais dont elle peut s'approcher plus près que tout intervalle donné.

(2) Cf. le *Traité des trilignes rectangles et de leurs onglets* dans les *Lettre de A. Dettonville* de 1659,

(3) Mersenne, dans ses *Cogita physico mathematica...* de 1644, affirme que la quadrature du cercle est soumise à la résolution du problème de la détermination du logarithme d'un nombre quelconque, sous la donnée des logarithmes respectifs de deux nombres donnés. Le père Sarasa, s.j., répondra au minime, dans un opuscule de 1649, intitulé *Réponse à la question de Mersenne*, en utilisant les résultats de son ami Grégoire de Saint-Vincent, les aires hyperboliques tenant lieu de logarithmes. Outre que cette intervention apparut comme un soutien de poids dans la controverse suscitée par l'ouvrage du jésuite, elle avait le mérite de mettre en évidence la généralité de la notion de logarithme : Neper et Briggs n'avaient développé que le logarithme décimal. Voir, sur ce point, l'*Histoire des logarithmes* en deux volumes, de Ch. Naux [14] et l'article de H. Bosmans [18].

C'est ainsi qu'il utilise des rectangles infiniment minces en nombre infini (analogues aux parallélogrammes de Stevin) et des polygones inscrits ayant un nombre infini de côtés, faisant preuve de sa connaissance des discussions contemporaines (chez les scholastiques) sur la nature du continu et le résultat de la division à l'infini. Au passage, il réfute les objections de Zénon, en indiquant que la division du temps doit se faire en progression géométrique de même raison que l'espace parcouru ;

Voici ce que dit Leibniz sur ce dernier point, dans une lettre à Foucher, de janvier 1692 (4) :

Le P. Grégoire de Saint-Vincent, traitant de la somme d'une multitude infinie des grandeurs qui sont en progression géométrique décroissante, a montré fort pertinemment autant que je m'en puis souvenir, par la supposition même de la divisibilité à l'infini, combien Achille doit avancer plus vite que la tortue, ou en quel temps il la devrait joindre si elle avait pris les devants.

Et c'est en effet l'objet du Scholie de la proposition 87 du livre II, consacré aux progressions (pp. 101 & sq.), que nous donnons en traduction infra.

Un plan de l'ouvrage en donnera une petite idée :

Livre I : *De linearum potentiis* p. 1 à 50, 82 propositions.
Qui traite des proportions, propriétés des triangles et rectangles en proportion.

Livre II : *De progressionibus Geometricis* p. 51 à 166, 177 prop.
Qui traite des progressions géométriques.

Livre III : *De Circulis* p. 167 à 219, 94 prop.
Prolegomena ad sectiones conï p. 220 à 241, 18 prop.

Livre IV : *De Ellipsi* p. 242 à 356, 204 prop.

Livre V : *De Parabola* p. 357 à 527, 364 prop.

Livre VI : *De Hyperbola* p. 358 à 663, 249 prop.
Qui contient, en particulier, une proposition conduisant à la quadrature de l'hyperbole dans ses asymptotes (pprop. CIX & CXXX, données ci-dessous).

Spiralis & parabolae symbolizatio p. 664 à 703, 27 prop.
Livre non numéroté, qui traite de l'analogie entre spirale d'Archimède et parabole.

Livre VII : *De ductu plani in planum* p. 704 à 864, 247 prop.

Livre VIII : *De Proportionalitatibus Geometricis* p. 865 à 954, 162 prop.
Qui traite des proportions et de la similitude des grandeurs géométriques.

Livre IX : *De cylindro, cono, sphaera, sphaeroide, & utroque conoide parabolico & hyperbolico*, p. 955 à 1098, 205 prop.
Qui traite des onglets cylindriques de base circulaire ou elliptique, des sphères et ellipsoïdes, et des segments de conoïdes paraboliques ou hyperboliques.

(4) Leibniz : *Philos. Schriften*, Ed. Gerhardt, I, p.403, cité par L. Brunschvicg [5],

Livre X : *De ipsa circuli quadratura*, p. 1099 à 1225, 149 prop.
 Qui traite de la quadrature du cercle " proprement dite ", et de nouveau de celle de l'hyperbole.

Nous commenterons les extraits suivants, dont nous donnons une traduction qui resterait à parfaire :

Livre II, p.55, déf. III (terminus d'une progression).

Livre II, p.96, prop. LXXVIII et Scholie (Euclide X, 1).

Livre II, p.101, prop. LXXXVII et Scholie (réfutation de Zénon).

Livre V, p.462, prop. CCXXXI & CCXXXII (quadrature de la parabole).

Livre VI, p.586, prop. CIX, & p.597, prop. CXXX (relation exponentielle et inverse entre progressions des abscisses et des segments d'hyperbole).

Livre VII, p.739-40, prop. XLV et Scholie (application de la méthode de duction, utilisation explicite d'une infinité de parallélépipèdes, et usage - peut-être le premier dans l'histoire du calcul infinitésimal -, en contexte, du mot " exhaustion ").



Portrait de Grégoire de SAINT-VINCENT (1584-1667).

*Natus anno MDLXXXIV. Obiit anno MDCLXVII.
 Gregorius à Sancto Vincentio
 Brugensis, ex Soc. Jesu.
 Geometra subtilissimus.
 Tota geometria numerat quot Graecia, in uno
 Ut simul aspicias, aspice Gregorum.*

EXTRAITS DE L' OPUS GEOMETRICUM (1647)
DE GREGOIRE DE SAINT-VINCENT, ET COMMENTAIRES.

Le premier extrait que nous proposons à la lecture est issu du livre second, qui traite des progressions géométriques : ce deuxième livre est un peu l'exposé des méthodes et des outils qui vont servir aux quadratures envisagées, après le rappel obligé du livre un sur les figures élémentaires de la géométrie. Il est directement inspiré des méthodes de Stevin, exposées dès 1586 dans ses deux ouvrages, *De Beghinseten der Weeghconst Beschevren Devr Simon Stevin van Brugghe* et *De Beghinseten der Waterwichts Beschevren Devr Simon Stevin van Brugghe*, inspirés eux-mêmes d'Archimède bien sûr, mais aussi du *De centro gravitatis* de Commandin. Ces deux ouvrages de Stevin furent traduits en latin en 1608 par Willebrord Snellius, et en français en 1634 par Albert Girard. On y trouve, pour déterminer la position des centres de gravité ou de poussée sur les axes de certains solides, des raisonnements qui sont de véritables passages à la limite : Stevin s'y libère du double raisonnement par l'absurde d'Archimède, ce qui rend la démarche du syracusain plus expéditive, sinon plus rigoureuse [19 & 20].

C'est le même esprit qui anime la définition III du Livre II de Grégoire de Saint-Vincent.

Définition III

Liber secundus : De progressionibus geometricis
(Livre second : Des progressions géométriques), *Argumentum*, (page 55).

Le terme d'une progression est la fin des séries, à laquelle aucune progression ne peut aboutir, s'il nous est permis de la poursuivre à l'infini ; mais à laquelle il est possible d'accéder d'aussi près que de n'importe quel intervalle donné.

Une progression ne peut donc aboutir puisqu'il y faudrait une infinité d'étapes, mais elle a un terme auquel on peut accéder d'aussi près que l'on veut. C'est ce qui s'appelle se frayer un accès, sans autre forme de procès par l'absurde. Grégoire de Saint-Vincent introduit donc l'infini actuel, preuve qu'il a sans doute suivi les récentes discussions scholastiques sur la nature du continu et sur le résultat d'une division infinie. Malgré tout, une explication assez longue de cette définition lui paraît nécessaire, dans laquelle il exprime cette idée dont nous donnons l'interprétation suivante : si l'on admet qu'une suite de grandeurs en progression géométrique décroissante conduit à une grandeur qui peut être rendue aussi petite qu'on le souhaite (on divise AB en un point C tel que $CB = kAB$, avec $0 < k < 1$, puis CB en un point D tel que $DB = kCB$, &c...), alors la somme des différences de ces grandeurs, série de grandeurs qui sont en progression géométrique de même rapport (i.e $AC = AB - CB = (1-k)AB$, $CD = CB - DB = k(1-k)AB$, &c...), s'approchera d'autant qu'on veut de la grandeur primitive (AB) ; B étant l'extrémité commune des grandeurs primitives, le terme de la série est donc bien réel, puisqu'il est matérialisé actuellement : ce n'est pas seulement simple façon de parler :

Nam de re nobis est hic quaestio, non de verbo.

