UNE STRUCTURE D'ANALYSE MULTIDIMENSIONNELLE EN ALGEBRE ELEMENTAIRE : CONCEPTION, EXPLOITATION ET PERSPECTIVES

Conférence de :

Brigitte Grugeon,

Maître de conférence, IUFM d'Amiens
Equipe DIDIREM, Université de Paris 7

Résumé : *Il s'agit de présenter ici des applications d'une recherche en didactique de l'algèbre. Cette recherche concerne les problèmes de transition dans le système éducatif et plus particulièrement l'étude des discontinuités institutionnelles qui interviennent dans ces transitions et celle de leurs effets.*

En effet, en tant qu'enseignante, je me suis trouvée confrontée à ce problème dans un cas particulier, celui de la transition entre les enseignements tertiaires court et long de l'enseignement secondaire français. Trop d'élèves du cycle tertiaire court sélectionnés parmi les meilleurs se retrouvaient en situation d'échec, en cycle tertiaire long, dans une classe de « première d'adaptation » supposée organiser leurs études. Leurs difficultés ne pouvaient pas être liées qu'à leur « niveau mathématique ». D'autres éléments devaient intervenir, en particulier le changement d'institution. Leurs connaissances n'étaient-elles pas conditionnées à l'enseignement reçu ? Je me suis alors demandée : quel rôle pouvait jouer les différences de rapports institutionnels à l'algèbre dans les difficultés des élèves ?

Ce travail, poursuivi dans la transition Troisième / Seconde indifférenciée, m'a conduite à aborder des questions essentielles : Qu'entend-on par compétence algébrique ? Sur quels leviers peut-on jouer pour négocier la transition entre deux systèmes d'enseignement ? Sur quels leviers peut-on s'appuyer pour négocier l'entrée dans la pensée algébrique ? Quelles stratégies d'enseignement peut-on articuler pour introduire l'algèbre en collège ?

Dans cet article, nous analyserons dans un premier paragraphe la compétence algébrique en partant de celle des difficultés des élèves en algèbre. Dans le paragraphe II, nous introduirons une structure d'analyse multidimensionnelle de la compétence algébrique. Dans les paragraphes III et IV, nous illustrerons des applications possibles de ces outils aussi bien du côté institutionnel (comparaison des programmes de Troisième et de Seconde, stratégies d'enseignement de l'algèbre au collège et au lycée) que du côté élève (profils d'élèves, automatisation du diagnostic et exploitation par les enseignants). Nous terminerons par des perspectives de recherche.

1. Analyse de la compétence algébrique

Pour étudier le fonctionnement des élèves en algèbre, interpréter leurs difficultés voire leurs erreurs, il nous semble indispensable d'établir un cadre global d'analyse. Comme l'indique G. VERGNAUD, « il est nécessaire pour comprendre le développement et l'appropriation des connaissances étudiées de prendre en compte des ensembles assez vastes de situations et de concepts, c'est-à-dire des champs conceptuels. Étudier l'apprentissage d'un concept isolé, ou d'une technique isolée, n'a pratiquement pas de sens » (VERGNAUD 82). Une erreur doit être :

- située du côté élève relativement à un processus d'apprentissage, relativement à l'acquisition d'une compétence visée,

- et mise en relation du côté institutionnel avec le rapport institutionnel à un objet de savoir enseigné, ici l'algèbre.

Comment analyser des travaux d'élèves et induire un modèle de leur fonctionnement en algèbre ? Comment délimiter un cadre d'analyse global ? La diversité des réponses des élèves est frappante, comme le montrent les exemples ci-dessous, et impose une démarche élaborée qui prenne en compte la complexité des fonctionnements des élèves. Nous développons notre démarche à partir d'un problème prototypique « Le prestidigitateur », déjà présenté (Grugeon 97) mais qui illustre bien les choix réalisés. Voici ci-dessous l'énoncé et quelques solutions d'élèves :

<table>
<tr><td colspan="2">Enoncé :
Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur :
« Tu penses un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies par 3, tu retranches 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7 ».</td></tr>
<tr><td>Solution de Éric M.
pour le nombre 1,
(1+2)4 =12+2 = 15+1= 16/5 = 16/5 - 2 = 8-2= 7
Solution de Denis
pour le nombre 1,
1+8 = 9 ; 9 x 3 = 27 ; 27-4 = 23 ; 23+1 = 24 ;
24/4 = 6 ; 6+2 = 8 ; 8-1 = 7.
Solution de Stéphane
pour le nombre 3,
3 + 8 x 3 - 4 + 3 / 4 + 2 - 3 = 22,75</td><td>Solution de Sandrine (retranscrite)
B= nombre pensé, S somme 1ère, S' somme 2nde, etc.
(B + 8) x 3 = S - 4 = S' + B = S"/4 = S^3 + 2 = S^4 - B = 7
tous les S / S' / S'' / S^3 / S^4 représentent les sommes trouvées après chaque opération. Une fois une opération effectuée, il faut avec le résultat trouvé faire l'autre opération et ainsi de suite donc c'est pour cela qu'il y a plusieurs S
Après Sandrine se replie sur le numérique en remplaçant S par une valeur numérique</td></tr>
<tr><td>Solution de Pascal (retranscrite)
(...)
x + 8 x 3 - 4 + x / 4 + 2 - x = 7
x + x - x = 8 x 3 - 4 / 4 + 2
2x - x = 24 - 1 + 2
x= 25
Or x doit être égal à 7 et non à 25
Prenons 36 comme exemple pour x
(..)
36 + 8 x 3 - 4 + 36 / 4 + 2 - 36
44 x 3 - 4 + 36 / 4 + 2 - 36
132 - 4 + 36 / 4 + 2 - 36
164 / 4 + 2 - 36
41 + 2 - 36
43 - 36
7</td><td>Solution de Karine :
x + 8 = 8x
8x
3 x (8x) = 24 + 3x = 27x
27x - 4 = 23x
23x + x = 24x
24x ÷ 4 = 6x
6x + 2 = 8x
8x - x = 7
la solution est bien égal à $\boxed{7}$</td></tr>
</table>

Tableau n° 1 :L'exercice du prestidigitateur : l'énoncé et des réponses d'élèves.

Une réponse parmi d'autres passe par la nécessité de définir une référence mathématique, ici la compétence algébrique. C'est cette définition à un niveau d'enseignement donné qui fondera le cadre d'analyse. Cette définition repose sur une synthèse de travaux de didactique de l'algèbre très divers. La structuration retenue est guidée par la nécessité :

- d'approcher la complexité et les différents aspects de la compétence algébrique,

- de permettre une analyse multidimensionnelle de cohérences de fonctionnement, à la fois du côté élève et du côté institutionnel.

La synthèse des travaux est organisée autour de trois entrées principales, la rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre, l'introduction de nouveaux objets en algèbre et la délimitation du champ des problèmes algébriques. Ce choix s'est imposé pour plusieurs raisons :

- mettre en évidence un élément essentiel transversal aux dimensions *outil* et *objet* de l'algèbre, la rupture arithmétique / algèbre. Les recherches didactiques ont bien montré le rôle fondamental qu'elle joue dans l'accès à la pensée algébrique,

- regrouper les travaux existant dans ce domaine en structurant la diversité des approches relevant de cadres théoriques distincts (épistémologique, cognitive, linguistique et anthropologique).

Cette référence fondera une structure d'analyse permettant à la fois :

- du côté élève, d'analyser puis d'inférer à partir de productions des élèves leur fonctionnement en algèbre élémentaire ,

- et d'autre part, les mettre en relation avec l'enseignement reçu.

Dans les paragraphes suivants, nous analysons la rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre à travers celles des fausses continuités et discontinuités, puis nous abordons la question de l'introduction de nouveaux objets en algèbre et celle de la délimitation du champ des problèmes algébriques. Le survol des recherches présentées ici est limité à l'enseignement de l'algèbre élémentaire, sans aborder les questions liées aux structures algébriques.

1.1. La rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre

L'arithmétique enseignée jusqu'au début du collège traite de la résolution de problèmes numériques mettant en jeu des nombres positifs entiers ou décimaux. Prenons un exemple simple : **"Déterminer un nombre tel que, quand 5 est additionné à 2 fois ce nombre, la somme est 35."**

La résolution arithmétique s'organise comme suit : on *soustrait* 5 à 35 puis on *divise* le résultat par 2. Ici, la démarche arithmétique consiste à rechercher puis à calculer les inconnues intermédiaires dans un ordre convenable, par des stratégies souvent liées au contexte. Ici le raisonnement est explicité en langage naturel et le calcul prend une place accessoire, le codage utilisé ayant pour but principal d'obtenir le résultat. Pour Y. CHEVALLARD (CHEVALLARD 89), « l'outil essentiel de l'arithmétique est le langage ordinaire augmenté du calcul sur les nombres. (...). Elle demeure essentiellement un savoir oral qui ne confie au papier que l'effectuation des opérations sur des nombres ».

En algèbre, nous allons voir que ce type de connaissances peut se constituer en obstacles. En effet, reprenons le problème précédent. La résolution algébrique est conduite comme suit : on recherche un nombre x vérifiant la relation $2x+5 = 35$. Ici, la mise en équation nécessite l'*addition* et la *multiplication*, opérations inverses de la soustraction et de la division. La démarche de résolution algébrique consiste à représenter formellement le problème en déterminant les relations entre les inconnues et les données puis à faire du calcul formel pour trouver la solution à l'aide d'expressions littérales. Il faut accepter d'aller de l'inconnu vers le connu, d'effectuer en cours de calcul un contrôle formel et non par le sens puis d'évaluer en fin de calcul en revenant à des nombres. « En termes de modélisation, l'introduction de paramètres fait passer d'une modélisation « arithmétique » à une modélisation où les énoncés du langage ordinaire (...) cèdent la place à des expressions littérales où opère le calcul algébrique et qu'on pourra évaluer en fin de calcul, en revenant aux nombres particuliers définissant l'état du système auquel on s'intéresse » (CHEVALLARD 89).

Cette comparaison illustre bien plusieurs aspects de l'opposition entre l'algèbre et l'arithmétique. Précisons ces différences de rapport :

- VERGNAUD (VERGNAUD 87) évoque la double rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre aussi bien dans l'analyse des caractéristiques de la résolution de problème (opposition entre la démarche arithmétique liée au contexte et le détour algébrique) que dans l'analyse des objets et des techniques intervenant dans la résolution : opposition des modes d'appréhension des écritures algébriques et numériques (statut du signe d'égalité, statut des lettres), des modes de contrôle dans la transformation des écritures.

- Nous retrouvons une analyse de même type chez C. KIERAN (KIERAN 92, 94) qui reprend le même point de vue et présente les difficultés des élèves en algèbre comme une conséquence de son introduction en tant que généralisation de l'arithmétique. Elle analyse ensuite cette rupture en termes de fausses continuités et discontinuités entre l'arithmétique et l'algèbre.

Les *fausses continuités* résident :

- dans le partage des mêmes symboles et signes (signe d'égalité et d'opérations) mais avec des interprétations différentes ;

- dans la présence de lettres n'ayant plus la même signification selon le contexte.

Le *signe d'égalité* peut avoir un *double statut*. Il peut désigner soit l'*annonce d'un résultat*, soit une *relation d'équivalence*. En arithmétique, le signe d'égalité est utilisé de façon dominante comme signe d'annonce de résultat, par exemple la somme de 4 et 3 se reécrit 7, et le sens de l'égalité de gauche à droite est alors privilégié (4 + 3 = 7). En revanche, quand on travaille sur les objets de l'algèbre, une grande partie des tâches repose sur des transformations d'égalités à dénotation fixe, mobilisées en faisant varier le sens des expressions : le signe d'égalité traduit alors nécessairement une relation d'équivalence, par exemple, 4 + 3 = 2 + 5. Or, après le début de l'enseignement de l'algèbre, pour certains élèves, le signe d'égalité se limite souvent au sens initial dominant en arithmétique, ce qui peut les conduire à des écritures incorrectes par rapport au signe d'égalité, par exemple " 2 + 24 = 26 + 12 = 38 ", où la symétrie et la transitivité de l'égalité se trouvent violées.

Les *discontinuités* sont à relier à la mise en œuvre de démarches de résolution distinctes, à l'utilisation de nouveaux objets (expressions, équations, ...).

1.2. Les « nouveaux » objets de l'algèbre

- **Vers une lecture globale**

L'introduction de l'algèbre est traditionnellement réalisée à partir de la résolution de problèmes qui conduisent à leur mise en équation puis à leur résolution. Dans ce contexte, nous abordons l'étude de la compétence algébrique à partir des problèmes de statut des nouveaux objets mis en jeu dans leur résolution, en particulier à partir des difficultés des élèves à interpréter les lettres et les nouveaux objets telles que les expressions algébriques et les équations.

- **Les lettres**

En arithmétique, les lettres désignent des unités de mesure ou des objets, par exemple 12m peut désigner 12 mètres ou bien 12 motos, la lettre m est alors utilisée comme étiquette. En algèbre, le statut d'une lettre dépend du contexte et n'est pas réductible à celui d'étiquette : 12m signifiera aussi 12 fois le nombre de mètres, m désignant ici un nombre, et sera à ce titre engagée dans des calculs. Le passage d'une conception à l'autre peut donc constituer un obstacle important pour les élèves. Il a été étudié dans de nombreux travaux de didactique de l'algèbre (BOOTH 84), (KIERAN 92) et KÜCKEMANN a proposé une classification des principaux statuts donnés aux lettres par les élèves :

- lettre-objet (la lettre considérée comme une étiquette),

- lettre non prise en compte dans les calculs,

- lettre évaluée (lettre remplacée par une valeur numérique dans les calculs)

- inconnue (lettre désignant un nombre inconnu à déterminer),

- lettre représentant nombre généralisé (lettre pouvant prendre plusieurs valeurs),

- variable (lettre utilisée dans un contexte fonctionnel).

