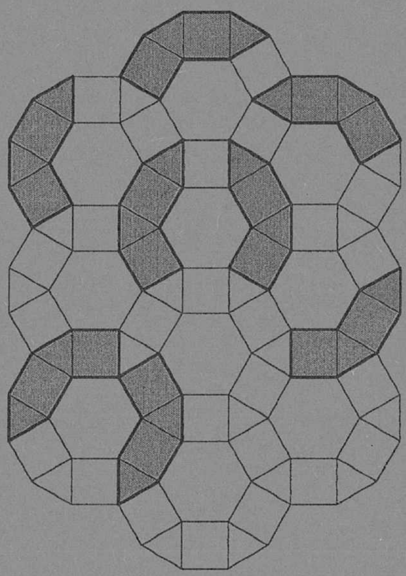
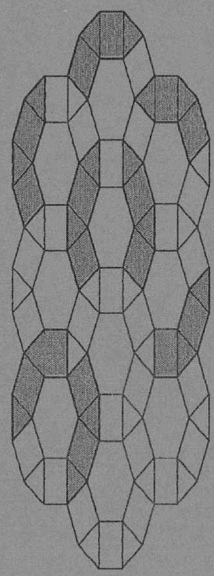
INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

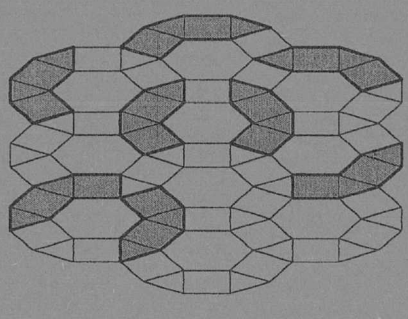
Université Montpellier II

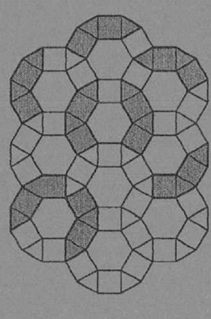
Place Eugène Bataillon
cc 040
34095 MONTPELLIER Cedex 05
Tél : 04.67.14.33.83 - 04.67.14.33.84
Fax : 04.67.14.39.09
e.mail : irem@math.univ-montp2.fr
http : www.univ-montp2.fr/~irem





ENSEIGNER LES TRANSFORMATIONS





GROUPE GÉOMÈTRIE

AVRIL 1999

ENSEIGNER LES TRANSFORMATIONS

GROUPE GÉOMÈTRIE

AVRIL 1999

INTRODUCTION

Cette brochure a été élaborée par le Groupe Géométrie de l'I.R.E.M. de Montpellier avec le soutien de la Direction des Lycées et Collèges.

L'étude des transformations est proposée dans l'ensemble des programmes de géométrie du collège et du lycée, et nous savons que cet enseignement pose un certain nombre de problèmes qu'il nous semble important d'analyser.

Ce document n'est pas un catalogue exhaustif des activités liées à l'enseignement des transformations, encore moins un catéchisme à suivre à la lettre. Il est le résultat d'expériences d'enseignants et n'a d'autre ambition que d'aider dans leur pratique quotidienne ceux qui ont en charge cet enseignement, en leur fournissant des analyses et des idées d'activités dont nous avons éprouvé la pertinence et l'efficacité.

Dans chaque chapitre, le lecteur trouvera une première partie théorique expliquant les choix que nous avons faits, puis des fiches qui peuvent être utilisées telles quelles en classe, ou servir de base à des activités proposées aux élèves.

Un chapitre est consacré à l'utilisation du logiciel Cabri-Géomètre, qui peut apporter un plus dans l'enseignement des transformations.

Un autre chapitre est consacré aux transformations déformantes, qui, bien que n'étant pas dans les programmes, ont l'intérêt de montrer que les propriétés de conservation liées aux isométries ne sont pas générales.

Nous n'avons pas abordé les méthodes de résolution de problèmes qui permettraient de faire des transformations un véritable outil de démonstration.

Les auteurs :

André AMSALEM - Noël BASCOU - Thierry BERTHOMIER - Freddy BONAFÉ - Robert BRUNET - Arlette CHEVALLIER - Marie-Claire COMBES - Alain DEVILLE - Liliane DRAY - Jean-François FAVRAT - Jacques NAUDEILLO - Nicole PAILHAS - Jean-Pierre ROBERT - Mireille SAUTER.

Coordonateur :
Freddy BONAFÉ

SOMMAIRE

PREAMBULE

ESSAI DE REFLEXION SUR L'ENSEIGNEMENT DES TRANSFORMATIONS

L'enseignement de la géométrie commence par l'étude d'objets dits géométriques : segments, polygones, cercles .... et de leurs propriétés. Les objets géométriques sont des objets dessinés ; en effet, pour définir ces objets on les dessine et pour que les élèves les connaissent et les étudient, on les leur fait dessiner. Ces dessins, réalisés à l'aide d'instruments, ont un statut particulier, différent des autres dessins réalisés par l'enfant.

Si un élève dessine un mouton, il sait que le mouton, même s'il n'est pas physiquement présent, existe en dehors du dessin. Un objet concret peut être vu, touché, appréhendé.

Si on fait dessiner un triangle à un élève, et bien que cet objet ait son origine dans l'expérience familière, il ne peut pas séparer l'objet du dessin (on ne rencontre pas de triangle autre que dessiné, on rencontre seulement des objets de forme triangulaire). Le dessin est la seule présentation du triangle, et pour l'élève, il y a identification, le dessin est le triangle.

Ce dessin prend le nom de figure géométrique ou simplement de figure. Les objets premiers de la géométrie sont les figures et pour les définir on les montre, on les décrit et on les nomme, ce qui est la forme première de la définition.

Quand on aborde l'enseignement des transformations du plan on n'a plus cette possibilité car on ne peut pas montrer une transformation ou dessiner une transformation. On ne peut en voir que les effets. On peut dessiner le symétrique d'un triangle, on ne peut pas dessiner une symétrie. Cela tient à la nature même des transformations qui constituent un ensemble de concepts abstraits non identifiables à des objets. Dès lors, si nous ne pouvons pas définir les transformations en les montrant, comment aider les élèves à les appréhender, à les concevoir et plus tard à les maîtriser ? Peut être en réfléchissant à la perception que nous, spécialistes, avons des transformations.

Cette perception s'organise autour de trois conceptions : le mouvement, les constructions géométriques qui sous-tendent les transformations, et la possibilité de les combiner.

Aux premières transformations étudiées, les isométries, sont associés les mots : glisser, tourner, déplacer, retourner .... qui expriment des mouvements simples, familiers. Dans l'enseignement, des techniques d'introduction des transformations : utilisation du papier calque, des pliages ...... font appel au mouvement.

D'un point de vue historique, depuis l'antiquité avec Euclide jusqu'à une époque récente avec Hadamar en passant par Legendre qui "pose" un triangle sur un autre, la naissance du concept d'isométrie fait appel à l'idée de superposition de figures par transport. La première approche des transformations et donc leur première perception est fortement liée à l'idée de mouvement.

Dans une phase plus élaborée, plus mathématisée, on élimine les mouvements originaux pour ne considérer que la position originale de l'objet et sa position finale. L'objet et son image ne sont plus reliés par un mouvement, mais associés par une construction géométrique définie par un algorithme. Nous sommes dans le domaine de la fabrication et de l'existence d'images. C'est ici que les transformations prennent du sens pour les élèves : la symétrie, c'est ce qui permet de construire le symétrique d'un objet géométrique donné.

Les algorithmes de fabrication des images induisent deux prolongements. D'une part ils matérialisent la notion d'application de l'ensemble des points d'un objet sur l'ensemble des points de l'image en jouant le rôle de diagramme. D'autre part ils nous conduisent à revenir sur la nature et les propriétés des figures géométriques (par exemple en mettant en évidence les éléments de symétrie d'une figure) et en imposant la notion d'ensembles de points sur laquelle nous reviendrons.

Troisième et dernier aspect dans l'élaboration, l'enseignement et la perception des transformations : la composition des transformations et ses propriétés qui induisent des structures. On définit ainsi sur l'ensemble des isométries une opération, des inverses, un élément neutre qui lui confèrent une structure de groupe. C'est la conception élaborée des isométries qui forment un ensemble clos, une entité. On développe ainsi depuis Klein et son programme d'Erlangen, une algèbre des transformations.

En résumé, les transformations forment un ensemble de concepts dont on perçoit les origines, qui prennent sens par leurs effets sur les objets de la géométrie et qui sont organisés dans des structures générales. On parle de la théorie des transformations.

Ces considérations sont importantes pour aborder l'enseignement des transformations car elles montrent pourquoi on ne peut pas envisager cet enseignement sur le même modèle que celui des polygones ou des représentations de l'espace.

Une référence possible est constituée par l'enseignement des nombres. En effet, les nombres sont des concepts abstraits qui prennent sens par leur application à des objets ou a des grandeurs et sur lesquels on définit des opérations qui induisent des structures. On ne définit pas a priori le nombre "treize", mais tout le monde sait ce que signifie "treize poires". Il existe une théorie des nombres. Or quand on considère le temps passé et l'énergie mise en œuvre de la maternelle à la classe de seconde pour donner aux élèves une idée, pas toujours très claire, des nombres réels et de leurs utilisations, on mesure l'investissement nécessaire pour mener à bien une étude des transformations.

Nous avons vu que c'est dans leur application aux objets géométriques que les transformations ont leurs premières utilisations et prennent du sens. Il est donc nécessaire de bien connaître les objets auxquels on les applique et non seulement les propriétés de ces objets mais leur nature géométrique, c'est à dire les concevoir comme des ensembles de points et ainsi arriver à la notion d'ensemble de points du plan. Or nous savons que chez nos élèves, ces notions sont en cours d'acquisition. Il est donc indispensable pour aborder un enseignement des transformations d'avoir une idée de la façon dont se fabrique le concept d'ensemble de points du plan.

On peut penser que cette acquisition se fait suivant la progression suivante :

1 - les objets : considérés dans leur globalité puisqu'on les montre et représentés par des dessins ou identifiés aux dessins ;

2 - les points particuliers : extrémités, sommets, points remarquables ;

3 - un point quelconque : un point de l'objet, n'importe quel point de l'objet ;

4 - le point : isolé, objet en lui même, objet élémentaire ;

5 - l'ensemble de points : les points de l'objet, les points constituant l'objet ;

6 - le plan : ensemble de tous les points, ensemble de référence.

Il existe des correspondances entre cette progression et les étapes de la formation du concept de transformation. Les acquisitions des concepts de transformation et d'ensemble de points progressent en parallèle et suivant une dialectique tout au long de l'enseignement de la géométrie.

CHAPITRE I

MOUVEMENT ET ISOMETRIES

Les isométries dont nous parlons ici opèrent sur les figures et seulement sur les figures ; il ne s'agit pas des transformations du plan (ou de l'espace) qui seront mises en place plus tard dans l'apprentissage. Par contre, même lorsque ces dernières auront été mises en place, les questions que nous traitons dans ce chapitre seront toujours au coeur des préoccupations de l'enseignement et de l'utilisation des isométries.

L'axiome 4 d'Euclide peut être formulé ainsi :" *Les grandeurs que l'on peut faire coïncider l'une avec l'autre sont égales entre elles* ". Il associe égalité et mouvement et offre un cadre expérimental au travail sur les isométries. Il permet de définir aussi bien l'égalité des figures par la coïncidence que la coïncidence possible par l'égalité. C'est l'objet de ce chapitre.

(Le mot égalité utilisé ci-dessus, doit être compris comme le caractère des figures ne présentant aucune différence.)

PERCEPTION ET CONTRÔLE

On ne peut attendre d'un débutant qu'il soit familiarisé avec les mots **coïncider**, ou **superposer**, ce vocabulaire peut cependant être mis en place lors d'une phase perceptive au cours de laquelle on va tester ses critères subjectifs d'égalité.

C'est le cas des exercices des fiches I et II, desquels on a volontairement exclu les cas de figures semblables mais non superposables. Ces exercices permettent peu à peu d'amorcer un contrôle par une analyse des éléments constitutifs des figures, qui sont clairement donnés dans la fiche II. La question du retournement sera peut-être évoquée. Elle peut dans un premier temps être éludée pour des questions de couleur du support par exemple.

Les exercices des fiches III et IV ont pour objectif de clarifier la notion de superposition en se donnant les moyens de la **contrôler**.

Ce contrôle peut s'opérer de diverses manières. La plus élémentaire est sans doute la superposition et la coïncidence effectives, découper ou décalquer, manipuler, constater, sont ici les maîtres mots. Le contrôle peut aussi s'opérer par comparaison des éléments constitutifs des figures. Comparer leurs formes et leurs tailles, la disposition des uns par rapport aux autres, sont autant d'éléments qu'il faut savoir mobiliser. Les pavages par leurs trames régulières offrent la possibilité de mobiliser rapidement ces éléments perceptifs.

Dans tous les cas, ce contrôle perceptif n'exclut pas un contrôle effectif qui chez le débutant est la seule preuve recevable en cas de doute ou de débat. Il est clair qu'à ce niveau la question du retournement doit être envisagée.

Les exercices de la fiche III contiennent des cas de figures semblables mais non superposables, ceux de la fiche IV prennent appui sur des motifs de pavages.

COÏNCIDENCE ET PREMIERS MOUVEMENTS

Lorsque la notion de coïncidence par superposition est acquise, le **mouvement** nécessaire à cette coïncidence peut être observé. Il s'agit de dégager des premiers mouvements qui peuvent être complexes, les notions de **glisser** et **retourner** à partir des contrôles précédents.

C'est l'objectif de la fiche V dans laquelle on reprend les exercices des fiches III et IV avec de nouvelles consignes afin d'observer ces mouvements.

MOUVEMENTS CANONIQUES

Faire glisser ou (et) retourner sont bien les premiers gestes conduisant à la superposition. Cependant, lorsque les divers procédés de reproduction des figures que sont la symétrie axiale, la symétrie centrale, la translation, la rotation, ont été étudiés on peut reprendre l'étude des mouvements de superposition. Après avoir séparé retournement et glissement, on peut tenter de ramener le glissement à ses mouvements élémentaires, **translation** et **rotation.** L'objectif n'est pas une analyse des mouvements de translation et rotation - le fait que des mouvements circulaires conduisent à des translations pourrait entraîner des confusions - mais plus simplement de découvrir le type d'isométrie (dans les isométries précédemment étudiées) conduisant à la superposition.

Contrairement aux fiches précédentes, un traitement correct de ces fiches nécessite des prérequis sur les isométries, ce travail ne peut être proposé à un débutant. Nous avons fait le choix de le placer ici car il relève aussi du mouvement et de la recherche d'une coïncidence par superposition.

Les fiches VI et VII proposent des activités de ce type ainsi que la recherche des éléments générateurs du déplacement : **vecteur**, **centre et angle, axe**.

La difficulté majeure réside dans la multiplicité des solutions. En effet, la composition par exemple de deux symétries axiales peut conduire à une translation ou une rotation. C'est la relative simplicité d'accès aux éléments générateurs du déplacement qui est ici l'élément déterminant du choix.

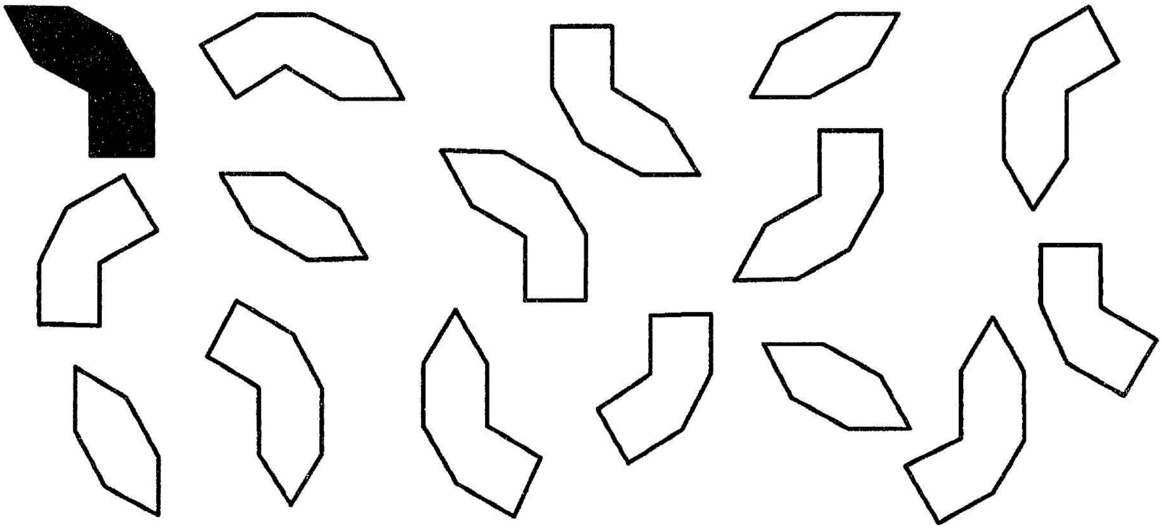
Avec la fiche VIII (qui dépasse le cadre de l'enseignement obligatoire) on aborde l'étude de mouvements plus complexes associant retournement et glissement. La mise en évidence d'éléments générateurs pose le problème de leur unicité. La mise en évidence de la **symétrie - glissée** peut s'avérer intéressante pour la simplicité qu'elle offre quand il s'agit de rechercher les éléments générateurs.

FICHE I

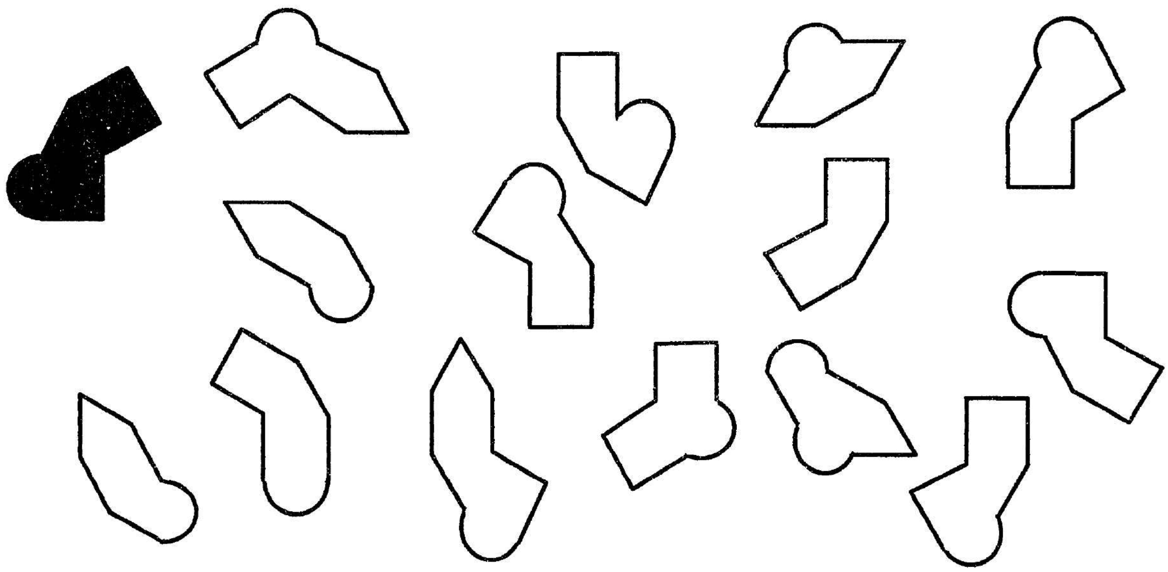
RECONNAITRE

Les exercices suivants ne font appel à aucun matériel particulier, on distribue aux élèves les exercices 1, 2, ci-dessous, la consigne étant : "colorie (ou coche, ou repère) les mêmes figures que le modèle noir".

