REPERES - IREM. N° 68 - juillet 2007

LECTURE D'ENONCES ET "NOMBRES CONCRETS" (*)

De l'espace de la phrase à l'espace de la classe

Michèle MUNIGLIA
Philippe LOMBARD
Irem de Lorraine

*Telle a été la tendance primitive de la pédagogie ;
et c'est celle de tous les maîtres au début de leur carrière :
partir de l'idée générale de la science à enseigner,
la décomposer logiquement en un certain nombre
de notions abstraites, définir chacune de ces notions, faire apprendre
ces définitions aux élèves, puis en déduire les règles et formules,
et continuer ainsi en construisant définition après définition,
chapitre après chapitre, tout l'édifice théorique de la science,
sauf à leur en faire ensuite les applications
sous forme d'exercices, de problèmes, d'exemples.* [1]

En plaçant la résolution de problèmes au frontispice de l'apprentissage du numérique à l'école et au collège, les nouveaux programmes semblent bien mettre aujourd'hui une touche supplémentaire au reflux des "maths modernes" engagé il y a déjà une bonne vingtaine d'années. Rappelons-nous. C'était l'époque où les programmes demandaient un retour aux situations "concrètes" en réaction aux "maths pour les maths" enseignées depuis le début des années soixante-dix… Et c'était aussi l'époque où les didacticiens dénonçaient l'obscurantisme d'une telle régression :

> « La pulsion empiriste, […] se traduit […] par une poussée vigoureuse du numérique, par l'éparpillement et l'évanouissement de l'apprentissage des outils algébriques, par l'insistance naïve sur le concret, et par le recours constamment réaffirmé à des "activités" dont l'enseignement cherchera, à bon droit, mais fréquemment en vain, la substance. […] La vogue de l'étude des *word problems* — les problèmes « à énoncés » — est une autre forme du trop long refus de voir changer les outils de la pensée et, pour cela, la pensée elle-même. » [2]

Et où ils tentaient de sauver ce qui leur paraissait essentiel en prônant la "modélisation" :

> « *J'ai* 23 *billes dont* 7 *sont bleues. Les autres billes sont noires. Combien ai-je de billes noires ?*
>
> Reprenons le problème selon le schéma de la modélisation. Le système étudié — l'ensemble des billes que je possède — est décrit par trois variables : "le nombre total de billes", "le nombre de billes bleues", "le nombre de billes noires". Les valeurs de ces paramètres définissent un état du système. Nombre de problèmes, élémentaires ou non, sont alors, à l'instar de celui-ci, du type suivant : connaissant les valeurs de certaines variables, trouver

(*) Ce texte présente et analyse une démarche d'apprentissage introduite par Michèle Muniglia en 6ème – 5ème. On pourra se reporter pour des compléments à la publication de l'Irem de Lorraine [4] et aux références [5] citées en fin d'article.

les valeurs des autres variables. La connaissance de ces dernières valeurs s'obtient par la considération des relations qui gouvernent l'ensemble des variables. » [2]

Clairement, cette modélisation consistait à faire appel aux objets mathématiques pour les *appliquer ensuite* à des situations concrètes, alors que la construction même de ces objets — et notamment des nombres — restait du registre formel qui, seul, leur paraissait adapté à l'édification de LA mathématique… On aurait tort de croire qu'il s'agit de la même chose actuellement. Le mot magique de "modélisation" est certes toujours en bonne place, de ci de là, dans les instructions, mais pour ce qui nous concerne ici, le retour au concret est d'une tout autre portée : il s'agit de rien moins que de *bâtir le numérique* à partir des considérations relatives à la résolution des problèmes et, pour tout dire, de renouer avec ce qui aurait paru il y a encore bien peu de temps un parfait exemple d'oxymore : les *nombres concrets*.

On ne peut guère mesurer le changement de point de vue que si l'on compare les textes fustigeant la "contre-réforme" de 1985 et prônant le point de vue modélisateur à des textes largement antérieurs comme, par exemple, celui d'un Lacroix qui s'intéressait en 1805 [3] à *l'enseignement en général et à celui des mathématiques en particulier* :

> Une difficulté sur laquelle la plupart des auteurs ont glissé trop légèrement, c'est l'application aux nombres fractionnaires des définitions de la multiplication et de la division relative aux nombres entiers. Il y a ici un passage très remarquable d'une acception donnée aux mots multiplier et diviser, d'après le cas le plus simple de l'idée qu'ils expriment, à une acception générale, dans laquelle on enveloppe des cas nouveaux qui [ne] se lient aux premiers que par de simples analogies. L'indication de ces analogies semble même exiger la considération des nombres concrets.
>
> Ce n'est, par exemple, qu'en rapportant la multiplication à son usage le plus fréquent, savoir : trouver le prix d'une certaine quantité de matière, par le prix de l'unité de cette matière, qu'on peut montrer comment il y a lieu à multiplier par une fraction, ce qui répond à une véritable division ; car c'est comme cas particulier de la question précédente qu'on dit également, multiplier par deux et multiplier par un demi, doubler le prix de la mesure d'une denrée quelconque, pour avoir celui de deux mesures, ou prendre la moitié du même prix pour avoir celui de la demi-mesure. On ne saurait, sans se rendre coupable d'inexactitude dans la marche du raisonnement, passer sous silence une extension d'idée aussi importante ; elle exige même une définition des termes qui puisse s'y prêter, et dont les conséquences mènent aux modifications que doit subir le calcul, pour s'appliquer à des cas qui semblent entièrement opposés.

Tout sépare les deux postures évidemment, mais notre but n'est pas de nous appesantir ici sur les différences entre deux époques. D'autant que les mêmes qui criaient naguère au scandale face à la "pulsion empiriste" se sont largement recyclés depuis dans la théorie qui consiste à faire croire que le "calcul sur les nombres concrets" est encore plus mathématique que LA mathématique… puisqu'il suffirait de faire usage des *produits tensoriels* pour enfin comprendre que la "pensée elle-même" peut surmonter la nausée induite par les "problèmes à énoncés" ! Notre préoccupation est en réalité beaucoup plus proche de la problématique soulignée par le texte de Lacroix que nous résumerons en termes mieux adaptés aux programmes actuels :

l'enrichissement progressif du domaine des nombres passe naturellement par l'extension des problèmes "concrets" à des classes de nombres de plus en plus complexes et cet enrichissement suppose donc que soit véritablement acquis très tôt le *sens des opérations* sur les *grandeurs* auxquelles il est fait appel dans la résolution des problèmes.

Cette question est, comme chacun sait, loin d'être simple. Ce n'est d'ailleurs pas parce que l'époque des "maths modernes" semble bien s'être trompée dans un choix que l'on pourrait qualifier de "tout abstrait" que certaines formes de retour au choix inverse peuvent à elles seules constituer une garantie de réussite. Chacun des aspects du défi didactique auquel nous sommes confrontés est important et difficile : d'une part acquérir le "sens des opérations" n'est que le résultat d'un apprentissage très long car il demande à l'élève, précisément, de surmonter les difficultés inhérentes à la complexité des nombres et à la nouveauté des situations auxquelles il est confronté… et d'autre part "calculer sur les grandeurs" ne saurait être suffisant, en soi, pour donner aux nombres le sens un tant soit peu abstrait susceptible de leur permettre de s'appliquer comme ils le font à une multitude de situations…

Autant dire qu'il ne s'agira en rien ici de penser une quelconque "transposition didactique" qui consisterait à considérer le "savoir savant" sur les nombres et à mesurer la "trahison" que lui ferait subir sa transfusion dans les programmes scolaires. Il s'agira au contraire d'analyser une tentative de gestion de cet apprentissage "spiralé" idéal qui pourrait permettre à l'enfant de s'approprier peu à peu des "nombres" et des "situations-problèmes", et ceci aussi bien parce qu'il possède déjà partiellement le sens des opérations sur certaines grandeurs que parce qu'il deviendra capable d'amplifier progressivement ses savoir-faire pour les rendre opérationnels dans des situations de plus en plus complexes.

I. — De l'énoncé à "l'échiquier"

a) *Lecture de l'énoncé*

La première séquence sur laquelle nous allons nous arrêter touche à la phase de *lecture d'énoncé*. Elle constitue pour nous une étape particulièrement importante dans la mesure où il est clair qu'un élève (ou n'importe quel "expert") qui sait résoudre un problème est d'abord une personne qui est capable de *lire* l'énoncé et de *comprendre* celui-ci en un sens qui est à vrai dire très profond. Il est en effet indispensable non seulement de saisir la situation, non seulement d'extraire les données numériques, mais aussi de détecter dans le texte les indices qui vont permettre, par analogie, de rapporter la question à une sorte de "banque de données" de questions analogues qui ont été déjà rencontrées et que l'on a appris à résoudre.