L'étude du problème "students-and-professors" a été posée par l'équipe de CLEMENT pour traiter ce phénomène, via la fréquence observée des traductions non opératoires ou de type sténographique obtenues en dehors d'une réelle démarche algébrique (KIERAN 92). En voici l'énoncé : « *Write an equation using the variables S and P to represent the following statement : "There are six times as many students as profesors at this university." Use S for the number of students and P for the number of professors* ».

- **Les expressions algébriques**

Les expressions algébriques sont de nouveaux objets construits lors de la représentation formelle des problèmes à partir de nombres, de signes opératoires. Contrairement à l'arithmétique, l'algèbre ne permet pas une distinction claire entre le processus de calcul et son résultat. En arithmétique, un signe opératoire indique un calcul à effectuer. En algèbre, une *expression algébrique* ayant le statut de résultat peut conserver un signe opératoire et rester non évaluée, par exemple ce peut-être $x+3$. Pour certains élèves, cette rupture avec les pratiques arithmétiques constitue un obstacle durable : ils refusent d'accepter qu'une expression algébrique ayant statut de résultat conserve un signe opératoire : on peut trouver alors l'expression $x+3$ transformée en $3x$ ou $x3$. Cette difficulté, identifiée par de nombreux chercheurs, est nommée le dilemme *process-product* par Davis (Davis 75) ou bien *acceptance of lack of closure* par COLLIS (COLLIS 74).

- **Les équations**

La mise en équation de problèmes numériques conduit à l'écriture puis à la résolution d'équations, essentiellement des équations du premier degré. De nombreuses recherches mettent en évidence les décalages importants de réussite existant entre les différents types *d'équation du premier degré*. Les équations de la forme $x + a = b$, $ax = b$, $ax + b = c$, où l'inconnue est présente d'un seul côté peuvent être résolues en adaptant des méthodes arithmétiques. Contrairement à ces équations, la résolution d'équations de la forme $ax + b = cx + d$, où l'inconnue est présente des deux côtés du signe d'égalité, repose sur la conservation de l'égalité, ce qui rend inopérant les méthodes arithmétiques. Il se produit alors une rupture pour les élèves avec les pratiques arithmétiques, appelée par FILLOY et ROJANO *didactical cut* (FILLOY et ROJANO 84). Les études de BELL (BELL 96) et de l'INRP (COMBIER 96) ont montré comment l'accès à des procédures formelles sur des quantités inconnues est difficile à construire et quels types de problèmes proposer. Nous y reviendrons en fin d'article.

- **Une lecture globale des difficultés**

Pour relire de façon globale ces difficultés à manipuler formellement les expressions algébriques, à transformer les équations, A. SFARD (SFARD 91) s'est intéressée aux conceptions que les élèves construisent vis-à-vis de ces objets, au statut qu'ils leur attribuent. Elle a construit un modèle de développement conceptuel basée sur une réification des objets (expressions symboliques, équations) qui repose fondamentalement sur la distinction entre les dimensions structurale et opérationnelle des concepts mathématiques. Dans cette approche, concepts et conceptions sont différenciés, les conceptions étant définies comme des représentations, des associations évoquant des notions mathématiques abstraites. Les notions mathématiques abstraites peuvent être conçues de deux façons différentes, soit de façon structurale comme des " objets ", soit de façon opérationnelle comme des processus. Plusieurs représentations reposant, soit sur une conception opérationnelle, soit sur une conception structurale, peuvent être associées à un même concept selon le contexte considéré. En particulier, une même expression algébrique peut avoir comme interprétations un ou plusieurs objets ou processus opératoires, ce qui rend l'activité mathématique efficace. Par exemple, selon les contextes, l'expression $3x+1$ peut être interprétée comme :

- le processus opératoire correspondant à prendre un nombre, le multiplier par 3 et lui additionner 1,
- ou l'expression calculée à partir du nombre x, expression résultat du processus opératoire considérée comme un tout,
- ou l'expression générique d'un nombre congru à 1 modulo 3,
- ou l'image de x par la fonction de la variable x, qui à x associe $3x+1$,

- ou une chaîne de symboles ne représentant rien, mais que l'on peut combiner à d'autres expressions en utilisant des règles bien définies.

La compétence en algèbre élémentaire est alors conçue comme une fonction d'adaptabilité dans l'interprétation des expressions et comme une capacité d'en faire des usages variés. Les études expérimentales menées par A. SFARD dans le domaine de l'algèbre et des fonctions l'amènent à faire l'hypothèse que des approches structurales trop précoces dans l'enseignement conduisent au développement de conceptions qu'elle qualifie de "pseudo-structurales" sans permettre aux conceptions opérationnelles de se développer[10]. En algèbre, les élèves perçoivent alors les expressions algébriques comme des chaînes de symboles vides de sens ainsi que les manipulations formelles qui les régissent.

- **La manipulation formelle des expressions**

La question du statut des expressions algébriques est abordée par d'autres équipes de chercheurs à partir d'une approche plus linguistique. L'analyse du traitement formel des expressions est organisée autour du double aspect syntaxique et sémantique des expressions algébriques.

J. F. NICAUD (NICAUD 94), concepteur du système EIAO nommé APLUSIX qui propose des tâches de développement, factorisation ou réduction d'expressions polynomiales, s'appuie sur une analyse mettant en jeu à la fois une composante syntaxique et une composante sémantique structurée en trois niveaux différents, qui permet de révéler différents aspects de la compétence algébrique :

- niveau 1 : être capable d'attribuer des valeurs aux variables d'une expression et de la calculer,

- niveau 2 : être capable de transformer une expression algébrique en une expression référentiellement équivalente, dans un calcul à un seul pas (développement, factorisation),

- niveau 3 : être capable d'organiser les étapes d'un calcul algébrique à l'aide d'un raisonnement stratégique, ce qui rend significatives les transformations réalisées.

J. F. NICAUD indique qu'on effectue un réel travail d'algèbre lorsqu'une partie significative de l'activité se situe à ce niveau (troisième niveau sémantique). Sans cela, l'algèbre est utilisée comme une simple notation." (NICAUD 93).

J. P. DROUHARD considère que la signification d'une expression algébrique réside à la fois dans sa syntaxe, sa dénotation, son interprétation en liaison avec les cadres intra ou extra mathématiques en jeu et son sens (DROUHARD 95). Il s'appuie sur ces concepts pour analyser le traitement des expressions algébriques réalisé par les élèves.

La notion de dénotation (c'est-à-dire de référence) s'appuie sur la distinction établie par G. FREGE entre sens (SINN) et dénotation (BEDEUTUNG). Par exemple, le nombre 2 a plusieurs écritures 4/2, (1+1), $\sqrt{4}$. Ces expressions réfèrent un même nombre, leur unique dénotation. En revanche, les expressions n'ont pas le même sens puisqu'elles ne renvoient pas les mêmes propriétés du nombre. De même, les deux expressions algébriques : $(x-1)^2 + 1$ et $x^2 - 2x + 2$ ont la même dénotation mais pas le même sens : seule la première écriture montre le signe de l'expression. Le choix des transformations et procédures applicables à ces expressions en fonction de la tâche à réaliser dépendra de leur *sens*.

Une expression a pour *interprétation* dans un cadre donné, au sens de R. DOUADY (DOUADY 84), tout objet qui "correspond" à la dénotation de cette expression dans ce cadre. Par exemple, dans le cadre des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'expression $2x - 3$ a pour interprétation la fonction : $x \rightarrow 2x - 3$.

---

[10] La flexibilité requise entre processus et objet par le travail mathématique est alors absente : les objets étant de pseudo-objets ne permettent pas par désencapsulation de remonter aux processus à leur source.

Enfin, la notion de *connotation* désigne la perception et l'interprétation subjectives qu'a un élève d'une expression algébrique en liaison avec son expérience scolaire, les situations au cours desquelles il a manipulé cette expression ou des expressions analogues.

Ce cadre d'analyse permet d'étudier si les élèves respectent la dénotation des expressions au cours de transformations et s'ils sont capables de piloter les calculs en s'appuyant sur le sens des expressions : c'est le point de vue adopté par le groupe du GECO (GECO, 1997).

D'autres travaux (DUVAL 95) montrent la nécessité de prendre en compte la dimension sémiotique du travail algébrique pour caractériser la compétence algébrique et analyser les difficultés des élèves. Cette approche permet alors d'étudier la flexibilité des élèves à articuler le registre des écritures algébriques et différents registres sémiotiques, plus particulièrement le registre du langage naturel.

1.3. Caractérisation des problèmes algébriques

L'apprentissage de l'algèbre ne se limite pas au traitement d'expressions algébriques, même si cette dimension est souvent la plus évoquée dans les travaux. La compétence algébrique ne s'évalue pas seulement à travers la capacité à transformer des expressions. Elle s'évalue aussi à travers la capacité à résoudre des problèmes où l'algèbre intervient comme outil pertinent. Il s'agit d'être capable de produire des expressions et des relations algébriques pour traduire un problème, de les interpréter, puis de mobiliser les outils algébriques adaptés à sa résolution.

- **Les problèmes arithmétiques**

L'entrée dans la pensée algébrique est engagée essentiellement à partir de problèmes arithmétiques classiques. Leur résolution a pour but la recherche d'un ou plusieurs nombres inconnus vérifiant les relations indiquées dans l'énoncé donné en langue naturelle, à partir de leur mise en équation. Les expressions algébriques sont le plus souvent introduites en collège dans ce contexte, où l'on essaie de montrer aux élèves l'efficacité et l'économie de la démarche algébrique. L'algèbre est alors présentée comme une généralisation de l'arithmétique. Cette stratégie provoque de nombreuses difficultés chez les élèves, difficultés présentées dans les paragraphes précédents et n'engage pas tous les élèves à articuler différents statuts des lettres, à donner du sens aux nouveaux objets et à construire des interprétations adaptables.

Cette capacité doit être mise en œuvre dans d'autres domaines que le domaine de " l'arithmétique traditionnelle ". Quels sont ces différents contextes, différents domaines d'emploi qui mettent en œuvre l'algèbre comme outil de résolution de problèmes ? Il s'agit de délimiter le champ des problèmes algébriques en s'éloignant d'une vision réductrice de l'algèbre comme arithmétique généralisée. Le domaine des problèmes algébriques ne se réduit pas aux seuls problèmes classiques tels les problèmes arithmétiques. Il est beaucoup plus large et recouvre d'autres types de problèmes. C'est l'occasion de revenir sur l'analyse de la compétence algébrique à partir de l'étude des capacités des élèves à mobiliser l'outil algébrique pour résoudre tous les problèmes du domaine algébrique.

- **Problèmes de généralisation**

La compétence algébrique s'évalue aussi à travers la capacité à exprimer des relations numériques générales. En effet, l'algèbre est un outil essentiel pour rendre l'accès possible aux propriétés numériques et pour les généraliser. Pour CHEVALLARD (CHEVALLARD 85), le langage algébrique permet de conserver et de faire apparaître l'information monstrative d'une expression pour prouver une propriété numérique : par exemple, on prouve à l'aide des expressions 4p et $(p+1)^2 - (p-1)^2$ que la somme de deux nombres consécutifs impairs est d'une part, un multiple de 4 ($(2p+1) + (2p-1) = 4p$) et d'autre part une différence de deux carrés ($(p+1)^2 - (p-1)^2 = 4p$). L'algèbre permet de mémoriser la genèse d'une expression numérique pour en déduire ses propriétés et s'oppose ainsi à l'arithmétique où une loi de simplification impose l'achèvement des calculs.

De façon générale, le langage algébrique permet de formuler des problèmes dans leur généralité puis de les résoudre de façon systématique. L'algèbre peut jouer un rôle essentiel pour engager les élèves dans leur construction de la rationalité mathématique.

De nombreuses études cognitives ont étudié les conceptions des élèves sur la généralisation et la preuve. CHEVALLARD et CONNE (84) montrent les difficultés des élèves à utiliser le symbolisme pour exprimer des propriétés générales. Des études anglo-saxonnes plus récentes, celles de WHEELER et LEE (WHEELER 87, 96) arrivent aux mêmes conclusions et montrent le rôle possible des problèmes de généralisation pour faire évoluer les conceptions des élèves.

- **Problèmes de modélisation (CHEVALLARD 89)**

La compétence algébrique s'évalue aussi à travers la capacité à modéliser des problèmes extra et intra mathématiques. En effet, l'algèbre est un outil adapté pour construire un modèle mathématique d'un système, c'est-à-dire établir un découpage de la réalité par un ensemble de variables pertinentes, construire un ensemble de relations entre les variables (modèle), puis transformer ce modèle pour produire des connaissances sur le système étudié.

R. DOUADY (DOUADY 94) considère la modélisation algébrique comme un moyen pour les élèves de donner du sens aux objets de l'algèbre et à leurs représentations. Elle conçoit l'accès à la pensée algébrique en terme d'équilibre entre le travail sur le sens et la familiarité technique des algorithmes de transformation des expressions algébriques.