EXERCICE 1



EXERCICE 2

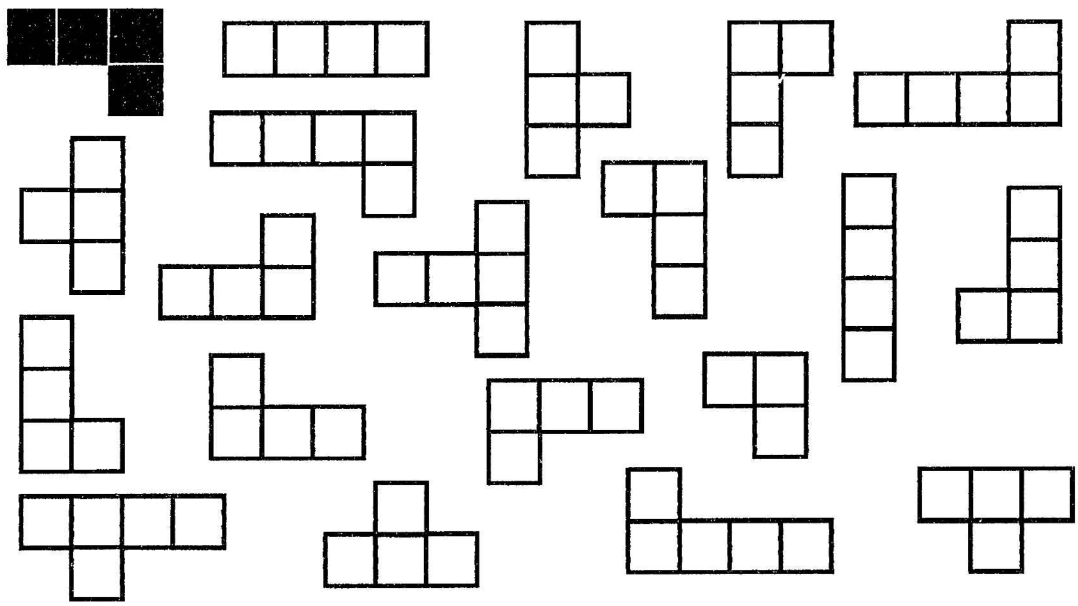


FICHE II

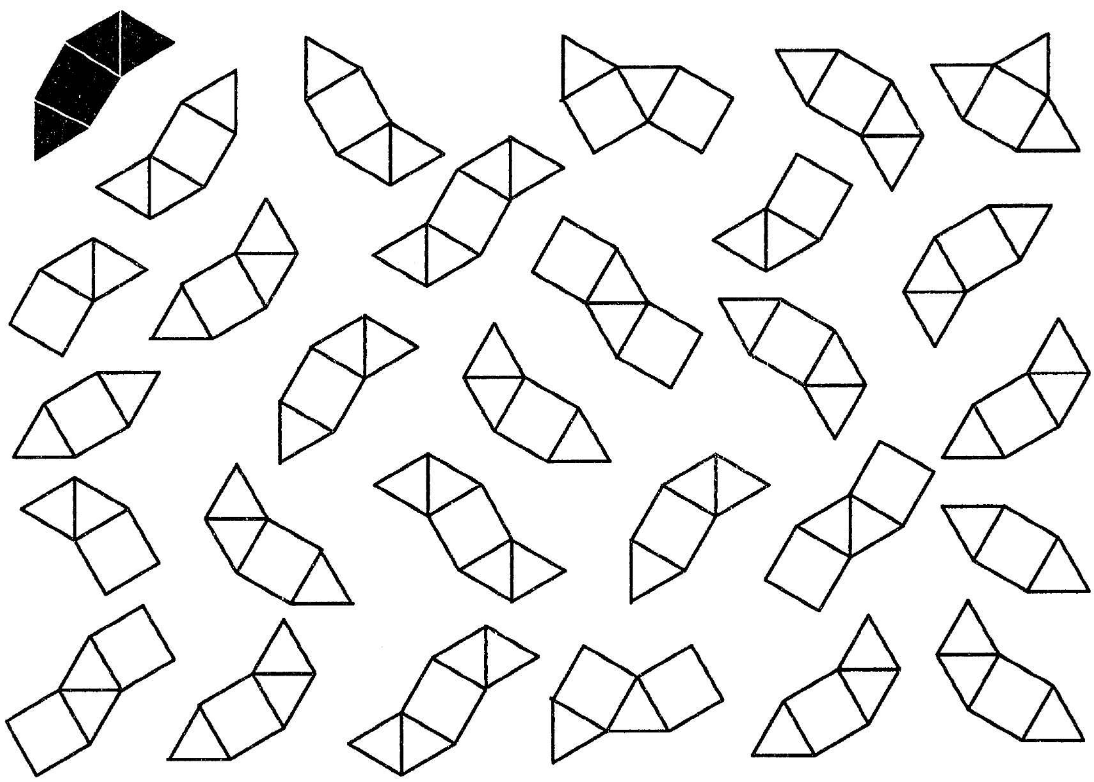
RECONNAITRE ET RAISONNER

Les exercices suivants ne font appel à aucun matériel particulier, on distribue aux élèves les exercices 1, 2, ci-dessous, la consigne étant : "colorie (ou coche, ou repère) les mêmes figures que le modèle noir".

EXERCICE 1



EXERCICE 2

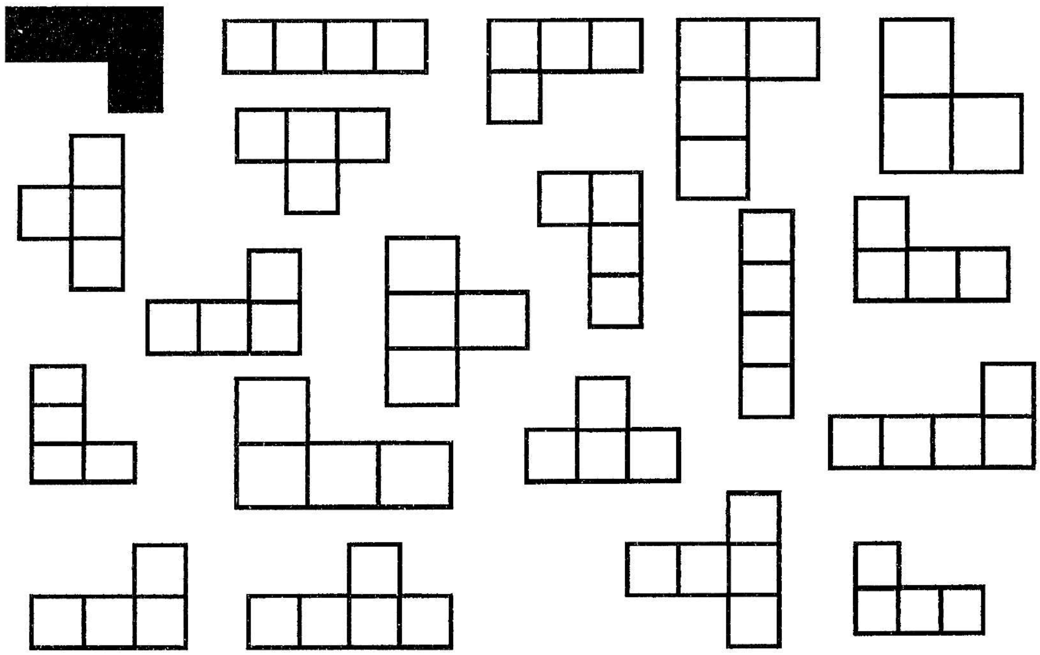


FICHE III

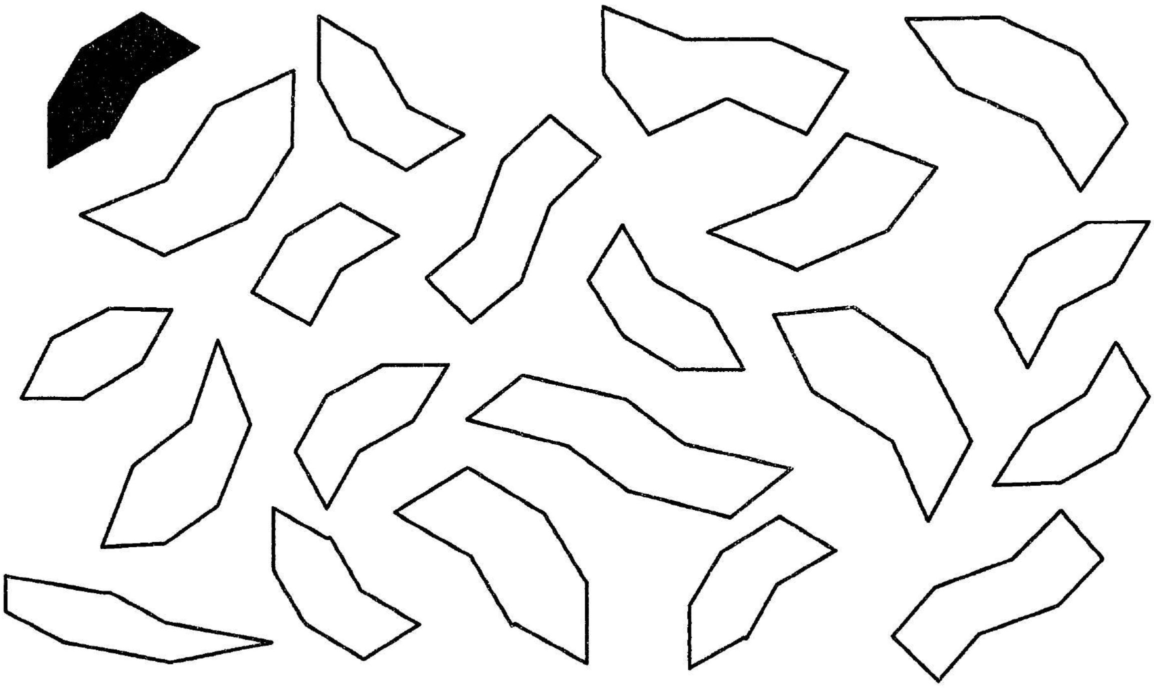
SUPERPOSER - COÏNCIDER - CONTROLER

Pour les exercices de cette page, une paire de ciseaux ou du papier calque sont nécessaires. La consigne sera : " coche, ou repère les mêmes figures que le modèle noir. Pour **contrôler :** découpe ou décalque la figure coloriée en noir, lorsque le modèle **coïncide** parfaitement avec une figure on dit que le modèle et la figure sont **superposables**".

EXERCICE 1



EXERCICE 2

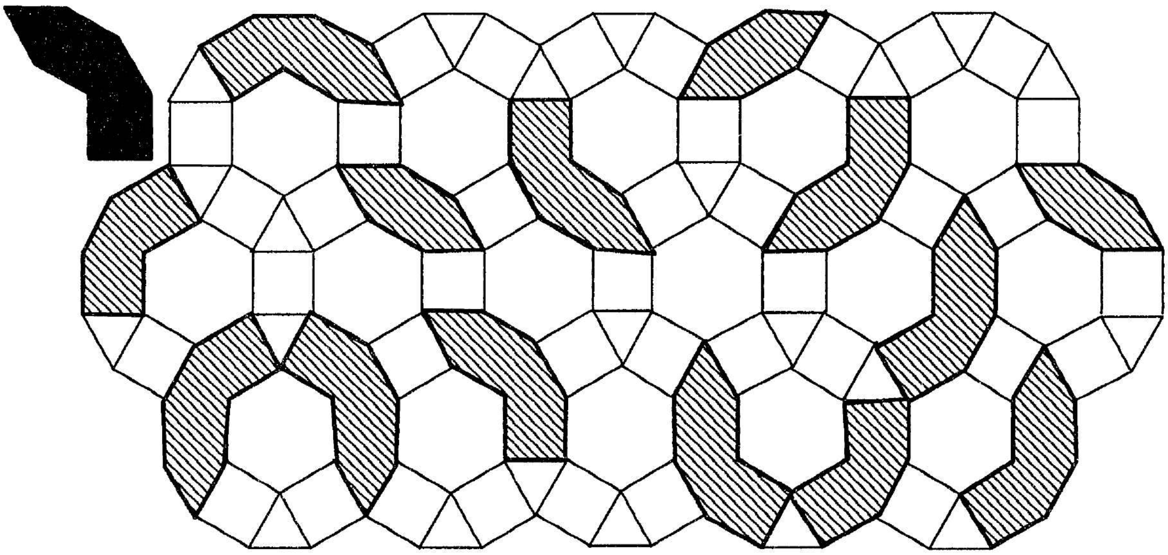


FICHE IV

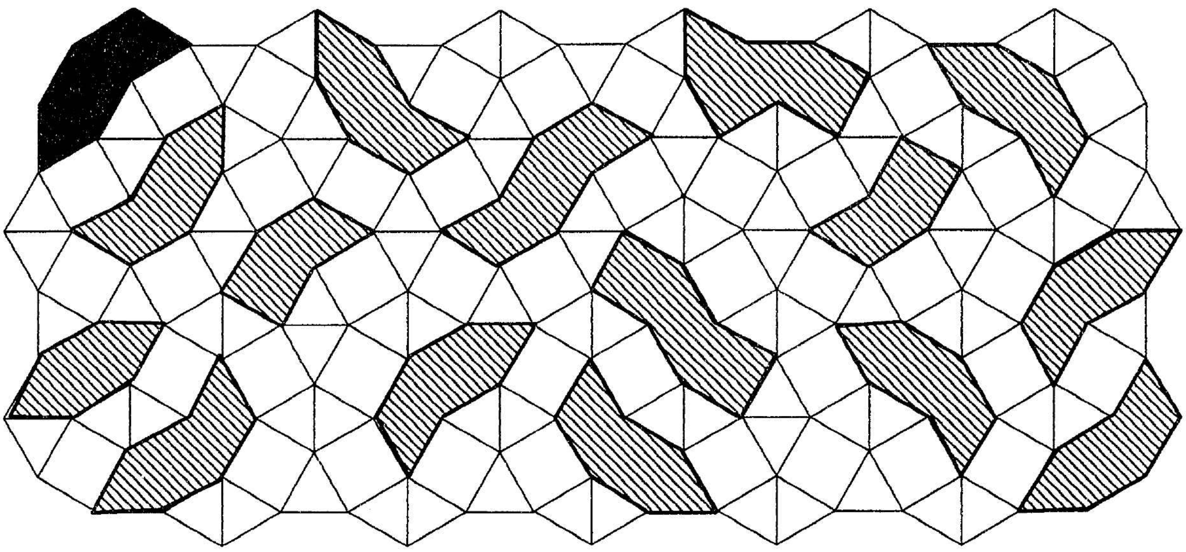
SUPERPOSER - COÏNCIDER - CONTROLER

Pour les exercices de cette page, une paire de ciseaux ou du papier calque ne sont plus nécessaires. La consigne sera : "coche, ou repère parmi les figures grisées les figures superposables au modèle noir". La preuve peut être donnée par des considérations de forme et de position, l'ultime recours étant toujours fourni par la superposition effective.

EXERCICE 1



EXERCICE 2



FICHE V

GLISSER - RETOURNER

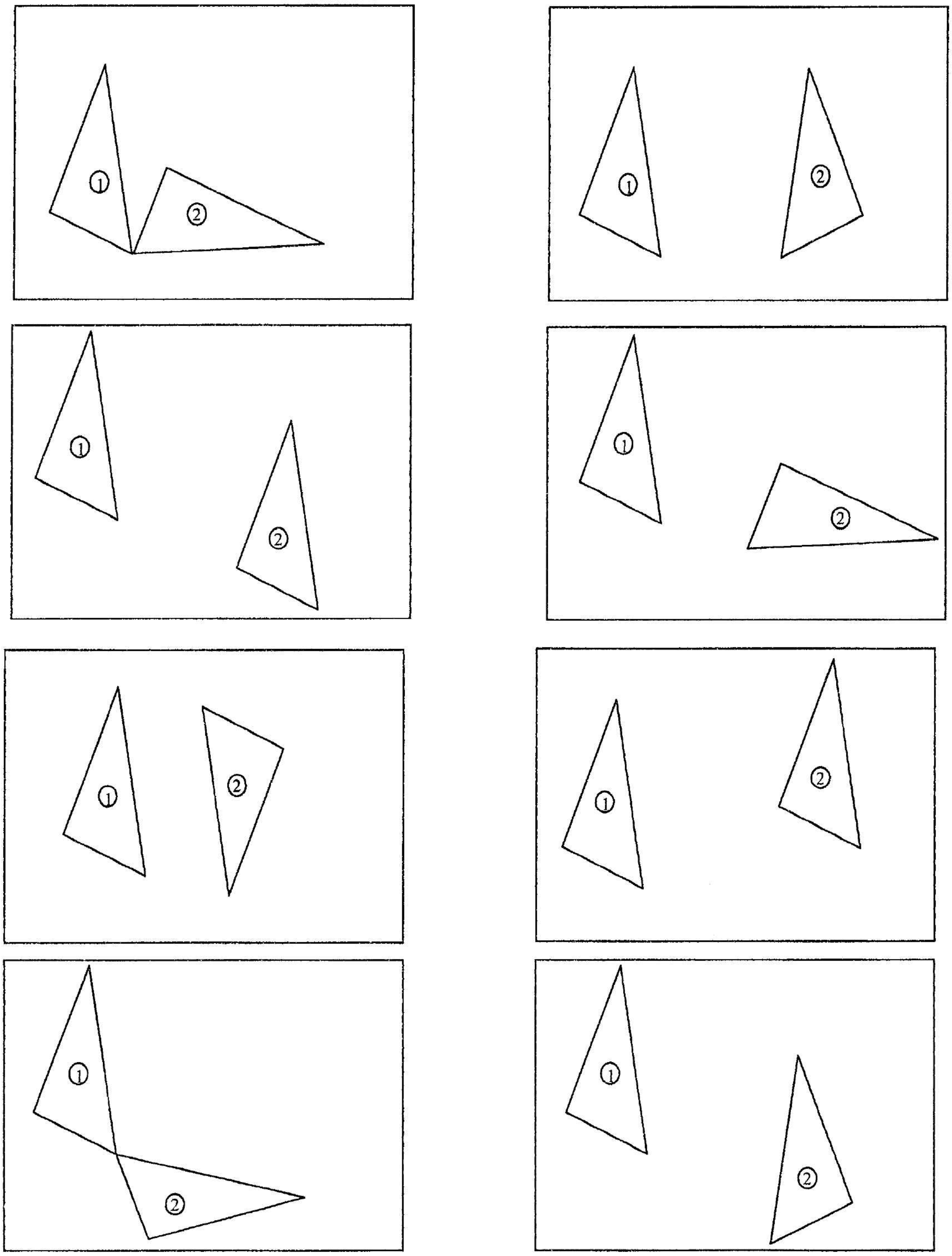
A propos de chacun des exercices de la fiche III, "observe les figures cochées. Pour amener le modèle noir sur ces figures, faut-il le retourner ou non ? Colorie en bleu les mêmes que le modèle non retourné et en rouge les mêmes que le modèle retourné."

A propos de chacun des exercices de la fiche IV, "observe les figures cochées, colorie d'une même couleur deux figures qui se correspondent par **glissement**, colorie d'une autre couleur deux figures qui se correspondent par **retournement**".

FICHE VI

TRANSLATION - ROTATION

Pour les exercices de cette page, règle, équerre, compas sont nécessaires. La consigne sera : "dans chacun des cadres ci-dessous, les figures ① et ② sont superposables. Coche les cas pour lesquels il y a retournement. Retrouve dans chacun des autres cas la **rotation** ou la **translation** qui donne la coïncidence de la figure ① avec la figure ②".