Bien entendu cette phase de *lecture* repose sur une sorte d'alchimie où chacun est censé "comprendre" (au sens précédent) mais où même l'expert a parfois bien du mal à expliciter les éléments qui l'ont conduit à interpréter l'énoncé dans un sens plutôt qu'un autre. C'est, en d'autres termes, le domaine généralement dévolu à "l'intuition" et il suffit pour s'en convaincre d'observer que les "bons élèves" réussissent les problèmes avec une plus grande probabilité que les autres, mais qu'ils sont très souvent dans de grandes difficultés s'il leur faut expliciter les indices qui leur ont permis de trouver. Et il suffirait aussi de rappeler les erreurs classiques en la matière (depuis le problème de l'âge du capitaine jusqu'à celui des bœufs de Newton) pour tempérer, s'il en était encore besoin, les certitudes de tous ceux qui affirment un peu vite que toute résolution passe essentiellement par la découverte du "sens".

Les tentatives pour détecter — et transmettre — ce "sens des opérations" n'ont pas manqué jusqu'ici, et il faut accorder aux défenseurs des "maths modernes" que celles-ci se voulaient réellement une réponse à cette question. Réponse systématiquement fondée sur la considération des ensembles, réponse évidemment indiscutable dans le cadre mathématique, réponse éclairante pour ceux qui savaient déjà, auparavant, résoudre des problèmes que le langage des ensembles leur offrait l'occasion de revisiter, mais réponse qui s'est indéniablement avérée impuissante dès que le problème se posait de fournir une explication à l'enfant. Et c'est bien cette sorte d'impuissance du professeur à pouvoir aider l'élève qui ne trouve pas la "bonne opération" qui nous a conduit à expérimenter, puis à développer des méthodes hors des sentiers battus de la quête habituelle du sens, mais qui nous paraissent sensiblement plus efficaces pour les élèves, et notamment pour les élèves en difficultés.

Comme nous l'avons dit, ces méthodes consistent — dans leur premier aspect — en une approche de la *lecture d'énoncé* qui permette aux élèves de s'investir véritablement dans la compréhension de celui-ci et qui, au niveau de la classe, constitue une manière relativement efficiente de gérer l'hétérogénéité. Cette approche de la lecture passe essentiellement par l'oral et on la trouvera résumée sur un exemple d'énoncé dans l'encadré 1 (voir plus loin). Le principe est le suivant, il s'inspire en fait des préparatifs des acteurs de théâtre pour assimiler (et s'approprier) les textes qu'ils devront jouer et qui ne sont pas nécessairement d'un abord aisé au niveau de la compréhension indispensable pour celui qui doit le restituer face au public.

Le but du jeu est de faire "reconstruire" une phrase par un groupe d'élèves et de profiter du résultat obtenu pour que chacun en tire une meilleure compréhension. Cela peut évidemment s'appliquer à toutes les phrases et (comme au théâtre) à tous les textes, mais la question est de savoir dans quelle mesure la démarche peut aider les enfants à comprendre des phrases dont une partie leur échappe au départ et face auxquelles ils n'auraient pas forcément le moyen de progresser s'ils étaient livrés à eux-mêmes.

Prenons par exemple (au hasard) la phrase : "la bise fait frémir les saules au bord de la berge". Le maître commence par faire lire (en silence) le texte par les élèves et, très rapidement, leur fait cacher la feuille puis demande à chacun un mot ou une partie de phrase qu'il a déchiffrés et qu'il a retenus… Après un, deux ou trois passages, le maître doit être face à quelques enfants qui ont retenu certains mots ou groupes de mots et il commence à les faire venir s'aligner sur une ligne (qui représentera la phrase au final) et à un emplacement qui correspond à peu près à la place des mots concernés, dans l'ordre de la phrase. A la fin de ces opérations (et donc d'autres lectures si nécessaire), les enfants doivent venir compléter la phrase et on se retrouve enfin avec des élèves bien alignés qui portent chacun un bout de phrase, dans l'ordre du texte initial, avec des espaces plus ou moins marqués pour les signes de ponctuation.

La deuxième phase consistera alors à faire *dire* aux enfants la phrase complète, dans l'ordre, en se transmettant la parole du premier au dernier et en cherchant à bien assurer la continuité du ton, de façon à enchaîner correctement les morceaux et à obtenir au final une lecture parfaite… (A laquelle il n'est pas interdit, au demeurant, de donner une coloration plus ou moins théâtrale…)

Curieusement, une telle manière de pénétrer dans le texte — approche qui n'est absolument pas "grammaticale" et même très peu "linéaire" — semble permettre à la plupart des élèves de se construire le sens des phrases. Elle fournit un angle de lecture désintégré un peu surprenant, mais qui est sans doute, *in fine*, assez analogue à la façon dont fonctionne la langue parlée : d'abord le "sens" d'une phrase n'a rien de linéaire et, surtout, il n'y a généralement pas besoin de connaître tous les mots employés pour comprendre le sens. Ici, ces ressorts de la lecture semblent se "matérialiser" au travers des rapports qui s'instaurent entre chaque élève et les autres, entre l'individu qui devient porteur d'un morceau de phrase (mais qui n'a peut-être encore rien compris au sens global) et le reste de cette phrase représenté par d'autres "îlots de sens" qui demandent eux aussi à se structurer pour fournir une histoire compréhensible.

D'ailleurs celui qui sait lire peut (par exemple) savoir correctement déchiffrer les mots "bise", "saules" ou "berge" mais ne les avoir jamais rencontrés, il se trouve tout de même que la phrase "la bise fait frémir les saules au bord de la berge" prendra pour lui un sens qui a toutes les chances d'être correct. Il s'inventera au passage le sens des termes inconnus et, en prime, cette lecture réussie sera précisément le meilleur apprentissage possible des mots qu'il ignorait jusque-là.

C'est évidemment le but de notre expérience en matière de lecture d'énoncés. Il se trouve que les élèves y prennent goût et semblent manifestement en tirer profit. On notera cependant (si l'on désire tenter l'aventure…) qu'il nous paraît nécessaire aussi que, dans un tel jeu, les enfants soient tantôt acteurs, tantôt spectateurs : il est aussi important de faire partie du texte en étant porteur d'un mot ou d'un groupe de mots que d'en être, à un autre moment le spectateur, ou si l'on préfère le "lecteur". Le but de la quête n'est en effet rien d'autre que le "sens" et les expériences de chacun (y compris, très souvent, des élèves en difficultés) apportent des approches différentes qui contribuent à la constitution de celui-ci.

b) *Traitement des données*

Une fois cette lecture terminée, il faut évidemment traiter le texte comme un énoncé de problème et en dégager les éléments permettant de trouver la solution… Ici encore "l'expert" — c'est-à-dire celui qui sait résoudre l'énigme — est celui qui a suffisamment bien mené sa lecture pour être ensuite capable *d'extraire* et *classer* les données nu-mériques, mais qui saura aussi utiliser les indices contenus plus ou moins explicitement dans le texte afin de trouver l'opération qu'il lui faudra effectuer.

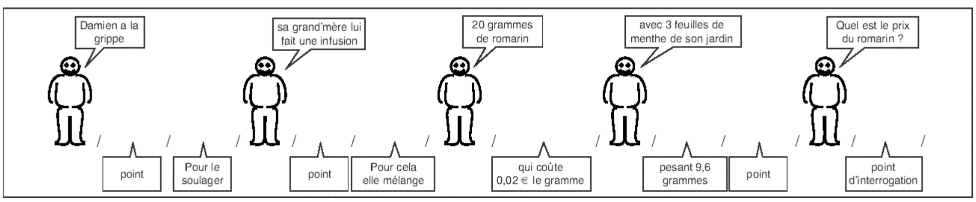
La méthode que nous préconisons se propose d'aider les élèves à surmonter ce genre de difficultés, elle repose cependant, lors de

Encadré 1. Le problème de Damien

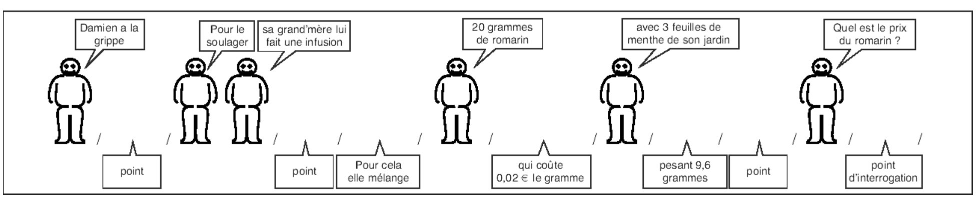
Partons de l'énoncé : « *Damien a la grippe. Pour le soulager, sa grand-mère lui fait une infusion. Pour cela, elle mélange* 20 *grammes de romarin qui coûte* 0,02 *euros le gramme avec* 3 *feuilles de menthe de son jardin pesant* 9,6 *grammes. Quel est le prix du romarin ?* ».