CHEVALLARD (CHEVALLARD 89) met ainsi en évidence des éléments essentiels, à ses yeux, de l'activité algébrique : l'activité de symbolisation (utilisation des lettres pour désigner des quantités inconnues mais aussi pour désigner des paramètres, variables du système étudié dont les valeurs sont supposées connues afin d'étudier des solutions générales) et l'usage réglé de systèmes de signes dans l'articulation entre plusieurs registres sémiotiques. CHEVALLARD affirme que « la fonctionnalité de l'algèbre suppose précocement l'emploi de paramètres, suscite la réappropriation de la notion de formule, autant sa production que son exploitation, et conduit à envisager la familiarisation, précoce tout autant, avec la notion de fonction ».

- **Les problèmes des cadres algébrique et fonctionnel**

La compétence algébrique s'évalue aussi à travers la capacité à résoudre des problèmes des cadres algébrique et fonctionnel. Ils conduisent à la manipulation formelle d'expressions algébriques. A côté de problèmes de manipulation formelle d'expressions algébriques, sans finalité explicite, où l'algèbre est retravaillé versant objet, on trouve de nombreux problèmes où l'outil algébrique apparaît réellement nécessaire pour les résoudre (production d'inégalités, étude de signes, étude algébrique de fonctions, recherche d'extremum, etc.). Ces problèmes nécessitent une " maîtrise formelle du calcul algébrique fonctionnel " (CHEVALLARD 85).

1.4. Vers une définition de la compétence algébrique

En conclusion, nous définissons les différents aspects de la compétence algébrique comme suit :

Les connaissances algébriques sont structurées selon deux principales dimensions non indépendantes et partiellement hiérarchisées, les dimensions *outil* et *objet* :

- La compétence algébrique s'évalue à travers la capacité à mobiliser l'outil algébrique pour résoudre les problèmes du domaine de l'algèbre défini plus haut, les problèmes de généralisation et de preuve, de modélisation y prenant une place importante, les problèmes « d'arithmétique traditionnelle » n'étant qu'un type de problèmes parmi d'autres.

- La compétence algébrique s'évalue à travers la capacité à manipuler les objets de l'algèbre mobilisés dans leur résolution. Il s'agit de tenir compte du double aspect syntaxique et sémantique des expressions algébriques pour les manipuler formellement en redonnant sa juste place à la dimension technique du traitement algébrique. La signification d'une expression algébrique réside à la fois dans sa syntaxe, sa dénotation, son interprétation en liaison avec les cadres mathématiques en jeu et ses sens.

A ce niveau scolaire, nous devons prendre en compte deux autres éléments pour évaluer la compétence algébrique :

- L'entrée dans l'algèbre suppose une rupture épistémologique avec l'arithmétique.

- L'efficacité algébrique requiert une capacité à interpréter des expressions algébriques à la fois au niveau opérationnel et structural et à développer une nécessaire fonction d'adaptabilité dans l'interprétation des expressions pour en faire des usages variés.

2. Une structure d'analyse multidimensionnelle de la compétence algébrique

Nous présentons maintenant la structure d'analyse multidimensionnelle de l'algèbre, organisée autour de composantes puis de critères. Nous présentons ensuite les outils construits pour opérationnaliser cette structure d'analyse, condition essentielle lors de sa conception, et les mettons en oeuvre sur le problème prototypique présenté en début d'article.

2.1. Construction d'une structure d'analyse multidimensionnelle

Cette définition de la compétence algébrique présentée ci-dessus correspond au modèle de compétence algébrique attendu à un niveau donné et est le support d'une structure d'analyse multidimensionnelle. Pour prendre en compte les différents aspects de la compétence algébrique, cette structure est organisée autour de six composantes.

- **Une composante d'identification/évaluation**

Cette composante, appelée *traitement algébrique* joue un rôle différent des cinq autres :

- Du côté institutionnel, elle permet de situer et de comparer les différents types de problèmes algébriques privilégiés par une institution donnée (collège ou lycée) et par suite le degré d'implication de l'algèbre mis en jeu.

- Du côté élève, elle permet d'évaluer la compétence algébrique attendue dans une institution donnée.

Les neuf types de traitement algébrique définis et présentés dans le tableau 2 ci-après recouvrent les différents emplois de l'algèbre à travers les différents problèmes algébriques et prennent en compte les deux dimensions *outil* et *objet*. Ils ne sont que partiellement hiérarchisés.

- **Cinq composantes de caractérisation**

Les cinq autres composantes ont pour fonction d'identifier et de décrire des caractéristiques importantes, des cohérences locales aussi bien dans les programmes officiels que dans le fonctionnement des élèves en algèbre. Pour décrire ces cohérences, nous avons été obligée de prendre en compte des éléments qui débordent du domaine de l'algèbre élémentaire.

La composante *rapport arithmétique/algèbre* a pour objectif :

- du côté institutionnel, d'identifier si un enseignement donné permet de faire vivre une rupture à l'arithmétique, éventuellement non consommée,

- du côté élève, de caractériser la signification accordée par les élèves à la démarche algébrique et de la situer par rapport à la démarche arithmétique.

Types de traitement algébrique	Types d'emploi
Réalisation de tâches d'ordre numérique : effectuation de calcul ou substitution de nombres dans une formule.	Faire du calcul numérique dans un contexte d'application.
Reproduction de tâches formelles non finalisées : - niveau 1 (résolution algorithmisée simple), - niveau 2 (calculs soumis à des contraintes, à la sélection d'une forme adaptée au traitement algébrique visé par une tâche donnée, à un raisonnement que l'on doit contrôler),	Faire du calcul formel dans le cadre algébrique : - développer, factoriser, résoudre une équation du premier degré, etc. - résoudre une équation du Troisième degré sans facteur commun apparent, etc.
Interprétation d'une expression algébrique nécessitant l'articulation avec un cadre ou un contexte.	Associer deux écritures d'une même expression dans des registres de représentation distincts.
Utilisation de l'outil algébrique pour faire fonctionner d'autres notions mathématiques.	Etudier algébriquement des fonctions. Etudier le signe d'une expression algébrique.
Utilisation de l'outil algébrique pour mettre en équation une situation intra ou extra-mathématique.	- Résoudre des problèmes dans un contexte d'application familier ou non. - Mathématiser et résoudre des situations intra-mathématiques dans d'autres domaines que le domaine algébrique (géométrique, numérique, etc.). Etc.
Utilisation de l'outil algébrique pour produire une formule, exprimer une relation entre variables.	Modéliser une situation.
Utilisation de l'outil algébrique pour généraliser.	Exprimer une propriété numérique générale.
Utilisation de l'outil algébrique comme outil de preuve.	Conjecturer et prouver des propriétés numériques.

Tableau n° 2 : Les types de traitement algébrique associés aux emplois de l'algèbre

Les composantes *gestion dans le registre des écritures algébriques* et *articulation entre registre des écritures algébriques et les autres registres* prennent en compte la dimension sémiotique de l'activité algébrique. Elles visent :

- du côté institutionnel, à identifier les *registres* de représentation en jeu dans l'activité algébrique ainsi que les modes de gestion privilégiés dans le registre des écritures algébriques ou dans son articulation avec d'autres registres,

- du côté élève à décrire, selon le type de tâche, la gestion des expressions dans le registre des écritures algébriques ou en articulation avec d'autres registres.

La composante *fonction de l'algèbre* a pour rôle :

- du côté institutionnel, de pointer différentes formes d'activités algébriques privilégiant ou non différents emplois de l'algèbre et techniques associées,

- du côté élève, de caractériser, si c'est possible, leur rapport personnel à l'algèbre à travers la fonction apparente jouée par l'activité " algébrique " qu'ils réalisent.

La composante *rationalité algébrique* a pour rôle de cerner le rapport à la rationalité mathématique mis en jeu dans l'activité algébrique aussi bien du côté élève que du côté institutionnel.

À chacune de ces composantes sont associés des critères. Chaque critère peut prendre une ou plusieurs valeurs choisies dans un ensemble de valeurs possibles fixées a priori à partir de l'étude des travaux de didactique de l'algèbre. Ce sont les valeurs *globales* des critères. Ces valeurs peuvent être différentes selon les objectifs d'analyse, du côté institutionnel ou du côté élève. Voici une représentation de la structure d'analyse :

Composantes	Critères	Valeurs globales
Traitement algébrique	**Types de traitement algébrique :** Reproduction tâches d'ordre num. Reproduction tâche algébrique niv1 Reproduction tâche algébrique niv2 Interprétation d'une expression alg. Traduction/branchement sur formule Traduction/production guidée Traduction/production Utilisation de l'algèbre pour prouver	Correct / Incorrect / Non traité
Rapport arithmétique/algèbre	Démarche de résolution	Arithmétique / Algébrique
	Statut du signe d'égalité	Annonce résultat / équivalence
	Statut des lettres	Lettre objet / lettre évaluée / Inconnue / Nombre généralisé / variable
	Objet et statut des objets	Expression algébrique / formule /équation / fonction Opérationnel / Structural / Pseudo-structural
Gestion dans registre algébrique	Type de formation Type de traitement	Correct:/ Interprétable (lié au problème) / Non interprétable Correct:/ Interprétable (lié au problème) / Non interprétable
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres	Type de conversion	Correct:/ Interprétable (lié au problème) / Non interprétable
Fonction de l'algèbre	Emploi de l'algèbre	Aucune / Conforme à l'attendu (cf. tableau 1) / non conforme à attendu
Rationalité algébrique	Type de preuve Type de justification	Preuve pragmatique / preuve intellectuelle Justification liée à rationalité « quotidienne » / rationalité scolaire / rationalité algébrique

Tableau n° 3 : structure d'analyse multidimensionnelle de l'algèbre

- **Une opérationnalisation de la structure d'analyse**

Comment opérationnaliser cette structure d'analyse ? Toute opérationnalisation dépend des exploitations qui en sont faites. Ici, un des enjeux de cette recherche réside dans la construction d'un outil de diagnostic pour déterminer le fonctionnement des élèves en algèbre élémentaire. La question devient donc : comment identifier la capacité des élèves à mobiliser l'outil algébrique pour résoudre les problèmes algébriques et à manipuler les objets de l'algèbre mobilisés dans leur résolution. Il s'agit alors de définir et de caractériser des problèmes significatifs qui couvrent les différents aspects de l'activité algébrique à un niveau d'enseignement donné. A chaque problème, nous associons une grille descriptive relativement à un attendu institutionnel et une grille d'analyse des productions des élèves qui permet la recherche de cohérences dans le fonctionnement des élèves et la mise en perspective de leur fonctionnement algébrique par rapport à un attendu. Cette opérationnalisation permet aussi, à partir de l'identification des problèmes caractéristiques d'un enseignement à un niveau donné, de décrire puis de comparer les programmes officiels pour déterminer des différences de rapports institutionnels à l'algèbre à un niveau global ou local.

Présentons notre démarche à partir du problème du prestidigitateur présenté en début d'article, problème qui laisse à voir les étapes d'analyse investies.

Construction de la grille descriptive

A partir d'une analyse a priori du problème, il s'agit d'identifier les aspects de la compétence algébrique en jeu dans le problème, à un niveau d'enseignement donné. En quoi l'outil algébrique intervient-il dans la résolution du problème ? Quels sont les objets de l'algèbre mis en jeu dans la résolution et avec quel traitement ? Il s'agit donc d'identifier les types de traitement algébrique.

Dans le problème du prestidigitateur, il s'agit de montrer, que pour tout nombre, le résultat d'un programme de calcul est constant et égal à 7. La propriété numérique étant vraie, on attend, à ce niveau, une preuve intellectuelle. Il est donc nécessaire d'utiliser l'outil algébrique pour formuler puis pour prouver une propriété numérique. Si la démarche utilisée est algébrique, ce qui est attendu ici, la modélisation met en jeu l'articulation entre les registres du langage naturel et celui des écritures algébriques, l'énoncé nécessitant une reformulation algébrique. Selon la conception mise en jeu lors de l'interprétation de l'énoncé, en terme de processus opératoire (opérationnelle) ou de résultat du processus (structurale), la traduction algébrique peut mobiliser deux types d'écritures : l'écriture pas à pas séparée si on exprime les résultats intermédiaires ou l'écriture linéaire globale parenthésée si on exprime le résultat final.

Cette analyse est obtenue à partir du questionnement suivant, structuré à partir des composantes et des critères de la structure d'analyse :

Composantes (et critères)	Questions
Aspects de la compétence algébrique en jeu	Quels sont les types de traitement algébrique concernés ?
Rapport entre l'arithmétique et l'algèbre	Quelle est la démarche de résolution attendue et en conséquence comment s'articulent ici l'arithmétique et algèbre ? Quels sont les objets de l'algèbre nécessaires à la résolution et avec quel statut ?
Gestion de l'articulation entre le registre algébrique et d'autres registres Gestion dans le registre algébrique	Y a-t-il articulation entre des registres de représentation et quel est le type de conversion entre ces registres mis en jeu ? Quelles sont les transformations algébriques envisageables ?
Emploi de l'algèbre	Quelle est l'emploi de l'algèbre attendu dans la résolution du problème ?
Rationalité	Quel est le type de preuve attendu ?

Tableau n°4 :
Questionnement associé à la construction de la grille descriptive du problème " Le prestidigitateur "

Ce type de questionnement est transférable à tout problème du domaine algébrique, les questions dépendant des aspects de la compétence algébrique mobilisés dans le problème. Les réponses au questionnement permettent de définir la *grille descriptive* associée à ce problème présentée dans le tableau 3. Nous donnons la version utilisée en classe de Seconde par N. PERNIAS et M. T. GIACOMO, au lycée / collège Georges Brassens de Villeneuve le Roi (94), qui définit les compétences attendues pour le *problème " Le prestidigitateur "*.