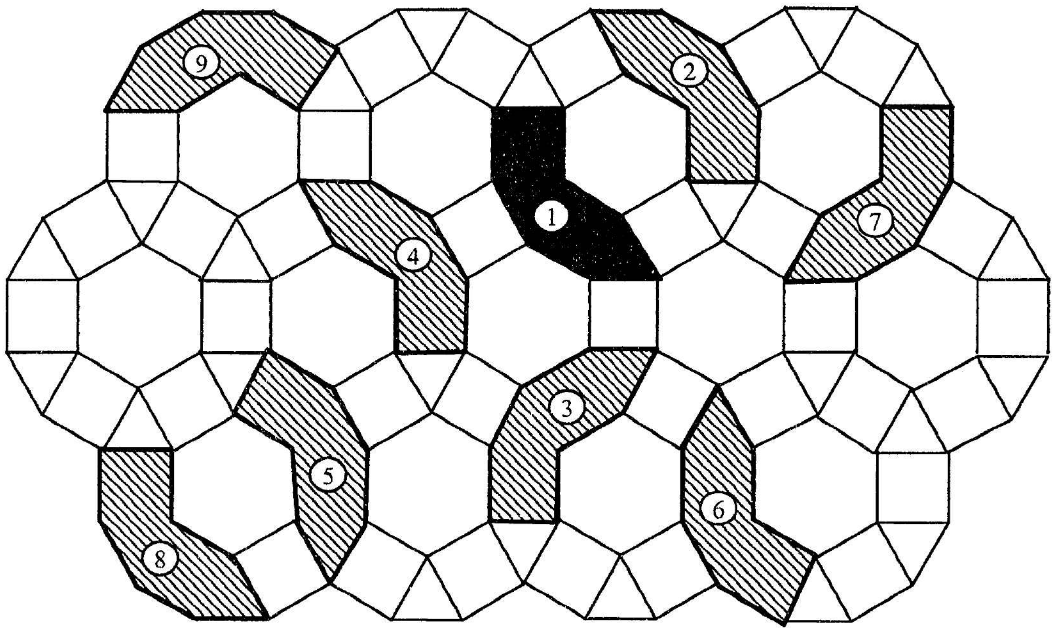


FICHE VII

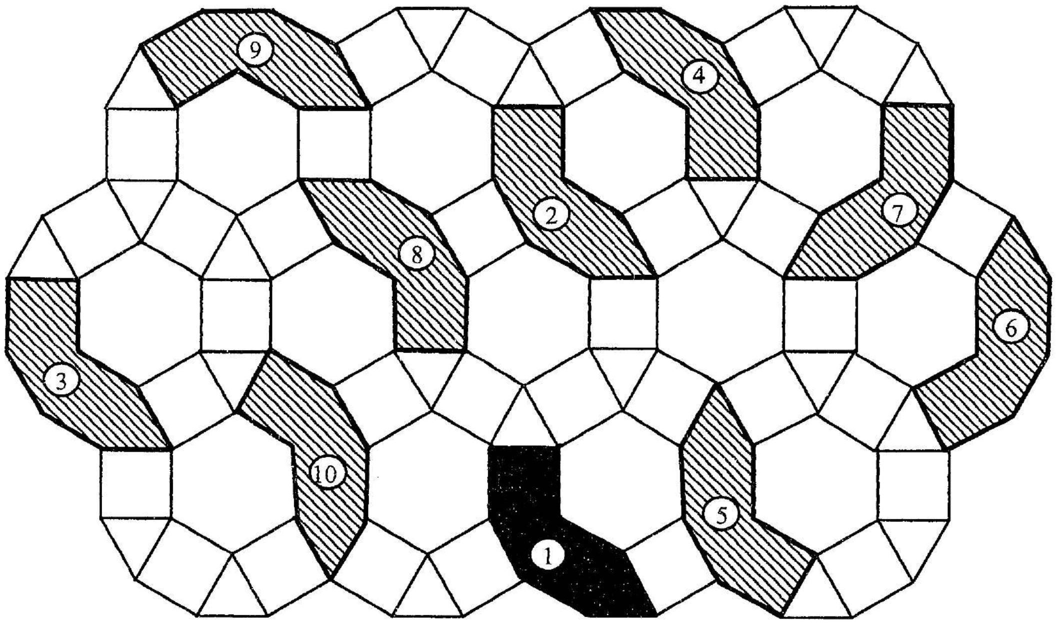
TRANSLATION - ROTATION

Pour les exercices de cette page, règle, équerre, compas sont nécessaires. La consigne sera : "dans chacun des cadres ci-dessous, les figures grisées sont superposables, la figure de départ est la figure ①. Coche parmi les autres celles qui lui correspondent par retournement. Retrouve dans chacun des autres cas la **rotation** ou la **translation** qui donne la coïncidence".

EXERCICE 1



EXERCICE 2



FICHE VIII

RETOURNEMENTS

Pour les exercices de cette fiche, règle, équerre, compas sont nécessaires. Les figures sont celles des exercices des fiches VI et VII. La consigne sera : "toutes les figures numérotées sont superposables, la figure de départ est la figure ①. Coche parmi les autres celles qui lui correspondent par retournement. Retrouve dans chacun des cas l'isométrie qui donne la coïncidence".

CHAPITRE II

DESSIN ET ISOMÉTRIES

Après une approche intuitive des isométries dont le support était le mouvement qui leur est associé, il est nécessaire que l'élève dispose de **règles opérationnelles** permettant de mettre en œuvre les différentes isométries. En effet, il n'est pas question de donner à des débutants une définition (en termes d'applications) des isométries, c'est le **programme de construction** de l'image d'une figure qui en tiendra lieu.

POINT DE DÉPART

Nous proposons le triangle comme figure devant servir de support à l'apprentissage, ceci pour les trois raisons qui suivent :

- Le triangle est la figure la plus simple permettant la mise en évidence des longueurs et des angles.

- Dans la construction de l'image d'un triangle, les points qui en sont les sommets apparaissent comme des extrémités de segments. Ceci est préférable dans un premier temps à la construction de l'image d'un point isolé. On a en effet observé que les compétences, de la part des élèves, relatives à l'image d'un point isolé, sont réinvesties avec beaucoup plus de difficultés pour la construction de l'image de figures plus complexes[1].

- Les trois sommets non alignés d'un triangle déterminent un repère du plan. Sans être mis en évidence, ce repère va contribuer à découvrir la construction possible d'images sans recours au programme de construction mais par repérage de ces points à partir du triangle. **Il faudra pour cela bien mettre en évidence qu'un point étant défini comme intersection de droites, son image est nécessairement à l'intersection des images de ces droites.**

Les divers exercices de ce chapitre doivent permettre à l'élève de s'approprier le programme de construction. Les difficultés sont graduées et nous avons tenté d'explorer un maximum de situations permettant de couper court à toute règle implicite des élèves concernant l'obtention d'une image. Ainsi dans la fiche portant sur la symétrie orthogonale, on trouve des situations donnant successivement des images à droite de l'axe, à gauche, au-dessus, au-dessous, des deux côtés.

ALGORITHME DE CONSTRUCTION

On peut se poser quelques questions concernant **le programme de construction** :
- à quel moment l'introduire ?
- doit-il être écrit ou simplement oral ?
- quelle forme lui donner ? Détaillée ? Synthétique ?

---

[1] Voir par exemple la thèse de D. Grenier : "Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en 6^{ième}". Université de Grenoble.

Il nous paraît évident que la description de ce programme doit être réalisée simultanément à sa mise en œuvre. Elle ne peut en aucun cas être première. C'est donc par une "chanson de gestes" qu'il faut enseigner cet algorithme, c'est à dire une suite raisonnée de mouvements. Perpendiculaire et milieu sont pour la symétrie orthogonale les maîtres mots mais ils ne peuvent être abordés ainsi. En effet, "construire le milieu" est un acte différent de "construire à partir de deux points donnés le troisième point qui fera en sorte que le second soit le milieu du segment formé avec les deux autres" !

Quels doivent être alors les maîtres mots de notre "chanson de gestes" ? Maîtres mots qui n'ont pas toujours un sens du point de vue mathématique, mais dont l'usage est indispensable pour décrire l'acte de construire.

<u>Pour la symétrie orthogonale :</u> **perpendiculaire**, sans aucun doute, mais aussi **côté d'une droite** dans le plan, et encore **report de distance** accompagneront les fiches I et II.

<u>Pour la symétrie centrale :</u> **côté d'un point** sur une droite et encore **report de distance** accompagneront les fiches IV et V.

<u>Pour la translation :</u> **parallèle à une droite** par un point, **sens sur un segment** et encore **report de distance** accompagneront les fiches VII et VIII.

<u>Pour la rotation :</u> **demi-droite** d'origine donnée, **angle** et **sens de parcours** et encore **report de distance** accompagneront les fiches X et XI.

La formulation des divers programmes de construction se construira autour de ces expressions.

Par exemple on peut résumer la construction du symétrique d'un triangle dans la symétrie orthogonale par rapport à une droite D donnée de la façon suivante :

- Par un sommet on trace la **perpendiculaire** à la droite D en la prolongeant de **l'autre côté** de la droite D.
- On relève la distance de ce sommet à la droite D.
- A partir de D sur le prolongement, on **reporte cette distance**.
- On procède de même pour les autres sommets et on obtient les trois sommets d'un nouveau triangle que l'on trace.

Ce résumé devient pour la symétrie par rapport à un point O :

- Par un sommet on trace la droite passant par le point O en la prolongeant de **l'autre côté** du point O.
- On relève la distance de ce sommet au point O.
- A partir de O sur le prolongement, on **reporte cette distance**.
- On procède de même pour les autres sommets et on obtient les trois sommets d'un nouveau triangle que l'on trace.

Pour la translation de A vers B, il peut être :

- Par un sommet on trace la **parallèle à la droite** (AB).
- On relève la distance AB.
- A partir du sommet on **reporte la distance** AB dans le **sens de A vers B**.
- On procède de même pour les autres sommets et on obtient les trois sommets d'un nouveau triangle que l'on trace.

Enfin pour la rotation de centre O et d'angle 30° dont le sens est fixé :

- Par un sommet on trace la **demi-droite** d'origine O.
- On construit une autre demi-droite d'origine O formant un **angle** de 30° avec la précédente dans le **sens donné**.
- On relève la distance du sommet au point O.
- Sur la deuxième demi-droite, à partir de O on **reporte cette distance**.
- On procède de même pour les autres sommets et on obtient les trois sommets d'un nouveau triangle que l'on trace.

Il est évident qu'à vouloir donner un algorithme de construction, on parvient à des formulations qui sont très lourdes, chargées d'implicites et qui ne peuvent être éclairées que par des constructions effectives....Peut-on raisonnablement les réduire ?

VERS UNE DEFINITION DES ISOMÉTRIES

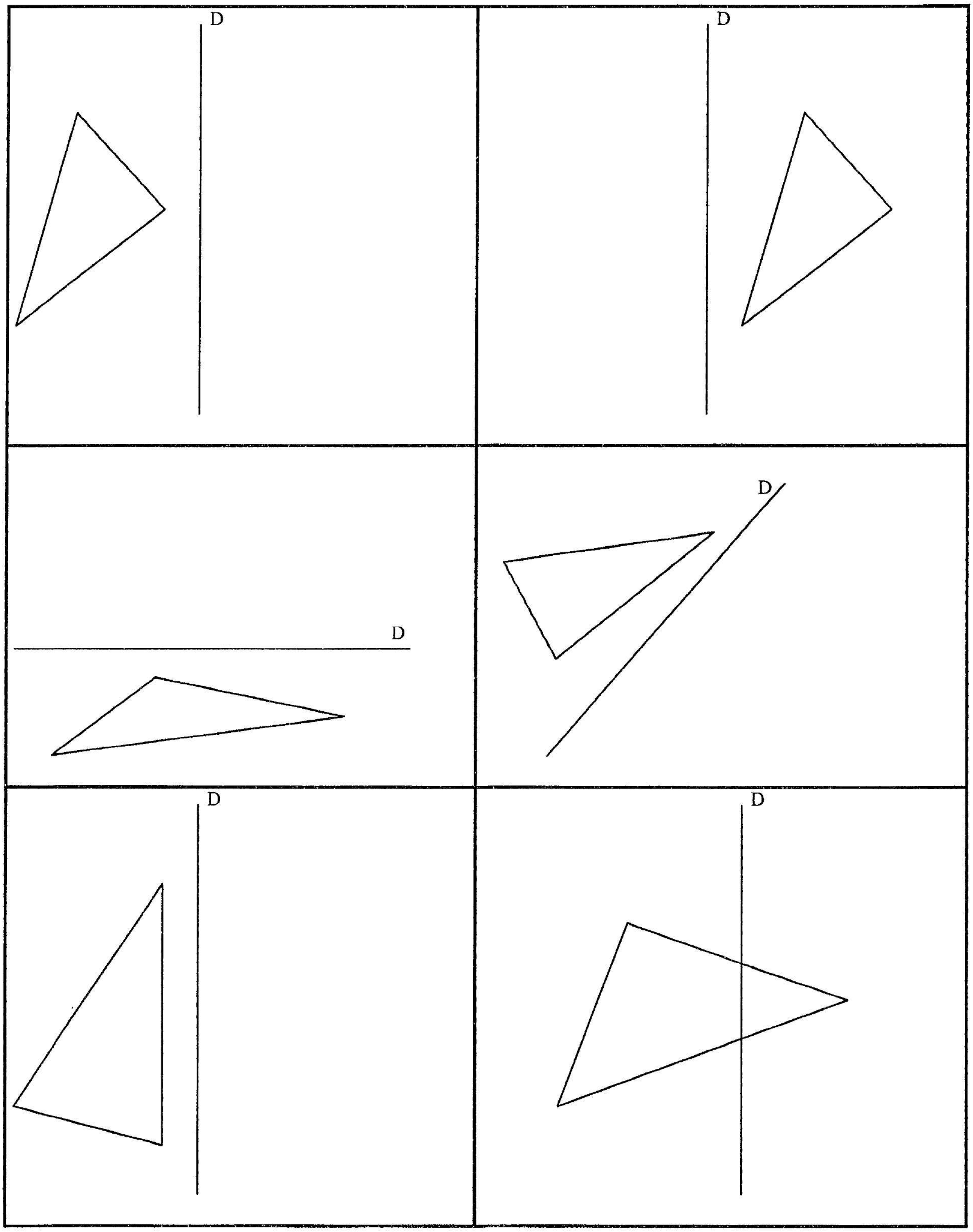
C'est avec les propriétés qui les caractérisent et la mise en place de nouveaux outils (équidistance, vecteurs, angles orientés) qu'apparaîtront et que seront installées les définitions des isométries. Le travail préparatoire autour de médiatrice, parallélogramme, sens de parcours.... prend alors une réelle importance. Les fiches III, VI, IX, XII en constituent l'amorce, il sera plus amplement développé dans un prochain chapitre.

FICHE I

SYMETRIE ORTHOGONALE PAR RAPPORT A UNE DROITE

EXERCICE

Construire le symétrique du triangle par rapport à la droite D dans chacun des cas suivants.

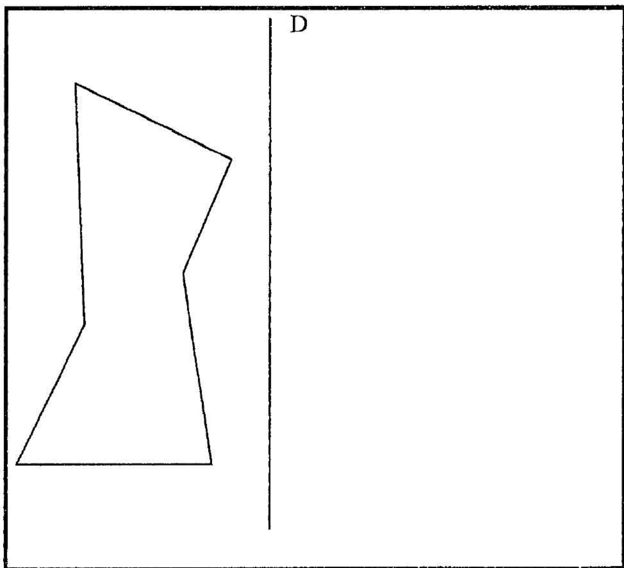


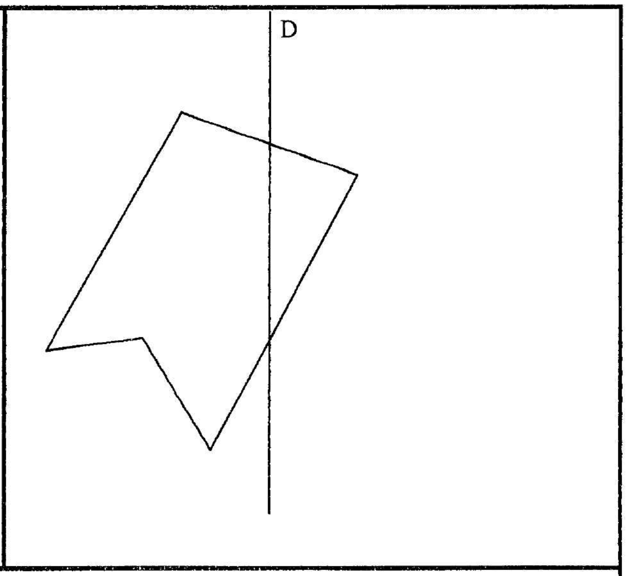
FICHE II

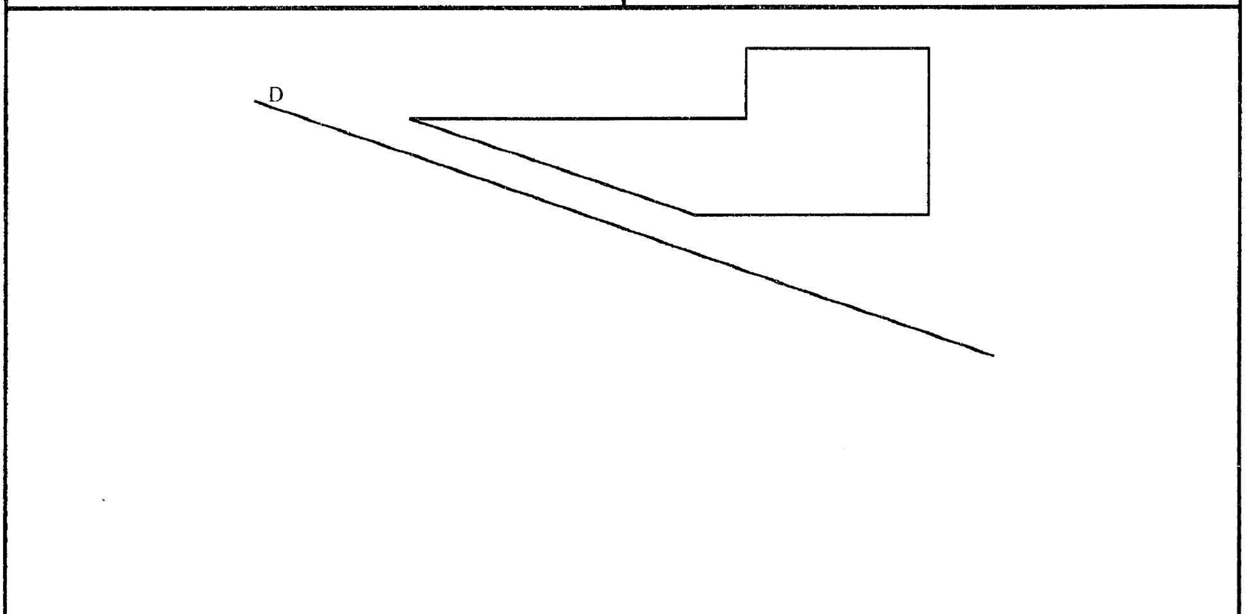
SYMETRIE ORTHOGONALE ET POLYGONES

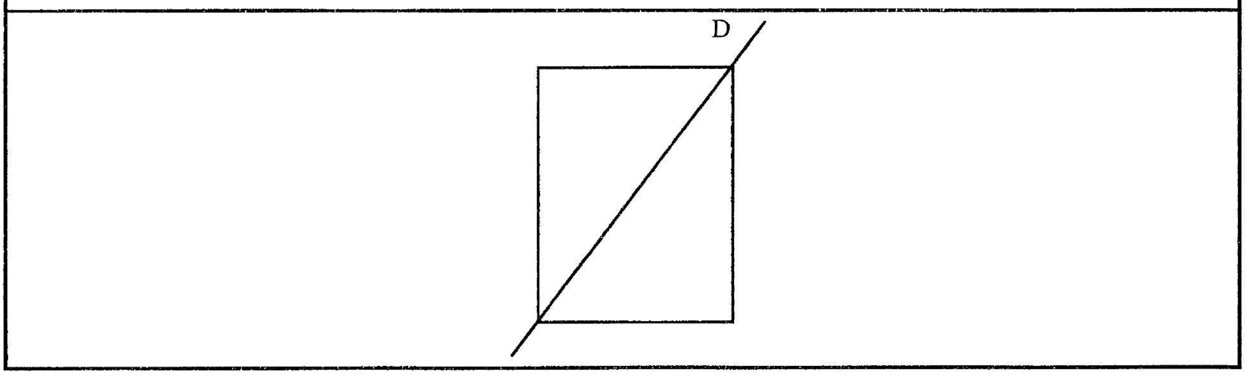
EXERCICE

Construire le symétrique du polygone par rapport à la droite D dans chacun des cas suivants.