[Car pour nous cette question est ici [affaire] de chose et non de mot].

Voyons maintenant une proposition qui nous a un air bien connu, puisqu'il s'agit d'une version de la première proposition du Livre X des *Eléments* d'Euclide.

Proposition LXXVIII & Scholie*Liber secundus, Pars secunda, (page 96).*

D'une grandeur AK, soit enlevée une partie quelconque AB ; et du reste BK soit enlevé BC, en suivant cette loi que : de même que AB est à BK, de même BC sera à CK. Je dis que si cette ablation se perpétue toujours, il restera de AK une quantité plus petite que toute donnée. Il s'agit de la première [proposition] universelle du dixième [élément d'Euclide].

Le lecteur notera que l'on enlève une partie quelconque, ce qui n'est déjà pas la même chose que le *plus que la moitié* d'Euclide dont nous rappelons ici l'énoncé dans la traduction assez libre de Kayas [2] :

X,1. Etant données deux grandeurs inégales, si de la plus grande on retranche plus que sa moitié, puis du reste ainsi obtenu on retranche encore plus que sa moitié et si l'on continue toujours ainsi, nous aboutirons finalement à une grandeur qui est inférieure à la plus petite des grandeurs données.

Outre l'extension à toute progression de raison contractante, le jésuite met en place sa notion de somme d'une série par passage à la limite implicite, dans le scholie qui fait immédiatement suite à cette proposition :

Scholie

Note : lorsqu'il est dit dans la proposition que si cette ablation se perpétue toujours, je dis qu'il restera de AK une quantité moindre que toute donnée, le sens de cette proposition n'est pas qu'il reste de AK une quantité moindre que toute donnée, après que l'ablation ait été continuée à son terme à l'infini ; ou qu'après toute la série achevée, il reste encore une quantité moindre que toute donnée ; mais ayant enlevé des termes de AK, dans le rapport qui a été dit au-dessus, à un certain moment enfin des retranchements, la part résiduelle de AK sera plus petite qu'une quantité donnée : que ceci soit dit à toutes fins utiles.

A bon entendre salut, et qu'on ne revienne pas là-dessus. Nous voilà, en somme, nantis d'une nouvelle notion commune avec laquelle chacun s'accorde, sans se laisser influencer par un Eléate attardé.

Voyons quel usage en fait notre jésuite. Et tout d'abord, un exemple d'application (dont les données numériques n'ont rien d'innocent), en bon pédagogue qu'il semble avoir été. Toujours dans le livre second, voici la :

Proposition LXXXVII & Scholie*Liber secundus, Pars secunda, (page 101).*

Enfin [après d'autres exemples], soit donnée une proportion quadruple de AB à BC. Je dis que la série entière sera sesquiterce [i-e une fois et un tiers de fois, soit les 4/3] de la première grandeur.

DEFINITIO TERTIA.

Terminus progressionis est serici finis, ad quem nulla progressio pertinet, licet in infinitum continuetur; sed quouis intervallo dato propius ad eum accedere poterit.

Explicatio.

A C D E F G B

Ponatur recta AB, diuisa in CDEFG. vt continuent eandem rationem A B, CB, DB, EB, FB, GB. Cùm sit eadem ratio AC ad CD, & CD ad DE, atque ita deinceps, cum ea, quæ reperitur inter lineas AB, CB, DB, &c. similis quoque erit eiusdem rationis progressio AC ad CD, cùm progressionem AB, ad CB. terminus autem rationis AC ad CD, dicitur punctum B, siue illum intrinsecum velis, siue extrinsecum, per me licet; nam de re nobis est hæc questio, non de verbo: ad quod punctum nulla progressio pertinere valet, cùm omnis progressio interminata pars serici existat: nihilominus tamen, poterit ad illum progressio per continuationem magis ac magis accedere, ita vt vicinior vicinior terminus progressionis interminatæ existat ipsi termino serici, quàm sit distantia quæcunque propòsita.

PROPOSITIO LXXVIII.

A B C D E K
L M N O P R

A Magnitudine AK auferatur quouis pars AB & à residuo BK auferatur BC, ea lege vt sicut est AB ad BK, ita sit BC ad CK. Dico si hæc ablatio semper fiat, relinqui ex AK quantitatem datam minorem. est *vniversalis prima decimi.*

Scholion.

Nota: dum in propositione dicitur, si hæc ablatio semper fiat, dico relinqui ex AK quantitatem datam minorem: sensum propositionis non esse, relinqui ex AK quantitatem datam minorem, post ablationem terminorum in infinitum continuatam; siue post totam seriem absolutam, relinqui adhuc quantitatem datam minorem; sed auferendo terminos ex AK, in ratione ante dicta, aliquando tot auferendos, vt residua pars solius AK, minor sit quantitate datæ: quod in gratiam quorundam dictum sit.

PROPOSITIO LXXXVII.

A I B CDE K

Denique proportio data sit quadrupla AB ad BC. Dico totam seriem esse sesquiterciam primæ magnitudinis: siue eam habere rationem ad primam magnitudinem, quam quatuor ad tria.

Cette proposition est suivie d'une longue digression sur le paradoxe de Zénon (Achille et la tortue), sous forme de scholie dont voici un passage (p.102) :

Scholie

[...] *Le discours captieux de Zénon engendre des désagréments en ne considérant pas de différence, ainsi que cela a été relevé ici, entre les deux progressions qu'il imagine dans le double cours de son argumentation ; l'une, en effet, est une progression par parties égales [arithmétique] ; l'autre par parties proportionnelles [géométrique] ; celle-ci, dans l'un des côtés du discours, est supposée se faire par parties inégales, ou par pas égaux : comme le premier pas sera au second, tel ne différera pas le troisième, qui sera à deux pas d'Achille, par exemple...*

Ces préliminaires techniques sont conçus comme préparatoires aux opérations d'exhaustion proprement dites, que nous allons observer sur un exemple bien connu : la quadrature de la parabole. Pour permettre la comparaison avec la démonstration géométrique d'Archimède (i-e celle, synthétique, qu'il met en oeuvre dans la seconde partie de *La Quadrature de la Parabole*, et non pas celles, analytiques, qui font appel à des considérations de statique, et qui sont incluses, l'une sous le même titre, et l'autre dans *La Méthode relative aux théorèmes mécaniques*), nous en rappelons les énoncés essentiels et la démonstration finale (où se situe la double réduction à l'absurde), dans la traduction de P. Ver Eecke, avec un commentaire qui permettra d'en comprendre la spécificité en regard de la démarche de Grégoire de Saint-Vincent. Le lecteur bien familiarisé avec le texte et la méthode d'Archimède pourra se dispenser de cette relecture et passer son chemin.

Archimède à Dosithée, prospérité !

[...] *Nous démontrons, en effet, que tout segment délimité par une droite et par une parabole dépasse d'un tiers le triangle ayant même base et même hauteur que le segment, en admettant d'ailleurs pour la démonstration ce lemme : que l'excès dont la plus grande de deux aires inégales dépasse la plus petite peut être ajouté à lui-même jusqu'à dépasser toute aire finie donnée. [...]*