Aspects de la compétence algébrique mobilisés dans le problème	
Compétences liées à l'analyse et à la reconnaissance des écritures algébriques	Être capable d'interpréter une écriture algébrique en liaison avec un énoncé en langage naturel
Compétences d'ordre technique	Être capable de réaliser des calculs numériques
	Être capable de substituer des valeurs numériques et effectuer les calculs
	Être capable de mobiliser les règles de développement
Compétences liées à l'utilisation de l'outil algébrique	Être capable d'exprimer une propriété numérique générale
	Être capable de prouver une conjecture numérique
Les caractéristiques du problème	
Rapport entre l'arithmétique et l'algèbre - signe d'égalité - démarche et objets mobilisés	Être capable d'utiliser le signe d'égalité comme relation d'équivalence
	Être capable d'utiliser une lettre comme nombre généralisé pour prouver qu'une propriété numérique est vraie Être capable d'utiliser une lettre comme indéterminée pour faire du calcul algébrique
Articulation entre le registre des écritures algébriques et le langage naturel	Être capable d'utiliser une écriture linéaire globale parenthésée ou une écriture pas à pas séparée pour traduire l'énoncé
Gestion du registre des écritures algébriques	Être capable d'utiliser les règles de formation et de développement des expressions algébriques
Emploi de l'algèbre	Être capable d'utiliser l'outil algébrique pour prouver
Rationalité	Être capable d'utiliser une justification intellectuelle en faisant appel au calcul algébrique (après conjecture numérique ou non)

Tableau n°5 : Grille descriptive associée au problème " Le prestidigitateur "

Construction de la grille d'analyse des productions des élèves

Les élèves proposent des solutions qui, souvent, ne correspondent pas au type de solution attendu, l'échantillon de productions d'élèves présenté, au début de l'article, l'illustre bien. Il s'agit de déterminer, a priori, des solutions envisageables, reposant sur des modes de fonctionnement algébrique ou non, attendus ou non. La grille d'analyse des productions doit prendre en compte les solutions envisageables pour permettre de décrire les productions des élèves. La recherche menée en classe de première d'adaptation en 1991-1992 et dans les années suivantes, 1994 à 1999, a permis ce travail. Nous ne pouvons pas développer tous les détails de l'étude qui conduisent à la construction de la grille d'analyse des productions d'élèves. Nous présentons celle fournie pour un critère d'analyse : l'étude des *types de conversion entre le registre des écritures algébriques et d'autres registres*, ici entre le registre du langage naturel et celui des écritures algébriques. Nous structurons l'analyse autour de l'identification a priori des stratégies de résolution, de nature arithmétique ou algébrique.

Stratégies de nature arithmétique :

Dans ce cas, les élèves proposent une preuve par l'exemple. Ils utilisent soit une succession d'égalités qui s'appuie sur une conception incorrecte du signe d'égalité (écriture pas à pas enchaînée), soit une suite correcte d'égalités indiquant les différentes étapes du calcul (écriture pas à pas séparée), soit une écriture globale pour exprimer le calcul à réaliser, parenthésée ou non, correspondant ou non au calcul (écriture linéaire globale parenthésée ou non, avec mémoire ou non).

Élèves	Solutions	Types d'écriture
Éric M.	pour le nombre 1, (1+2)4 = 12+2 = 15+1= 16/5 = 16/5 - 2 = 8-2= 7	Écriture pas à pas enchaînée en succession d'opérations incorrecte vis à vis de l'égalité
Denis	pour le nombre 1, 1+8 = 9 ; 9 x 3 = 27 ; 27-4 = 23 ; 23+1 = 24 ; 24/4 = 6 ; 6+2 = 8 ; 8-1 = 7.	Écriture pas à pas séparée en succession d'opérations
Pascal	Pour le nombre 36 *36* + 8 x 3 - 4 + *36* / 4 + 2 - 36 = 7	Écriture linéaire globale non parenthésée avec mémoire[11]
Stéphane	pour le nombre 3, 3 + 8 x 3 - 4 + 3 / 4 + 2 - 3 = 22,75	Écriture linéaire globale non parenthésée sans mémoire

Tableau n° 6 : Types d'écritures utilisés lors du passage vers le registre des écritures numériques

Stratégies de nature algébrique :

Dans ce cas, les élèves s'engagent dans une preuve intellectuelle liée à une démarche algébrique. Nous retrouvons les mêmes types d'écritures que dans la stratégie de nature arithmétique.

Élèves	Solutions	Types d'écriture
Sandrine	B = nombre pensé, S somme 1ère, S' somme 2nde, etc. (B + 8) x 3 = S - 4 = S'+ B = S x /4 = S^3 + 2 = S^4 - B = 7 tous les S / S^1 / S^2 / S^3 / S^4 représentent les sommes trouvées après chaque opération.	Écriture pas à pas enchaînée en succession d'opérations incorrecte vis à vis de l'égalité
Karine :	$(x+8)3 = 3x+24 = 27x$; $27x-4 = 23x$; $23x+x = 24x$; $24x/4 = 6x$; $6x+2=8x$; $8x-x=7$ Son traitement formel s'appuie sur *des règles de transformation incorrectes* qui s'avéreront résistantes	Écriture pas à pas séparée en succession d'opérations - système sans parenthèse - règle d'assemblage {a+b ---> *ab*} - règle de désassemblage avec l'addition {*ab* ---> *a+b*}
Pascal	sans mémoire : x + 8 x 3 - 4 + x / 4 + 2 - x = 7 x + x - x = 8 x 3 - 4 / 4 + 2 $2x$ - x = 24 - 1 + 2 x= 25	Écriture linéaire globale non parenthésée sans mémoire et résolution d'équation

Tableau n°7 : Types d'écriture utilisés lors du passage vers le registre des écritures algébriques

---

[11] L'élève garde en mémoire le sens de l'enchaînement opératoire et l'effectue correctement à l'aide d'un calcul mental.

Composantes	Critères	Les possibles (liste non exhaustive)
Traitement algébrique	Reproduction tâches d'ordre numérique Reproduction tâche algébrique niveau 1 Reproduction tâche algébrique niveau 2 Interprétation d'une expression algébrique Traduction/branchement sur formule Traduction/production guidée Traduction/production Utilisation de l'algèbre pour prouver	Correct ou incorrect/Non
Rapport arithmétique/algèbre	Démarche de résolution	Arithmétique /Algébrique
	Statut du signe d'égalité	Annonce résultat /équivalence
	Statut des lettres	Objet (étiquette, mesure) Représentant un nombre (grandeur, inconnue, variable, nombre généralisé)
	Objet et statut des objets	Expression algébrique 1er degré Équation Structural/opérationnelle, Pseudo-structural
Gestion dans le registre des écritures algébriques	Type de formation	Correct Écriture sans parenthèse Écriture en désassemblage (ab →a+b)
	Type de traitement	Correct Calcul avec mémoire Règle d'assemblage final (a+b →ab Règle de regroupement des termes
Articulation entre le registre des écritures algébriques et d'autres registres	Type de conversion	- écriture linéaire globale parenthésée - écriture linéaire globale non parenthésée - écriture pas à pas séparée en succession d'opérations - Écriture pas à pas enchaînée en succession d'opérations
Fonction de l'algèbre	Fonction apparente de l'algèbre	Aucune Conforme Non conforme - algèbre pour nommer - algèbre pour substituer nombres dans formule - algèbre pour schématiser - algèbre pour résoudre équation - algèbre pour répondre au contrat - algèbre pour prouver
Rationalité algébrique	Type de preuve	Pragmatique / Intellectuelle
	Type de justification	Appel à argumentation Appel au numérique Appel au contexte sémantique Appel à des règles formelles Appel au légal Appel au calcul algébrique

Tableau n° 8 : Grille d'analyse associée à l'exercice " Le prestidigitateur "

Un travail analogue est mené pour toutes les composantes et conduit à la grille d'analyse des productions d'élèves présentée ci-dessus. Les valeurs descriptives retenues permettent de décrire, en termes de cohérence, le fonctionnement des élèves. Cette grille n'est pas exhaustive, et ne peut prendre en compte tous les possibles. Interprétons le fonctionnement des élèves dont les productions ont été présentées :

- Sandrine propose une solution « générale » et utilise une écriture pas à pas enchaînée incorrecte vis-à-vis de l'égalité, nécessitant l'ajout de variables intermédiaires. Face à une complexité formelle ingérable, elle se replie vers le numérique et substitue des valeurs numériques aux lettres, en conservant au calcul sa signification initiale. Elle veut, certainement, rentrer dans le jeu de l'algèbre mais elle n'a pas compris le rôle des parenthèses pour enchaîner deux opérations. La lettre reste encore une étiquette et ne peut pas intervenir dans un calcul. En revanche, elle sait substituer des valeurs aux lettres. Pour Sandrine, l'algèbre recouvre peut-être deux fonctions : « schématiser » ou substituer des valeurs numériques aux lettres.

- Karine construit une expression « générale formelle » en utilisant une écriture pas à pas séparée. Son traitement formel s'appuie sur des règles de transformation incorrectes qui s'avéreront résistantes. Etant donné le caractère régulier et résistant de leur utilisation, l'analyse d'autres productions de Karine a bien confirmé les premières interprétations. Karine essaie de rentrer dans le jeu symbolique : elle construit puis utilise des règles d'écritures fausses.

- Pascal " recopie " l'énoncé à l'aide d'une écriture linéaire globale non parenthésée, en restant dans un rapport privilégié à l'algèbre pour résoudre des équations. Les transformations utilisées pour résoudre l'équation obtenue sont incorrectes. Persuadé d'une résolution fausse, Pascal se replie alors sur le numérique, en attribuant à x une valeur numérique puis en effectuant le calcul en conservant la mémoire de l'enchaînement opératoire. Pascal privilégie une autre fonction à l'algèbre : substituer des valeurs aux lettres dans une formule.

2.2. Applications du côté institutionnel

Une exploitation possible concerne l'étude des programmes officiels et leur interprétation. Plusieurs applications dérivent de cette approche : la comparaison et l'étude des décalages éventuels entre les rapports institutionnels à l'algèbre développés dans les programmes dans la transition entre deux cycles d'enseignement, l'étude des stratégies à mettre en place tant pour l'introduction de l'algèbre au collège que pour son enseignement à différents niveaux.

2.3. Méthodologie utilisée

Pour permettre cette étude, Il est nécessaire d'analyser plusieurs types de source : les programmes mis en jeu à un niveau donné d'enseignement, des problèmes du domaine étudié caractéristiques des compétences attendues dans chaque niveau d'enseignement (par exemple, sujets d'examen, etc.). Lorsque c'est possible, l'analyse des cahiers d'élèves permet de dégager des caractéristiques sur les rapports à l'algèbre construits localement dans une classe donnée .

L'analyse parallèle des programmes relatifs à chaque institution, ou parties de programmes ayant rapport à l'algèbre élémentaire, a pour objectif de dégager des caractéristiques dominantes des rapports institutionnels à l'algèbre à un niveau d'enseignement donné. Ces caractéristiques dominantes sont exprimées, dans une approche globale, en termes :

- de types de problèmes privilégiés et de techniques développées pour les résoudre,
- d'objets de l'algèbre mobilisés,
- de place laissée à l'arithmétique,
- de niveau de traitement sémiotique et de manipulation formelle des écritures mobilisées.

L'analyse transversale des grilles descriptives associées aux problèmes spécifiques de chaque niveau d'enseignement, ensemble de problèmes à caractériser, permet d'affiner ces caractéristiques dominantes. L'étude des cahiers d'élèves permet de rentrer de façon plus fine dans des phases plus " privées " des processus de transposition en jeu dans les classes où ils étudiaient l'année précédente, et de mettre en évidence les marges de manœuvre des professeurs dans l'application du programme.

2.4. Transition entre deux cycles

Dans cet article, nous présentons l'analyse des caractéristiques dominantes des rapports institutionnels à l'algèbre en Troisième et en Seconde indifférenciée et les comparons. Il s'agit d'étudier les nouveaux programmes de mathématiques des classes de Troisième et de Seconde indifférenciée, en transposant l'analyse réalisée dans le cadre de notre recherche sur les programmes de mathématiques de B.E.P. tertiaire pour l'enseignement technologique tertiaire court et ceux de Seconde indifférenciée (GRUGEON 95, 97). Cette étude avait permis de mettre en évidence des décalages dans les rapports institutionnels à l'algèbre, dans la transition entre l'enseignement technologique tertiaire court et l'enseignement technologique tertiaire long, qui peuvent produire des ruptures importantes dans l'articulation entre les deux cycles d'enseignement. Les élèves venant de l'enseignement technologique tertiaire court avaient pu construire un rapport personnel à l'algèbre qui s'avérait inadapté à celui en jeu dans l'enseignement technologique tertiaire long et se retrouver en difficulté voire en échec à leur entrée en cycle long.

Pour comparer les programmes de Troisième et de Seconde indifférenciée, nous nous centrons plus particulièrement sur la comparaison de leurs *parties communes*. Nous présentons quelques éléments d'analyse concernant leurs contenus et les commentaires associés, à partir du repérage des types de problèmes et types de traitement algébrique privilégiés, des pratiques de manipulation formelle.

Contrairement aux textes des anciens programmes, leur présentation est très différente.