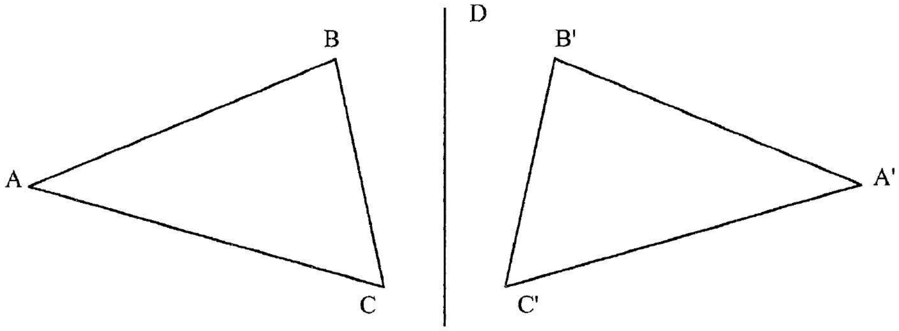


FICHE III

AXE DE LA SYMETRIE ORTHOGONALE

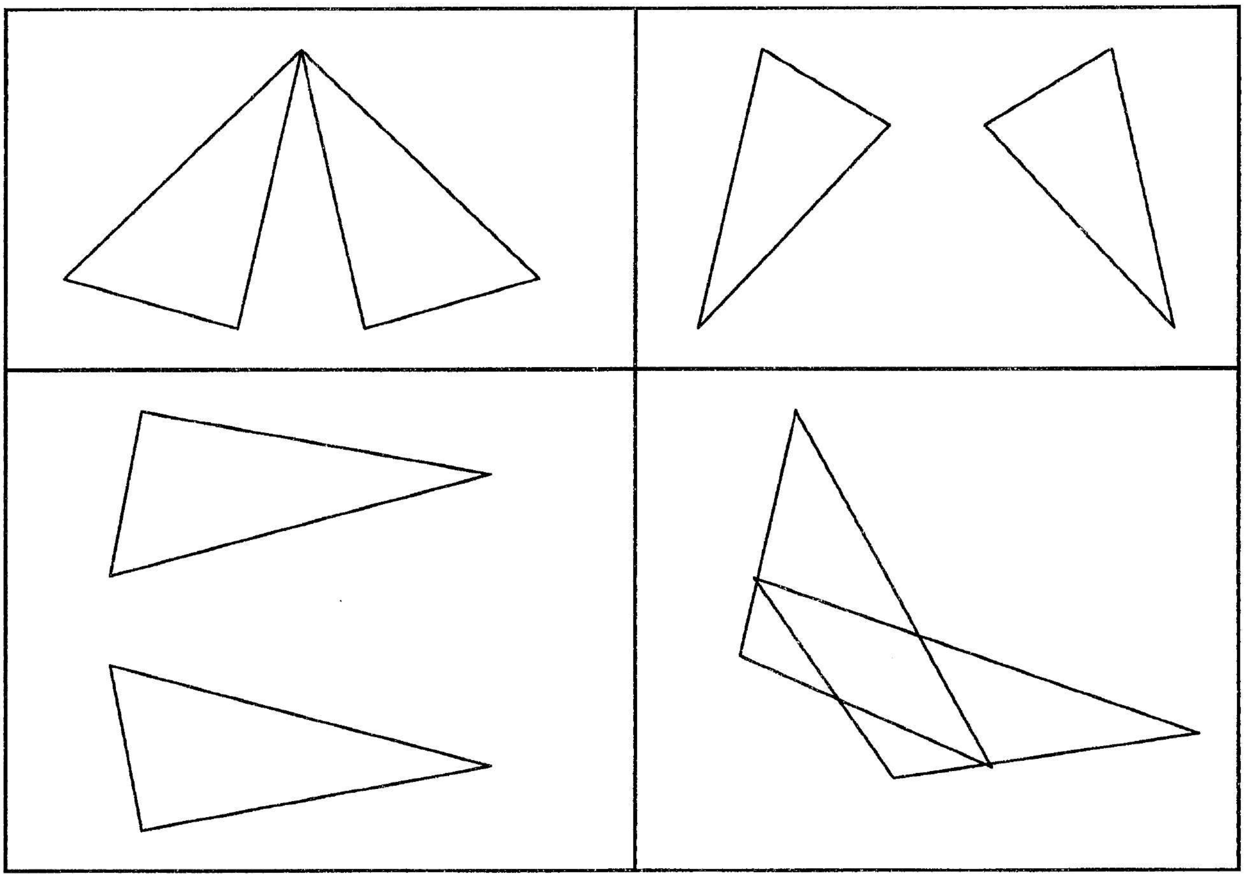
EXERCICE

Vérifier avec les instruments de dessin que les points A', B', C' sont les symétriques respectifs de A, B, C dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite D.



EXERCICE

Dans chacune des figures ci-dessous les deux triangles sont symétriques par rapport à une droite D. Construire la droite D.

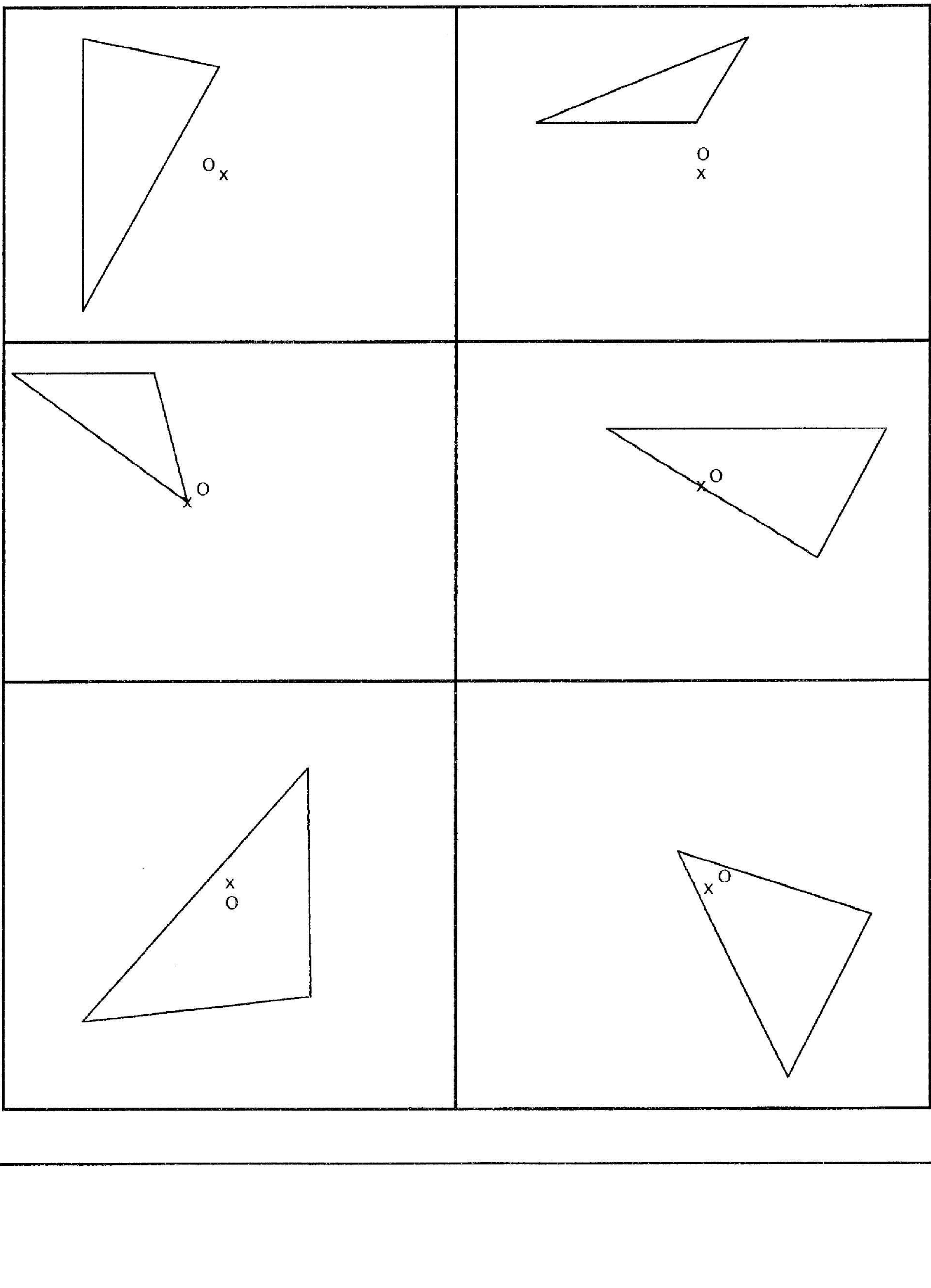


FICHE IV

SYMETRIE PAR RAPPORT A UN POINT

EXERCICE

Construire le symétrique du triangle par rapport au point O dans chacun des cas suivants.

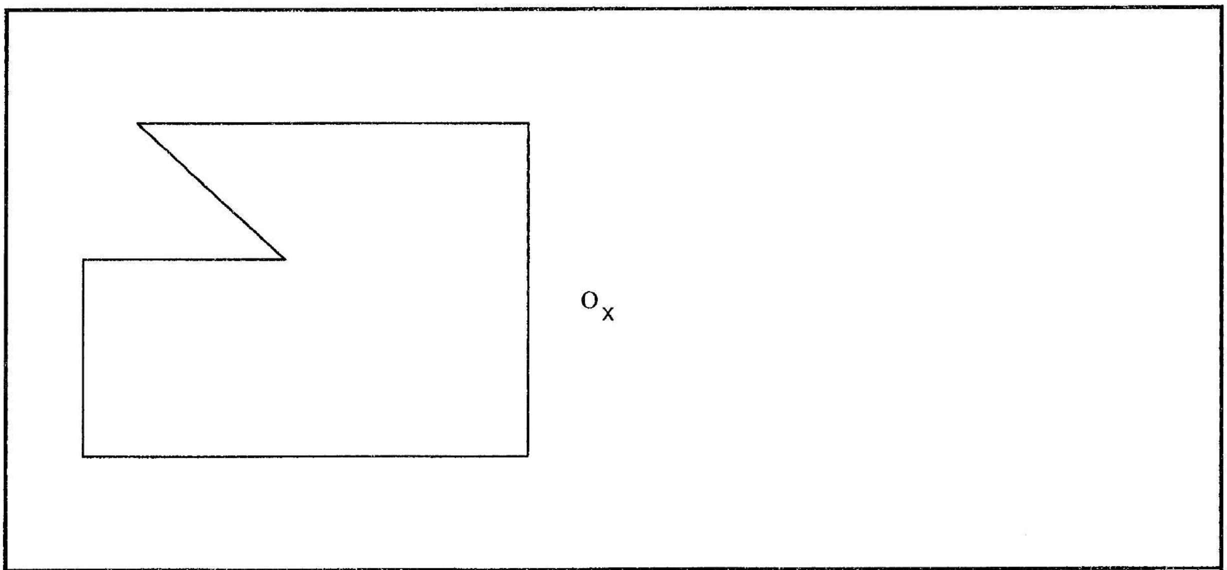


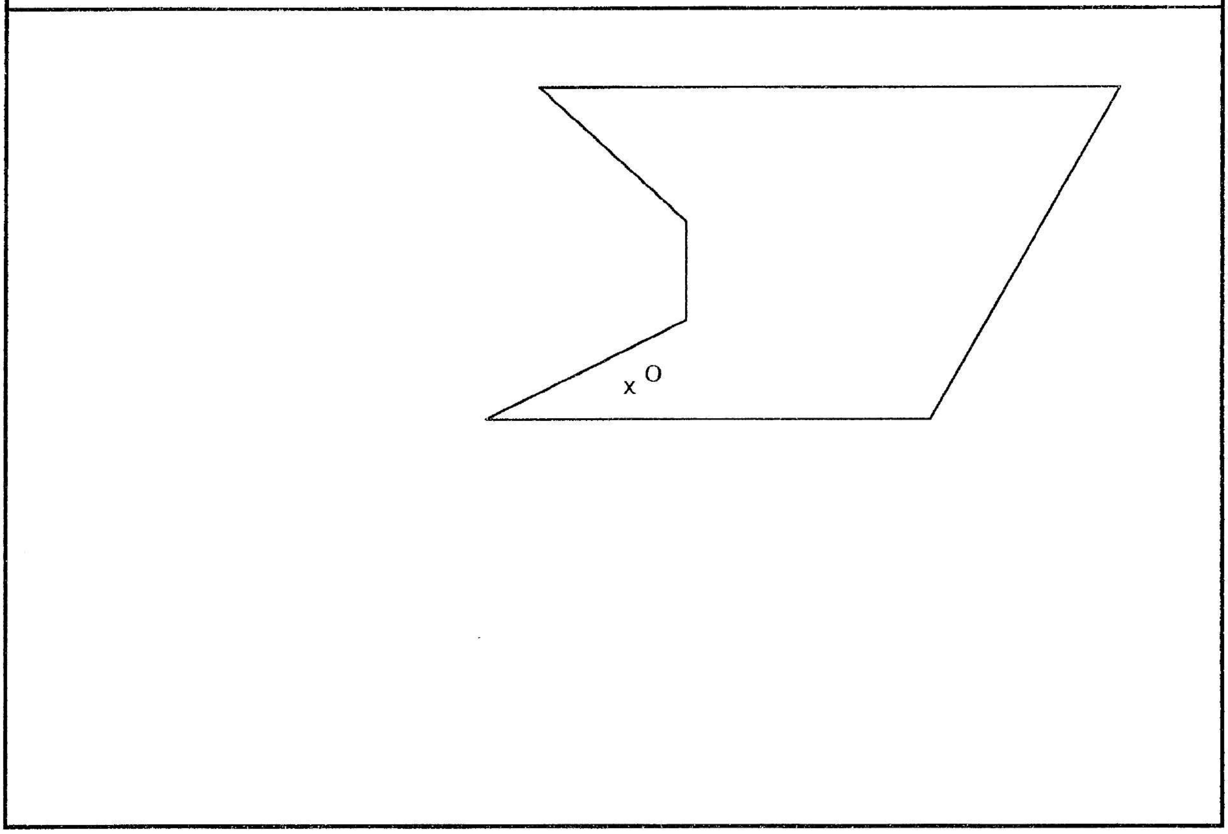
FICHE V

SYMETRIE PAR RAPPORT A UN POINT ET POLYGONES

EXERCICE

Construire le symétrique des polygones par rapport au point O dans chacun des cas suivants.



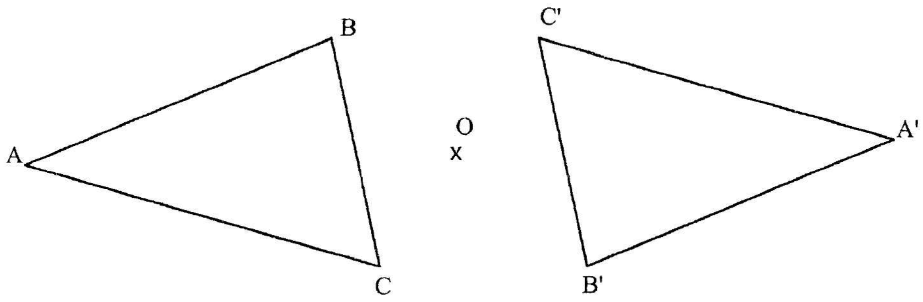


FICHE VI

CENTRE DE LA SYMETRIE PAR RAPPORT A UN POINT

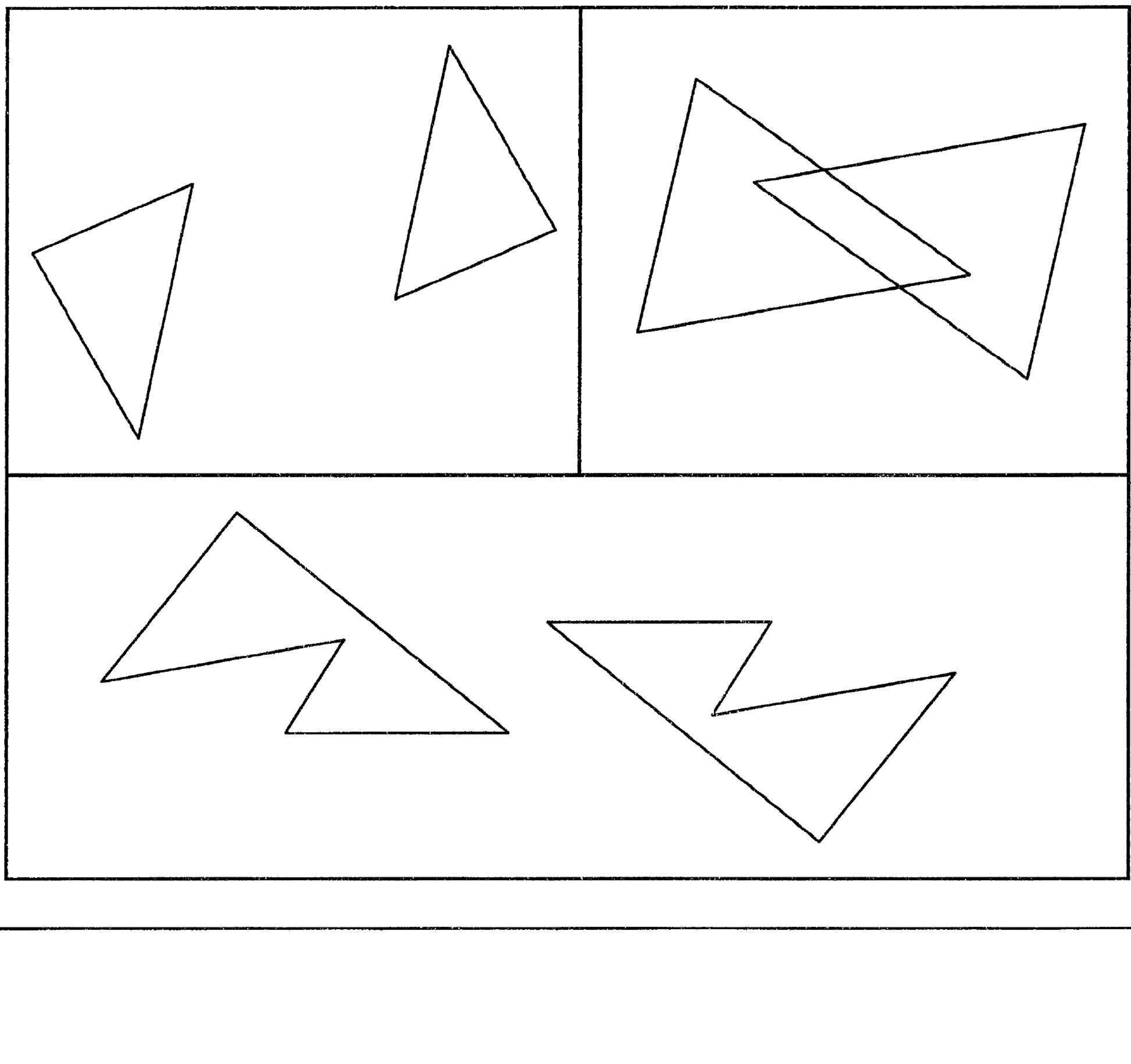
EXERCICE 1

Vérifier avec les instruments de dessin que les points A', B', C' sont les symétriques respectifs de A, B, C dans la symétrie par rapport au point O.



EXERCICE 2

Dans chacune des figures ci-dessous les deux polygones sont symétriques par rapport à un point O. Construire le point O.