Le professeur distribue le texte et laisse les élèves faire une première lecture (très courte, de l'ordre d'une minute). Les élèves doivent alors cacher le texte et le maître les interroge à tour de rôle de manière à ce que chacun énonce un *fragment du texte* qu'il a retenu de sa lecture rapide. Ceux qui ont acquis un morceau de l'énoncé le prennent alors en charge et viennent s'aligner dans l'ordre du texte, en laissant des places vides destinées aux fragments manquants, de manière à recomposer progressivement la totalité de l'énoncé sous forme d'une « ligne » :

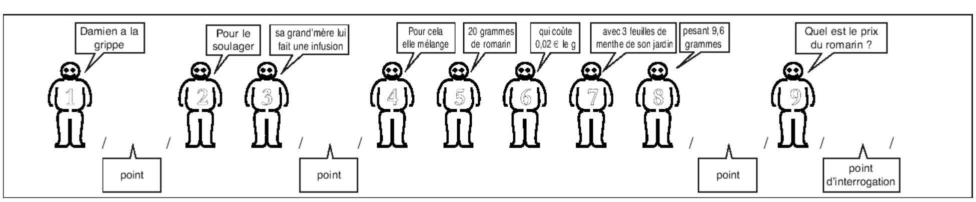
Exemple de 1ère étape :



Exemple de 2ème étape :



La ligne, une fois complète, permettra aux élèves de « visualiser » toutes les composantes du texte de manière à en extraire (voir plus loin) les informations importantes vis-à-vis du problème :



Cette phase doit s'achever par un moment "d'oralisation" où les acteurs enchaînent les divers éléments de manière à énoncer le texte d'un seul tenant, en s'efforçant de le "dire" de façon la plus expressive possible…

la phase précédente, sur une exigence primordiale que nous n'avons pas encore précisée est qui stipule (pour le bon déroulement de l'étape suivante) qu'il est nécessaire qu'aucun des élèves participant à la reconstruction de l'énoncé ne soit porteur *de plus d'un donnée numérique*. C'est cette condition qui va permettre aux élèves, d'une part, d'isoler correctement ces données et, d'autre part, de les "structurer" d'une façon qui semble pertinente pour dégager (autant qu'il est possible) le *type* de problème auquel il est confronté, donc pour l'aider (plus ou moins consciemment) à le rapprocher de situations semblables pour lesquelles il connaît déjà la "bonne opération" à effectuer.

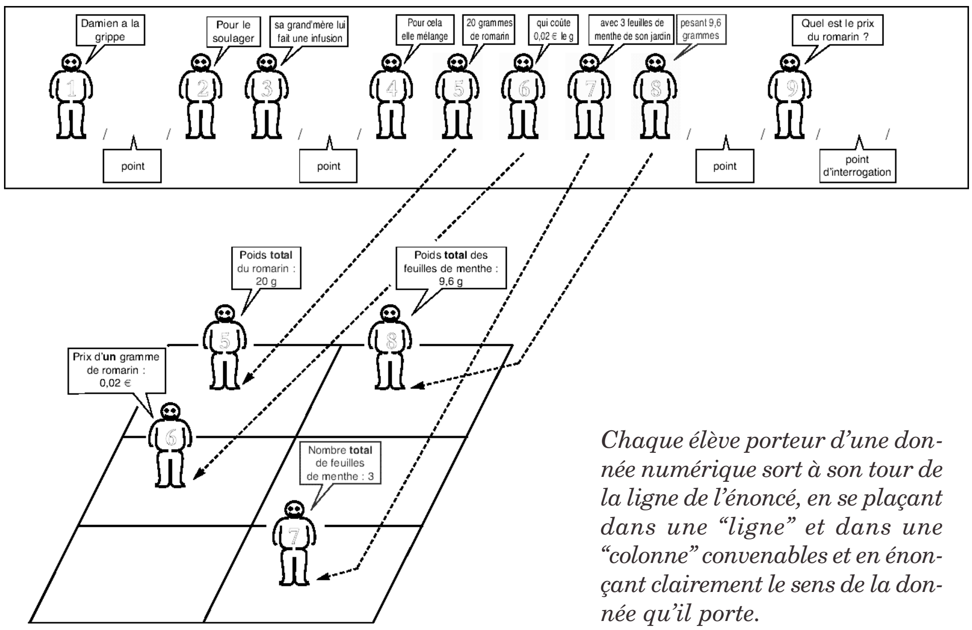
Le but recherché est en effet de classer spatialement les données dans un tableau que nous appellerons "échiquier" et qui permettra de faire apparaître la nature de chacune des données en fonction *du genre d'objet* auquel elle se rapporte dans l'énoncé et de *l'espèce de grandeur* qu'elle est censée mesurer ou quantifier vis-à-vis de la situation étudiée…

Si nous nous intéressons par exemple au problème de l'encadré 1, cette démarche est relativement simple : les données sont attachées à deux types d'objets, le *romarin* et la *menthe*, et précisent trois sortes de grandeurs, le *poids*, la "*quantité*" et le *prix*. Il y a clairement quatre données et celles-ci peuvent être placées dans un tableau comportant deux colonnes (l'une pour le romarin, l'autre pour la menthe) et trois lignes (pour les poids, les prix, et les nombres de feuilles). Concrètement, la phase de lecture ayant abouti à un énoncé représenté par des élèves placés sur une ligne va évoluer de la manière schématisée dans l'encadré 2 de la page suivante. Les quatre élèves portant les données sortent progressivement de l'énoncé. Le premier annonce qu'il correspond au "romarin" et au "poids total" et vient se placer devant ses camarades. Ce faisant il détermine une "colonne" et une "ligne" qui deviendront la "colonne du romarin" et la "ligne du poids total", ce qui lui permet d'énoncer : « poids *total* du romarin : 20 g ». Les autres devront ensuite venir se placer en annonçant (lorsque c'est le cas) qu'ils créent telle ou telle nouvelle ligne ou colonne, et en énonçant clairement ce qu'ils représentent, comme par exemple : « nombre total de feuilles de menthe».

Nous reviendrons au point suivant sur l'intérêt — et les difficultés — de cette représentation de l'énoncé, destinée à mettre en évidence sa structure fondamentale et les informations qu'il contient du point de vue de la question posée. Il nous semble important de nous arrêter auparavant sur plusieurs aspects de cet "échiquier", auquel les élèves doivent finalement aboutir.

Un premier point à noter est que celui-ci se construit "physiquement" dans le prolongement de l'action entamée dans la phase précédente. On peut évidemment juger que cette "spatialisation" n'est pas entièrement indispensable et que le tableau obtenu peut être simplement dressé par écrit, il n'en reste pas moins que l'engagement corporel des élèves dans cette réalisation nous apparaît non négligeable. Il suffirait, pour s'en convaincre, d'observer la façon dont se déroule l'expérience et la manière relativement étonnante dont les élèves se mettent en place dans un tableau imaginaire mais parfaitement structuré en lignes et en colonnes. Une telle intériorisation des données est sans doute le signe d'une réelle maîtrise de l'énoncé et il

Encadré 2. L'échiquier associé au problème de Damien *(construction spatiale)*



Chaque élève porteur d'une donnée numérique sort à son tour de la ligne de l'énoncé, en se plaçant dans une "ligne" et dans une "colonne" convenables et en énonçant clairement le sens de la donnée qu'il porte.

Encadré 3. L'échiquier associé au problème de Damien *(version écrite)*

	Colonne du *romarin*	Colonne de la *menthe*
Ligne des <u>poids</u>	<u>Poids</u> **total** du *romarin* : 20 g	<u>Poids</u> **total** de la *menthe* : 9,6 g
Ligne des <u>*prix unitaires*</u>	<u>*Prix d'**un***</u> gramme de *romarin* : 0,02 €	
Ligne des <u>nombres</u>		<u>Nombre</u> **total** des feuilles de *menthe* : 3

serait dommage de ne pas ménager — au moins au début — un temps pour cette phase afin que certains élèves, moins "scolaires" que les autres, puissent y trouver un réel profit.

Cela étant (et c'est notre deuxième point) il est clair que le travail ne saurait se limiter à ce mécanisme oral, même complet. L'apprentissage se poursuit au contraire par une substantielle phase écrite qui consiste à noter proprement au tableau ou sur sa feuille l'échiquier obtenu. Ainsi l'exemple du problème traité au cours des encadrés précédents devra aboutir à une schématisation du type de celle de l'encadré 3 présenté au bas de la page précédente.

Il y a là, pendant toute la période d'initiation une assez lourde tâche pour les élèves, d'autant plus contraignante que le professeur se devra d'exiger une présentation non seulement soignée, mais aussi une réalisation *complète*, telle qu'elle est reproduite dans l'encadré 3...

Nous ne saurions trop insister, effectivement sur un troisième point : *tous les éléments* qui apparaissent dans l'échiquier associé à l'énoncé vont apporter leur contribution pour aider l'élève à trouver la "bonne opération" permettant de répondre à la question. Comme on l'aura noté au passage, ces éléments — ces indices qui sont utilisés de façon largement automatique par celui qui sait résoudre le problème — tiennent essentiellement dans deux sortes d'informations : d'une part le choix des lignes et des colonnes et, d'autre part, l'indication du *type* de donnée, lorsqu'il s'agit d'indices importants pour déterminer l'opération. Le choix des lignes et des colonnes (qui ne va pas toujours sans difficultés selon les énoncés) est d'entrée de jeu un facteur essentiel de la "structure" du problème. Mais un obstacle particulièrement notable pour les élèves tient dans l'obligation de préciser systématiquement (et correctement) les *grandeurs* mises en jeu et d'indiquer à chaque fois, clairement, les unités auxquelles on a affaire. Tout l'enjeu du tableau est là et il convient donc obligatoirement de remplir soigneusement les cases, en exigeant toujours que l'élève précise bien que la donnée considérée se rattache à *tel objet* et à *telle grandeur*.