- **La structure des programmes**

En premier lieu, le programme de Troisième sépare les rubriques *Travaux numériques* et *Organisation et gestion de données - Fonctions* alors qu'elles ne constituent qu'une même rubrique dans le programme de Seconde indifférenciée *Calcul et Fonction.* Les textes introductifs de ces rubriques en Troisième et Seconde indifférenciée montrent deux points de vue différents :

- En Troisième, « pour le calcul littéral, un des objectifs à viser est qu'il s'intègre aux moyens d'expression des élèves, à côté de la langue usuelle, de l'emploi des nombres ou des représentations graphiques. C'est en développant notamment des activités où le calcul littéral reste simple à effectuer et où il présente du sens, que le professeur permettra au plus grand nombre de recourir spontanément à l'écriture algébrique lorsque celle-ci est pertinente. ». L'enjeu consiste, essentiellement, à mettre à disposition des élèves un nouveau moyen d'expression, le langage algébrique et implicitement à l'articuler avec les autres moyens d'expression, langue usuelle, nombres ou représentations graphiques. Il s'agit d'étendre les tâches non finalisées de calcul littéral à des situations finalisées, où le calcul littéral prend du sens. Les emplois de l'outil algébrique ne sont pas précisés ici.

- En Seconde, « le calcul numérique et le calcul algébrique ne doivent pas constituer un chapitre de révision systématique, mais se retrouvent au travers des différents chapitres. En particulier, ils seront traités en relation étroite avec l'étude des fonctions. Comme la géométrie, les activités de calcul doivent être l'occasion de développer le raisonnement et l'activité de démonstration. » : le programme insiste tout de suite sur le lien étroit entre le calcul algébrique, l'étude des fonctions et l'activité de démonstration. Ici, le calcul algébrique apparaît comme un outil fonctionnel au service de l'étude des fonctions et des démonstrations, ce qui engage l'algèbre dans une nouvelle dimension. Nous constatons une évolution importante du programme de Seconde : l'ancienne version soulignait déjà qu'il faut « consolider la pratique conjointe du calcul littéral et du calcul numérique en relation étroite avec les fonctions » et dégageait un nouvel objectif « amener les élèves à une meilleure maîtrise de l'emploi des variables à travers l'étude d'exemples où elles expriment des quantités dont la signification est clairement perçue ; les travaux se développeront dans les directions suivantes : (...),mise en équations de problèmes et description de phénomènes continus à l'aide de fonctions ». Dans la nouvelle version du programme, les différents aspects de l'outil algébrique, outil de modélisation, outil de preuve et de démonstration, outil de résolution dans des problèmes algébriques et fonctionnels mettant en jeu d'autres notions, sont clairement mobilisés dans les types de problèmes proposés en Seconde.

- **La pratique du calcul littéral**

Nous présentons d'abord les compétences exigibles relatives aux « Écritures littérales et identités remarquables », en Troisième : il s'agit de factoriser des expressions, le facteur commun étant apparent, par exemple, $(x+1)(x+2)-5(x+2)$ ou $(2x+1)^2+(2x+1)(x+3)$ ou de connaître et d'utiliser les identités remarquables sur des expressions numériques ou littérales « simples » dans des exercices finalisés ou non. Les exemples proposés sont : « utiliser (les identités remarquables) sur des expressions numériques ou littérales simples telles que : $101^2=(100+1)^2=100^2+200+1$, $(x+5)^2-4=(x+5)^2-2^2=(x+5+2)(x+5-2)$ ». Ce paragraphe reste identique à l'ancienne version du programme de troisième. On peut se demander si les expressions proposées permettent d'engager les élèves dans un travail d'interprétation des expressions (en termes de syntaxe, de dénotation, de sens, selon J.P. DROUHARD). La technique peut rester au niveau de caractéristiques formelles et de gestes et ne pas engager les élèves dans la recherche de transformations adaptées relativement aux buts visés.

Les commentaires précisent que « la reconnaissance de la forme d'une expression algébrique faisant intervenir une identité remarquable peut représenter une difficulté qui doit être prise en compte. Les travaux s'articuleront sur deux axes :

- utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques;
- utilisation du calcul littéral dans la mise en équation et la résolution de problèmes.

Les activités viseront à assurer la maîtrise du développement d'expressions simples ; en revanche, le travail sur la factorisation qui se poursuivra au lycée, ne vise à développer l'autonomie des élèves que dans des situations très simples. (...) ».

Le rapport à la manipulation formelle, en dehors d'un rôle d'usage et de transformation d'expressions dans des tâches non finalisées, est engagé dans le calcul numérique, la mise en équation et la résolution de problèmes simples. Mais les emplois de l'algèbre restent limités à la résolution de problèmes mettant en jeu des nombres, des indéterminés ou des inconnues. L'algèbre comme outil de modélisation ou de preuve semble peu présent.

En Seconde indifférenciée, le paragraphe « Fonctions et formules algébriques », indique les compétences exigibles : « Reconnaître la forme d'une expression algébrique (somme, produit, carré, différence de deux carrés) ; Identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à f(x) quand f est donnée par une formule ; Reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé (forme réduite, factorisée, ...) ; modifier une expression, la développer, la réduire selon l'objectif poursuivi. ». Le rapport à la manipulation formelle est engagé dans de nouveaux emplois impliquant une dimension technique du traitement algébrique. Les tâches proposées peuvent être finalisées : dans ce cas, la recherche d'une démarche adaptée s'appuie sur la signification des expressions algébriques en jeu qui réside à la fois dans leur syntaxe, leur dénotation, leur interprétation en liaison avec les cadres mathématiques en jeu et leurs sens. Les commentaires développent la variété des situations : « Les activités de calcul doivent être l'occasion de raisonner et de démontrer. On évitera une activité trop mécanique et on s'efforcera de développer, avec des expressions littérales faisant intervenir une seule lettre, deux plus rarement, des stratégies s'appuyant sur l'observation, l'anticipation et l'intelligence du calcul. On multipliera les approches et on explicitera quelques procédures simples permettant d'infirmer ou de confirmer une formule. À l'occasion de certains travaux sur tableur, on distinguera la recherche et l'observation d'une loi empirique de la démonstration d'une formule. Des activités liées aux fonctions, aux équations ou aux inéquations mettront en valeur l'information donnée par la forme d'une expression et motiveront la recherche d'une écriture adaptée ». Ici, l'algèbre est mobilisée comme un outil de résolution dans un spectre assez vaste de situations d'emploi : reconnaissance d'expressions, modélisation, démonstration de formules, résolution algébrique de problèmes dans le cadre fonctionnel, résolution d'équations. la diversité des situations d'emploi de l'algèbre peut contribuer à développer les différentes facettes de l'activité algébrique.

- **Résolution d'équation et d'inéquation**

Dans les programmes, nous retrouvons un paragraphe concernant *la mise en équation, la résolution d'équations et d'inéquation du premier degré* (cf. annexe 2).

En Troisième, le texte présente les types d'équations et d'inéquations, les problèmes du premier ou s'y ramenant à résoudre puis les techniques à utiliser. Les commentaires insistent sur l'intérêt d'articuler plusieurs cadres de représentation pour interpréter les solutions et donner du sens à la résolution (cadre numérique, cadre graphique, cadre fonctionnel).

En Seconde, le même point de vue est repris en insistant « *les avantages et les limites de ces différents modes de résolution* ». L'articulation entre cadre fonctionnel et cadre algébrique est encore renforcée par l'introduction des notations fonctionnelles dans les équations et les commentaires : « *on pourra utiliser les graphiques des fonctions de référence et leurs positions relatives* ». Les problèmes proposés mettent en jeu la flexibilité entre les statuts de variable et d'inconnue.

Pour conclure, nous synthétisons ces caractéristiques dominantes des rapports à l'algèbre en Troisième et en Seconde indifférenciée dans le tableau ci-dessous.

Troisième	Seconde indifférenciée
Grande place laissée à l'interprétation opérationnelle des expressions.	
Pratique du calcul littéral engagée sur des expressions « simples » ne permettant pas toujours un travail d'interprétation des aspects syntaxique, sémantique des expressions.	Pratique du calcul littéral prenant en compte les aspects syntaxiques, sémantiques et techniques du travail algébrique pour engager les élèves dans la recherche de transformations adaptées aux buts visés dans les tâches.
Rapport à la manipulation formelle lié à un rôle d'usage et de transformation d'expressions dans des tâches non finalisées. Il est aussi engagé dans le calcul numérique, la mise en équation et la résolution de problèmes simples voire familiers.	Rapport à la manipulation formelle engagé dans de nouveaux emplois impliquant une interprétation des expressions.
Rapport organisé autour de la mise en équation, de l'application de formules et de la résolution d'équations.	Rapport mettant en jeu des emplois variés, la modélisation, la démonstration, le travail dans le cadre fonctionnel et la mise en équation.

rapports institutionnels à l'algèbre
en Troisième et en Seconde indifférenciée

En conclusion, la comparaison des programmes de Troisième et de Seconde indifférenciée met en évidence des discontinuités possibles entre les rapports à l'algèbre élémentaire développés dans les deux niveaux d'enseignement. Il est nécessaire d'approfondir cette étude à travers celle des manuels scolaires et des sujets d'examen ou d'évaluation nationale de seconde.

2.5. Une nécessaire articulation entre des stratégies d'enseignement de l'algèbre

Ce paragraphe s'appuie sur une synthèse de travaux anglo-saxons (BERNARZ, KIERAN 96) et français (DUPERRET et FENICE 99). Nous retenons quatre perspectives d'introduction de l'algèbre : approche par la généralisation et la justification, une approche par la mise en équation et la résolution de problèmes, une approche par la modélisation, une approche fonctionnelle et technologique. Ces approches s'appuient sur les différents emplois de l'algèbre développés dans le paragraphe I. Nous présentons d'une façon schématique les caractéristiques et les difficultés posées par chaque approche.

- **Approche par la généralisation et la justification**

Il s'agit d'engager les élèves dans la construction de la rationalité algébrique à partir de problèmes permettant l'utilisation de l'outil algébrique pour conjecturer des propriétés numériques, les généraliser et les prouver. Ce contexte de travail algébrique a deux objectifs :

- faire émerger les nombres généralisés comme préconcepts des variables,
- engager les élèves dans l'utilisation de l'écriture symbolique pour mémoriser des propriétés numériques, le contexte présentant du sens pour les écritures.

Les travaux de WHEELER et LEE (WHEELER 96) ont montré qu'un travail suivi est nécessaire pour engager les élèves à sortir des preuves pragmatiques et à accéder à l'utilisation des nombres généralisés pour produire des formules dans le but de les prouver.

- **Approche par la résolution de problèmes**

C'est la stratégie habituelle utilisée le plus souvent pour l'introduction de l'algèbre dans les collèges. Il s'agit d'engager les élèves à utiliser l'écriture symbolique dans la mise en équation de problèmes et leur résolution. Ce contexte conduit à l'émergence du concept d'inconnue et du raisonnement algébrique. Nous avons montré dans le paragraphe I, la nécessité de proposer des problèmes en rupture avec des problèmes permettant des stratégies arithmétiques pour négocier la rupture entre l'arithmétique et l'algèbre et faciliter l'accès au raisonnement algébrique dans des contextes où il s'avère économique et incontournable.

- **Approche par la modélisation**

Cette approche a pour objectif de faire émerger les concepts de grandeur et de variable en engageant les élèves dans la production de formules ayant du sens en liaison avec les contextes de modélisation intra ou extra mathématiques (CHEVALLARD 89). Il s'agit de choisir des situations réelles adaptées à un découpage de la réalité accessible aux élèves : ce choix reste difficile. Il s'agit aussi d'accompagner les élèves à donner du sens aux écritures symboliques utilisées pour décrire les modèles : ce travail nécessite, après une phase de recherche individuelle des élèves, la mise en place et la gestion de phases de formulation, de validation afin de confronter puis valider les écritures mobilisées.

- **Approche fonctionnelle et technologique**

Cette approche vise à faire émerger le concept de variable dans un environnement informatique de résolution de problèmes fonctionnels où les élèves expriment des relations entre variables (BERNARZ, KIERAN 96). Il s'agit d'engager les élèves à donner du sens aux écritures algébriques, et à entrer dans la pensée algébrique en articulant différents modes de représentation : tableau de nombres, représentations graphiques, écritures « algorithmiques ». L'utilisation de cet environnement informatique favorise l'entrée dans la pensée algébrique à partir de la notion de variable, et permet d'approcher la notion dans un contexte plus large. Cette approche ne semble pas confronter les élèves aux obstacles rencontrés dans l'approche usuelle. Mais, le travail dans cet environnement montre que les élèves ne peuvent pas construire spontanément des connaissances concernant la manipulation algébrique. Il s'agit donc d'articuler cette approche avec un travail sur la manipulation formelle des expressions.

La construction des différents aspects de la compétence algébrique passe par une nécessaire complémentarité des approches pour développer une flexibilité et une adaptabilité dans l'interprétation des lettres et des expressions, dans différents modes de représentation, pour en faire des usages variés dans les différents emplois de l'outil algébrique.

J.C. DUPERRET et J.C FENICE ont donné des pistes et un large éventail de problèmes pour passer du numérique à l'algébrique au collège (DUPERRET 99).

3. Applications du côté de l'élève

Un deuxième type d'exploitation des outils d'analyse consiste à caractériser les rapports personnels des élèves à l'algèbre à partir de la définition de profils. Cette étude passe par la construction d'un outil de diagnostic.

3.1. Diagnostic et profils d'élèves

L'outil de diagnostic construit pour analyser les rapports des élèves à l'algèbre comporte trois éléments : un ensemble de tâches diagnostiques papier – crayon, les grilles d'analyse multidimensionnelles permettant d'analyser les tâches et d'interpréter les productions des élèves, et en dernier lieu les profils cognitifs des élèves. Le profil cognitif d'un élève en algèbre élémentaire est une description des principaux traits de son comportement en algèbre élémentaire qui donne un modèle intelligible de son rapport personnel à l'algèbre.