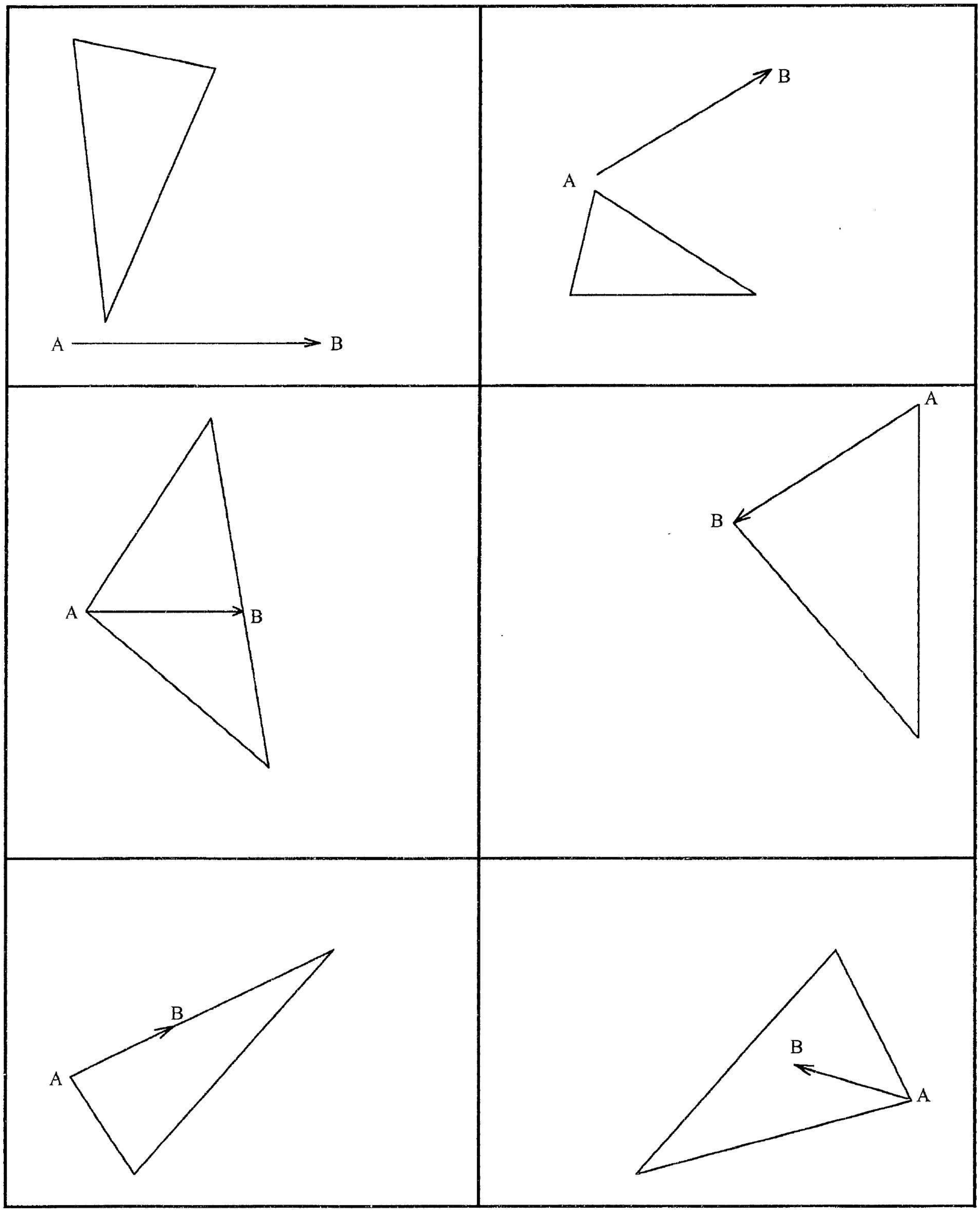


FICHE VII

TRANSLATION

EXERCICE

Construire le translaté du triangle dans la translation de A vers B dans chacun des cas suivants.

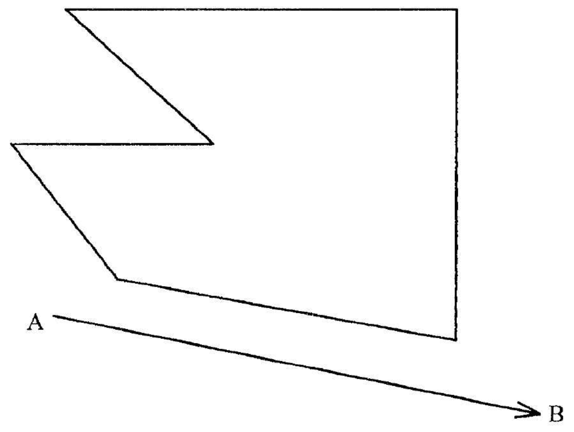


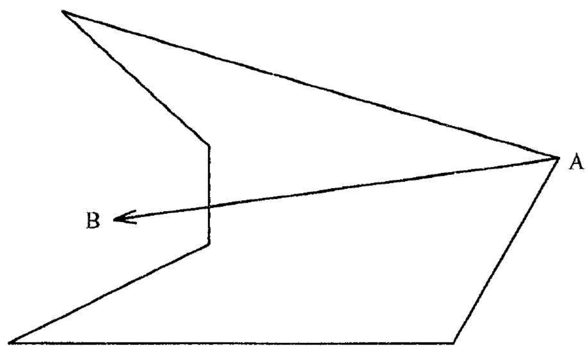
FICHE VIII

TRANSLATION ET POLYGONES

EXERCICE

Construire le translaté du polygone dans la translation de A vers B dans chacun des cas suivants.



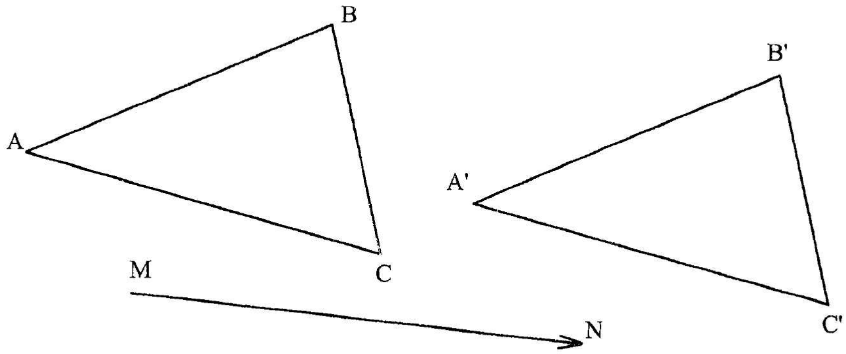


FICHE IX

VECTEUR DE LA TRANSLATION

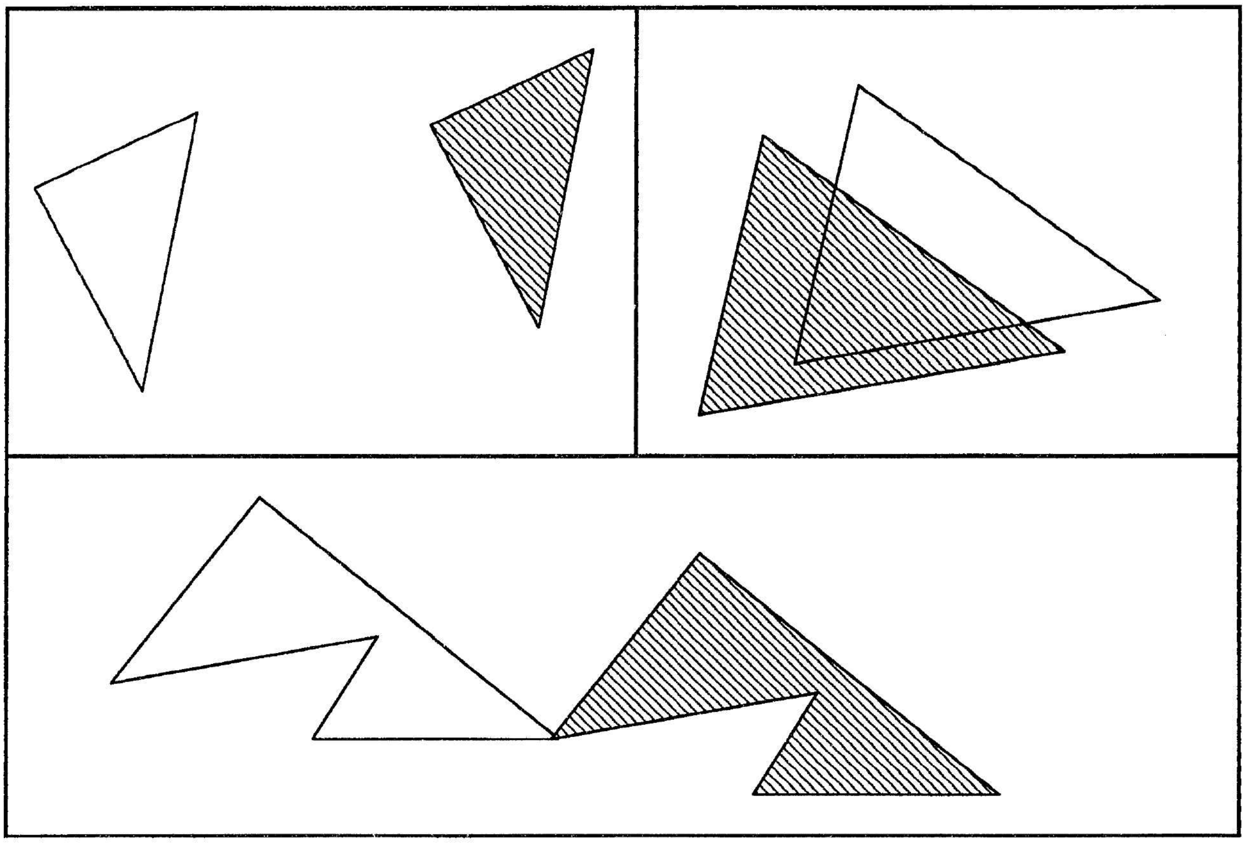
EXERCICE 1

Vérifier avec les instruments de dessin que les points A', B', C' sont les translatés respectifs de A, B, C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$.



EXERCICE 2

Dans chacune des figures ci-dessous le polygone hachuré est image de l'autre dans une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Construire un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

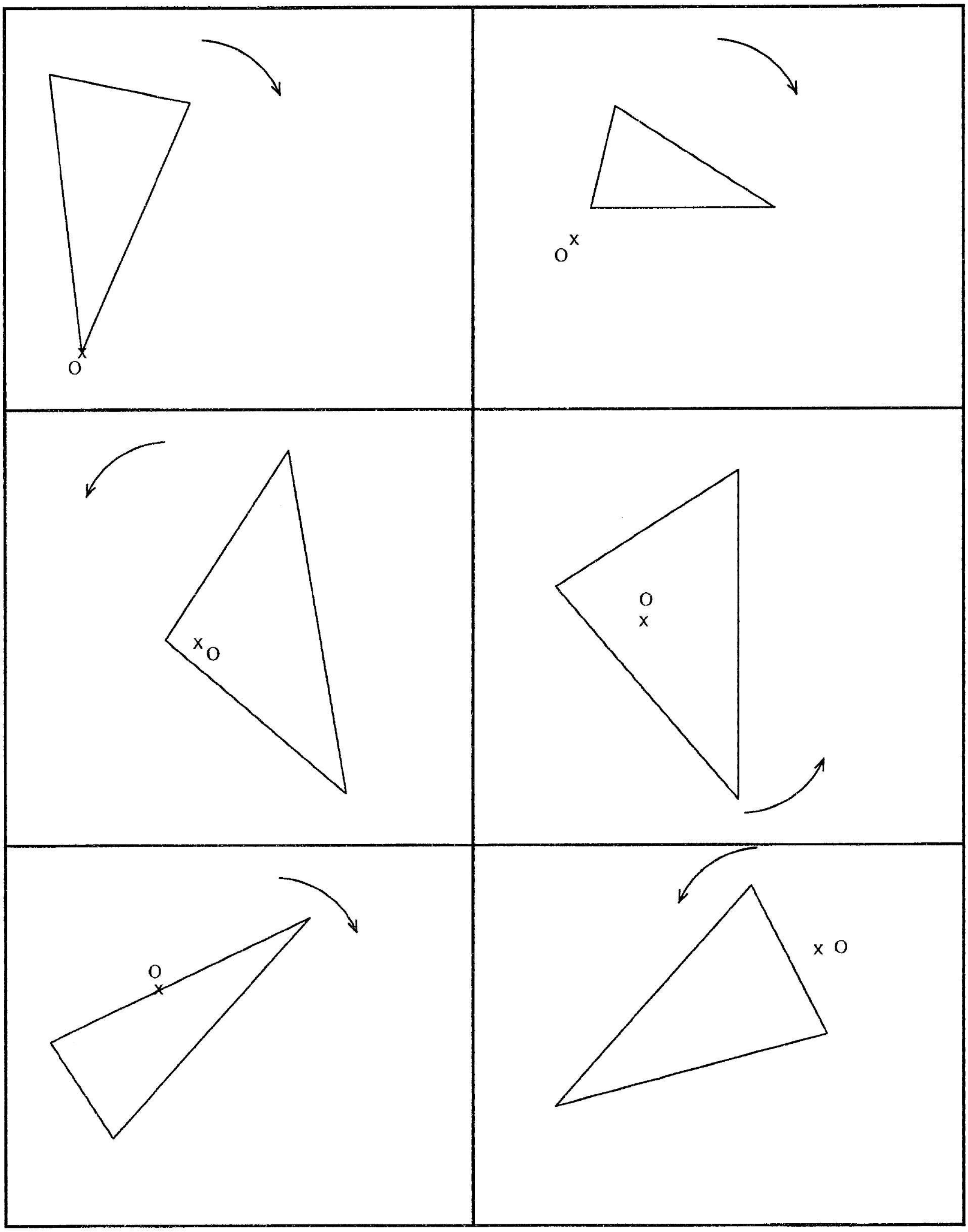


FICHE X

ROTATION

EXERCICE

Construire l'image du triangle dans la rotation de centre O et d'angle 30°, en respectant le sens indiqué par la flèche, dans chacun des cas suivants.

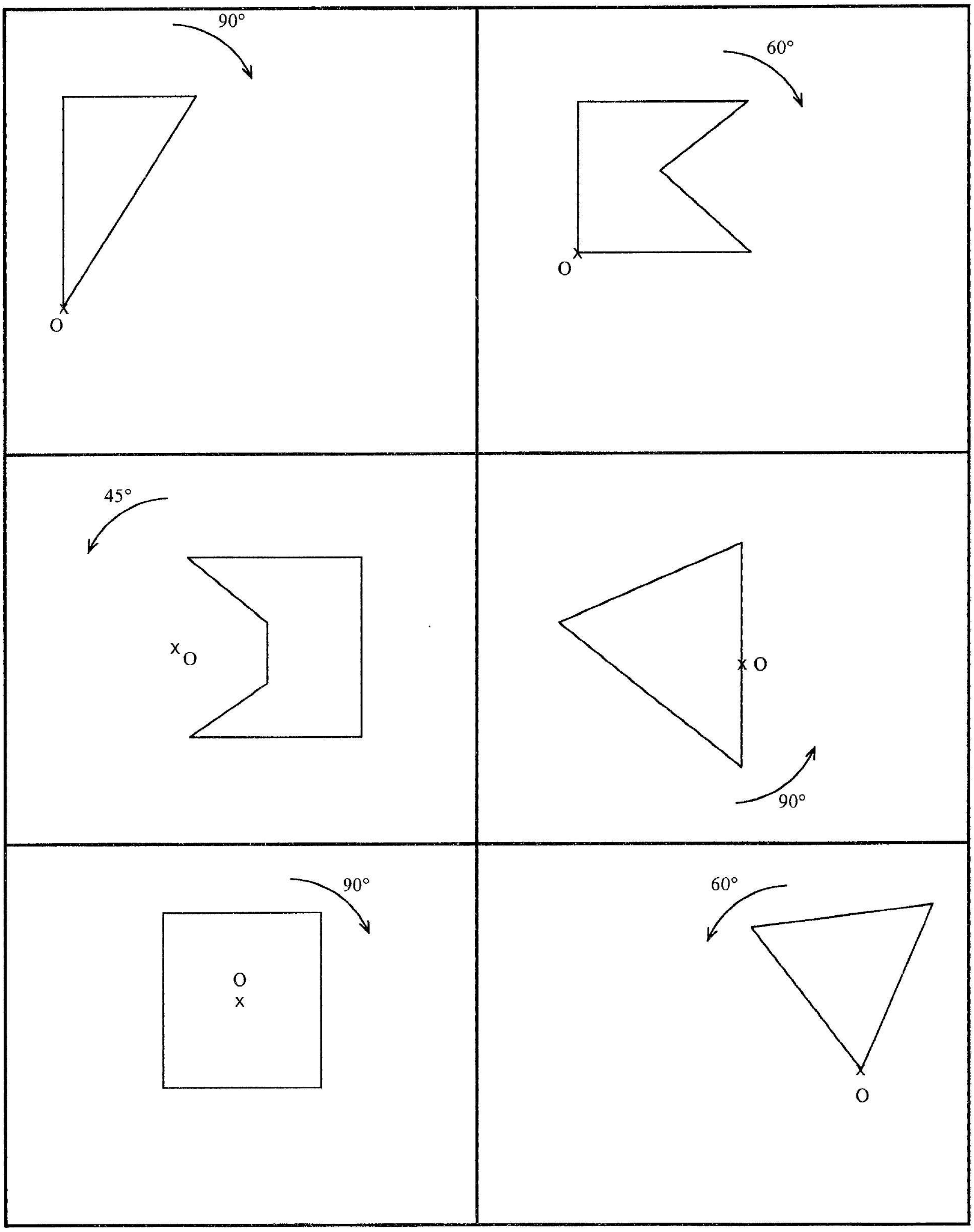


FICHE XI

ROTATIONS ET POLYGONES

EXERCICE

Construire l'image du polygone dans la rotation de centre O, d'angle et de sens indiqués dans chacun des cas suivants.

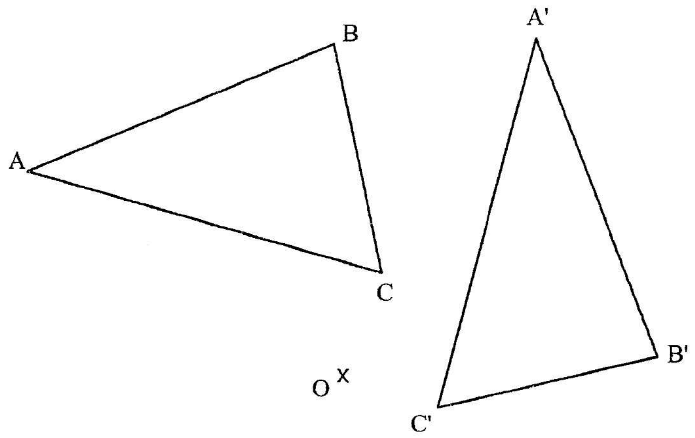


FICHE XII

CENTRE ET ANGLE D'UNE ROTATION

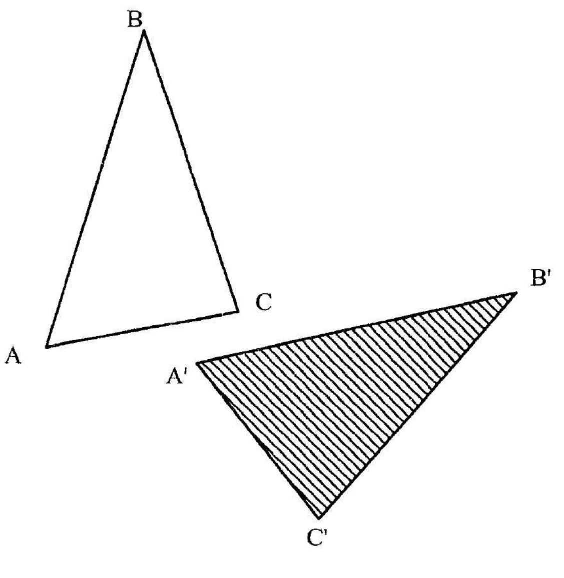
EXERCICE 1

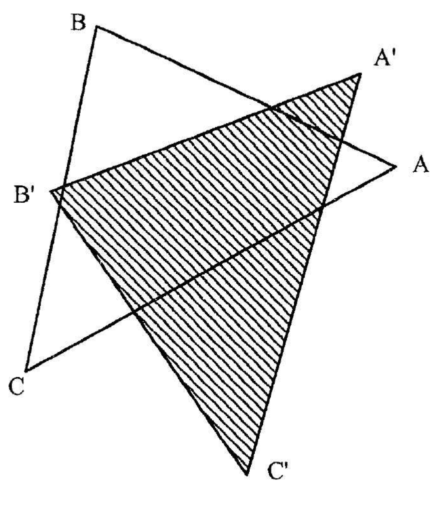
Vérifier avec les instruments de dessin que les points A', B', C' sont les images respectives de A, B, C dans une même rotation de centre O. Préciser l'angle de cette rotation.