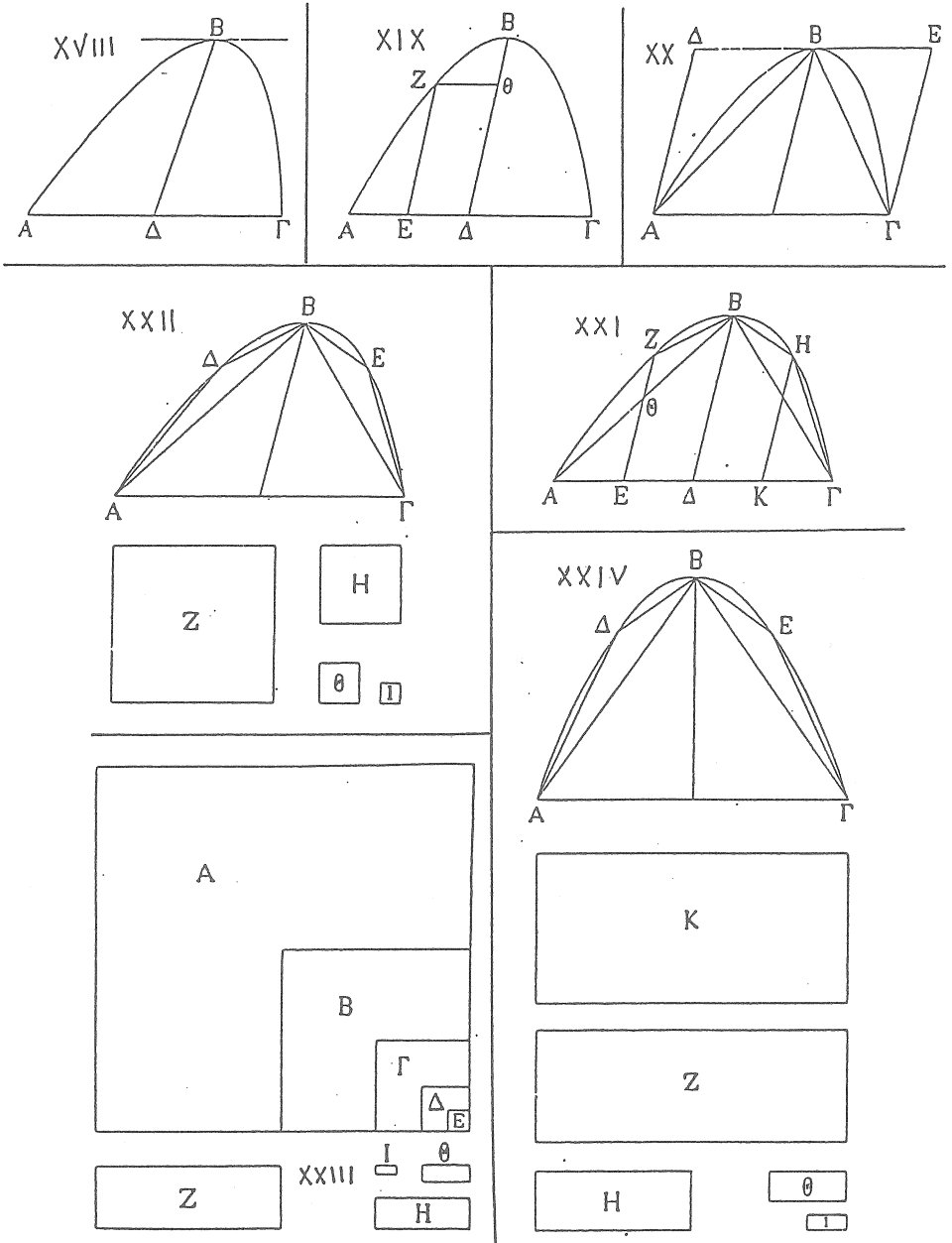
[Définition intercalaire]

J'appelle base, la droite des segments délimités par une droite et par une ligne courbe ; hauteur, la plus grande perpendiculaire menée de la ligne courbe sur la base du segment, et sommet, le point d'où est menée la plus grande perpendiculaire.

Propositions XVIII à XXIII

XVIII. *Si, dans un segment délimité par une droite et par une parabole, l'on mène, du milieu de la base, une parallèle au diamètre, le sommet du segment sera le point où la parallèle au diamètre coupe la section de cône.*

XIX. *Dans un segment délimité par une droite et par une parabole, la droite menée [parallèlement à un diamètre ou à l'axe de la parabole] du milieu de la base a comme longueur les quatre tiers de la droite menée [parallèlement à un diamètre] du milieu de la moitié de la base.*



Figures de La Quadrature de la Parabole.

XX. Si, dans un segment délimité par une droite et par une parabole, l'on inscrit un triangle ayant même base et même hauteur que le segment, le triangle inscrit sera plus grand que la moitié du segment.

Corollaire. Cela étant démontré, il est évident que, dans un pareil segment, il est possible d'inscrire un polygone tel que les segments restants soient plus petits que toute aire donnée. En effet, il est clair que, si l'on retranche continuellement ce qui, en vertu de cette proposition [XX], est plus grand que leur moitié, les segments restants, devenant continuellement plus petits, deviendront moindres que toute aire donnée [Euclide, X,1].

XXI. Si, dans un segment délimité par une droite et une parabole, l'on inscrit un triangle ayant même base et même hauteur que le segment, et si, dans les segments restants, l'on inscrit d'autres triangles ayant même base et même hauteur que ces segments, le triangle inscrit dans le segment entier sera octuple de chacun des triangles inscrits dans les segments qui restent à l'entour.

XXII. Etant donné un segment délimité par une droite et par une parabole, si des aires en nombre quelconque sont établies en une série dont la raison est quatre [i-e en progression géométrique de raison inverse, un quart, comme l'indique le contexte de la preuve], la plus grande aire étant équivalente au triangle ayant même base et même hauteur que le segment, l'ensemble de toutes ces aires sera plus petit que le segment.

XXIII. Lorsque certaines grandeurs sont établies dans une série dont la raison est quatre, la somme de toutes ces grandeurs, augmentée du tiers de la plus petite, vaudra les quatre tiers de la plus grande.

XXIV [et dernière]. Tout segment délimité par une droite et par une parabole équivaut aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment.

[Démonstration]. En effet, soit $AABEF$ un segment délimité par une droite et par une parabole ; soit ABF un triangle ayant même base et même hauteur que le segment, et soit une aire K équivalente aux quatre tiers du triangle ABF . Il faut démontrer que cette aire est équivalente au segment $AABEF$. En effet, si elle n'est pas équivalente, elle est plus grande ou plus petite.

Que le segment $AABEF$ soit d'abord plus grand que l'aire K , s'il se peut. Dès lors, inscrivons les triangles AAB , BEF , comme il a été dit [XXI], et, dans les segments qui restent alentour, inscrivons d'autres triangles ayant même base et même hauteur que ces segments ; enfin, inscrivons, dans les segments successivement obtenus, deux triangles ayant même base et même hauteur que les segments. Il en résulte que les segments abandonnés seront plus petits que l'excédent dont le segment $AABEF$ dépasse l'aire K [en vertu du corollaire de XX] ; en sorte que le polygone inscrit sera plus grand [en aire] que l'aire K ; ce qui est impossible. En effet, puisque certaines aires sont disposées dans une série dont la raison est quatre, que le triangle ABF est d'abord quadruple des triangles AAB , BEF [XXI], qu'ensuite ces derniers sont quadruples des triangles inscrits dans les segments suivants, et ainsi continuellement, il est évident que l'ensemble de ces aires est plus petit que les quatre tiers de la plus grande [XXIII]. Or, l'aire K vaut les quatre tiers de la plus grande aire ; par conséquent, le segment $AABEF$ n'est pas plus grand que l'aire K .

Au reste, qu'il soit plus petit, s'il se peut. Dès lors, disposons une aire Z équivalente au triangle ABF , une aire H équivalente au quart de l'aire Z , et, de même, une aire θ équivalente au quart de l'aire H ; et disposons ainsi successivement des aires jusqu'à l'obtention d'une dernière aire plus petite que l'excédent dont l'aire K dépasse le segment. Soit I cette plus petite aire. Donc, l'ensemble des aires Z , H , θ , I , augmenté du tiers de l'aire I , vaut les quatre tiers de l'aire Z [XXIII].

Or, l'aire K vaut aussi les quatre tiers de l'aire Z ; par conséquent, l'aire K équivaut à l'ensemble des aires Z, H, θ, I , augmenté de la troisième partie de l'aire I . Dès lors, puisque l'aire K excède l'ensemble des aires Z, H, θ, I d'une aire plus petite que l'aire I , et qu'elle excède le segment d'une aire plus grande que l'aire I , il est évident que l'ensemble des aires Z, H, θ, I est plus grand que le segment ; ce qui est impossible. En effet, il a été démontré que, lorsque des aires en nombre quelconque sont établies dans une série dont la raison est quatre, et que la plus grande est équivalente au triangle inscrit dans le segment, l'ensemble de ces aires sera plus petit que le segment [XXII]. En conséquence, le segment $A\Delta BEF$ n'est pas plus petit que l'aire K . Or, il a été démontré qu'il n'est pas plus grand ; donc, il est équivalent à l'aire K . Or, l'aire K vaut les quatre tiers du triangle ABF ; donc, le segment $A\Delta BEF$ vaut aussi les quatre tiers du triangle ABF .