La construction des profils est réalisée en trois étapes :

- passation d'un test constitué de tâches diagnostiques,
- analyse par l'enseignant des productions des élèves à partir des grilles d'analyse multidimensionnelles,
- analyse transversale par l'enseignant pour construire les profils d'élèves.

- **Test, tâches diagnostiques et grilles d'analyse**

Le test papier - crayon est constitué de tâches diagnostiques, dix-neuf dans le cadre de la recherche initiale (exemples de tâches en annexe 3). Ces tâches couvrent les différents aspects de la compétence algébrique à travers trois classes de tâches, mettant en jeu les différents types de traitement algébrique.

Les *tâches de mathématisation* ont pour objectif d'identifier si l'élève mobilise le type de traitement algébrique attendu et dans des situations où l'outil algébrique intervient pour mettre en équation une situation intra ou extra-mathématique, pour produire une formule, pour exprimer une relation entre variables, pour généraliser une conjecture numérique pour la prouver.

Les *tâches de reconnaissance* visent à établir comment l'élève identifie et interprète les expressions algébriques dans le registre des écritures algébriques ou en articulation avec d'autres registres sémiotiques.

Les *tâches techniques* visent à déterminer le niveau de manipulation formelle mis en jeu par l'élève dans des tâches finalisées ou non.

A chaque tâche est associée une grille descriptive et une grille d'analyse des productions d'élèves (cf. paragraphe II). La répartition des critères utilisés pour analyser l'ensemble des tâches permet la recherche de cohérences de fonctionnement, composante par composante.

- **Profils d'élèves**

L'analyse des productions des élèves relatives aux tâches, nous en avons montré un exemple avec le prestidigitateur, permet de dresser un panorama cognitif de chaque élève. La description obtenue très fine est trop complexe pour être utilisée,sous cette forme, par les enseignants : en effet, elle est constituée de n-uplets de valeurs, dix-neuf n-uplets pour dix-neuf tâches, difficilement exploitables en l'état. Une description, de plus haut niveau, donnant une vision plus synthétique, s'avère nécessaire pour comprendre et faire évoluer le fonctionnement de l'élève. Un recoupement transversal des réponses aux tâches, pour chaque composante, critère par critère, permet de décrire et rechercher des modalités du fonctionnement, descripteurs de régularités caractéristiques de traits de comportement qui constitue le profil de l'élève en algèbre.

Trois niveaux de description permettent de définir les principaux traits de fonctionnement :

- Une *description quantitative des compétences algébriques*, selon les types de tâches, en terme de réussite par rapport à un niveau attendu. Les types de traitement algébrique maîtrisés résument aussi globalement la compétence algébrique.

- Une *description qualitative des cohérences de fonctionnement* composante par composante, en terme de modalités de fonctionnement définies a priori. Ces modalités, pour un critère d'une composante donnée, sont obtenues par regroupement de valeurs locales décrivant des caractéristiques communes sur l'ensemble des tâches. Les modalités qui caractérisent des types de manipulation formelle envisageables à un niveau fin de collège sont présentées dans le tableau n° 15 en annexe 4.

- Une description de la flexibilité dans l'articulation entre le registre des écritures algébriques et des autres registres de représentation (langage naturel, écritures numériques, représentations graphiques, dessins géométriques, ..). Le diagramme présenté à la figure suivante indique les liaisons effectives entre les registres intervenant dans les cadres mis en jeu dans la résolution des problèmes.

Un exemple : le profil de Mérième, élève de la classe de Première d'adaptation

Nous illustrons la formalisation réalisée à travers le profil de Mérième et caractérisons certains traits de son comportement en mettant en évidence certains aspects évolutifs de son rapport personnel à l'algèbre élémentaire.

Ses compétences algébriques restent très fragiles. Mais elle peut s'appuyer sur trois types de traitement algébrique maîtrisés, « *Traduire algébriquement une relation dans contexte fermé, Utiliser l'outil pour étudier d'autres notions, Reproduire tâches formelles non finalisées de niveau 1* ». Quelques indices, en revanche, laissent prévoir des points d'appui permettant une entrée dans la pensée algébrique :

- le type d'écriture utilisé par Mérième est correct et sa manipulation formelle opératoire de niveau 0. Mais la maîtrise technique reste faible, ce qui risque de constituer un léger handicap.

- Mérième a confiance dans l'outil algébrique et l'utilise pour étudier d'autres notions, ici pour rechercher une équation réduite d'une droite donnée. Mérième ne mobilise pas spontanément le calcul algébrique pour les résoudre.

- Même si Mérième reste du côté d'une rationalité pré-scientifique dans les exercices de mathématisation, les justifications données aux exercices de reconnaissance, reposant sur le raisonnement déductif ou l'utilisation de l'outil algébrique, indiquent une rationalité algébrique plutôt du côté scolaire ou scientifique.

De plus, dans des exercices non finalisés, Mérième utilise correctement les règles de conversion entre le registre des écritures algébriques et au moins trois registres (registre du langage naturel, numérique, des représentations graphiques). Mérième montre des compétences en germe pour articuler le registre des représentations graphiques et celui des équations. Ce point d'appui la distingue très fortement de ces camarades.

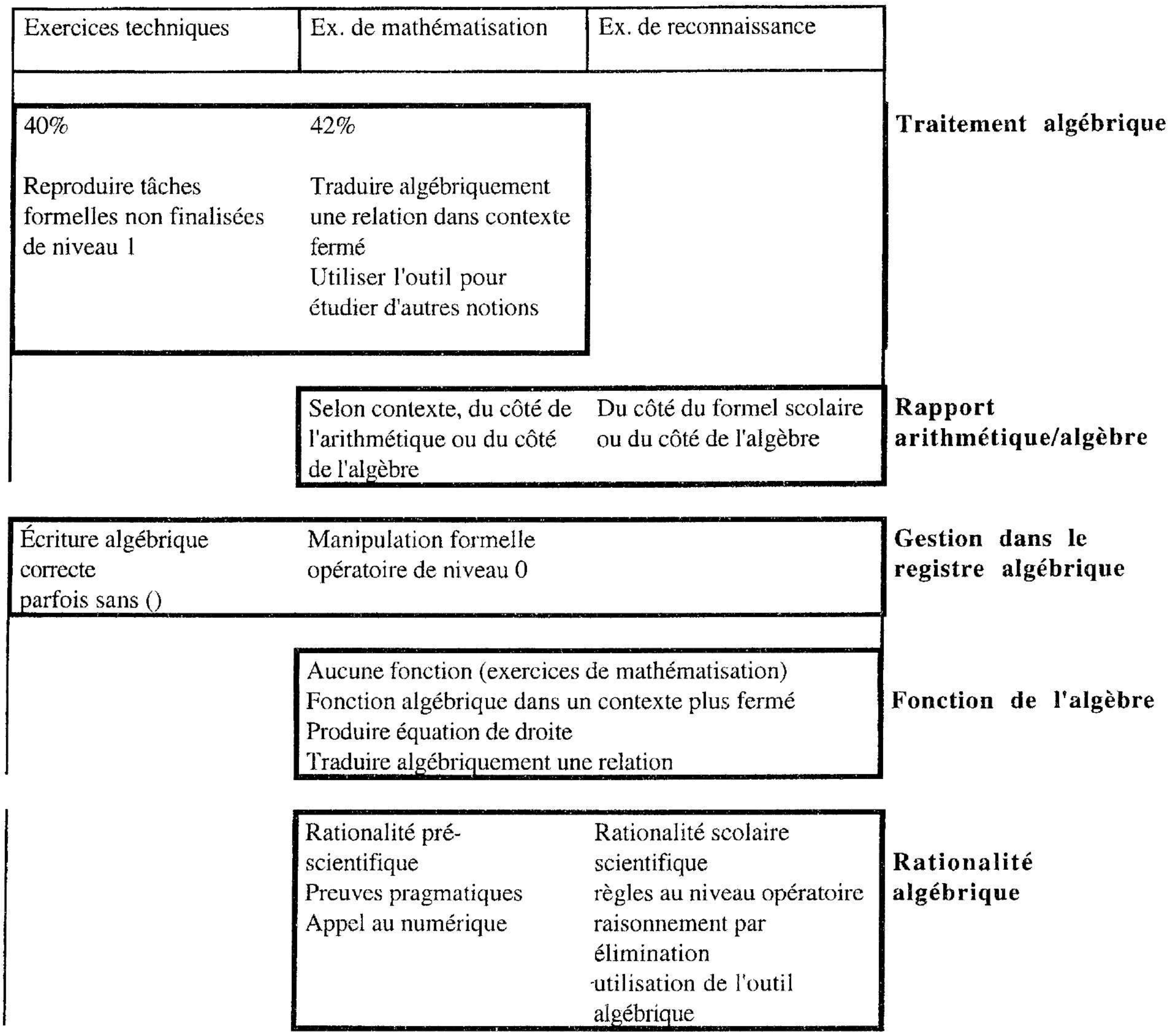
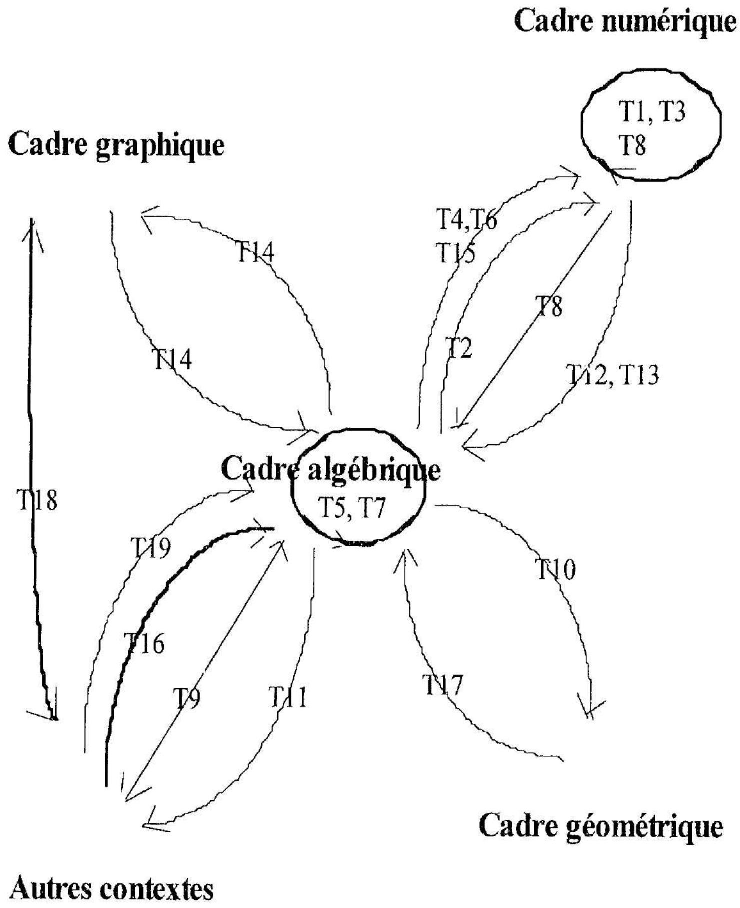


Figure n°10 : Le profil de Mérième

Nous avons montré dans notre travail de thèse le lien entre ces points d'appui et l'enseignement reçu préalablement par Mérième. Nous donnons ci-après une représentation du profil de Mérième en algèbre.

Ce travail permet de repérer les obstacles éventuels des élèves à l'entrée dans l'algèbre et les points d'appui. Les conséquences sont importantes pour l'enseignant d'une classe : il peut ainsi adapter ses stratégies d'enseignement en fonction des principaux modes de fonctionnement repérés.



3.2. Une nécessaire automatisation

- **Les principaux résultats**

Énumérons les principaux résultats des expérimentations réalisées suite au travail de thèse :

L'outil de diagnostic a été adapté à la transition 3ème/2de (remaniement de la grille d'analyse), dans le but de transposer ce travail de recherche en un instrument utilisable par les enseignants. Une expérimentation a été réalisée, en juin 1996, sur 600 élèves de collège de troisième de six collèges de VILLENEUVE-LE-ROI, ORLY et VILLENEUVE-SAINT-GEORGES. Depuis cette date, l'outil est utilisé régulièrement, en début de seconde, par plusieurs enseignants convaincus de son intérêt et qui ont appris à l'utiliser. Le modèle de la compétence algébrique permet bien de construire des profils d'élèves en adéquation avec leurs principaux traits caractéristiques de fonctionnement de en algèbre élémentaire.

Les expérimentations ont mis en évidence deux raisons qui rendent le diagnostic papier-crayon difficile à utiliser par les enseignants :

- le temps demandé par réaliser le test, la correction et le codage des productions d'élève est très important. L'enseignant ne doit pas seulement valider ou non la solution, il doit identifier les modes de fonctionnement des élèves en se référant à la grille et coder les solutions.
- l'outil peut être utilisé par des enseignants, mais son apprentissage est très coûteux en temps et demande une très forte implication de la part des enseignants (LENFANT 97).

- **L'automatisation du diagnostic : le logiciel PEPITE**

Les raisons

L'automatisation permet de pallier les difficultés de mise en œuvre de l'outil de diagnostic par les enseignants, et permet ainsi une plus grande diffusion. La réutilisation d'une expertise en didactique des mathématiques fait de PEPITE un projet original du point de vue de la modélisation de l'apprenant, en EIAO. Par rapport aux autres systèmes d'évaluation, PEPITE permet de construire des profils ayant un caractère multidimensionnel. Ce projet montre ainsi la nécessité d'une collaboration indispensable entre informaticiens et didacticiens.