Ensuite une part indispensable du fonctionnement de l'échiquier tient dans les précisions supplémentaires qui doivent permettre de rapporter les données à leurs relations avec la situation décrite et avec les autres grandeurs mises en jeu. Ainsi il est clair que l'élève ne pourra pas trouver l'opération s'il ne prend pas garde aux informations comme : « il s'agit ici d'un poids *total* » ou « le prix dont il est question ici est un prix *unitaire*, car on parle d'un prix *par* gramme », etc., etc. C'est évidemment en acquérant une discipline inconsciente vis-à-vis de tels ingrédients de l'énoncé que l'on finit par devenir capable d'en "comprendre" la teneur et d'avoir une chance d'en trouver la solution...

II. — De l'échiquier à l'opération

a) *La recherche de l'opération*

On l'aura compris, le but des phases précédentes — traitées, dans notre esprit, d'une manière orale — est d'aboutir à un échiquier qui est censé résumer et structurer les éléments de l'énoncé que toute personne sachant trouver la solution a forcément dû prendre en compte pour parvenir à celle-ci. La réalisation concrète (corporelle ou écrite) d'un échiquier plus ou moins sophistiqué se limite évidemment à la période d'initiation, mais l'objectif recherché est bel et bien de donner à l'élève le réflexe (et le mécanisme inconscient) de *lire un énoncé* dans une optique qui parvienne, de façon analogue, à y rechercher systématiquement tous les ingrédients significatifs.

La deuxième étape indispensable au "métier" d'expert en problèmes concrets sera ensuite, naturellement, de parvenir à tirer profit des éléments ainsi rassemblés pour choisir le type d'opération à mettre en jeu. La question qui se pose donc inévitablement au maître est la suivante : « L'échiquier permet-il effectivement de trouver la solution ? ». La réponse à cette question est, dans un premier temps : « évidemment non ! », pour la bonne raison que chacun sait que n'importe quel "expert" finit toujours par trouver des énoncés qui lui paraissent difficiles, surprenants ou particulièrement retors… Ou, pour le dire autrement : parce que le métier d'expert en la matière repose essentiellement sur l'accumulation d'une expérience couvrant des types de problèmes de plus en plus nombreux, et donc sur l'enrichissement perpétuel de la "base de données" à laquelle nous faisions allusion plus haut… Nous conviendrons donc de reformuler la question sous une forme nettement plus modeste : « Dans quelle mesure l'échiquier permet-il effectivement *d'aider l'élève* à trouver la solution ? ». Et il n'est pas difficile alors d'observer que les élèves avec lesquels on la pratique manifestent un indéniable intérêt pour cette manière de procéder. Nous allons essayer d'expliquer ce qui nous semble efficace pour ces élèves.

Une fois accomplie l'étape de construction de l'échiquier rassemblant toutes les données

Encadré 4. Simplification de l'échiquier associé au problème de Damien.

	Colonne du *romarin*	Colonne de la *menthe*
Ligne des <u>poids</u>	<u>Poids</u> **total** du *romarin* : 20 g	<u>Poids</u> **total** de la *menthe* : 9,6 g
Ligne des <u>*prix unitaires*</u>	<u>*Prix d'**un***</u> gramme de *romarin* : 0,02 €	
Ligne des <u>nombres</u>		<u>Nombre</u> **total** des feuilles de *menthe* : 3

du problème, on peut dire que la phase de résolution proprement dite commence avec la lecture de la (ou des) question(s) posée(s)par l'énoncé. Il est clair sur l'exemple du problème de Damien développé précédemment que, dans la mesure où la question est : « Quel est le prix du romarin ? », il n'y a qu'une partie de l'échiquier à prendre en compte et qui se résume à la portion utile de la première colonne (cf. encadré 4).

Il est inutile de préciser, évidemment, que si la question avait été : « Quel est le poids total des ingrédients ? », il convenait de conserver uniquement les éléments du tableau correspondant à la première ligne… De même que la question : « quel est le poids d'une feuille de menthe ? » demande d'extraire l'échiquier simplifié ci-contre.

On voit donc que le premier rôle de la représentation sous forme d'échiquier est de permettre de *visualiser* la restriction des données opérée pour la résolution. On a là un exemple de "données inutiles", mais l'ensemble devient encore plus opérationnel dans le cas d'un énoncé à questions multiples, enchaînées ou non, voire dans le cas où l'élève est confronté à la nécessité de créer lui-même des questions intermédiaires.

Toutefois, par delà cet aspect relatif à la structure interne de chaque énoncé particulier, il nous est apparu à l'usage que l'échiquier simplifié attaché à une question isolée est, presque à lui seul, susceptible de "souffler" à l'élève la bonne opération à effectuer. Nous pouvons en effet énoncer une règle importante au niveau d'une première approche des problèmes dits concrets : un échiquier "ligne" correspond à une addition ou une soustraction, un échiquier "colonne" correspond à une multiplication ou à une division.

Encadré 5. … poids d'une feuille de menthe ?

	Colonne de la *menthe*
Ligne des <u>poids</u>	<u>Poids</u> **total** de la *menthe* : 9,6 g
Ligne des <u>nombres</u>	<u>Nombre</u> **total** desfeuilles de *menthe* : 3

Il ne s'agit certes pas là d'une règle absolue, car elle admet d'assez nombreuses exceptions sur lesquelles nous reviendrons plus loin. Néanmoins, elle fonctionne nécessairement (pour tout "expert") au cours de la première analyse qu'il opère face à l'énoncé et, comme on le verra, les situations où la "règle" demande à être transgressée, correspondent précisément aux cas où les problèmes commencent à sortir du cadre des problèmes concrets "de la vie quotidienne"…

Schématiquement, la "règle" dit donc : « lorsque l'échiquier simplifié est un échiquier-ligne, la question met en jeu deux "objets" et une même grandeur : on doit normalement avoir affaire à une addition ou à une soustraction ; lorsque l'échiquier simplifié est du type échiquier-colonne, la question porte sur un seul objet et fait appel à deux grandeurs différentes : on va normalement devoir faire appel à une multiplication ou à une division ». Elle n'est en rien absolue, mais elle correspond, *au niveau de l'action*, aux deux pistes qu'il convient absolument d'explorer en première analyse. La suite de la recherche consistera justement à prendre en compte, dans chacun des cas, les indices supplémentaires permettant de discriminer plus avant l'opération à effectuer… ou même éventuellement à démentir une première impression qui demande à être abandonnée.

Nous touchons là au "métier" que l'on cherche à faire acquérir à l'élève : à lui de tenir compte des mots plus ou moins apparents et plus ou moins déterminants recélés par l'énoncé, à lui de s'approprier suffisamment de situations-types auxquelles il se rattachera par analogie, à lui de se forger une expérience dans la variété infinie des problèmes que l'école lui propose ! Nous renvoyons le lecteur à [4] pour une étude détaillée de bon nombre d'exemples et une ébauche de classification.

On trouvera un exemple de situation additive dans l'encadré 6 et nous allons simplement tenter ici de décrire d'un peu plus près le fonctionnement de la résolution dans le cas de la division.

b) *Un exemple de division*

Reprenons par exemple le "problème de Damien" avec la question citée plus haut : « Quel est le poids d'une feuille de menthe ? », qui a fourni l'échiquier-colonne simplifié de l'encadré 5. Si nous acceptons la règle précédente, nous savons qu'il s'agit d'une opération "multiplicative" au sens large, c'est-à-dire que nous devons encore déterminer s'il convient de faire une multiplication ou une division et, dans le cas de la division, s'il nous faut diviser 9,6 par 3 ou le contraire… Le présent exemple semble évidemment couler de source mais, comme chacun peut l'observer aisément, c'est un obstacle majeur lorsque les ordres de grandeurs des nombres mis en jeu attirent irrémédiablement vers une division plutôt que l'autre parce qu'elle paraît plus simple ! Ainsi, même dans une "bonne classe" de sixième, il n'est absolument pas rare qu'un exercice comme : « Kevin achète 12 crayons pour 8 euros, quel est le prix d'un crayon ? » entraîne la réponse « 12 divisé par 8 »…

Les indices qui doivent permettre à l'élève de trancher sont de deux ordres : d'une part le sens du texte et la "logique" de la situation étudiée, et d'autre part les contraintes induites par les unités attachées aux grandeurs manipulées. On se trompe lourdement si l'on croit trop rapidement que ces deux types de paramètres sont manipulés aisément par les enfants, et même par les "bons" élèves. Il est vrai que ceux qui trouvent ont effectivement "senti" les éléments qui sont déterminants, mais ils sont bien loin, pour autant, de pouvoir mettre le doigt sur ce qui les a réellement aidés, qu'il s'agisse d'ailleurs des références de nature linguistique au texte de l'énoncé ou qu'il s'agisse des rapports mathématiques entre les unités.