Commentaire de La Quadrature de la Parabole d'Archimède

Archimède, comme ses contemporains, appelle " segment " de parabole l'étendue plane qui se trouve limitée par un arc de la parabole, connue comme une section conique, et la corde qui sous-tend cet arc. Le problème est de quarrer un tel segment de parabole, c'est-à-dire de trouver une figure rectiligne de même aire que ce " segment ", ou d'aire qui soit dans un rapport rationnel connu avec celle que l'on cherche à rapporter à un carré. On sait en effet quarrer toute figure rectiligne donnée, c'est-à-dire trouver un carré de même aire qu'elle, grâce à la méthode dite " d'application des aires ". La proposition XXIV de *La Quadrature de la Parabole* donne pour rapport $4/3$ entre l'aire d'un segment de parabole quelconque et celle du triangle ayant mêmes base et hauteur que le segment, c'est-à-dire : aire (segm ABF) = $4/3$ aire (tri ABF).

Dans *La Quadrature de la Parabole*, Archimède donne d'abord une démonstration " mécanique ", en opérant par pesée et mise en équilibre d'aires pesant aux deux extrémités d'un levier (propositions VI à XVII, non données ici). C'est sans doute cette démonstration qui nous livre son heuristique car la preuve géométrique, de type synthétique, suppose le résultat connu.

La corde $A\Gamma$ est la base du segment. Sa hauteur est la distance de son sommet à la base. Ce sommet B est obtenu en menant par Δ , milieu de $A\Gamma$, une parallèle au diamètre, c'est-à-dire une parallèle à l'axe de la parabole (voire même l'axe de la parabole lui-même, ce qui est le parti-pris choisi pour la figure de la proposition XXIV), qui coupe alors l'arc $A\Gamma$ au point B , en lequel la tangente sera parallèle à la corde : c'est une propriété, bien connue alors, de la parabole, qu'Archimède énonce dans la proposition I de *La Quadrature de la Parabole*, sans démonstration : celle-ci figure dans un traité ultérieur, *Les Coniques* d'Apollonius de Perge, qui, tout comme *Les Eléments*, accumule et ordonne bien des résultats établis avant d'innover.

Il prend seulement la peine de montrer (proposition XVIII), que le point B étant le sommet de l'arc, sa distance à la corde est bien la distance maximale d'un point de l'arc à la base. Dans la figure de la proposition XXIV, le pied de cette hauteur est confondu avec le milieu de $A\Gamma$, puisque le segment a été choisi, dans le dessin et sans nuire à la généralité du résultat, symétrique par rapport à l'axe de la parabole ; mais lorsque l'on réitère le processus à partir des bases AB et $B\Gamma$, les parallèles à l'axe passant par les milieux de ces bases, déterminent sur les arcs AB et $B\Gamma$ des sommets Δ et E , pour lesquels la propriété reste vraie bien que les triangles inscrits ne soient plus isocèles.

La proposition XIX établit que dans tout arc de parabole, la ligne BA a pour longueur les $4/3$ de la ligne ZE qui lui est parallèle et passe par le milieu E de AD . De ce fait dans la figure de la proposition XXIV, Δ et E sont situés en hauteur aux $3/4$ de celle de B au-dessus de AG , et il en ira de même dans le segment AAB et les suivants obtenus par itération, pour lesquels il ne s'agira plus de hauteurs mais de lignes parallèles à l'axe, comme les lignes ZE et HK de la figure de la proposition XXI, qui ont pour longueur les $3/4$ de BA .

Cela posé, la proposition XX autorise à utiliser l'argument de la proposition 1 du Livre X des *Eléments* d'Euclide, réénoncée ici dans le corollaire, puisque le triangle inscrit dans un segment de parabole (tri $AB\Gamma$ dans segm $AB\Gamma$) a une aire qui est plus que la moitié de celle du segment, puisque l'aire du triangle est la moitié de l'aire d'un parallélogramme qui contient strictement le segment :

$$\text{aire (tri } AB\Gamma) < \text{aire (segm } AB\Gamma) < \text{aire (para } A\Gamma E\Delta) = 2 \text{ fois l'aire (tri } AB\Gamma).$$

La proposition XXI établit que le triangle $AB\Gamma$ a une aire octuple de celle de chacun des triangles AZB et $BH\Gamma$ (qui ont des aires égales, par " application "), et donc quadruple de la somme des deux. Ce rapport de 4 à 1 se répète donc à chaque fois que l'on construit deux nouveaux triangles sur les côtés autres que la base d'un triangle inscrit dans un arc de parabole par le procédé de la proposition XVIII (c'est-à-dire de façon que Z soit le sommet de l'arc AB par exemple).

Cette proposition est démontrée par Archimède du fait que EZ vaut les $3/4$ de ΔB , et que $E\theta$ vaut la moitié de ΔB et le double de θZ , car θ est le milieu de AB . Dès lors :

$$\text{aire (tri } ABA) = 2 \text{ aires (tri } ABE) = 4 \text{ aires (tri } A\theta E) = 8 \text{ aires (tri } Z\theta B) = 4 \text{ aires (tri } ABZ),$$

car BE est la médiane de ABA , $E\theta$ est celle de ABE , et $Z\theta$ celle de ABZ ; enfin, pour la même raison :

$$\text{aire (tri } AB\Gamma) = 2 \text{ aires (tri } ABA) = 8 \text{ aires (tri } ABZ).$$

La proposition XXII établit que la somme d'un nombre quelconque d'aires, quadruple l'une de la suivante, n'excède pas l'aire du segment de parabole si la plus grande vaut celle du triangle inscrit $AB\Gamma$. En effet, si l'aire Z vaut l'aire du triangle $AB\Gamma$, l'aire H , son quart, vaudra la somme des aires des triangles $A\Delta B$ et BEG , d'après la proposition XXI, l'aire θ , quart de H , vaudra la somme des aires des quatre triangles construits sur les bases $A\Delta$, ΔB , BE et $E\Gamma$, et ainsi de suite. La somme des aires Z , H etc... sera l'aire d'un polygone inscrit dans l'arc de parabole (2^n côtés par duplication s'il y a n aires, + la base $A\Gamma$), aire inférieure à celle du segment de parabole.

Enfin la proposition XXIII établit une formule de sommation finie avec appréciation du reste, plus précisément et en termes algébriques, A étant une grandeur donnée :

$$A + A/4 + A/16 + A/64 + \dots + A/(4^n) + (1/3)(A/4^n) = 4A/3.$$

Et l'on a bien, d'après la formule de sommation des progressions géométriques :

$$1 + 1/4 + 1/16 + \dots + 1/4^n = (1 - 1/4^{n+1})/(1 - 1/4) = (4/3)(1 - 1/4^{n+1}) = 4/3 - (1/3)(1/4^n).$$

Tout est alors en place pour la démonstration que Grégoire de Saint-Vincent, et avec lui depuis, la communauté mathématique, appellent " par exhaustion " de la proposition XXIV qui donne le rapport $4/3$ de l'aire du segment de parabole à son triangle inscrit maximal. Archimède procède par double réduction à l'absurde, en envisageant trois cas. Si K est une aire égale aux $4/3$ de celle du triangle $AB\Gamma$, de trois choses l'une : l'aire du segment est supérieure à K , ou inférieure, ou, si tels ne sont pas ces deux cas, égale à K .

PROPOSITIO CCXXVII.

Datæ parabolæ terminatæ maximum inscribere triangulum.

PROPOSITIO CCXXVIII.

Parabolam ABC intersectent duæ quævis parallelæ AB, DC : iunctisque BC, AD, segmento CB triangulum inscribatur maximum AEC, ponaturque EF, æquidistans AB, & iungantur AFD;

Dico AFD triangulum, illorum esse maximum quæ AFD segmento inscribi possunt. & contra si triangula AFD, BEC fuerint maxima, dico FE æquidistare AB.

PROPOSITIO CCXXX.

Sit ad ABC parabolæ diametrum AD, posita ordinatim CD; iuncta quoque AC diuisa in F bifariam, ponatur diameter BF iunganturque AB, CB.

Dico CAD triangulum quadruplum esse trianguli ABC.

PROPOSITIO CCXXXI.