Le logiciel PEPITE (Jean[12] 2000)

Stéphanie JEAN, dans le cadre de son travail de thèse (JEAN 2000), soutenue en juin 2000, a réalisé le logiciel PEPITE qui permet une transposition informatique du diagnostic et la construction automatique des profils d'élèves en algèbre. Son architecture comporte trois modules : PEPITEST, PEPIDIAG et PEPIPROFIL.

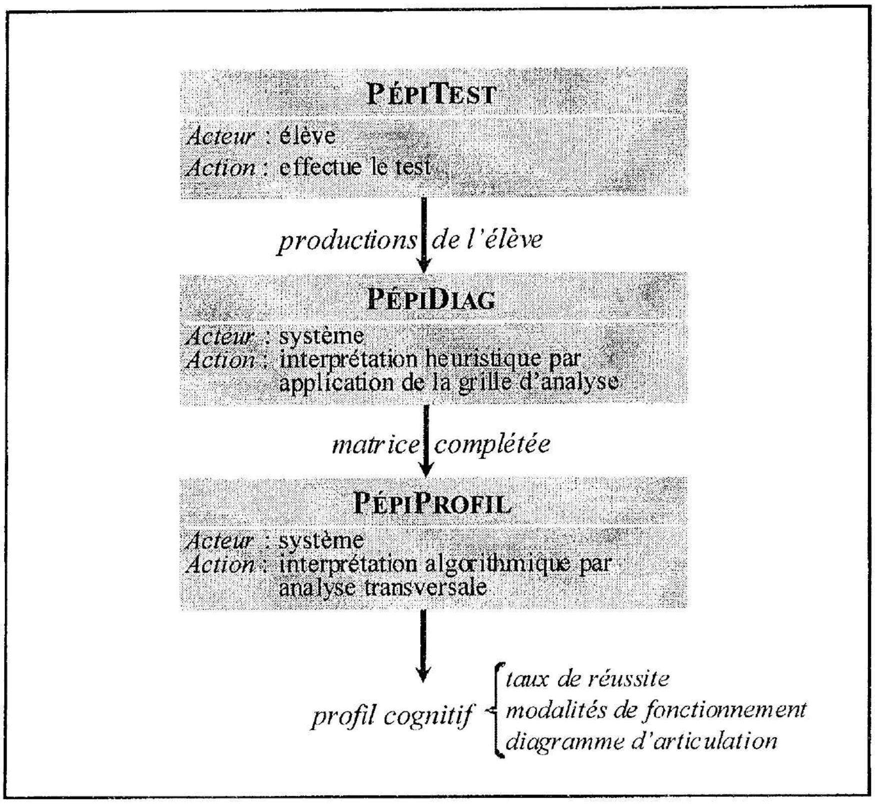
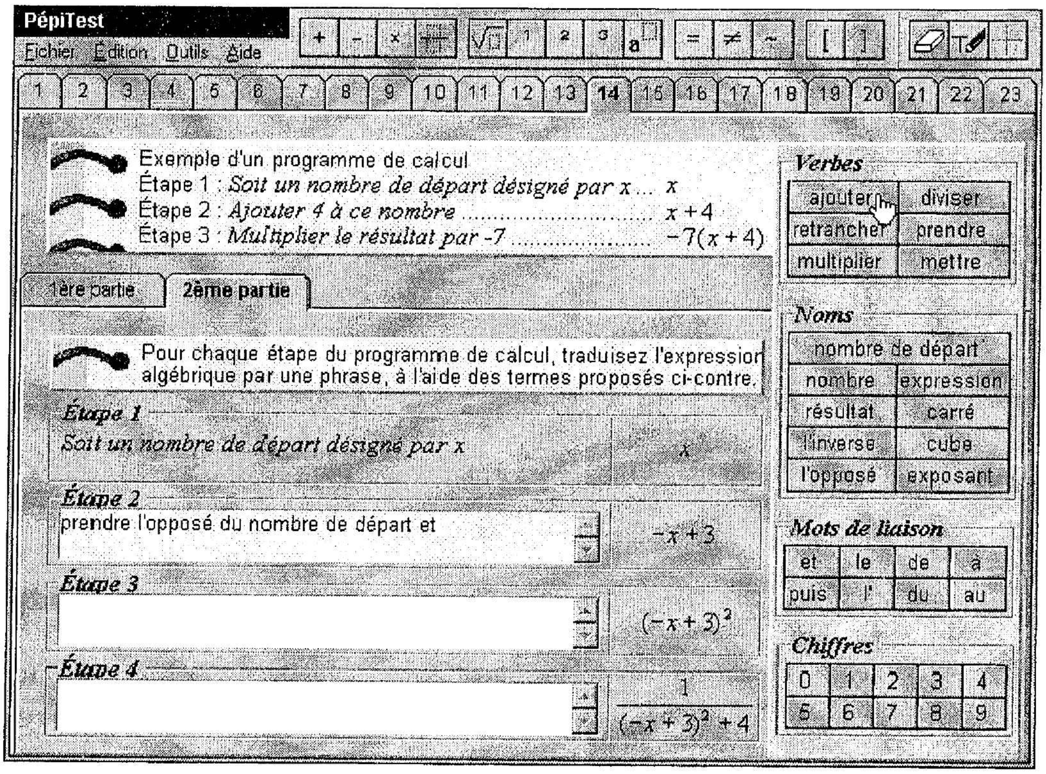


Figure n°11 : L'architecture de PÉPITE (Jean 2000)

PEPITEST est le module qui permet la réalisation du diagnostic sur ordinateur, les tâches diagnostiques ayant été transposées dans l'environnement informatique. Voici un exemple de tâche diagnostique transposée dans l'environnement informatique qui donne à voir les choix réalisés par S. Jean pour le transfert de tâche et les modifications possibles induites sur les solutions des élèves.

---

[12] Stéphanie JEAN, Élisabeth DELOZANNE et Pierre JACOBINI travaillent au LIUM, Laboratoire Informatique à l'Université du Maine, B.P. 72017 Le Mans Cedex.


PépiTest
Fichier Édition Outils Aide
Exemple d'un programme de calcul
Étape 1 : Soit un nombre de départ désigné par x ... x
Étape 2 : Ajouter 4 à ce nombre ... x + 4
Étape 3 : Multiplier le résultat par -7 ... −7(x + 4)
1ère partie
2ème partie
Pour chaque étape du programme de calcul, traduisez l'expression algébrique par une phrase, à l'aide des termes proposés ci-contre.
Étape 1
Soit un nombre de départ désigné par x
x
Étape 2
prendre l'opposé du nombre de départ et
−x + 3
Étape 3
(−x + 3)²
Étape 4
1 / ((−x + 3)² + 4)
Verbes
ajouter
diviser
retrancher
prendre
multiplier
mettre
Noms
nombre de départ
nombre
expression
résultat
carré
l'inverse
cube
l'opposé
exposant
Mots de liaison
et
le
de
à
puis
l'
du
au
Chiffres
0 1 2 3 4
5 6 7 8 9

PEPIDIAG réalise une représentation des connaissances et permet d'analyser les productions d'élèves. PEPIPROFIL permet la construction des profils d'élèves.

Voici un exemple de profil réalisé par le logiciel PEPITE :

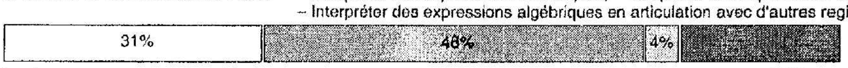
Profil de Jean-Luc T. établi d'après le test effectué avec PépiTest le 12/06/1997, selon les paramètres sélectionnés dans PépiProfil.

» Taux de réussite

Taux de réussite global : 73%
Exercices techniques : 60%
Exercices de mathématisation : 25%
Exercices de reconnaissance : 88%

Traitements maîtrisés

– Effectuer des calculs numériques, – Manipuler des expressions
– Interpréter des expressions numériques, – Interpréter des expressions algébriques
– Interpréter des expressions algébriques en articulation avec d'autres registres d'écritures



Absence de réponse · Traitement correct · Traitement correct partiel ou non attendu · Traitement incorrect

» Modes de fonctionnement

Utilisation des lettres 2/19
Utilisation correcte des lettres 2
Utilisation des lettres pour leur substituer des valeurs numériques
Utilisation des lettres pour faire du calcul algébrique avec des règles fausses
Utilisation des lettres comme étiquettes ou abréviations
Aucune utilisation des lettres
Utilisation des lettres non identifiée

Calcul algébrique 20/42
Bonne maîtrise des règles de transformation 15
Maîtrise technique fragile
Règles de transformation non maîtrisées, mais identification correcte du rôle des opérateurs + et ×
  Utilisation inadaptée des parenthèses qui conduit à un résultat correct
  Utilisation inadaptée des parenthèses qui conduit à un résultat incorrect 1
  Utilisation de règles de transformation fausses identifiées
  Erreurs de signes au cours d'un calcul
Identification incorrecte du rôle des opérateurs + et ×
  Les règles de transformation utilisées linéarisent les expressions
  Les règles de transformation utilisées "assemblent" les termes
Calcul sans repérage des blocs
Calcul non identifié 4

Conversion 15/30
Conversion correcte 11
Conversion correcte non attendue
Conversion incorrecte 2
Conversion abréviative
Conversion non identifiée 2

Type de justification 7/17
Pas de justification 4
Justification par l'algèbre 2
Justification par l'exemple numérique
Justification de type scolaire
  Justification reposant sur l'application de règles incorrectes
  Justification en langage naturel par argumentation 1
  Justification s'appuyant sur des formulations d'ordre légal 1
Justification non identifiée

Connaissances numériques 0/1
Statut du signe égal
  Relation d'équivalence
  Annonce de résultat
Erreur sur l'ordre des nombres
  Erreur sur l'ordre des décimaux
  Erreur sur l'ordre des négatifs

» Diagramme d'articulation entre les différents cadres

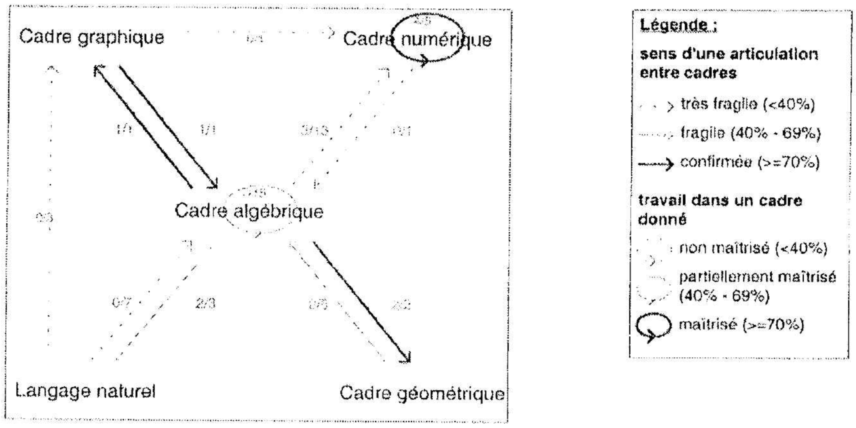


Figure n°12 : Le Profil de Jean-Luc T. (Jean 2000)

- **Des résultats**

Le logiciel PEPITE est fiable et a été testé à plusieurs reprises dans quatre classes de seconde, en particulier au lycée Georges Brassens à Villeneuve Le Roi. L'interface a été validée du point de vue de son utilisabilité par les élèves. De plus, il n'y a pas réduction du spectre des réponses et le spectre des observables recueillis sont représentatifs des connaissances des élèves. La construction automatique des profils est possible et il y a correspondance entre les profils construits manuellement et de façon automatique.

Les limites concernent le module de diagnostic et réside dans le manque de généricité des techniques utilisées, la méthode adoptée dépendant du test. Mais ce travail ouvre de grandes perspectives.

4. Conclusion et perspectives

Dans cet article, nous avons montré quelques applications possibles du travail réalisé :

- La structure d'analyse multidimensionnelle de l'algèbre permet d'analyser, à partir des programmes officiels, des décalages entre les rapports institutionnels à l'algèbre élémentaire développés dans deux niveaux d'enseignement. Ces discontinuités peuvent produire des ruptures importantes dans la transition entre deux niveaux d'enseignement car les élèves peuvent se construire des compétences algébriques qui s'avèrent inadéquates à celles attendues à un niveau donné. Les professeurs peuvent jouer un rôle essentiel dans la négociation des discontinuités institutionnelles, en proposant des scénarios d'enseignement adaptés pour travailler les difficultés résistantes repérées. Nous espérons que les outils construits pourront les y aider davantage.

- La structure d'analyse multidimensionnelle de l'algèbre permet aussi de développer des outils de diagnostic pour déterminer les profils d'élèves en algèbre élémentaire. Il devient ainsi possible aux enseignants de déterminer des leviers sur lesquels agir pour faire évoluer les fonctionnements des élèves en algèbre.

- La structure d'analyse est très complexe, mais peut-il en être autrement si nous voulons comprendre et décrire la complexité des fonctionnements des élèves, les mettre en perspective des enseignements reçus et ainsi pouvoir agir avec des scénarios d'enseignement adaptés.

Il reste une longue route à franchir et nous envisageons plusieurs perspectives de travail :

- Approfondir l'analyse des rapports institutionnels à l'algèbre dans la transition Troisième/ Seconde indifférenciée, à partir de l'analyse des manuels scolaires, des problèmes d'examen ou ceux de l'évaluation nationale de seconde. L'enjeu est de caractériser les domaines de problèmes en jeu, les objets de l'algèbre mobilisés pour les résoudre, ainsi que les pratiques de calcul algébrique associées, à chaque niveau d'enseignement. Ce sont autant de leviers indispensables pour construire des scénarios d'enseignement adaptés pour négocier la transition entre ces deux classes.