EXERCICE 2

Dans chacune des figures ci-dessous le polygone hachuré est image de l'autre dans une rotation. Construire le centre O et mesurer ensuite l'angle de cette rotation.





CHAPITRE III

TRANSFORMATIONS DEFORMANTES

L'introduction des transformations dans l'enseignement de la géométrie se fait dès l'école élémentaire (agrandissements et réductions sur quadrillage, symétrie orthogonale). Elle se poursuit au collège avec l'apprentissage des isométries : symétrie orthogonale puis centrale, translation, rotation, et enfin quelques activités de composition de ces transformations. Les propriétés de ces isométries sont ainsi dégagées progressivement, et les diverses conservations d'alignement, de distance, d'angle et d'aire sont peu à peu mises en évidence.

Afin de donner aux élèves une meilleure perception des transformations étudiées, et pour mieux comprendre le sens des propriétés de conservation des isométries, il est souhaitable que les élèves rencontrent, observent et manipulent diverses transformations non isométriques, affines et non affines.

Utiliser un algorithme de construction pour obtenir une nouvelle figure permet une véritable action des élèves, avec pour objectifs de consolider l'usage des instruments de mesure et de dessin, d'enrichir et de réorganiser les connaissances sur les figures planes élémentaires.

Les fiches qui suivent proposent diverses activités qui peuvent être conduites en classe pour sensibiliser les élèves à la notion de transformation d'une figure et les amener à réfléchir sur la présence de certains invariants. Ce travail ne cherche pas à être exhaustif et d'autres transformations sont envisageables, son intérêt réside dans les interrogations qu'il peut susciter chez les élèves à propos des déformations observées.

Avec les fiches I et II on peut déjà s'interroger sur la notion de conservation de certaines propriétés dans une transformation. Dans chaque cas, le procédé graphique est facile à réaliser, mais il privilégie la transformation ponctuelle alors que l'on vise à une transformation globale. Il faut donc transformer un grand nombre de points de la figure.

La fiche I est centrée sur **alignement** et **distance**. Les questions soulevées en classe portent sur l'absence d'alignement des points construits, sur la variation des distances entre les points et entre leurs images, mais aussi sur la validité du tracé de liaison des points obtenus et sur la nature de la figure obtenue.

La fiche II ajoute à la précédente le traitement de **l'orthogonalité** et du **parallélisme**. On note une plus grande attention en classe au problème de l'alignement des images construites. Bien que l'alignement ne soit pas encore ici conservé, on relève parfois certains tracés à la règle joignant les images des points pour "voir l'allure" de la maison ainsi transformée. Bien sur, ici ce sont l'orthogonalité et le parallélisme qui soulèvent des questions.

La fiche III propose d'observer des transformations de figures réalisées sur un quadrillage. Le travail de repérage, la manipulation de coordonnées, la comparaison de la figure et de ses images, la recherche de conservations éventuelles, vont constituer l'essentiel de l'activité.

L'exercice 1 de la fiche III constitue la mise en place de l'activité. Il s'agit uniquement de repérer des points dessinés sur un quadrillage.

Les autres exercices de cette fiche III donnent quelques algorithmes permettant de transformer la figure initiale. Il faut indiquer que l'alignement est ici conservé et que transformer les points marqués suffit pour obtenir une image. La consigne "quelles remarques peux tu faire ?" permet, à travers les déformations observées, de faire émerger la non conservation des **distances** et parfois même des **angles** ainsi que quelques uns des invariants propres à chacune des transformations mises en œuvre, en particulier la forme du bateau.

Enfin la fiche IV propose deux exercices utilisant le même algorithme de transformation et pour lesquels segment ou quart de cercle vont produire la même image ce qui laisse la porte ouverte à d'autres questions concernant les transformations.

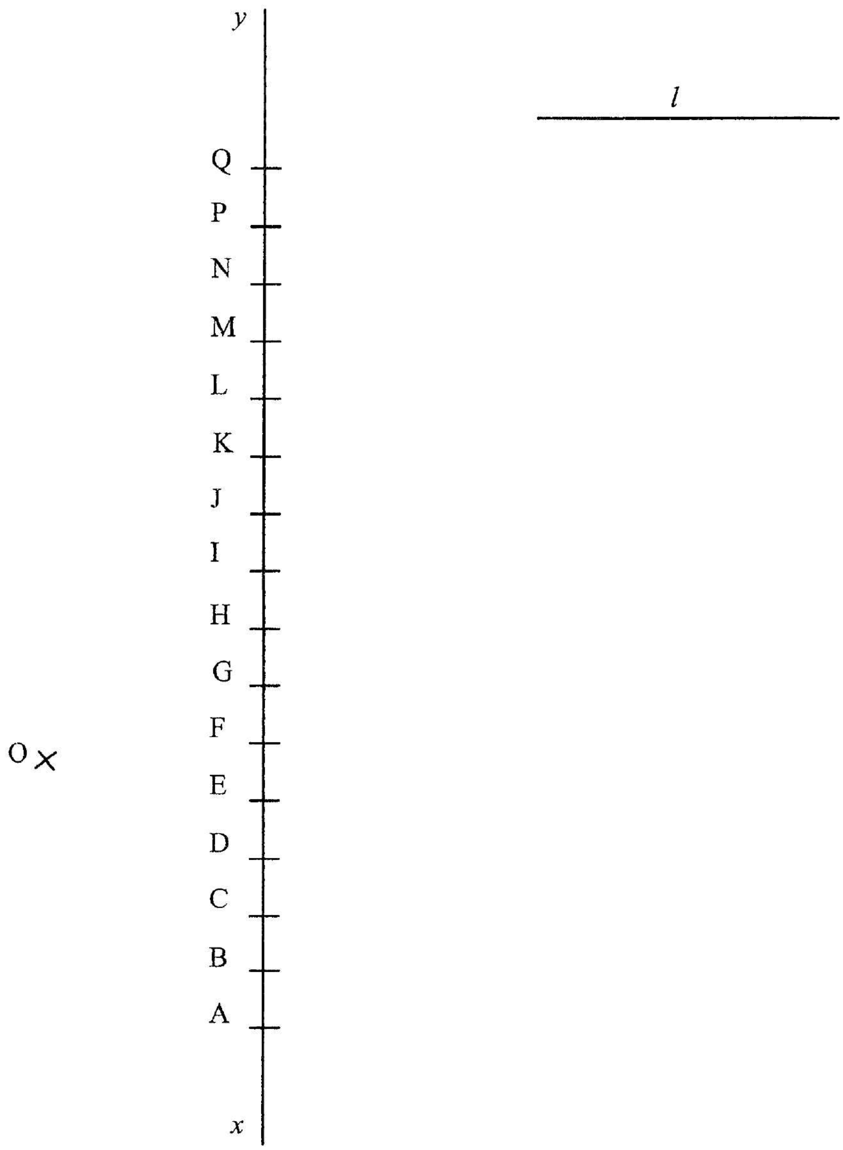
FICHE I

TRANSFORMER UNE DROITE

EXERCICE

Pour chaque point marqué sur la droite (*xy*), on va construire un nouveau point (son image) à partir de la consigne suivante :

A $\mapsto$ A' avec O, A, A' alignés dans cet ordre et AA' = *l*.
B $\mapsto$ B' avec O, B, B' alignés dans cet ordre et BB' = *l*.
C $\mapsto$ C' avec O, C, C' alignés dans cet ordre et CC' = *l*.
................etc......................



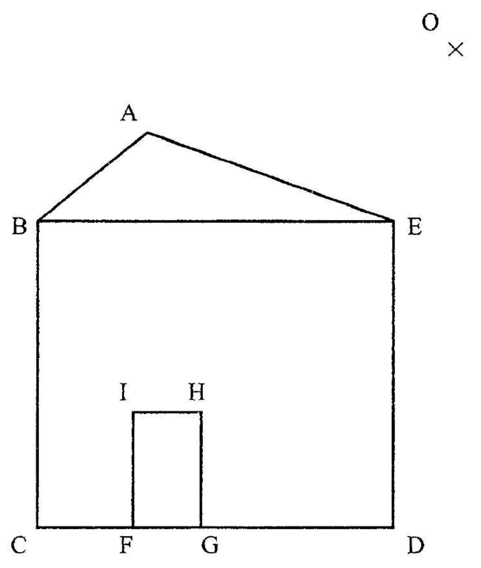
FICHE II

TRANSFORMER UNE MAISON

EXERCICE

Pour chaque point nommé de cette figure, on va construire un nouveau point (son image) à partir de la consigne suivante :

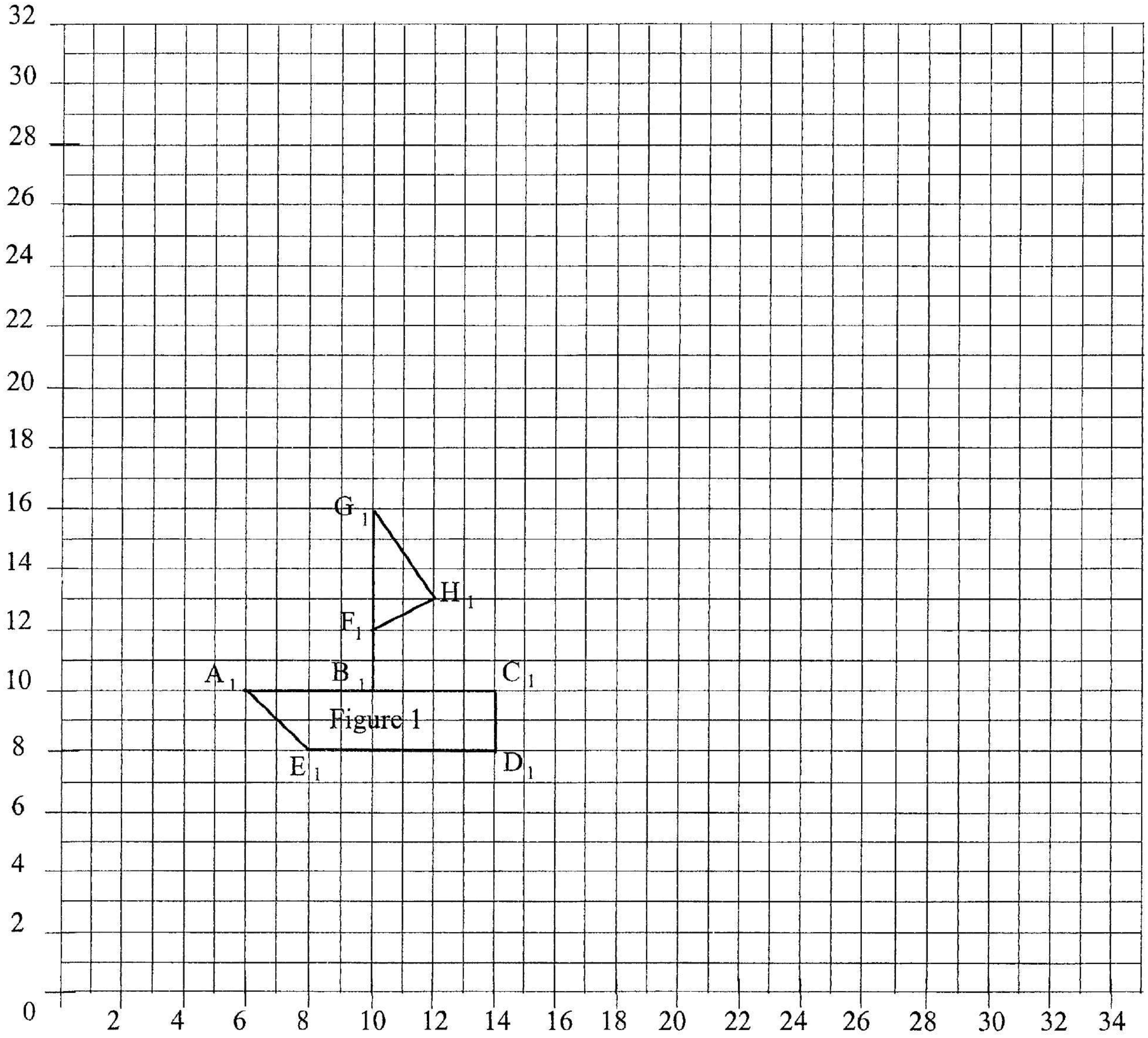
A $\mapsto$ A' avec A, O, A' alignés dans cet ordre et AA' = 14 cm.
B $\mapsto$ B' avec B, O, B' alignés dans cet ordre et BB' = 14 cm.
C $\mapsto$ C' avec C, O, C' alignés dans cet ordre et CC' = 14 cm.
................etc......................



FICHE III

TRANSFORMATIONS ET QUADRILLAGE

Tous les exercices de la fiche III concernent la figure ci-dessous.



EXERCICE 1

Complète le tableau suivant avec les coordonnées des différents points de la figure 1.

Points	A_1	B_1	C_1	D_1	E_1	F_1	G_1	H_1
x	6	10						
y	10							

FICHE III (suite)

TRANSFORMATIONS ET QUADRILLAGE

EXERCICE 2

On transforme la figure 1 en appliquant aux coordonnées des points marqués les actions suivantes: - on multiplie l'abscisse x par 2 ;
- on multiplie l'ordonnée y par 2.

1°) Complète le tableau suivant avec les nouvelles coordonnées.

Points	A_1	B_1	C_1	D_1	E_1	F_1	G_1	H_1
x	12	20						
y	20							

2°) Construis cette nouvelle figure (figure 2) sur la feuille de la fiche III.

3°) Quelles observations peux tu faire ?

EXERCICE 3

On transforme à nouveau la figure 1 en appliquant aux coordonnées des points marqués les actions suivantes : - on soustrait 6 à l'abscisse x ;
- on ajoute 8 à l'ordonnée y.

1°) Complète le tableau suivant avec les nouvelles coordonnées.

Points	A_1	B_1	C_1	D_1	E_1	F_1	G_1	H_1
x	0	4						
y	18							

2°) Construis cette nouvelle figure (figure 3) sur la feuille de la fiche III.

3°) Quelles observations peux tu faire ?

EXERCICE 4

On transforme encore la figure 1 en appliquant aux coordonnées des points marqués les actions suivantes : - on divise l'abscisse x par 2 ;
- on divise l'ordonnée y par 2.

1°) Complète le tableau suivant avec les nouvelles coordonnées.

Points	A_1	B_1	C_1	D_1	E_1	F_1	G_1	H_1
x	3	5						
y	5							

2°) Construis cette nouvelle figure (figure 4) sur la feuille de la fiche III.

3°) Quelles observations peux tu faire ?

EXERCICE 5

On transforme pour la dernière fois la figure 1 en appliquant aux coordonnées des points marqués les actions suivantes : - on multiplie l'abscisse x par 2,5 ;
- on soustrait 4 à l'ordonnée y.

1°) Complète le tableau suivant avec les nouvelles coordonnées.

Points	A_1	B_1	C_1	D_1	E_1	F_1	G_1	H_1
x	15	25						
y	6							

2°) Construis cette nouvelle figure (figure 5) sur la feuille de la fiche III.

3°) Quelles observations peux tu faire ?

FICHE IV

UNE TRANSFORMATION BIZARRE

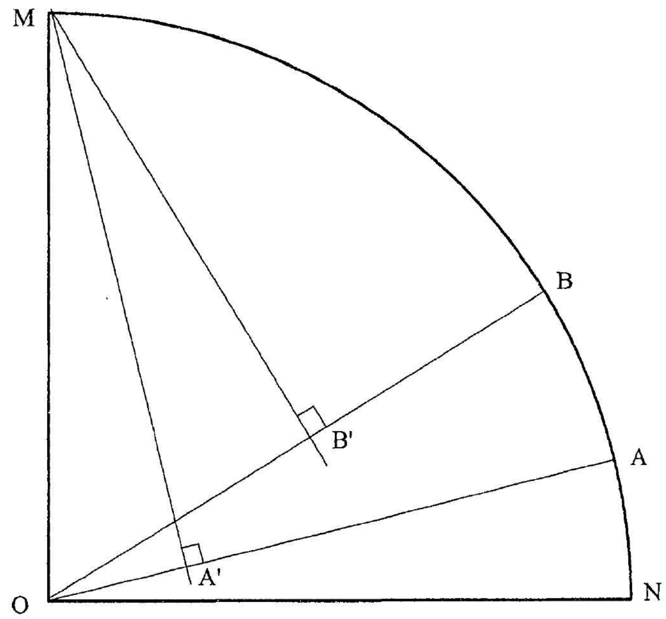
EXERCICE 1

Place quelques points sur le quart de cercle ci-dessous. Pour chacun d'eux construis un nouveau point à partir de la consigne suivante:

A $\mapsto$ A' avec A' pied de la perpendiculaire à la droite (OA) passant par M.

B $\mapsto$ B' avec B' pied de la perpendiculaire à la droite (OB) passant par M.

................etc......................



Quelles observations peux-tu faire ?

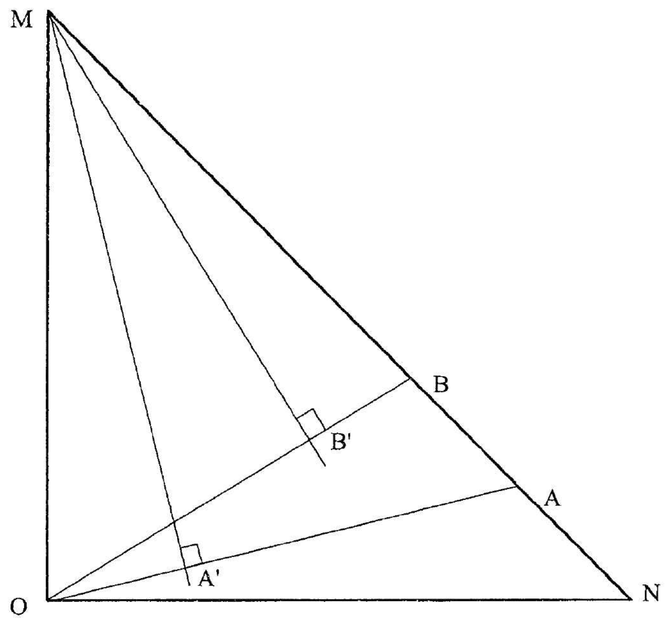
EXERCICE 2

Place quelques points sur le segment [MN]ci-dessous. Pour chacun d'eux construis un nouveau point à partir de la consigne suivante:

A $\mapsto$ A' avec A' pied de la perpendiculaire à la droite (OA) passant par M.

B $\mapsto$ B' avec B' pied de la perpendiculaire à la droite (OB) passant par M.

................etc......................



Quelles observations peux-tu faire ?

<u>CHAPITRE IV</u>

<u>PREMIERES PROPRIETES DES ISOMETRIES</u>

Ce chapitre est le point de départ de toute activité de démonstration à partir des isométries. C'est à l'aide de propriétés (admises ou établies, expliquées) et de définitions claires que peut se construire le raisonnement. Les objets géométriques et les figures sur lesquels va s'appuyer le travail doivent être définis préalablement: médiatrice, bissectrice, parallélogramme, rectangle, losange, carré, triangle isocèle, équilatéral, cercle feront à chaque fois l'objet d'une définition claire.

Nous étudions successivement dans ce chapitre les isométries définies au chapitre précédent. Pour établir qu'il s'agit d'isométries nous faisons appel au **mouvement** et à l'**invariance** d'un objet dans un mouvement. La **superposition** mise en évidence tiendra lieu de preuve en ce sens que la **coïncidence** constatée emporte la conviction de l'élève.