Esto ABC parabolæ inscriptum triangulum maximum ABC : inscribantur autem & residuis segmentis triangula maxima : & hoc semper fiat.

Dico toti triangulorum seriei æqualem esse parabolam ABC.

Demonstratio.

Si enim non sit æqualis, maior igitur est vel minor, sit primum parabola maior tota triangulorum seriei, & excessus ponatur quantitas G, quoniam igitur triangulum ABC maximum est illorum, quæ parabolæ inscribi possunt, maius quoque illud erit dimidio parabolæ cui inscriptum est. similitur triangula duo AEB, BFC maiora sunt dimidijs segmentorum quibus inscribuntur, quod cum sine termino continuari possit, relinquetur ex parabola quantitas, data

tâ minor, ergo & minor quantitate G, ergo illa excessus non est, quo parabola triangulorum seriei excedit : ergo parabola maior non est tota triangulorum seriei.

Quod verò neque minor illa sit, manifestum est : cum triangulorum seriei, ex hypothesis semper intra parabolam continetur, ac proinde seriei illa quantumcumque aucta, plurius triangulorum additione, semper tamen pars maneat parabolæ : cum igitur seriei triangulorum, nec maior, nec minor sit parabolæ, æqualis vt sit necesse est.

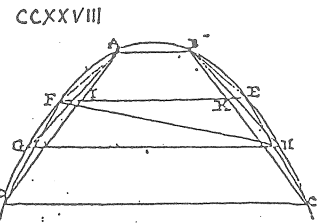
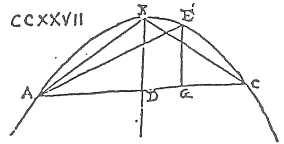
PROPOSITIO CCXXXII.

Eadem positâ figurâ:

Dico ABC parabolam ad triangulum maximum ABC eam habere proportionem quam quatuor ad tria.

Demonstratio.

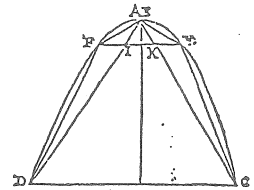
Triangulum d maximum ABC, quadruplum est triangulorum maximorum AEB, BFC quæ residuis inscribuntur segmentis : & illa rursus simul sumpta, quadrupla triangulorum residuis segmentis inscriptorum, atque ita sine termino procedendo, cum ablata semper quadrupla sint triangulorum, quæ residuis inscribuntur segmentis, tota triangulorum seriei, id est parabola ABC, est ad triangulum ABC, primum seriei terminum, vt quatuor ad tria. Quod fuit demonstrandum.



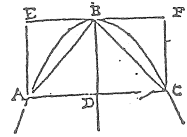
PROPOSITIO CCXXXIX.

Esto ABC parabolæ inscriptum triangulum maximum ABC.

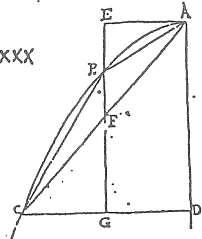
Dico illud maius esse dimidio parabolæ ABC.



CCXXXIX



CCXXX



b 117, l. 10.
7 in.
c 1 d. 10 in.

d Ex 10.
l. 10 in.

b 117, l. 10.
7 in.
b 17, De
progressione
l. 10 in.

Dans la première hypothèse (aire du segment supérieure à K), on sait que l'on peut, en un nombre fini d'étapes, construire un polygone par duplication des triangles, tel que l'aire des segments restant entre ce polygone et le segment soit plus petite que l'excédent ($\text{segm} - K$). De sorte que ce polygone aurait une aire supérieure à K , ce qui ne se peut car l'aire du polygone est une somme d'aires en raison quadruple l'une de sa suivante, somme qui est inférieure aux $4/3$ de la plus grande (le triangle inscrit), ce que vaut justement K .

Dans la seconde (aire du segment inférieure à K), on construit une suite décroissante d'aires : Z qui vaut l'aire du triangle inscrit, H qui en est le quart, et ainsi de suite jusqu'à I , que l'on peut trouver au bout d'un nombre fini d'étapes, et qui sera inférieure à l'excédent ($K - \text{segm}$). Comme $K = 4Z/3$, c'est que K est la somme des aires $Z, H, \text{etc.}$, I augmentée du tiers de I . K excède donc la somme Z, \dots, I d'une quantité moindre que I , donc moindre que son excédent sur le segment : c'est donc que cette somme excède le segment, ce qui est impossible, puisqu'une telle somme est plus petite que le segment d'après la proposition XXII. N'étant ni plus grand ni plus petit que K , le segment vaut K .

On a donc là une démonstration non mécanique de la propriété énoncée ; mais il est clair qu'une telle " preuve " suppose la connaissance du résultat (le rapport $4/3$ et non quelqu'autre). Exemple de ce qu'est la " synthèse " en géométrie, *La Quadrature de la Parabole* nous livre aussi l' " analyse " dont Descartes déplore que les anciens l'aient dissimulée. Cette méthode de découverte, cette heuristique, semble être ici l'usage de la métaphore mécaniste de la balance, mise en oeuvre aussi bien dans *La Quadrature de la Parabole* que dans la *Méthode*.

La quadrature de Grégoire de Saint-Vincent : textes et commentaires

La quadrature de la parabole par Grégoire de Saint-Vincent figure au Livre cinq. L'auteur commence par quelques propositions géométriques analogues à celles d'Archimède, concernant les segments de parabole. La proposition CCXXVII " construit et démontre " un triangle maximal inscrit dans un segment de parabole (par une parallèle au diamètre passant par le milieu de la base). La suivante montre que : si un trapèze inscrit dans une parabole, de base commune avec un segment de cette parabole, découpe deux segments résiduels latéraux, et si un point de l'un de ces segments est le sommet de son triangle maximal, le sommet du triangle maximal dans l'autre segment résiduel se trouvera sur une parallèle à la base ; la démonstration, ajoute Grégoire de Saint-Vincent, reste valable lorsque le trapèze devient triangle maximal, sa petite base devenant la tangente au sommet, ce qui relève encore du passage à la limite implicite. La proposition CCXXIX énonce que le triangle maximal est d'aire plus grande que la moitié de l'aire du segment de parabole. Enfin la proposition CCXXX nous dit qu'un demi triangle maximal vaut, en aire, quatre fois celle du triangle résiduel maximal construit sur le côté du demi triangle principal qui fait corde. Viennent ensuite les propositions CCXXXI et CCXXXII qui sont censées abréger les propositions XXII à XXIV d'Archimède.

Propositions CCXXXI & CCXXXII

Liber quintus : De Parabola

(Livre cinquième : De la Parabole), *Fars quinta* (Cinquième Partie, page 462).

CCXXXI. *Soit un triangle maximal ABC inscrit dans un segment de parabole ABC. Soient inscrits d'autre part les triangles maximaux des segments résiduels ; et qu'il en soit toujours ainsi.*

Je dis que la série de tous les triangles est égale au segment de parabole ABC.

Démonstration.

Si, en effet, elle n'est pas égale, alors elle est plus grande ou elle est plus petite. Tout d'abord, que le segment de parabole soit plus grand que la série de tous les triangles, et que l'excès de l'un sur l'autre soit posé égal à la quantité G. D'après le fait que le triangle ABC est maximal, parmi ceux qui peuvent être inscrits dans le segment de parabole, ce triangle sera donc plus grand que le demi-segment de parabole dans lequel il est inscrit [en marge : CCXXIX]. Or ceci peut être poursuivi sans fin ; il restera du segment de parabole des quantités moindres que toute donnée donc, et plus petites que la quantité G [en marge : Euclide, X,1] ; donc il n'y a pas d'excédent par lequel le segment de parabole excède la série des triangles ; et le segment de parabole n'est pas plus grand que la série des triangles.

Qu'il soit vrai que ce segment ne soit pas plus petit que la série est manifeste. Comme la série de triangles est, par hypothèse, toujours prolongée à l'intérieur du segment de parabole, par conséquent la série, quelque augmentée qu'elle soit en grandeur, somme de plusieurs triangles, sera toujours et en fin de compte en défaut du segment de parabole. Donc, comme la série des triangles n'est, ni plus grande, ni plus petite que le segment de parabole, elle lui est nécessairement égale.

CCXXXII. Etant donnée la même figure : Je dis que le segment de parabole ABC est au triangle maximal ABC dans le même rapport que quatre à trois.