Pour creuser un peu notre exemple, on notera qu'au niveau sémantique lui-même, le texte demande déjà un minimum de métier pour être compris : la phrase « […] avec 3 feuilles de menthe de son jardin pesant 9,6 grammes » est quelque peu ambiguë. Littérairement parlant, en effet, on pourrait tout aussi bien y lire que le « 9,6 grammes » est le poids d'une feuille ou le poids de l'ensemble des trois feuilles… mais avec un peu d'habitude, l'élève est censé comprendre qu'il s'agit forcément de la seconde hypothèse, dans la mesure où, premièrement, il aurait été écrit « …pesant 9,6 grammes *chacune* » s'il avait fallu préciser rigoureusement que l'on parlait du poids unitaire et, deuxièmement, que la question « Quel est le poids d'une feuille de menthe ? »… obligerait évidemment, s'il en était encore besoin, à éliminer cette lecture parasite !

Cela étant, il est clair que l'élève doit trouver dans le texte les indices de "sens" qui l'améneront vers la bonne division : les questions mêmes que nous venons d'évoquer imposent naturellement (implicitement ou non) que ce que l'on cherche est une "grandeur unitaire" et nous sommes ici dans un cas relativement simple de division "partition" puisque le diviseur (qui exprime un *nombre total de feuilles*) est donné dans une unité particulièrement "naturelle".

Ainsi, si nous avons affaire à la question « quel est le prix du romarin ? » l'élève doit se sentir dans la situation "basique" : « je cherche un *prix total* connaissant un *prix unitaire* » et, si nous avons affaire à la question « quel est le poids d'une feuille de menthe ? », l'élève doit se ramener à : « je cherche un prix unitaire connaissant un *poids total* et un *nombre total* de feuilles ». C'est-à-dire que ses réflexes doivent le guider, à partir de l'échiquier, à des situations "paradigmatiques" du corpus d'exercices qu'il a déjà rencontrés. Tout cela au sens même où l'on peut considérer, en grammaire, que le cas du verbe "chanter" permet de retrouver la conjugaison de n'importe quel verbe du même (premier) groupe.

Bien entendu, la situation de la division peut devenir largement plus complexe et il nous faut signaler, sans entrer dans les détails, que (contrairement au cas des problèmes additifs) il y a — comme le soulignait Lacroix — un intérêt manifeste à la présence de "nombres concrets", c'est-à-dire aux informations qui sont présentes dans l'énoncé à travers les unités.

Indépendamment en effet, des règles du type de celles auxquelles nous venons de faire allusion (*prix total = poids total* fois *prix unitaire*, etc.) l'observation des unités de chaque ligne et de l'unité attendue dans le résultat *suffit théoriquement à déterminer l'opération*. C'est ce que l'on appelle habituellement "l'équation aux dimensions", qui est très utile en physique à partir du lycée, et qui peut "souffler" aussi à l'élève le type d'opération nécessaire. Ainsi : [kilo] fois [euros *par* kilo] donne [euros] sur le modèle, évidemment de $K \times (E/K) = E$…

Nous sommes cependant au niveau du collège (voire de l'école primaire) et il est difficilement question de faire appel au formalisme littéral qui serait mis en jeu par "l'équation aux dimensions". Il n'en reste pas moins que les problèmes "concrets" font appel à de nombreuses *grandeurs quotients* et que l'élève doit apprendre à les gérer, non pas tant au niveau de l'usage des lettres, mais au niveau "sémantique". Ce qui correspond à trois cas :

a) le cas des grandeurs quotients qui ont reçu un nom : *vitesse*, *débit* ou (plus tard) *intensité*, *puissance*… Si une telle grandeur est explicitement dans la question (par exemple : « quelle est la vitesse du véhicule ? »), l'élève doit lui-même savoir l'unité à utiliser. Si cette grandeur est introduite dans l'énoncé, celui-ci donne une aide importante en précisant généralement l'unité-quotient (exemple : « le véhicule roule à 90 km *par* heure… » ramène à des paradigmes du même groupe…),

b) le cas des grandeurs quotients qui sont couramment utilisées mais n'ont pas de nom particulier : "prix au kilo", "prix au litre", ou même "masse volumique", etc. Ici l'élève doit comprendre le sens courant des données mais

Encadré 6. Un exemple de problèmes additifs.

Considérons les deux énoncés suivants :

1. — *Madame Coquette fait un régime amaigrissant. Elle a maigri de* 9,250 kg. *Elle pesait* 62,750 kg *avant le régime. Quel est son poids actuel ?*

2. — *Madame Coquette fait un régime amaigrissant. Elle a perdu* 9,250 kg. *Elle pèse maintenant* 53,500 kg. *Quel était son poids avant son régime ?*

Ces deux problèmes sont très révélateurs des difficultés de lecture des élèves. A la première lecture, ceux-ci disent immédiatement que c'est le *même* problème ! C'est l'écriture des échiquiers, qui demande un approfondissement de la lecture et un véritable jeu sur les mots, qui sera le vrai déclencheur de la *bonne opération*.

En effet, il faudra d'abord inventer la colonne de "l'amaigrissement" qui n'est pas dans le texte, l'autre case se remplissant avec "Poids de Mme Coquette avant le régime" ou "Poids de Mme Coquette après le régime", la notion d'antériorité étant essentiellement déterminée au niveau sémantique, notamment, ici, par le choix des temps utilisés dans l'énoncé : "pesait", "pèse" et "était".

Echiquier 1

	colonne de *l'amaigrissement*	colonne de *Mme Coquette avant régime*
Ligne des <u>poids</u>	<u>Poids</u> perdu pendant *l'amaigrissement* : 9,250 kg	<u>Poids</u> de *Mme Coquette avant régime* : 62,750 kg

Echiquier 2

	colonne de *l'amaigrissement*	colonne de *Mme Coquette après régime*
Ligne des <u>poids</u>	<u>Poids</u> perdu pendant *l'amaigrissement* : 9,250 kg	<u>Poids</u> de *Mme Coquette après régime* : 53,500 kg

Remarque : Comme l'on sait ce type d'obstacle est particulièrement redoutable pour les élèves. Comme il est dit dans le texte, le cas des problèmes multiplicatifs amène à prendre en compte (en plus du niveau proprement sémantique) les informations fournies par les unités. Ce n'est plus le cas pour les situations additives, mais on peut en revanche chercher à instituer systématiquement — en plus de l'entrée "langagière" décrite ici — une référence à des situations géométrisées "types" qui aident à traduire la situation "par un dessin" et donc à trancher plus aisément entre addition et soustraction.

il est en fait en possession de toutes les informations nécessaires à partir des unités,

c) le cas des grandeurs quotients "non homologuées" en tant que telles, comme celle que nous venons de voir : "poids *à la* feuille", ou évidemment comme "poids *d'une* pomme", "prix *à la* pièce"… Ces situations fonctionnent comme dans le cas de la menthe : l'unité peut en définitive s'exprimer simplement en tant que "nombre" et une "ligne des nombres" est généralement suffisante pour assurer la gestion du sens…

Terminons par exemple avec une "division quotition" qui apparaît dans des problèmes du type : « J'ai acheté pour 25 euros d'un tissu qui coûte 1,50 euros le mètre. Quelle longueur ai-je achetée ? ». L'échiquier est relativement simple : une colonne correspondant au tissu et deux lignes permettant de placer les deux données numériques. La difficulté « sémantique » est évidemment de détecter parmi les deux nombres exprimés en euros une unité qui correspond à un prix (qui sera donc un "prix total") et une unité qui correspond à un "prix *par* mètre" (qui sera donc un "prix unitaire"). Il restera à comprendre (parce qu'on l'aura appris sur des exemples plus simples…) qu'il s'agit alors de chercher le « nombre de fois où le prix d'un mètre est contenu dans le prix total », avec une "équation aux dimensions" du type : E / (E / m) = m dont on comprend aisément à quel point elle est conceptuellement compliquée pour n'importe quel élève…

III. — Limites et prolongements

a) *Du concret au mathématique...*

Evidemment le maître (et particulièrement le professeur de maths) a souvent tendance à réduire le champ de cette problématique du choix de l'opération en disant : « ici je fais une division car le problème m'amène à chercher "combien de fois" je peux mettre telle chose dans telle autre », ou « ici je fais une soustraction parce que je dois chercher ce qui manque pour aller de ceci à cela », etc., etc. (Et encore admettons-nous qu'aucun n'a sérieusement envisagé de se contenter de dire : « *Le système étudié est décrit par trois variables* […]. *La connaissance de la valeur cherchée s'obtient par la considération des relations qui gouvernent l'ensemble des variables.* ») Mais la raison même de toute la réflexion dont il est question ici réside dans la constatation que ce genre de justification est, le plus souvent, le résultat d'une reconstruction *a posteriori* qui sert surtout à légitimer *dans un second temps* une intuition immédiate déclenchée par la lecture de l'énoncé. Elle réside aussi dans le fait qu'il n'y a pas besoin d'une expérience prolongée d'enseignement de la résolution de problèmes pour observer que ce genre de discours constitue bien rarement une explication efficace pour les élèves qui n'ont pas eu, d'eux-mêmes, le pressentiment de la bonne opération à faire…

Le jeu auquel nous nous sommes intéressés est donc avant tout de ne pas se contenter de ce genre d'explications, mais de chercher des éléments *objectifs* dans la structure des données (mises ici sous forme de tableau) qui permettent de discriminer les opérations à faire, même si cela ne semble pas toujours pouvoir s'inscrire dans un discours parfaitement cohérent, prouvant comme une démonstration pleinement argumentée que l'opération à faire est celle-ci plutôt que celle-là.