L'accès à la démonstration relevant d'un schéma hypothético-déductif ne peut être fourni, il nécessiterait la mise en œuvre des cas d'égalité des triangles.

Nous proposons pour chaque isométrie, en complément aux algorithmes de construction, les constructions à la règle et au compas qui l'accompagnent. Nous étudions en particulier les configurations associées aux isométries : le cerf-volant pour la symétrie orthogonale, le parallélogramme pour la symétrie centrale et pour la translation, le triangle isocèle et les polygones réguliers pour la rotation.

LA SYMÉTRIE ORTHOGONALE PAR RAPPORT A UNE DROITE

Propriété

La symétrie par rapport à une droite est une isométrie. Le symétrique d'un segment est un segment de même longueur et le symétrique d'un angle est un angle de même mesure.

La seule explication possible de ce résultat réside dans le mouvement de rotation que l'on peut opérer autour de l'axe de la symétrie afin d'amener un triangle à coïncider avec son symétrique. Le pliage peut intervenir ici comme intermédiaire dans la superposition. Si l'on prend soin de placer au début, un ou deux points sur l'axe de la symétrie, la coïncidence devient une évidence. La fiche qui suit propose de mettre en évidence cette propriété.

FICHE I

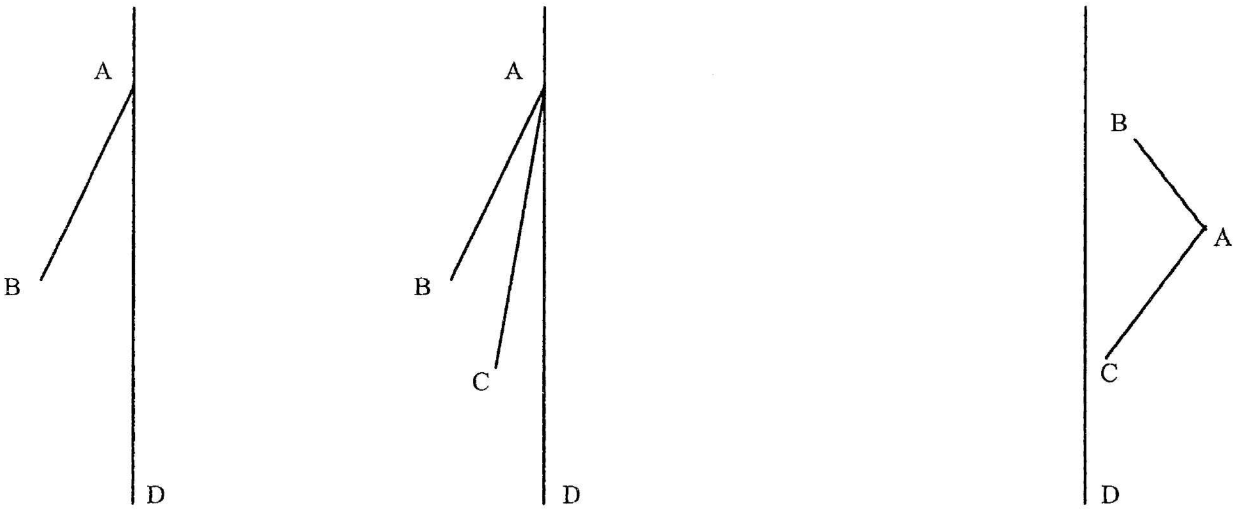
ISOMETRIE

EXERCICE

Dans chacune des figures ci-dessous, construis les symétriques des segments [AB], [AC] par rapport à la droite D. On les nomme [A'B'] et [A'C'].

Mesure à chaque fois les segments [AB], [AC], [A'B'], [A'C'] et les angles BÂC et B'Â'C'.

Plie la feuille suivant l'axe de la symétrie, que constates-tu ?

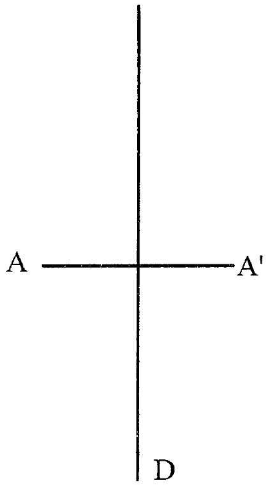


Pour la suite on suppose que la médiatrice d'un segment a été préalablement définie comme "la droite perpendiculaire qui passe par son milieu", et que la bissectrice d'un angle est "la demi-droite issue de son sommet et qui le partage en deux angles égaux". Ce ne sont pas les seules définitions possibles mais un choix s'impose pour asseoir le raisonnement.

Les fiches II et III qui suivent proposent quelques constructions à la règle et au compas que l'on peut maintenant justifier. La première conduit à une propriété de la médiatrice et introduit une configuration qui pourra être reprise pour étudier certaines figures.

FICHE II

LE CERF-VOLANT



EXERCICE 1

Sur la figure ci-contre on a placé un point A et son symétrique A' dans la symétrie orthogonale d'axe D.

1°) Complète les phrases suivantes :

Le segment [AA'] et la droite D sont...

La droite D coupe le segment [AA'] en son...

La droite D est la..du segment [AA'].

2°) Place plusieurs points sur la droite D. A l'aide de ton compas compare les distances de ces points à A et A'.

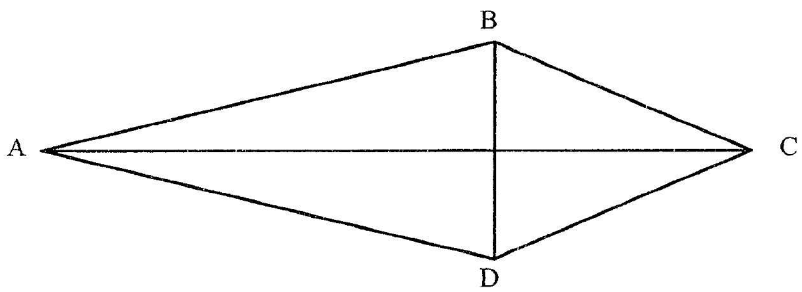
EXERCICE 2

Sur la figure ci-contre on a tracé un segment [AA'].

A l'aide uniquement de ton compas construis des points de la médiatrice du segment [AA']. Trace ensuite à la règle cette médiatrice. Combien faut-il de points au minimum pour la construire ?......................

EXERCICE 3

Sur la figure ci-dessous on a AB = AD et CB = CD. Explique pour quelles raisons la droite (AC) est la médiatrice du segment [BD]. La droite (BD) est-elle la médiatrice du segment [AC] ?



....

....

EXERCICE 4

Donne une méthode permettant de construire à l'aide d'une règle et d'un compas le milieu d'un segment donné.

....

....

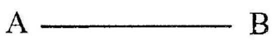
FICHE III

TRIANGLE ISOCELE ET LOSANGE

EXERCICE 1

Sur la figure ci-contre on a tracé un segment [AB].

A l'aide de ton compas construis le troisième sommet C du triangle isocèle ABC de base [AB] sachant que AC = 4cm. Termine le tracé du triangle ABC.

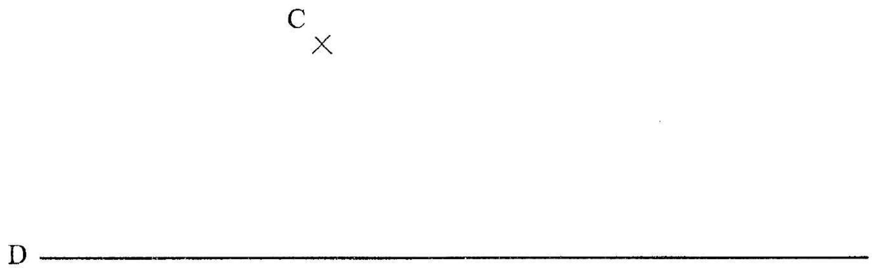


EXERCICE 2

Sur la figure ci-dessous on a tracé une droite D et un point C.

A l'aide de ton compas construis sur la droite deux points A et B équidistants de C. Construis maintenant la médiatrice du segment [AB]. Que constates-tu ?

Donne une méthode pour construire à la règle et au compas la perpendiculaire à une droite passant par un point donné.



EXERCICE 3

Sur la figure ci-dessous on a tracé une droite D et un point C.

A l'aide de ton compas et sans en changer l'ouverture, construis le symétrique C' du point C par rapport à la droite D.

Pour réaliser la construction ci-dessus, tu as utilisé deux points sur la droite D. Joins ces deux points à C et C', comment s'appelle le quadrilatère obtenu ?

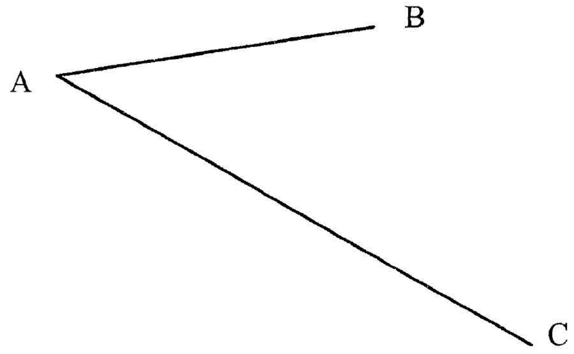
FICHE IV

BISSECTRICE D'UN ANGLE

EXERCICE 1

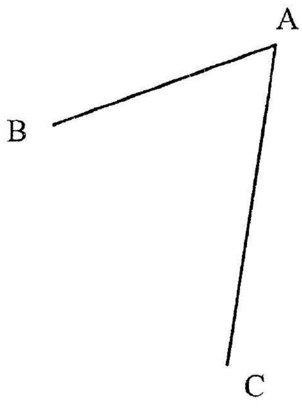
Sur la figure ci-dessous on a tracé un angle BÂC.

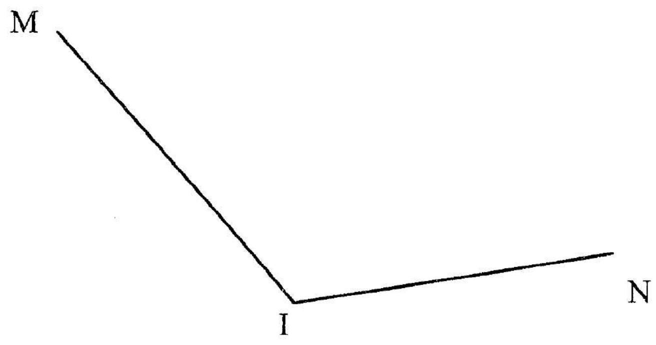
Place un point D sur le segment [AB]. A l'aide de ton compas place un point D' sur le segment [AC] tel que D et D' soient équidistants de A. Construis le losange ADED' et trace ses diagonales. La diagonale [AE] partage l'angle BÂC en deux angles BÂE et CÂE de même mesure. On dit que la demi-droite[AE) est la bissectrice de l'angle BÂC.

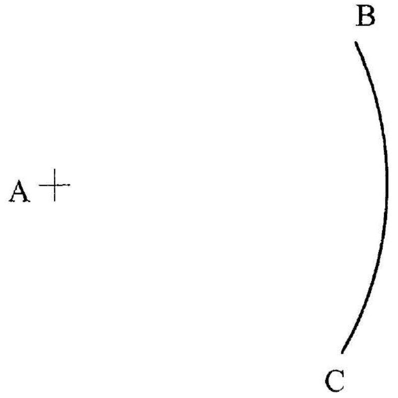


EXERCICE 2

Construis à la règle et au compas les bissectrices des angles BÂC et MÎN.







EXERCICE 2

Sur la figure ci-contre on a tracé un arc d'un cercle de centre A.

A l'aide de la règle et du compas trouve une méthode permettant de partager cet arc de cercle en deux arcs de même longueur.

LA SYMÉTRIE CENTRALE

Propriété

La symétrie centrale est une isométrie. Le symétrique d'un segment est un segment de même longueur, le symétrique d'un angle est un angle de même mesure.

De plus, le symétrique d'un segment est un segment qui lui est parallèle.

La seule explication possible de ces résultats réside dans le mouvement de rotation de 180° que l'on peut opérer autour du centre de la symétrie afin d'amener un triangle à coïncider avec son symétrique. Du papier calque et la pointe du compas vont servir d'intermédiaire dans la superposition. La fiche qui suit propose de mettre en évidence cette propriété.

FICHE V

ISOMETRIE

EXERCICE

Dans chacune des figures ci-dessous, construis les symétriques des segments [AB], [AC] par rapport au point O. On les nomme [A'B'] et [A'C'].

Mesure à chaque fois les segments [AB], [AC], [A'B'], [A'C'] et les angles BÂC et B'Â'C'.

Reproduis les points O, A, B, C sur du papier calque, pique la pointe de ton compas sur le point O et fais tourner seulement le papier calque autour du point O. Que constates-tu lorsque les deux points A et A' coïncident ?

Figure 1

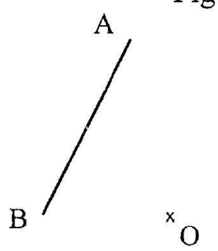
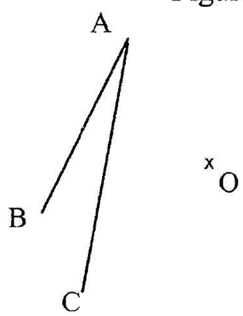


Figure 2



Trace par le point O une droite D parallèle au segment [AB]. Reproduis la droite D sur ton papier calque et renouvelle l'expérience. Que peut-on dire de D et [A'B']? Que peut-on dire de [AB] et [A'B'] ?

Pour la suite on suppose que le parallélogramme a été préalablement défini comme "le quadrilatère dont les côtés opposés sont deux à deux parallèles". Ce n'est pas la seule définition possible mais un choix s'impose pour asseoir le raisonnement.

Les fiches VI et VII qui suivent proposent d'étudier quelques propriétés que l'on peut maintenant justifier. La première conduit à une nouvelle définition du parallélogramme (même milieu des diagonales), la deuxième étudie des questions d'angles.

FICHE VI

LE PARALLELOGRAMME

EXERCICE 1

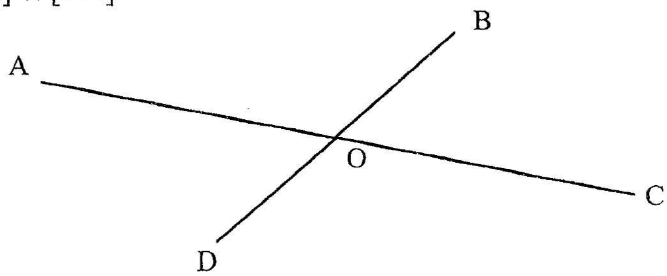
1°) Construis à la règle et au compas le symétrique du segment [AB] par rapport au point O. On le nomme [A'B'].

2°) Quel est le symétrique du segment [AB'] par rapport au point O ?

3°) Que peut-on dire alors des segments [AB] et [A'B'] puis des segments [AB'] et [A'B] ? Quelle est la nature du quadrilatère ABA'B' ?

EXERCICE 2

Sur la figure ci-dessous on a tracé quatre points A, B, C, D, tels que O soit le milieu des segments [AC] et [BD].



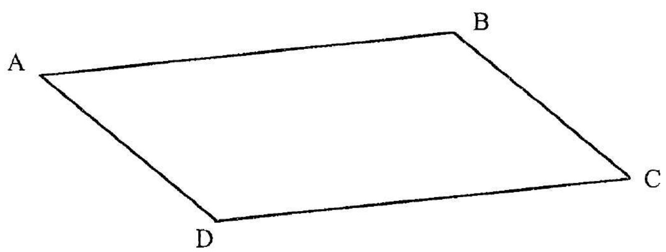
1°) Quel est le symétrique du segment [AB] par rapport au point O ?

2°) Quel est le symétrique du segment [BC] par rapport au point O ?

3°) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

EXERCICE 3

Trace la diagonale [AC] du parallélogramme ABCD ci-dessous. Soit O son milieu.



1°) Quel sont les symétriques des segments [AB] et [AD] par rapport à O ? Pourquoi ?

2°) Quel est le symétrique du point B par rapport à O ? Pourquoi ?

3°) Que peut-on dire des diagonales [AC] et [BD] du parallélogramme ?

4°) Écris une nouvelle définition du parallélogramme :

....

....

....

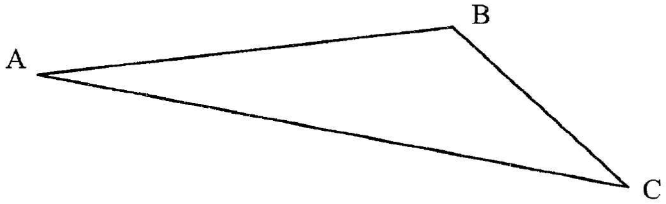
FICHE VI (suite)

LE PARALLELOGRAMME

EXERCICE 4

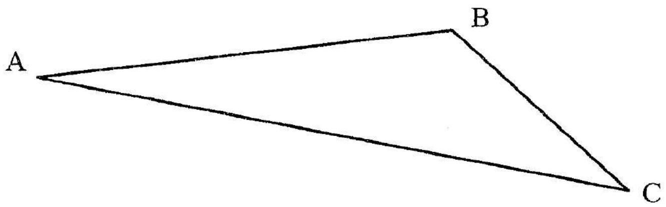
Construction du parallélogramme à la règle et au compas.

Un triangle ABC étant donné on veut placer le point D tel que ABCD soit un parallélogramme. On sait que pour cela les segments [AC] et [BD] doivent avoir le même milieu.
1°) Sur la figure ci-dessous situe approximativement le point D, à main levée, à l'aide des informations précédentes.
2°) Sachant que AB = CD, trace au compas un arc de cercle de centre C sur lequel doit se situer le point D.
3°) Sachant que BC = AD, trace au compas un arc de cercle de centre A sur lequel doit se situer le point D. Termine à la règle le tracé de ABCD.



EXERCICE 5

Sur la figure ci-dessous, construis en utilisant la méthode de l'exercice 4 les parallélogrammes ABCD, ACBE, ABFC.



Observe les segments [AC] et [EF]. Quelles remarques peux-tu faire ?

EXERCICE 6

Dessine un triangle DEF et place les points A, B, C, milieux respectifs des côtés [DE], [EF] et [FD]. Les quadrilatères ABCD, ACBE et ABFC sont-ils des parallélogrammes ?

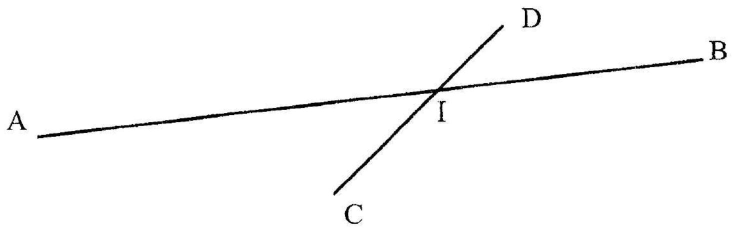
FICHE VII

PROPRIETES ANGULAIRES

EXERCICE 1

[AB] et [CD] sont deux segments qui se coupent en I.

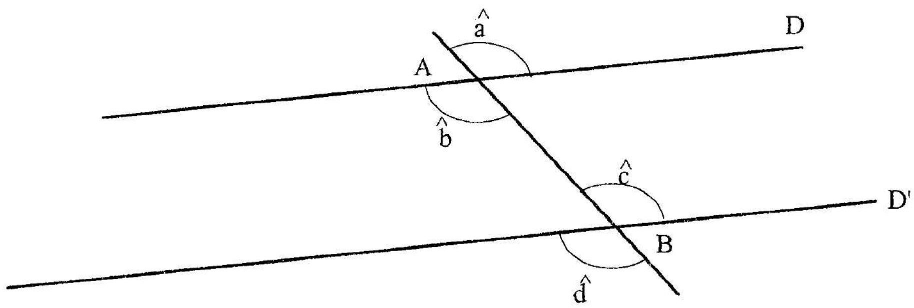
1°) Construis à la règle et au compas les symétriques des segments [AB] et [CD] par rapport au point C. On les nomme [A'B'] et [C'D'].