Démonstration.

Le triangle maximal ABC est quadruple des triangles maximaux inscrits dans les segments résiduels ; et ceux-là, derechef, pris ensemble, sont quadruple des triangles inscrits dans les segments résiduels, et procédant ainsi sans fin, comme les parties enlevées sont toujours quadruples des triangles qui s'inscrivent dans les segments résiduels, la série entière des triangles, c'est-à-dire le segment de parabole ABC, est au triangle ABC, premier terme de la série, comme quatre est à trois. Ce qu'il fallait démontrer.

Commentaire des propositions V - CCXXXI & V - CCXXXII

L'oeuvre du géomètre syracusain, dont s'inspire à l'évidence l'extrait précédent, est importante à un triple titre, pour nous comme pour un mathématicien du XVII^e siècle :

a) c'est le premier exemple connu de quadrature exacte d'un segment de ligne courbe (la quadrature du cercle n'est donnée qu'en valeur approchée par ce même Archimède), preuve que certains segments de lignes courbes ont une aire commensurable à celle d'une certaine figure rectiligne (ici un triangle) ;

b) c'est le premier exemple connu d'une quadrature livrant des indications sur le mode de découverte du rapport établi (ici 4/3) avec une aire rectiligne, et donc donnant un aperçu sur " l'analyse " des anciens qui ne nous ont laissé, en général, que des oeuvres de synthèse ;

c) c'est enfin l'un des premiers exemples d'utilisation de la méthode que nous appelons d'exhaustion depuis Grégoire de Saint-Vincent.

Rappelons que la géométrie grecque est finitiste, à l'image des conceptions cosmologiques qui ont dominé le monde grec dont l'univers est clos. D'où la méthode de descente finie qui n'implique aucunement l'épuisement de la surface à quarrer par des figures rectilignes emboîtées. Certes, la mise en oeuvre du processus de descente finie sous un seuil donné peut paraître lourde, mais elle évite le recours à un processus infini, analogue à notre moderne passage à la limite (sans l'appareil propre à le rendre rigoureux), dont on savait assez à quels paradoxes, et donc à quelles critiques ils pouvaient conduire (cf. Zénon et l'école des Eléates).

La Quadrature de la Parabole d'Archimède est donc, tant par les méthodes que par le résultat, un texte fondateur du calcul infinitésimal. Ce sont ces méthodes, essentiellement utilisées par Archimède, que vont redécouvrir les géomètres du début du XVII^{ème} siècle, et Grégoire de Saint-Vincent l'un des premiers. Mais ce qui caractérise ce réemploi, c'est la profonde mutation qu'il subit, avec Stevin et son émule belge d'abord, puis avec les écoles italienne et française.

Dans cet exemple de quadrature, après s'être autorisé l'extension à l'infini du polygone inscrit pour épuiser la surface du segment de parabole (d'où la dénomination d'exhaustion), le jésuite opère une double réduction à l'absurde, dont l'intérêt se trouve considérablement affaibli en regard de la méthode archimédienne : perdant sa nécessité (le non-recours à un processus infini) la méthode y perd aussi en rigueur, en raison des implicites (topologiques par exemple) qu'elle s'autorise. Elle y gagne en rapidité d'exposition et sans doute en clarté, au sens où elle facilite l'acquisition d'une certaine virtuosité technique : convaincre ou démontrer ? transmettre ou former ? Elle y gagne enfin une certaine émancipation ; de celles qui permettent une rupture, puis une avancée théorique, même au prix d'un recul sur le plan de la rigueur.

Qu'elle soit la marque d'une incompréhension du souci grec de rigueur, dans un monde en proie à toutes les audaces conceptuelles et en passe de se défaire des arguments d'autorité (Descartes, Galilée), ou qu'elle soit le signe d'une volonté de s'affranchir d'une méthode difficile qui, en voulant emporter l'adhésion par une argumentation sans faille, éloigne le lecteur d'une conviction obtenue par le recours à l'intuition, la démarche de Grégoire de Saint-Vincent est toute différente : il n'hésite pas à parler d'une *série de tous les triangles*, série infinie de figures dont on saurait additionner les aires et dont on saurait définir l'aire totale pour la comparer à l'aire d'une figure fermée donnée ; il va jusqu'à parler d'un processus de duplication de figures inscrites qui *peut être poursuivi sans fin* et qui conduit à des *quantités moindres que toute donnée*, en indiquant, certes, l'argument d'autorité (Euclide, X, 1), mais sans insister sur l'aspect finitiste de cet argument, qui fait son intérêt, dans la mesure où on s'apprête à passer à la limite dans le deuxième temps de la démonstration ; il n'hésite pas plus à parler d'une *série toujours prolongée à l'intérieur du segment de parabole*, dont l'aire peut être augmentée de façon quelconque, et qui sera *toujours et en fin de compte en défaut du segment de parabole*. Autant d'affirmations qui ne sont pas d'évidence pour un Euclide ou un Archimède.

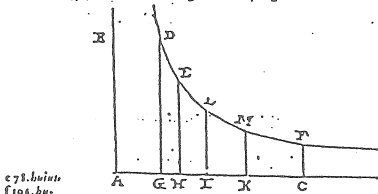
PROPOSITIO CIX.

Sint AB, AC asymptoti hyperbolæ DEF: diuisaque AC, ut AG, SAH, AI, AK, AC continuæ sint proportionales, ponantur GD, EH, LI, MK, FC, ipsi AB æquidistantes.

Dico HD, IE, KL, CM segmenta esse æqualia.

Demonstratio.

Quoniam AG, AH, AI, &c. proportionales sunt, DG, EH, LI, &c. eandem quoque inter se continuant rationem; unde DH, EI segmenta sunt æqualia. Similiter cum EH, LI, MK, FC in eadem sint proportionem, & æqualia quoque sunt segmenta EI, LK, MC. Constat igitur veritas propositionis.



ex 73. huius
104. huius
114.

tercum EH, LI, MK, FC in eadem sint proportionem, & æqualia quoque sunt segmenta EI, LK, MC. Constat igitur veritas propositionis.

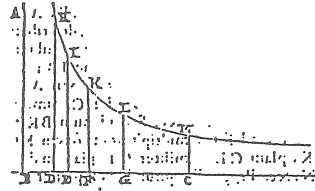
PROPOSITIO CXXX.

Sint AB, BC asymptoti hyperbolæ, & ponantur parallelæ asymptoto DH, EI, FK, GL, CM, auferentes segmenta æqualia HE, IF, KG, LC.

Dico lineas HD, IE, KF, LG, MC esse in continua analogia.

Demonstratio.

Ratio enim DH ad IE, toties multiplicat rationem IE ad MC, quoties superfacies HD est continetur in superficie IC: sed superficies HE est equalis partibus in quadrato HI. Ceterum ratio HD ad MC quadruplicata est ratione HD ad IE. Similiter ratio IE ad MC, ostenditur esse triplicata rationis KF ad KG: igitur ratio HD ad IE, est eadem cum ratione IE ad KF, eodem modo demonstratur, rationem IE ad KF esse eandem cum ratione KF ad LG, & LG ad MC. Igitur eodem modo est eadem rationem lineæ HD: IE, KF: LG, MC. Quod fuit demonstrandum.



PROPOSITIO XLV.

Data sint tria plana BAC, BEC, BDC qualiacunque, communem habentia altitudinē BC: positaq; BD. normali ad BC, ducantur illi in finitæ, (hoc est quotcunque) æquidistantes AKED, quæ occurrant communi lineæ in punctis KK, planorum verò perimetris in punctis AA, EE, DD.

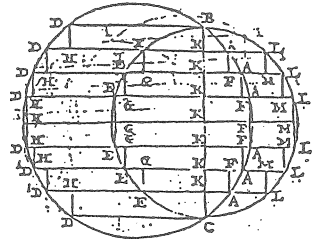
Si AK, KE, KD, sint continuè proportionales, siue, (quod idem est,) si quadrata KE, æqualia sint rectangulis AKD:

Dico planum BAC ductum in planum BDC, æquari plano BEC ducto in se.

Cum igitur in propositionibus proximè præcedentibus demonstratum sit, parallelæ bipeda illa ita posse multiplicari ut corpora ipsa quibus inscribuntur exhauriant, hoc est ut ex his ablata relinquantur quæ sita sunt data qualibet minore, ipsa etiam corpora sita se æqualia esse necesse est.