- Définir des classes de profils afin de définir des stratégies d'enseignement voire de remédiation adaptées à une classe de profils donnée,

- Développer le projet PEPITE en lui associant un module de remédiation : une fois le profil d'élève en algèbre élémentaire défini automatiquement, l'enjeu est de proposer des situations adaptées pour faire évoluer les compétences algébriques des élèves

- Exploiter la structure d'analyse multidimensionnelle en formation initiale et continue des enseignants du secondaire.

BIBLIOGRAPHIE

BERNARZ N, KIERAN C. et LEE L., 1996, "*Approaches to algebra*". Perspectives for Research and Teaching, Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers.

BOSCH I., CASABO M., 1994, "*Les instruments du travail mathématique : le cas de la proportionnalité*". In Vingt ans de didactique des mathématiques en France, pp 305-312, Éditions La Pensée Sauvage.

BOOTH L., 1985, "*Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire*". Petit x n° 5, pp 5-17.

CHEVALLARD Y., 1985, "*Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie : L'évolution de la transposition didactique*". Petit x, n°5, pp 51-94.

CHEVALLARD Y., 1989, "*Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie : Perspectives curriculaires : la notion de modélisation*". Petit x n°19, pp 43-75.

CHEVALLARD Y., 1990, "*Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Troisième partie : Voies d'attaque et problèmes didactiques*". *Petit x*, n°23, pp 5-38.

CHEVALLARD Y., 1992, "*Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique*". Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 12.1, pp. 73-111, Éditions La Pensée Sauvage.

COMBIER G., GUILLAUME J.-C., PRESSIAT A., 1996, "*Les débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre*". INRP, Didactique des Disciplines, Paris.

DOUADY R., 1986, "*Jeux de cadres et dialectique outil/objet*". Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 7.2, pp. 5-32, Éditions La Pensée Sauvage.

DOUADY R., 1994, "*Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir*". Repères IREM n° 15, pp. 37-61.

DROUHARD J.-P., 1992, "*Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*". Thèse de doctorat, Université Paris 7.

DUPERRET J.-C., 1999, "*L'accès au calcul littéral et algébrique : un enjeu du collège*". Repères IREM n°

DUVAL R., 1993, "*Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ?*". Petit x, n°31, pp 37 à 61.

DUVAL R., 1995, "*Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?*". Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 16.3, Éditions La Pensée Sauvage.

GRUGEON B., 1995, "*Étude des rapports personnels et des rapports institutionnels à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : B.E.P. et Première G*". Thèse de doctorat, Université Paris 7.

GRUGEON B., 1997, "*Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire*". Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 17.2, pp. 167-210, Éditions La Pensée Sauvage.

JEAN S., 2000, "*PEPITE : un système d'assistance au diagnostic de compétences*". Thèse de doctorat, Université du Maine.

JEAN S., DELOZANNE E., JACOBINI P., GRUGEON B., 1999, "*A system to access students'competence that re-use a pencil and paper, user modeling". Proceedings of seventh international conference, Edited by Judy Kay, Springer Wien New* York.

KIERAN C., 1992, "*The learning and teaching of school algebra*". In Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Douglas A. Grouws (ed), pp. 390-419, New York Macmillan.

LENFANT A., 1997, "*Étude sur la transposition d'un outil de recherche destinée aux enseignants*". Mémoire de DEA de didactique des mathématiques, Université Paris 7.

SFARD A, 1991, "*On the dual nature of mathematics conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin*". Educational Studies in Mathematics, Vol. 22, pp. 1-36.

SFARD A. et LINCHEVSKI L., 1994, "*The gains and the pitfalls of reification -- The case of algebra*". Educational Studies in Mathematics, Vol. 26, pp. 191-228.

VERGNAUD G., 1986, "Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre". In Actes du premier colloque franco-allemand de didactique, Éditions La Pensée Sauvage.

VERGNAUD G., CORTES A., FAVRE-ARTIGUE P., 1987, "*Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques*". In Actes du colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, pp. 259-288, Éditions La Pensée Sauvage.

VERGNAUD G., 1990, "*La théorie des champs conceptuels*". Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 10/1.2, pp. 133-170, Éditions La Pensée Sauvage.

Annexe 1

Troisième	Seconde indifférenciée
Introduction Comme dans les classes antérieures, la résolution de problèmes (issus de la géométrie, de la gestion de données, des autres disciplines, de la vie courante) constitue un objectif de cette partie de programme ; elle nourrit les activités, tant dans le domaine numérique que dans le domaine littéral. S'y ajoutent certains problèmes numériques purs, qui jouent un rôle dans l'appropriation des concepts importants, tels que ceux de la racine carrée ou de fraction irréductible. Ce sont ces études qu'il convient de privilégier et non pas la technicité. (...) Pour le calcul littéral, un des objectifs à viser est qu'il s'intègre aux moyens d'expression des élèves, à côté de la langue usuelle, de l'emploi des nombres ou des représentations graphiques. C'est en développant notamment des activités où le calcul littéral reste simple à effectuer et où il présente du sens, que le professeur permettra au plus grand nombre de recourir spontanément à l'écriture algébrique lorsque celle-ci est pertinente.	**Objectifs** - Approfondir la connaissance des différents types de nombres. - Expliciter, sous différents aspects (graphique, calcul, étude qualitative), la notion de fonction. - Etudier quelques fonctions de références, préparant à l'analyse. - Progresser dans la maîtrise du calcul algébrique, sans recherche de technicité, toujours dans la perspective de résolution de problèmes ou de démonstration. - Utiliser de façon raisonnée et efficace la calculatrice pour les calculs et pour les graphiques. La plupart de ces objectifs concernent les trois années de lycée. Le calcul numérique et le calcul algébrique ne doivent pas constituer un chapitre de révision systématique, mais se retrouvent au travers des différents chapitres. En particulier, ils seront traités en relation étroite avec l'étude des fonctions. Comme la géométrie, les activités de calcul doivent être l'occasion de développer le raisonnement et l'activité de démonstration. Lors de la résolution de problèmes, on dégagera, pour certains exemples étudiés, les différentes phases du traitement : mathématisation et mise en équation, résolution, contrôle de la cohérence des résultats et exploitation. On exploitera les possibilités offertes par les tableurs, par les grapheurs et par les logiciels de géométrie.

Tableau n° 13 : Introduction de la rubrique « Travaux numériques» du programme de Troisième et de la rubrique « calcul et Fonction » du programme de Seconde indifférenciée

Annexe 2

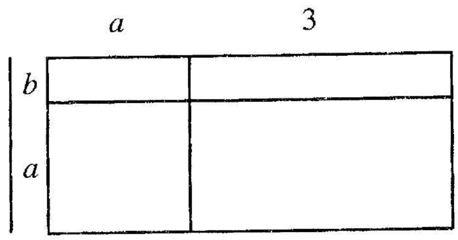
Troisième	Seconde indifférenciée
Equations et inéquations du premier degré **Ordre et multiplication** *Utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme ab et ac sont dans le même ordre que b et c si a est strictement positif, dans l'ordre inverse si a est strictement négatif.* On pourra s'appuyer dans toute cette partie sur des activités déjà pratiquées dans les classes antérieures, notamment celles de tests par substitution de valeurs numériques à des lettres. **Inéquation du premier degré à une inconnue** *Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques.* *Représenter ses solutions sur une droite graduée.* **Système de deux équations à deux inconnues** *Résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues admettant une solution et une seule; en donner une interprétation graphique.* Pour l'interprétation graphique, on utilisera la représentation des fonctions affines. **Résolution de problèmes du premier degré ou s'y ramenant** *Résoudre une équation mise sous la forme A.B=0, où A et B désignent deux expressions du premier degré de la même variable.* *Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation, une inéquation ou un système de deux équations du premier degré.* L'étude du signe d'un produit ou d'un quotient de deux expressions du premier ordre de la même variable est, elle, hors programme. Les problèmes sont issus des différentes parties du programme. comme en classe de quatrième, on dégagera à chaque fois les différentes étapes du travail : mise en équation, résolution de l'équation et interprétation du résultat.	**Mise en équation ; résolution algébrique, résolution graphique d'équations et d'inéquations.** *Résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré.* *Utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction.* *Résoudre graphiquement des équations ou inéquations du type :* *$f(x) = k$; $f(x) < k$; $f(x) = g(x)$; $f(x) < g(x)$...* Pour un même problème, on combinera les apports des modes de résolution graphique et algébrique. On précisera les avantages et les limites de ces différents modes de résolution. On pourra utiliser les graphiques des fonctions de référence et leurs positions relatives. On ne s'interdira pas de donner un ou deux exemples de problème conduisant à une équation qu'on ne sait pas résoudre algébriquement et dont on cherchera des solutions approchées.

Tableau n° 14 : Éléments des programmes de Troisième et de Seconde indifférenciée
(les contenus sont en gras, les compétences exigibles en italique, les commentaires en normal)

Exercices du test diagnostique avec la nouvelle grille d'analyse (1996)

EXERCICE 6

A. Voici un rectangle :



Indique comment tu calcules l'aire de ce rectangle

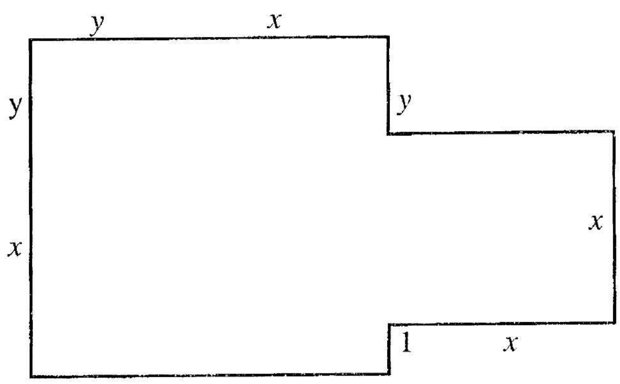
T1	T2	T3		T0	
C1		C3	C4		?
M1	M2	M 31 32	M 41 42	M5	?

Entoure la ou les expressions qui sont égales à l'aire de ce rectangle.

	$a+b(a+3)$		a_b + 3ab		$a+3\ (a+b)$
	$3a\ b$		$(a+b)(a+3)$		$6ab + a^3b$
	a_ + ba + 3b		ab + 3b + a_ + 3a		3ab + 3a_
	$(a+3)(a+b)$		a_ + ab		3ab_ + 3 a^3
	3a x 3b x a_ x ba		$2(2a + b + 3)$		$2a + b + 3$

T1	T2	T3		T0	
C1		C3	C4		?
M1	M2	M 31 32	M 41 42	M5	?

B .



Hachure une partie de la figure ayant pour aire l'expression :
(x + y + 1) + x_

x	T1	T2	T3		T0	
	C1		C3			?

EXERCICE 7

Traduis à l'aide d'expressions algébriques les différentes étapes de ce programme de calcul :

Étape 1	*Soit un nombre de départ désigné par x*	x
Étape 2	*Prendre le carré du double de ce nombre*	
Étape 3	*Retrancher 3 au résultat*	
Étape 4	*Ajouter à l'inverse du résultat obtenu le nombre de départ*	

T1		T3		T0	
C1	C2	C3			?
M1		M 31 32	M 41 42		?

Inversement, complète le tableau en écrivant une phrase traduisant chaque étape du programme de calcul en face de l'expression algébrique correspondante :

Étape 1	*Soit un nombre de départ désigné par x*	x
Étape 2	....	$-x+3$
Étape 3	....	$-x+3)^2$
Étape 4	....	$\frac{1}{(-x+3)^2+4}$

T1		T3		T0	
C1	C2	C3			?

Annexe 4

Modalités	Description
Manipulation formelle opératoire de niveau 1	La manipulation formelle est correcte et correspond à la maîtrise technique attendue à un niveau donné.
Manipulation formelle opératoire de niveau 0	La manipulation formelle est correcte mais n'atteint pas la maîtrise technique attendue à un niveau donné.
Manipulation formelle opératoire incorrecte On distingue trois types de manipulation formelle, le Troisième n'excluant pas les deux premiers : - Manipulation formelle **opératoire incorrecte avec mémoire dans un système non parenthésé** - Manipulation formelle **opératoire incorrecte sans mémoire dans un système non parenthésé** - Manipulation formelle **opératoire incorrecte avec règles fausses**	La manipulation formelle est incorrecte mais les rôles respectifs des signes opératoires + et x, de l'exposant 2 sont correctement identifiés dans les réécritures. - les réécritures sont réalisées dans un système non parenthésé mais gardent la mémoire du calcul, des priorités opératoires et conduisent à un calcul correct ; - les réécritures sont réalisées dans un système non parenthésé mais ne gardent pas la mémoire du calcul, des priorités opératoires et conduisent à un calcul incorrect ; - le rôle des parenthèses semble correctement identifié, mais de nombreuses règles de transformation incorrectes sont utilisées (règles de fausse linéarité, règle de transposition multiplicative,...).
Manipulation formelle pseudo-opératoire	Le rôle de chacun des opérateurs *exposant* 2, _ et + n'est pas stable et, régulièrement, l'opérateur *exposant* 2 peut être associé à la duplication ou au glissement du nombre en position d'exposant vers un nombre en position de coefficient.
Manipulation opératoire non opératoire	Le calcul algébrique ne tient compte ni des blocs de calcul, ni des opérations. Par exemple, les termes sont regroupés indépendamment des opérations en jeu.

Tableau n° 15 : Modalités caractérisant les types de manipulation formelle