Si l'on revient, pour commencer, sur la "règle non absolue" que nous avons évoquée plus haut et qui permet de guider la résolution vers une opération de type additif ou multiplicatif, la situation véritable est en fait que l'on peut (et que l'on doit) énoncer deux règles :

règle 1 : un problème additif correspond à un "échiquier-ligne",

règle 2 : un "échiquier-colonne" correspond à un problème multiplicatif.

Dès lors, si la *règle* 2 fonctionne bien comme une règle d'action, la *règle* 1 en revanche ne peut permettre de discriminer l'opération. Elle ne peut que fournir un indice dont on doit apprendre à maîtriser les "exceptions" si l'on veut l'inscrire dans un processus d'expertise en matière de résolution de problèmes. On notera d'ailleurs que le problème de *l'âge du capitaine* ne fonctionne pas autrement que par détournement de la *règle* 1 ! Celle-ci dit tout simplement que lorsque l'on a affaire à une addition ou a une soustraction on doit manipuler une seule grandeur, donc n'avoir qu'une seule ligne en termes d'échiquiers… mais la découverte d'une seule et même ligne dans l'énoncé conduit ici à l'intuition erronée d'une addition, alors que rien ne la justifie…

Cela posé, l'élève doit donc apprendre (par l'expérience) que la *règle* 1 n'est pas une condition suffisante, car il existe en fait toute une catégorie de problèmes qui s'expriment sous forme d'un échiquier-ligne (deux "objets" pour une même "grandeur"), alors qu'il amènent en réalité à une multiplication ou à une division. Ce qui est particulièrement intéressant à cet égard, c'est qu'il ne nous semble pas illégitime de résumer la situation en considérant que :

— d'une part les problèmes concrets les plus élémentaires (disons ceux "de la vie quotidienne") supportent largement une réciproque de la *règle* 1 au nom de laquelle une situation d'échiquier-ligne induirait "automatiquement" une opération additive,

— d'autre part, *dès que le problème commence à sortir du contexte des situations simples* et met en jeu des notions "mathématiques" plus savantes, la solution réclame alors un "niveau de culture" qui amène à opérer multiplicativement (au sens large) sur des grandeurs de même nature.

En d'autres termes : la résolution de problèmes concrets ne peut évidemment se contenter de "comprendre l'énoncé" — même au sens particulièrement sophistiqué avec lequel nous avons fait appel à ce mot jusqu'ici — sans amener l'élève à sortir de ce registre simple à partir d'un certain niveau. Une simple boutade suffirait à le montrer : si le problème fait appel au volume d'une pyramide, même insérée dans une histoire de plus de quarante siècles, il est clair que l'opération qui donne le résultat ne relève plus simplement de la seule lecture réussie de l'énoncé ! Nous insisterons uniquement ici sur deux exemples particulièrement importants au niveau de l'école et du collège : celui des aires et proportions.

Une situation aussi simple que celle qui consiste à trouver *l'aire d'un rectangle* fournit un premier exemple intéressant d'un échiquier-ligne qui débouche sur une multiplication… En effet, dans la mesure où on a affaire à une seule grandeur et une seule unité pour mesurer les deux côtés du rectangle, il semble naturel de constituer un échiquier avec une ligne des "longueurs" et deux colonnes, l'une pour la largeur et l'autre pour la longueur du rectangle ; celui-ci n'en conduira pas moins à une multiplication. On peut certes forcer la présentation en échiquier-colonne (la "colonne du rectangle") et en se donnant deux lignes (l'une pour la grandeur "largeur" et l'autre pour la grandeur "longueur") et on aboutit à un échiquier multiplicatif :

	Colonne du *rectangle*
Ligne des largeurs	Largeur du *rectangle* : 3,2 m
Ligne des longueurs	Longueur du *rectangle* : 7 m

Toutefois cela revient à transgresser les contraintes sur les unités : non seulement la même unité figure dans deux lignes différentes, mais on se trouve, en plus, confronté à une situation multiplicative qui ne fait pas appel à des unités-quotients. (On notera cependant que le problème "inverse" du type : « je connais l'aire d'un rectangle et sa longueur, je dois trouver sa largeur » fonctionne bien comme un échiquier-colonne, en observant que *mètres-carrés* et *mètres* sont dans un rapport — pas forcément surprenant… — d'unité et d'unité-quotient.)

On arrive au même genre de difficulté avec les problèmes de "proportions", car chercher (par exemple) le rapport entre deux éléments d'un mélange conduit à un échiquier débouchant sur une division, mais qui relève strictement des mêmes difficultés ; la seule différence est que le résultat n'est plus un nombre "concret" auquel serait attaché une unité nouvelle permettant de mesurer la nouvelle "grandeur" aire (le mètre-carré), mais que la situation oblige cette fois à fréquenter un nombre "pur" qui traduit un "rapport"…

On notera, sur le plan didactique, que ce genre d'observation permet de voir comment, en termes d'échiquiers, il devient possible de caractériser la difficulté — en quelque sorte structurale — qui s'attache aux problèmes mettant en jeu des fractions ou des pourcentages. L'obstacle lié à ces "nombres" ne vient peut-être pas tant de leur complexité (ou de leur nouveauté) au niveau algébrique, mais au contraire de leur nature nécessairement "abstraite" au sens où un nombre "concret" peut se rattacher à la présence (explicite ou non) d'unité, que celle-ci serve d'ailleurs à exprimer un nombre de mètres, de litres, d'euros, de barils… ou de feuilles de menthe.

On notera aussi, sur le plan épistémologique cette fois, que les deux types d'énoncés que nous venons de citer sont précisément ceux où l'on va retrouver les problématiques explorées par les Grecs au niveau de la *définition même* des opérations : la multiplication par les aires et la division par les proportions. Nous n'insisterons pas sur ce point, mais il nous semble particulièrement intéressant de remarquer que nous sommes placés ici au croisement même des trois grandes questions liées à l'introduction des nombres : le nombre et les opérations doivent-ils être introduits en partant de ce qui est familier à la manière dont nous proposons de procéder ici ? doivent-ils naître au contraire de la géométrie à la manière antique, en apparaissant alors comme des exceptions dans le présent discours ? doivent-ils enfin être introduits "pour eux-mêmes" à la façon algébrique et abstraite pour laquelle la période des maths modernes avait opté avec enthousiasme ?

b) *Quelques pistes*

Sans aller plus avant dans ce genre de problématique, nous voudrions, pour terminer, montrer comment la pratique des échiquiers nous semble permettre aux élèves de progresser à partir des résolutions de problèmes. L'élément sans doute le plus central de la méthode que nous venons de décrire nous paraît résider dans l'importance qu'elle donne à la *lecture*.

Il ne s'agit pas ici de prôner à toute force l'utilisation de la méthode dans tout ce qu'elle comporte au niveau oral et au niveau de la mise en scène dans l'espace de la classe... C'est évidemment là une facette qui n'est pas aisément transposable, dans la mesure où elle met énormément en jeu la personnalité et les goûts du professeur. Nous tenons cependant à insister sur le fait que toute résolution de problème repose d'une part sur une lecture "intelligente" de l'énoncé et, d'autre part, sur un traitement analogique de celui-ci au sens même de certains aspects explorés par tous ceux qui s'occupent d'intelligence artificielle. L'élève doit être capable d'extraire de sa lecture des caractères structurels qui lui permettront de s'orienter dans le corpus de problèmes dont il dispose ; il doit ensuite être capable d'adapter correctement la réponse "de référence" aux données que lui a fournies l'énoncé. On apprend assez vite, lorsque l'on est professeur que c'est pratiquement toujours ce type de compétence qui fonctionne chez les élèves qui trouvent la réponse... Les "bons" élèves sont ceux qui n'ont pas besoin de refaire un grand nombre de fois un exercice donné pour être capable de le transposer dans les cas analogues ; les "très bons" sont simplement ceux qui peuvent se contenter de l'avoir fait une fois pour pouvoir en tirer parti au moment voulu...