Scholion.

Theorema iam demonstratum vniuersaliissimum est, extenditq; se ad sequentes propositiones, nec seruetur. Ne igitur idem discursus in singulis propositionibus labore inutili, & inuolutio leuiter repetendus esset, placuit statim exhaullitionem negotium hoc loco terminum vniuersalium proponere ac demonstrare.



En particulier, une hypothèse implicite, faite par Grégoire de Saint-Vincent dans la deuxième partie de sa démonstration, est que tout segment de parabole est convexe et que toute figure polygonale qui lui est inscrite, aussi démultipliée soit-elle, délimite une surface entièrement incluse dans ce segment. C'est que Grégoire de Saint-Vincent pense le processus comme indéfiniment prolongeable et la figure donnée comme indéfiniment reproductible dans l'infiniment petit, s'autorisant ainsi le passage à la limite qu'Archimède s'interdit : ce dernier prend soin de montrer, proposition XXII de *la Quadrature de la Parabole*, qu'un nombre quelconque, mais fini, de triangles inscrits obtenus par duplication, a une aire totale inférieure à celle du segment.

Nous reviendrons en conclusion sur cette question de l'écart entre méthode de descente finie et méthode d'exhaustion. Mais il nous paraît difficile de quitter l'*Opus geometricum* sans citer deux propositions concernant la quadrature de l'hyperbole, ni donner une idée de la méthode de "duction". D'autant que la racine du mot exhaustion y apparaît pour la première fois, sous la forme d'un verbe.

Pour la quadrature de l'hyperbole, nous l'avons dit, Grégoire de Saint-Vincent met en évidence la relation exponentielle qui lie abscisses et aires de segments d'hyperbole, de manière directe et réciproque. Ce sont les propositions CIX et CXXX du Livre VI, dont nous ne donnerons que les énoncés :

Proposition CIX

Liber sextus : De Hyperbola, Pars quarta, (page 586).

Soient AB, BC les asymptotes d'une hyperbole DEF : et divisons AC, de façon que AG, AH, AI, AK, AC soient en proportion continue [progression géométrique], et que soient posées [les lignes] GD, EH, LI, MK, FC, parallèles à AB.

Je dis que les segments [d'hyperbole] HD, IE, KL, CM [i-e les quadrilatères mixtilignes HEDG, ILEH, KMIL & CFMK] sont égaux [en aire].

Proposition CXXX

Liber sextus : De Hyperbola, Pars quarta, (page 597).

Soient AB, BC les asymptotes d'une hyperbole ; posons des parallèles à une asymptote [ici à AB], DH, EI, FK, GL, CM, découpant des segments [d'hyperbole] égaux HE, IF, KG, LC.

Je dis que les lignes HD, IE, KF, LG, MC sont en progression continue [géométrique].

Voyons enfin la méthode de duction d'un plan sur l'autre, sur l'exemple proposé au Livre VII, proposition XLV, et le scholie qui fait suite à la proposition XLVI :

Proposition XLV et Scholie

Liber septimus : Ductus plani in planum, Pars tertia, (page 739).

Soient donnés trois [figures] plan[e]s BAC, BEC, BDC quelconques, ayant une hauteur commune BC : et étant donnée BD, normale à BC, que lui soient tracées, en nombre infini, (ici en nombre quelconque) des parallèles AKED, qui coupent la ligne commune aux points KK, et les périmètres des plans aux points AA, EE, DD.

Si AK , KE , KD , sont en proportion continues, ou, (ce qui revient au même), si les carrés KE [i-e de côté KE] sont égaux aux rectangles AKD [i-e de côtés AK et KD] :

Je dis que le plan BAC duit sur le plan BDC , sera égal au plan BEC duit sur lui-même.

Démonstration.

Soient menées des lignes AF et DH , parallèles à BC ; soit inscrite dans les [figures] plan[e]s BAC et BDC [ici des segments complémentaires d'un même cercle, découpés par une corde BC] une infinité de rectangles KF , KF [i-e $KAFK'$, $K'A'F'K''$, &c] et KH , KH [i-e $KDHK'$, $K'D'H'K''$, &c]. Soient menées de même [parallèlement à BC] des lignes EG , et soit inscrite dans le plan BEC [i-e le demi-disque de diamètre BC] de la même manière [en même nombre infini que précédemment ?] une infinité de rectangles KG , KG [i-e $KEGK'$, $K'E'G'K''$, &c]. Si les rectangles KF [$KAFK'$] sont duits sur les rectangles KH [$KDHK'$], dans le solide que produit la duction du plan BAC [le segment de cercle $BAA'A''C$] sur le plan BDC [le segment de cercle $BDD'D''C$], s'inscrivent une infinité de parallélépipèdes dont les bases sont les rectangles AKD [de côtés AK et KD], et les hauteurs AF , AF [$A'F'$] ou encore DH , DH [$D'H''$]. De la même façon, si les rectangles KG , KG [i-e $KEGK'$, $K'E'G'K''$] sont duits sur eux-mêmes, dans le solide que produit la duction du plan BEC [le demi-disque $BEE'E''C$] sur lui-même, s'inscrivent une infinité de parallélépipèdes dont les bases sont les carrés [de côté] KE , KE [$K'E'$], et les hauteurs GE , GE [$G'E'$]. Du fait de l'hypothèse que les rectangles AKD sont toujours égaux aux carrés KE [en aire : $KA.KD = KE^2$], alors les parallélépipèdes inscrits dans le solide produit par la duction du plan BAC sur le plan BDC , ont des bases égales aux bases des parallélépipèdes inscrits dans le solide engendré par la duction du plan BEC sur lui-même. Mais les hauteurs AF sont aussi égales aux hauteurs EG . Donc tous les parallélépipèdes inscrits dans le solide engendré par la duction mutuelle des plans BAC , BDE [il faut lire BDC], sont égaux à tous les parallélépipèdes inscrits dans le solide produit par le plan BEC duit en lui-même. Ainsi donc, comme cela a été démontré dans les propositions qui précèdent immédiatement, ces parallélépipèdes peuvent être multipliés [en nombre] jusqu'à ce qu'ils épuisent [exhauriant, nous soulignons] le solide même dans lequel ils s'inscrivent, c'est à dire qu'une fois ôtés de lui, ils laissent une quantité plus petite que n'importe quelle donnée. Aussi est-il inéluctable que ces corps soient égaux entre eux.

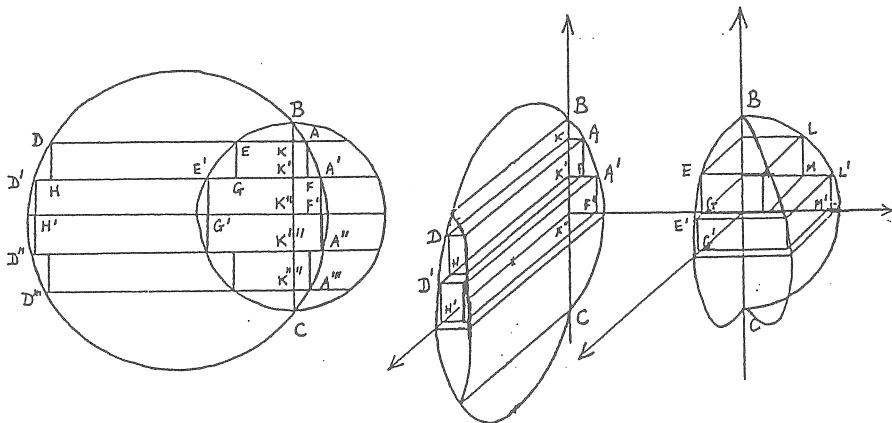
Celui qui est expert en géométrie n'aura pas besoin de la démonstration de cette chose, [que l'on trouvera] à la suite. Mais afin de satisfaire à la rigueur géométrique pour toutes choses, nous démontrerons cela même en cet endroit avec soin.

[ce passage, en italiques dans le texte comme les scholies et autres commentaires non démonstratifs, est suivi de l'habituelle double réduction à l'absurde].

Scholie.