Mais ne pas mettre en jeu les aspects "oraux" et particulièrement "coopératifs" qui paraîtraient superfétatoires ne doit pas dispenser de mettre l'accent sur la lecture et sur l'échiquier qui en découle. On observe très vite avec les élèves que les difficultés "objectives" d'un problème se traduisent immanquablement dans la difficulté de construire l'échiquier, c'est-à-dire d'en choisir les lignes et les colonnes(*). Considérons l'énoncé : « Bruno pèse 42,5 kg. Julien pèse 2,7 kg de plus que Bruno. Quel est le poids de Julien ? ». Le tri préalable des données oblige le lecteur à placer deux données qui correspondent à une *même grandeur*, et la contrainte suivante sera de *mettre un nom* sur chacune des deux colonnes : "colonne de Bruno" et "colonne de Julien par rapport à Bruno". Le fait que l'on a affaire à un "échiquier-ligne" amène naturellement à tester l'hypothèse d'une opération additive (au sens large) et donc à chercher les indices permettant de choisir entre addition et soustraction... Or, comme l'on sait, le résultat serait complètement différent avec l'énoncé : « Bruno pèse 42,5 kg. Il pèse 2,7 kg de plus que Julien. Quel est le poids de Julien ? ». Enoncé qui contient le *même indice apparent* constitué par la présence du « de plus que », mais qui doit induire une soustraction... et entraîne de ce fait un grand nombre d'erreurs !

L'expérience des échiquiers n'apporte évidemment pas de solution miracle, mais propose un double élément de réponse à la ques-

(*) Il est clair que, pour l'échiquier, le professeur peut se contenter de l'écrit. On notera cependant que le fait de le réaliser "dans la classe" oblige l'élève à intégrer différemment (et corporellement) sa structure. On notera aussi que le fait **que c'est un élève qui "porte chaque donnée"** confère à celle-ci un statut plus large que le nombre concerné et, pratiquement, revient à opérer ensuite dessus comme avec des lettres... A l'expérience, ce phénomène semble aider certains élèves dans le passage d'un type de nombre à un autre et (plus tard) à l'algébrisation, qui consistera à utiliser la lettre "x" pour remplacer des données absentes, mais nécessaires pour établir l'équation...

tion de savoir comment aider l'élève à surmonter ce genre d'obstacle : d'abord la *discipline de l'échiquier* force à structurer le plus consciemment possible les données, et ensuite l'obligation de *nommer* les lignes et les colonnes amène à préciser, par exemple, « supplément de poids *de Julien par rapport à Bruno* » ou « supplément de poids *de Bruno par rapport à Julien* » ce qui semble aider véritablement l'élève à *prendre correctement en compte* l'information contenue dans le problème (voir aussi l'encadré 6). Cette phase d'apprentissage, nécessairement limitée dans le temps en fonction des facilités de chaque enfant, constitue donc à nos yeux une initiation effective à la lecture d'énoncé durant laquelle l'élève trouve les moyens d'acquérir peu à peu une véritable *méthode*.

Actuellement, il nous apparaît que cette phase doit durer tant que l'élève a besoin de se raccrocher aux échiquiers pour surmonter telle ou telle difficulté ponctuelle. Mais en tout état de cause, l'appel à l'échiquier demande à être supplanté progressivement par l'acquisition d'une culture qui amènera plus à en rencontrer les exceptions (au sens envisagé plus haut) que les cas directs les plus élémentaires. Globalement, le "bout de la méthode" pourrait être fixé au moment de l'introduction des problèmes de proportionnalité. En effet comme tout "problème d'expert" tel que ceux que nous avons signalés à propos des calculs d'aires ou de calculs avec des rapports, les problèmes de proportionnalité finissent par relever d'un traitement spécifique (règle de trois, tableau de proportionnalité, produit en croix, etc.) qui amène à quitter le registre propre au langage des échiquiers. On trouvera dans l'encadré 7 de la page suivante une analyse succincte de la manière dont les problèmes classiques de "quatrième proportionnelle" illustrent assez bien la puissance (et aussi les limites...) de l'entrée dans la résolution de problèmes par la présente méthode...

Un dernier aspect qui nous paraît important (et qui est d'ailleurs en phase avec les nouveaux programmes) résulte du fait que mettre l'accent sur ce genre d'apprentissage permet concrètement d'inscrire la construction du numérique en harmonie avec la résolution de problèmes.

Il est clair en effet que le but poursuivi est de fournir à l'élève des problèmes et des situations "paradigmatiques" au sens évoqué précédemment et que si — dans l'idéal — il devient capable de rapporter, par analogie de structure, une "situation-problème" donnée à la situation de référence convenable, il devient par là-même capable de dépasser la difficulté qui résulte de la complexité des nombres mis en jeu. On retrouve, si l'on préfère, la problématique précise que Lacroix développait en 1805 dans l'extrait que nous avons cité en introduction : 1) être capable de saisir une situation concrète avec des nombres familiers et d'en conclure correctement l'opération à effectuer, 2) être capable de ramener une situation donnée à la situation analogue que l'on connaît. Ceci implique alors l'irrésistible besoin de pratiquer la même opération, même si les nombres dont il est question ne sont pas de la même nature que ceux sur lesquels on a appris à opérer jusque-là, et auxquels il faudrait en toute rigueur se cantonner ...

C'est indéniablement s'il a réellement "eu envie de les faire" pour extrapoler des exemples qu'il a déjà pratiqués que l'élève apprendra de façon sûre les opérations sur des nombres tels que les fractions, les décimaux, les irrationnels, les relatifs... ou même les lettres ! L'histoire — et tout particulièrement celle des nombres négatifs

Encadré 7. Vers la proportionnalité

Les problèmes classiques de « quatrième proportionnelle » font partie des énoncés à trois données et une question qui nécessitent une question intermédiaire. Intéressons-nous à l'exemple suivant :

« *A la coopérative, un paquet de* 6 *cahiers coûte* 7,20 € .
Kevin veut acheter 4 cahiers. *Quelle sera sa dépense ?* »

Dès que l'on propose ce problème, l'élève entraîné à la méthode des échiquiers va tenter d'en construire l'échiquier global. Il va se heurter à une difficulté imprévue : *il y a deux données dans la même unité pour le même objet*. Ainsi la "ligne des nombres" doit accueillir 6 et 4 dans la colonne attachée aux cahiers... Cette difficulté constitue un indice pour repérer cette variété de problèmes. Il faudra transgresser les "règles de base" et cela pourra se faire de deux façons différentes :

— soit on dédouble la colonne des cahiers en construisant une colonne des "cahiers" et une colonne des "cahiers de Kévin",

— soit on dédouble la ligne des nombres en faisant apparaître la ligne des "nombres" (en général) et la ligne des "nombres en particulier", avec l'avantage d'obtenir un échiquier colonne qui induira plus facilement la division et la multiplication nécessaires à la résolution…

Dans l'un comme dans l'autre cas, le travail qui suit l'élaboration de l'échiquier reste complexe : il faut extraire les données conduisant au calcul du retour à l'unité après avoir inventé la question intermédiaire puis réintroduire ce résultat dans le calcul final.

	Colonne des cahiers	Colonne des cahiers de Kevin
Ligne des prix	Prix total des cahiers : 7,20 €	
Ligne des nombres	Nombre total de cahiers : 6	Nombre de cahiers de Kevin : 4

	Colonne des cahiers
Ligne des prix	Prix total des cahiers : 7,20 €
Ligne des nombres	Nombre total de cahiers : 6
Ligne des nombres en particulier	Nombre particulier de cahiers : 4

S'il choisit la première méthode (échiquier à deux lignes et deux colonnes), l'élève doit extraire un premier échiquier correspondant à la question intermédiaire « Quel est le prix à l'unité ?», qui correspond donc à la première colonne et mène naturellement à une division. Il lui restera à "injecter" ce résultat dans la deuxième colonne pour aboutir au nouvel énoncé : « Un cahier coûte 1,20 € , combien coûtent 4 cahiers ? ». S'il choisit la seconde méthode (échiquier-colonne), il doit extraire d'abord la structure qui lui est familière (ne contenant pas le mot "particulier"), il est ainsi ramené à la même question intermédiaire et termine le problème comme précédemment, à ceci près qu'il doit opérer le glissement sémantique du mot "particulier" au mot "total".

L'expérience montre qu'un tel travail, effectué en fin de sixième, ne porte vraiment ses fruits qu'en début de cinquième. On notera cependant que la première méthode, si elle ne gomme pas toutes les difficultés, présente la caractéristique d'introduire une structure d'échiquier qui n'est autre que celle des *tableaux de proportionnalité*. On peut donc penser qu'en trouvant, en quelque sorte, sa limite de complexité à propos de ce type de problème, la méthode des échiquiers constitue une préparation légitime à l'étude classique de la proportionnalité sous forme de tableaux.