J'ajoute que ce théorème est démontré d'une façon très universelle et qu'il peut s'étendre à toutes les propositions suivantes. Donc un même discours pour des propositions particulières serait un travail inutile, et comme il serait répété pour le désagrément du lecteur, il est préférable de proposer et de démontrer en termes universels en cet endroit tout le travail d'exhaustion.

Cette méthode de duction d'une surface plane sur une autre consiste en fait en la considération du volume intercepté par deux cylindres s'appuyant sur les frontières de ces surfaces tracées dans deux plans d'un dièdre droit : dans chaque plan orthogonal à l'axe commun aux deux plans, la trace de ce volume est un rectangle dont les côtés sont les lignes ordonnées menées de l'axe vers les courbes enfermant les surfaces considérées. Le volume considéré peut alors être conçu comme contenant un empilement de parallélépipèdes rectangles dont l'accumulation, au stade infinitésimal, épuise l'espace intérieur. Ici, la proposition montre l'égalité de deux volumes obtenu l'un par duction d'un demi-disque sur lui-même, l'autre par duction d'un segment de cercle sur son complémentaire au cercle. Une figure dans l'espace permettra de juger du résultat. Quant au principe de cette égalité, dans le cas de figure adopté ici, il provient de ce que la puissance d'un point (K) de l'axe du faisceau des deux cercles, l'un de diamètre BC (BECL) et l'autre de corde BC (BDCA), est la même ($KE^2 = KL^2 = KD.KA$) relativement aux deux cercles, quelle que soit la position de K sur l'axe (c'est évident si K est le milieu de BC, dans le triangle rectangle DBA, mais cela reste vrai en tout point K de BC puisque $KE^2 = KB.KC$ dans le cercle BECL, et que $KB.KC = KD.KA$ dans le cercle BDCA).



Il apparaît surtout, pour notre propos, qu'à ce stade de son ouvrage, l'épuisement des surfaces et des volumes par des surfaces polygonales rectilignes ou des volumes polyédraux tourne au procédé. Grégoire de Saint-Vincent aura tout de même attendu 740 pages pour s'exclamer que sa méthode d'exhaustion peut être tacitement reconduite.

CONCLUSION

Grégoire de Saint-Vincent a donc inventé, à proprement parler, la méthode d'exhaustion, puisqu'elle n'est à l'évidence pas la méthode non infinitiste d'Eudoxe-Archimède (qui nécessite une démonstration par double réduction à l'absurde), même si le jésuite s'en inspire de très près ; l'exemple de la quadrature de la parabole est à cet égard très clair.

Il ne s'agit pas ici de faire de Saint-Vincent le héros conscient d'une révolution dans la pensée, mais plutôt de signaler que l'acte de naissance du calcul infinitésimal est entaché d'un abandon : le détour, en somme nécessaire à y regarder retrospectivement, du fils prodigue. Le meurtre du père se pratique aussi chez les mathématiciens. Et Archimède lui-même eut conscience de transgresser certaines règles de l'école d'Alexandrie, avec son recours aux pesées, qu'elles aient été mises en balance ou effectuées en pensée.

Mais alors, la dénomination " d'exhaustion " ne participe-t-elle pas, au moment même où elle fut proférée, d'une liquidation ? Le mathématicien le sait bien, qui pourtant l'a conservée pour désigner ce qu'il sait être une méthode rigoureuse, celle d'Archimède : preuve qu'en Mathématique, c'est le dernier qui parle qui impose sa raison, renvoyant aux calendes grecques les balbutiements de ses prédécesseurs. L'essentiel, ici, est que la méthode finitiste et son traitement infinitésimal aient trouvé leur raison quelques siècles plus tard. Mais si, en mathématiques, il n'est point de littérature, la querelle des anciens et des modernes se dénouant toujours au profit du plus achevé, il serait pour le moins curieux que l'histoire des mathématiques s'en laisse conter : le temps est le seul vecteur qui puisse nous éviter le piège des idéalités. L'on peut être tendu sans être dupe, ou amnésique.

Dès lors, il nous paraîtrait judicieux d'inventer une expression moins historiquement datée, moins anachronique - puisque l'exhaustion traduit plus l'idée que Grégoire de Saint-Vincent se fait de la méthode des anciens, puisqu'elle désigne plus la traduction " moderne " qu'il en fait en 1625, que l'esprit même de cette méthode -, expression qui désignerait, du point de vue de l'historien, et non du mathématicien, la méthode d'Archimède appuyée sur l'axiome d'Eudoxe : nous proposons ici et maintenant la périphrase " *méthode de descente finie sous un seuil donné* ", qui pourrait peut-être désormais rendre compte de la démarche archimédienne, pour laisser à Grégoire de Saint-Vincent, inventeur ou propagateur, la responsabilité pleine et entière de sa méthode d'exhaustion, avec ses manques et ses audaces : *Redde Gregorio quae sunt Gregorii, et quae sunt Archimedis Archimedi*.

* * * * *

BIBLIOGRAPHIESOURCES TEXTUELLES ET TRADUCTIONS

[1] ARCHIMEDE. *Oeuvres*, en particulier : *La quadrature de la parabole & De la Méthode relative aux théorèmes mécaniques*, traduction et édition de Paul Ver Eecke, Liège : 1960, seconde éd.

[2] EUCLIDE. *Les Eléments*, texte grec et traduction française libre par G.J. Kayas, CNRS, Paris : 1978. Traduction française par F. Peyrard, Paris : 1819.

[3] SAINT-VINCENT, Grégoire (de). *Opus Geometricum Quadraturae circuli et sectionum conii, Decem libris comprehensum sive Problema Austriacum, plus ultra Quadratura circuli*, 1229 p., Anvers : 1647.

* * * * *

BIBLIOGRAPHIE SECONDAIREOUVRAGES

[4] BOYER, Carl B. *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, New-York : 1949 ; rééd. 1959.

[5] BRUNSCHVIG, Léon. *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris : 1912 ; rééd. 1981.

[6] CARNOT, Lazare. *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal*, Paris : 1797 ; rééd. 1970.

[7] COLLETTE, Jean-Paul. *Histoire des Mathématiques*, Ottawa : 1973.

[8] DHOMBRES, Jean. *Nombre, mesure et continu*, Paris : 1978.

[9] EDWARDS, C. H. Jr. *The Historical Development of the Calculus*, New-York : 1979 ; rééd. 1982.

[10] LEVY, Tony. *Figures de l'infini*, Paris : 1987.

[11] MARIE, Maximilien. *Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques*, Tome III, Paris : 1884.

[12] MONTUCLA, J.F. *Histoire des Mathématiques*, en particulier : Tome II, pp. 79 & sq., & troisième supplément au tome IV, *Histoire de la Quadrature du Cercle*, Paris : édition de l'An VII & X ; rééd. Paris : 1968.

[13] MONTUCLA, J.F. *Histoire des Recherches sur la Quadrature du Cercle*, Paris : 1754.

[14] NAUX, Ch. *Histoire des logarithmes de Neper à Euler*, 2 vol., Paris : 1971.

[15] QUETELET, Ad.-L.-J. *Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges*, Bruxelles : 1864.

[16] STRUIK, D.J. Ed. *A source book in Mathematics, 1200-1800*, Cambridge (Massachusetts) : 1969.

* * *

ARTICLES

[17] BOPP, K. *Die Kegelschnitte des Gregorius a Sancto Vincentio in Vergleichender Bearbeitung*, in *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften... begründet von Moritz Cantor*, t.XX, fasc.2, Leipzig, 1907.

[18] BOSMANS, Henri. *Grégoire de Saint-Vincent*, in *Mathesis*, XXXVIII (1924), pp. 250-56.

[19] BOSMANS, Henri. *Sur quelques exemples de la méthode des limites chez Simon Stevin*, in *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, XXXVII (1913), pp. 171-99.

[20] BOSMANS, Henri. *Le calcul infinitésimal chez Simon Stevin*, in *Mathesis* XXXVII (1923), pp. 12-18, 55-62, 105-9.

[21] HOFMANN, J.E. *Das Opus geometricum des Gregorius a S. Vincentio und seine Einwirkung auf Leibniz*, in *Abhandlungen der preussischen Akademie der Wissenschaften, Math.-Naturw. Klasse*, 1942.

[22] NEUBERG, M. *Vie et oeuvre de Grégoire de Saint-Vincent*, in *B.B.*, 1911, n°12, pp. 922-933.

* * * * *