(On trouvera une discussion plus approfondie sur ces questions dans la référence [4]) ou des nombres complexes — n'illustre pas autre chose : la rigueur ou *les méthodes,* comme disait Nietzsche, *viennent à la fin*. On prendra cependant garde, en l'occurrence, à l'ordre des étapes. Ce n'est que si l'élève est suffisamment à l'aise avec toutes les opérations sur les nombres simples que les situations-problèmes seront susceptibles de le guider vers des nouveaux horizons numériques. Si ce n'est pas le cas, c'est l'inverse qui risque fort de se produire : il aura tout simplement tendance à ramener le plus vite possible les énoncés vers les opérations dont il a l'illusion de connaître le sens ; alors ce sont essentiellement celles qui lui paraissent les plus faciles à pratiquer dans les cas familiers qui serviront *d'attracteurs* et qui perturberont systématiquement la lecture d'énoncé.

On l'aura compris, notre propos à travers l'analyse de cette méthode n'est rien d'autre que d'attirer une fois de plus l'attention sur l'importance de la fréquentation des problèmes, que ce soit dans l'apprentissage du raisonnement ou dans l'introduction du numérique. Mais, parallèlement, nous espérons surtout avoir mis l'accent sur les difficultés intrinsèques à une telle fréquentation... et précisément parce que celle-ci met en jeu rien moins que tout l'apprentissage des mathématiques.

Partir de la lecture d'énoncé à la manière dont nous le suggérons ici, relève évidemment d'un choix. Celui de l'amélioration de la maîtrise de la langue naturelle bien sûr, mais aussi celui d'une entrée "épistémologique" de type "concret" pour aider les enfants à entrer dans l'univers des mathématiques. Comme nous l'avons signalé plus haut, les choix sont loin d'être simples en la matière et il n'est pas déplacé de considérer que les choix de l'institution et des programmes manifestent une instabilité notable entre les trois pôles rencontrés ici à propos des échiquiers-lignes. Hésitation perpétuelle, en quelque sorte entre le concret et l'abstrait, entre l'entrée du formalisme et l'entrée des applications.

La période des années soixante-dix a beaucoup trop investi sur l'illusion des mathématiques comme "langage universel" et sur l'idée que l'élève serait capable de se le construire à partir du champ offert par la théorie des ensembles. C'était négliger le fait qu'il ne suffit pas de définir les objets mathématiques, mais qu'il faut les retourner dans tous les sens si l'on veut être capable de les appliquer. C'était oublier le fait qu'un "langage" n'est jamais construit par un individu mais par une communauté d'individus, ou, si l'on préfère, qu'on ne se "construit" pas un langage, ni même que l'on ne se "reconstruit" pas un langage, mais qu'on se *l'approprie* peu à peu en le pratiquant avec ceux qui le connaissent…

L'idée de "modélisation" qui semble aujourd'hui à l'ordre du jour (et c'est un euphémisme…) peut se révéler comme la meilleure et la pire des choses. La meilleure s'il s'agit de maîtriser correctement l'usage que peuvent faire des mathématiques ceux qui les connaissent déjà et qui veulent les appliquer du mieux possible à des situations intéressant les autres disciplines ; la pire s'il s'agit de croire que la découverte et la compréhension des phénomènes relèvent, au début, du principe qui consisterait à invoquer des concepts abstraits d'une façon parfaitement lucide. L'histoire de la connaissance montre au contraire à l'évidence que les concepts ne se précisent que dans des phases ultérieures, et que des notions comme les notions mathématiques sont justement de celles qui demandent une longue fréquentation et une prise de recul suffisantes.

De même, l'introduction des écritures de calculs avec unités — outre qu'aujourd'hui on s'échine de manière assez surréaliste à la relier didactiquement avec les produits tensoriels — risque fort de se révéler plus néfaste que constructive, car si le retour aux "nombres concrets" semble légitime pour la compréhension, la gestion trop pointilleuse d'un formalisme supplémentaire peut, en revanche, amener des dérives qui viendront automatiquement obscurcir les situations qu'on prétend éclairer.

Comme nous avons essayé de le montrer, le "sens des opérations" nécessite un véritable apprentissage. Cet apprentissage demande — de la part de l'élève — une maîtrise efficace de la langue et l'acquisition d'une solide expérience ; il exige aussi — de la part du maître — une réflexion approfondie sur les obstacles à surmonter. Nous espérons que l'expérimentation que nous venons de décrire et d'analyser en a illustré une partie intéressante mais nous ne doutons pas, malheureusement, qu'elle n'en a livré qu'une petite partie…

Les compétences demandées à l'élève en la matière sont énormes et nous ne voudrions pas que l'on pense que l'entrée "concrète" que nous tentons de mettre au point laisse croire que, dans notre esprit, l'apprentissage se limite à la résolution d'un corpus figé de problèmes. Derrière toutes ces démarches, ce sont les mathématiques qui sont visées, avec tout ce qu'elles nécessitent comme capacités à s'appliquer à des situations problématisées, mais aussi avec tout ce qu'elles exigent comme facultés pour jouer avec des symboles assez puissants pour fournir les solutions des problèmes.

Avant même de trouver des enfants qui ne savent pas résoudre des problèmes simples appelant la bonne opération, il n'est pas rare d'en trouver qui auront toutes les peines du monde pour admettre que $4 + 3 = 7$ … Ils sont certes capables de "compter", c'est-à-dire de réciter la comptine qui permet de savoir combien on a d'objets à compter, mais ils ne parviennent pas à pénétrer dans "l'univers des nombres" et des opérations simples qui permettent précisément de ne plus toujours avoir à compter car certains regroupements économisent le travail. C'est que, pour cela, il faut accepter de faire confiance aux nombres comme à des "trucs" qui ont une existence propre, indépendante des situations particulières dans lesquelles on leur demande juste de donner le résultat d'un comptage. Et ces enfants là vont rester plus longtemps que les autres dans la phase où le "signe" (ou le "symbole", si l'on préfère) ne parvient pas à prendre d'existence propre dans leur tête. Pour le dire autrement : ils parviennent à "compter sur leurs doigts" chaque fois qu'on leur souffle de le faire, mais ils ne le font pas d'eux-mêmes : ils ne passent à un stade supérieur que s'il arrive quelque chose qui finisse par les débloquer, qui les fasse "passer de l'autre côté du miroir".

Si les mathématiques sont un langage et si ce langage est réellement efficace pour comprendre le monde, il faut, pour le maîtriser, être capable de l'utiliser de manière naturelle — inconsciente — dans les situations pour lesquelles il a été forgé, il faut aussi devenir capable de jouer avec les signes comme s'ils avaient une existence indépendante du monde réel et de leur signification originelle. Pas plus que l'on ne peut aboutir à une certaine maîtrise de la langue naturelle si l'on ne se met pas un tant soit peu à "aimer les mots", on ne peut progresser en calcul et en maths si on n'a pas un peu le goût des nombres et du jeu avec les nombres… C'est-à-dire, au fond, le goût de "l'abstraction". Mais on se gardera bien d'oublier en la matière les conseils du *Dictionnaire de pédagogie* de 1887 :

> « […] pour que [l'abstraction] profite à l'esprit, il faut que l'esprit s'y exerce graduellement et par lui-même ; il faut attendre par conséquent qu'il se soit familiarisé avec la réalité concrète avant de la lui faire transfigurer pour ainsi dire en conceptions logiques ; il faut s'astreindre à ne demander à chaque âge que le mode et le degré d'abstraction dont cet âge est capable.» [1]

Bref. L'erreur serait de croire que l'on puisse apprendre la langue naturelle ou tout autre langage en ne fréquentant que les mots et les règles grammaticales qui les gouvernent. Ce fut pourtant l'erreur du formalisme algébrique de l'époque des "maths modernes".

Notre but n'est pas de tomber dans l'erreur inverse et, comme nous l'avons souligné au passage, la résolution de problèmes "concrets" n'interdit en rien, lorsqu'il devient pertinent, le passage de l'autre côté du miroir…

Bibliographie

[1] Buisson Ferdinand, *Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*, 1887.

[2] Chevallard Yves, *Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège*, revue Petit x, n°° 5 et 19.

[3] Lacroix Sylvestre François, *Essai sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier*, 1805.

[4] Muniglia Michèle, Beaujean Josette, Raulet Isabelle, *La lecture d'énoncés et le sens des opérations*, Publications de l'Irem de Lorraine, 2002.

[5] La méthode imaginée et développée par Michèle Muniglia a fait l'objet de présentations en ateliers lors du colloque de Lille (2005) organisé par la Commission Inter-Irem Premier Cycle, lors de l'université d'été de Saint-Flour organisée en 2005 par l'Inspection Générale de mathématiques, et lors du colloque de Strasbourg (2005) organisé par la Copirelem. Pour une description complémentaire, nous renvoyons aux actes (à paraître) des deux premières manifestations et, pour des éléments supplémentaires de discussion, on pourra aussi se reporter au compte-rendu (censuré par les organisateurs) de l'atelier présenté lors du colloque de Strasbourg. Celui-ci est téléchargeable à l'adresse : http://www.irem.uhp-nancy.fr/Lomb/atelierB2.pdf .]