2°) Que peut-on dire du point C' ?
3°) Quel est le symétrique de I ?
4°) Trouve sur cette figure tous les angles de même mesure.

EXERCICE 2

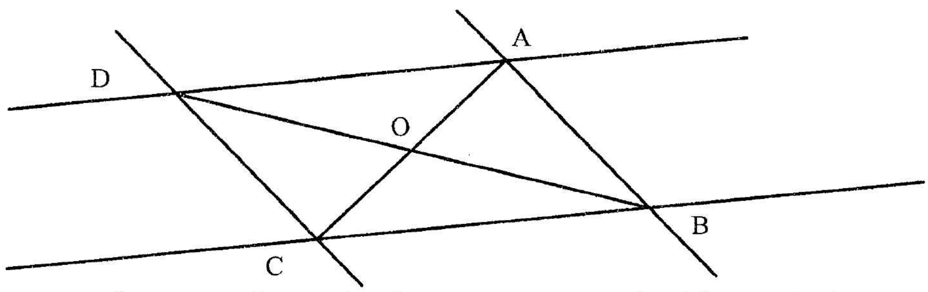
D et D' sont deux droites parallèles. A est un point de D et B un point de D'.



Explique pour quelle raison tous les angles $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$, repérés par un arc de cercle ont même mesure.

EXERCICE 3

ABCD est un parallélogramme, O est l'intersection de ses diagonales.



1°) Repère sur cette figure tous les angles de même mesure et justifie tes résultats.
2°) Refais la figure et observe tous les angles égaux à ceux du triangle BCD. Peux-tu expliquer pour quelle raison la somme des angles du triangle BCD est 180° ? Ce dernier résultat est-il vrai pour tous les triangles ?

LA TRANSLATION

Propriété

La translation est une isométrie. Le translaté d'un segment est un segment de même longueur, le translaté d'un angle est un angle de même mesure.

De plus, le translaté d'un segment est un segment qui lui est parallèle.

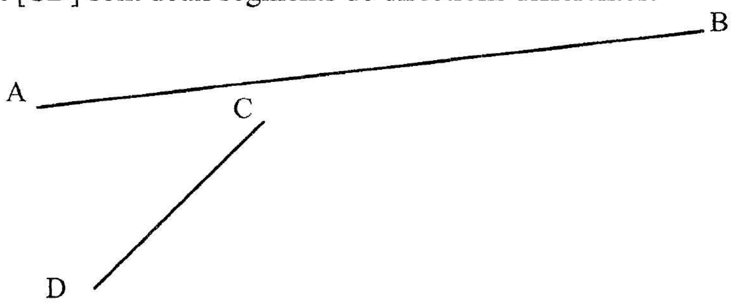
Ces divers résultats peuvent être justifiés à partir de ceux découverts avec la symétrie centrale et des deux définitions du parallélogramme précédemment rencontrées. La fiche qui suit propose de démontrer cette propriété dans quelques situations particulières.

FICHE VIII

ISOMETRIE

EXERCICE 1

[AB] et [CD] sont deux segments de directions différentes.



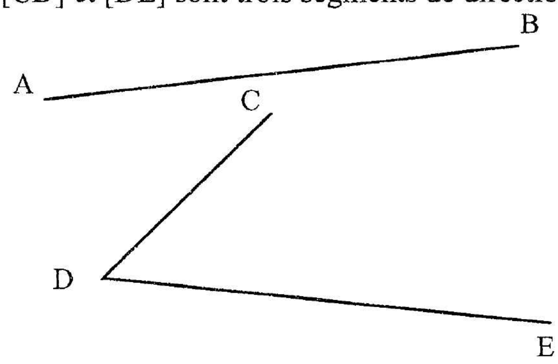
1°) Construis à la règle et au compas l'image [C'D'] du segment [CD] dans la translation qui va de A vers B.

2°) Quelle est la nature du quadrilatère DCC'D' ? Pourquoi ? Que peut-on dire alors des segments [CD] et [C'D'] ?

3°) Trouve une explication à ce résultat lorsque [AB] et [CD] sont deux segments de même direction.

EXERCICE 2

[AB], [CD] et [DE] sont trois segments de directions différentes.



1°) Construis à la règle et au compas les images [C'D'] et [D'E'] des segments [CD] et [DE] dans la translation qui va de A vers B.

2°) Complète les égalités suivantes avec les mesures des angles :

$C\hat{D}D'+D\hat{D}'C'=$................, $E\hat{D}D'+D\hat{D}'E'=$.................

Ainsi, $(C\hat{D}D'+D\hat{D}'C')+(E\hat{D}D'+D\hat{D}'E')=$........... et $C\hat{D}D'+E\hat{D}D'=$..........–(.........................)

Comme $C'\hat{D}'E'=360-(D\hat{D}'C'+D\hat{D}'E')$, on en déduit que $C'\hat{D}'E'=C\hat{D}E$.

LA ROTATION

Propriété

La rotation est une isométrie. Le transformé d'un segment dans une rotation est un segment de même longueur, le transformé d'un angle dans une rotation est un angle de même mesure.

La seule explication possible de ces résultats réside dans le mouvement de rotation que l'on peut opérer autour du centre afin d'amener un triangle à coïncider avec son transformé. Du papier calque et la pointe du compas vont servir d'intermédiaire dans la superposition. La fiche qui suit propose de mettre en évidence cette propriété dans une rotation particulière (il peut être intéressant de reprendre la même situation en changeant le sens de la rotation).

FICHE IX

ISOMETRIE

EXERCICE

1°) A l'aide de la règle, du compas et du rapporteur, dans chacune des figures ci-dessous, construis les transformés des segments [AB], [AC] dans la rotation de centre 0 et d'angle 70° dans le sens indiqué par la flèche. On les nomme [A'B'] et [A'C'].
2°) Mesure à chaque fois les segments [AB], [AC], [A'B'], [A'C'] et les angles BÂC et B'Â'C'.
3°) Reproduis les points O, A, B, C sur du papier calque, pique la pointe de ton compas sur le point O et fais tourner seulement le papier calque autour du point O. Que constates-tu lorsque les deux points A et A' coïncident ?

Figure 1

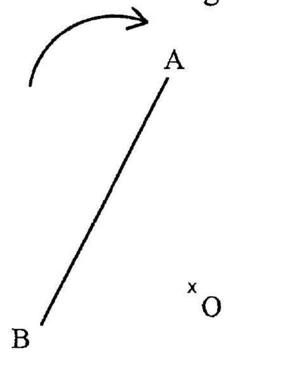
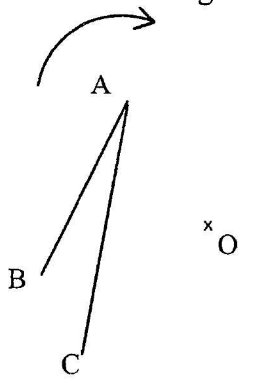


Figure 2



4°) Pour toutes les constructions réalisées que peux-tu dire du triangle formé par un point, son transformé et le centre O de la rotation ?

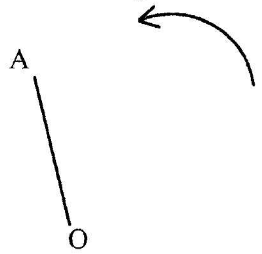
Les fiches X et XI suivantes proposent un travail sur la génération des polygones réguliers et l'étude de quelques unes de leurs propriétés.

FICHE X

TRIANGLE EQUILATERAL, CARRE ET HEXAGONE REGULIER

EXERCICE 1

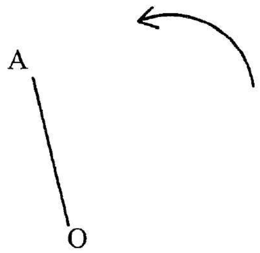
A l'aide de la règle, du compas et du rapporteur, effectue les constructions suivantes dans la rotation de centre 0 et d'angle 120° dans le sens indiqué par la flèche.



1°) Transformé [O'A']du segment [OA]. Que peux-tu dire du point O' ?
2°) Transformé [OA"]du segment [OA'].
3°) Transformé [OA'"]du segment [OA"]. Que constates-tu?
4°) Quelle est la nature du triangle OAA' ?
5°) Complète avec les mesures OÂA' = ..., OÂ'A =................, A'ÂA" =.............
Quelle est la nature du triangle AA'A" ?

EXERCICE 2

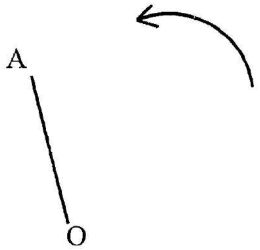
A l'aide de la règle, du compas et du rapporteur, effectue les constructions suivantes dans la rotation de centre 0 et d'angle 90° dans le sens indiqué par la flèche.



1°) Transformé [O'A']du segment [OA]. Que peux-tu dire du point O' ?
2°) Transformé [OA"]du segment [OA'].
3°) Transformé [OA'"]du segment [OA"].
4°) Transformé [OA""]du segment [OA'"]. Que constates-tu ?
5°) Quelle est la nature du triangle OAA' ?
6°) Complète avec les mesures OÂA' = ..., OÂ'A =................, AÂ'A" =.............
Quelle est la nature du quadrilatère AA'A"A'" ?

EXERCICE 3

A l'aide de la règle, du compas et du rapporteur, effectue des constructions analogues aux exercices précédents dans la rotation de centre 0 et d'angle 60° dans le sens indiqué par la flèche.



Que constates-tu ?

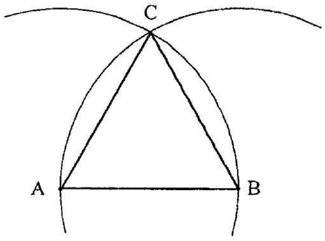
FICHE X (suite)

TRIANGLE EQUILATERAL, CARRE ET HEXAGONE REGULIER

EXERCICE 4

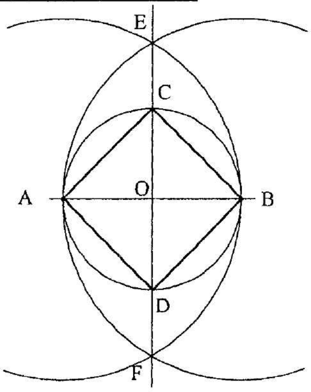
Deux points A et B étant donnés, on a réalisé trois constructions à la règle et au compas. Refais ces constructions et justifie qu'il s'agit bien d'un triangle équilatéral, d'un carré et d'un hexagone régulier.

Construction 1: triangle équilatéral ABC.



Le point C est un des points d'intersection du cercle de centre A et de rayon AB et du cercle de centre B et de même rayon.

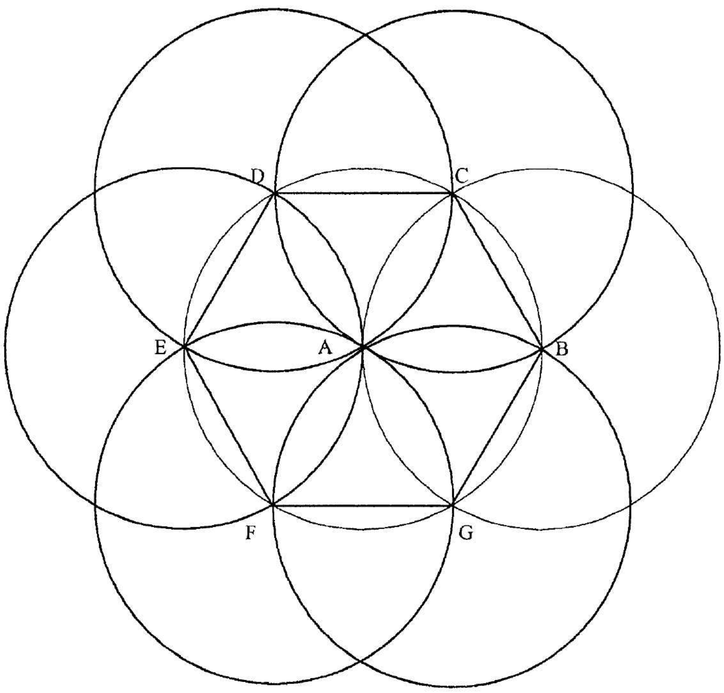
Construction 2 : carré ACBD.



Après avoir tracé les cercles de centres A et B et de rayon AB qui se coupent en E et F, on a tracé la médiatrice du segment [AB] et le cercle de diamètre AB.

On nomme O l'intersection de cette médiatrice avec [AB] puis C et D les intersections de cette médiatrice et du cercle de diamètre AB.

Construction 3 : hexagone régulier BCDEFG.



Après avoir tracé les cercles de centres A et B et de rayon AB, on a nommé C et G leurs intersections et tracé les cercles de centres C et G de rayon AB. Ces derniers tracés ont permis de placer les points F et D. Enfin le cercle de centre F (ou D) et de rayon AB permet la construction du point E.

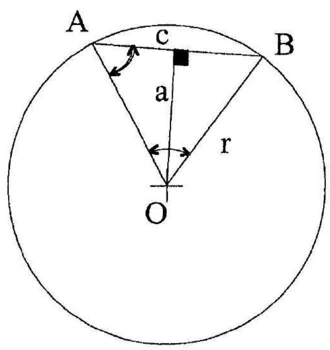
FICHE XI

LES POLYGONES REGULIERS

Un polygone régulier convexe de n côtés est un polygone dont les sommets sont obtenus par rotations successives de $\frac{360°}{n}$ autour d'un point O appelé centre du polygone. Par exemple pour construire un octogone régulier (8 côtés) on effectuera des rotations successives et dans le même sens de $\frac{360°}{8} = 45°$ d'un segment [OA] autour du point O.

EXERCICE

Étude des éléments remarquables de quelques polygones réguliers.



Pour un polygone régulier donné de n côtés, on désigne respectivement par r et O le rayon et le centre du cercle circonscrit, par $\widehat{AOB}$ l'angle de la rotation de centre O permettant sa réalisation, par $2\widehat{OAB}$ l'angle de deux côtés consécutifs, par c la longueur d'un côté et par a son apothème (distance de O au côté).

Compléter le tableau suivant en prenant r = 10:

Nombre de côtés	$\widehat{AOB}$	$2\widehat{OAB}$	c	a
3				
4				
5				
6				
7				
8				

CHAPITRE V

TRIANGLES ET ISOMETRIES

Dès le chapitre "Mouvement et isométries" nous avons situé le travail sur les isométries dans le cadre d'une recherche de coïncidence de figures par superposition. Les chapitres suivants ont montré comment les isométries avec leurs algorithmes de construction permettaient d'anticiper cette coïncidence par la réalisation de figures isométriques.

Nous allons dans ce chapitre, à propos de l'étude de quelques propriétés des triangles, énoncer les conditions qui font que deux triangles sont superposables. Il ne s'agit pas de rebâtir une géométrie à partir des cas d'égalité des triangles, mais de donner aux élèves des critères efficaces permettant justement d'attester de l'existence possible d'une isométrie faisant coïncider deux parties triangulaires d'une même figure.

Dans un triangle, les relations entre les mesures des angles, entre les mesures des côtés, vont servir ici de fil conducteur.

La fiche I est centrée sur la somme des angles d'un triangle.

Lorsqu'un ordre dans les mesures des angles d'un triangle est fixé, comme dans la fiche II, on peut observer un ordre induit sur les longueurs des côtés.

Avec les fiches III et IV, les mesures des angles d'un triangle étant fixées, c'est le domaine de la réduction, de l'agrandissement et de la proportionnalité qui est abordé. Sans faire une étude approfondie des triangles semblables, on peut mettre en évidence sur des exemples la proportionnalité des longueurs des côtés lorsque les angles correspondants sont égaux ainsi que la propriété réciproque.

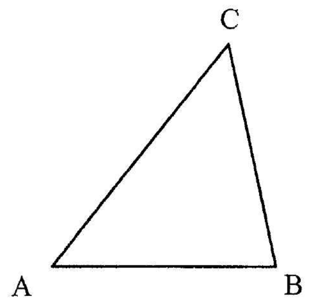
Ce dernier résultat étant admis il est alors possible dans les fiches V, VI et VII de démontrer que dans trois cas on a la certitude d'être en présence de triangles isométriques. La numérotation adoptée n'est pas classique, elle est simplement induite par le procédé de démonstration adopté.

Enfin dans les fiches VIII et IX on trouvera quelques exercices classiques dont le traitement met en jeu isométries et (ou) cas d'isométries.

FICHE I

SOMME DES ANGLES D'UN TRIANGLE

EXERCICE 1



ABC est un triangle.

1°) Construis à la règle et au compas les images [A'B'] et [A'C'] des segments [AB] et [AC] dans la translation qui va de A vers B. Où se trouve le point A' ?

2°) Sans effectuer de mesure :

- colorie sur la figure les angles qui ont même mesure,
- que peux-tu dire de la somme $\widehat{ABC} + \widehat{CBC'} + \widehat{C'BB'}$?

3°) Justifie que $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} = \widehat{ABC} + \widehat{CBC'} + \widehat{C'BB'} = 180°$ et énonce la propriété correspondante.

....

....

....

....

EXERCICE 2

Quelques questions.........

1°) Un triangle a deux angles qui mesurent respectivement 38° et 85°. Quelle est la mesure du troisième ?

2°) Un triangle rectangle a un angle qui mesure 42°. Quelle est la mesure de l'autre angle qui n'est pas droit ?

3°) Un triangle isocèle a un angle au sommet qui mesure 56°. Quelle est la mesure d'un angle à la base ?

4°) Un triangle isocèle a un angle à la base qui mesure 56°. Quelle est la mesure de l'angle au sommet ?

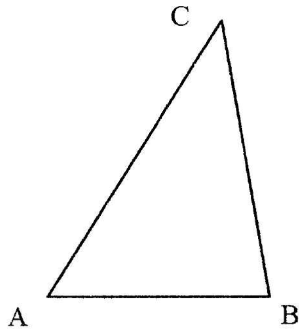
5°) Combien peut-il y avoir au plus d'angles droits dans un triangle ? Et des angles obtus ?

6°) Deux angles d'un triangle ont les mêmes mesures que deux angles d'un autre triangle. Que peut-on dire de la mesure du troisième angle de l'un et de l'autre ?

FICHE II

ANGLES ET COTES DANS UN TRIANGLE

EXERCICE 1



On considère un triangle ABC pour lequel AB < BC.

1°) Construire sur le segment [BC] le point D tel que BD = BA.

2°) Démontrer que $\widehat{ADB} = \widehat{ACD} + \widehat{DAC}$. En déduire ensuite que $\widehat{ADB} > \widehat{ACB}$.

3°) En remarquant que $\widehat{CAB} = \widehat{CAD} + \widehat{DAB}$, démontrer que $\widehat{CAB} > \widehat{DAB}$.

4°) A l'aide des deux précédents résultats justifier que $\widehat{CAB} > \widehat{ACB}$.

Ce dernier résultat s'énonce ainsi : **"lorsque deux côtés d'un triangle sont inégaux, les mesures des angles opposés à ces côtés sont rangées dans le même ordre que les longueurs de ces côtés".**

EXERCICE 2

1°) Comment sont rangées les mesures des angles d'un triangle qui a les longueurs des côtés toutes différentes ?

2°) Plus difficile....Comment sont rangées les mesures des longueurs des côtés d'un triangle qui a les angles tous différents ?

EXERCICE 3

Quelques questions.........

1°) Quel est le plus grand côté dans un triangle rectangle ?

2°) Dans un triangle isocèle, on suppose que les côtés de même longueur sont plus grands que la base. Que peut-on dire de l'angle au sommet ?

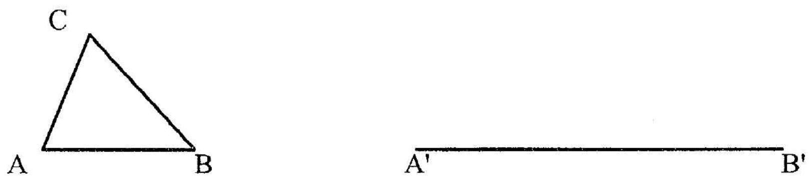
3°) Dans un triangle quelconque ABC, on considère la hauteur [AH] relative à la base [BC]. Justifier que: AH < AB et AH < AC.

4°) Une droite D et un point A étant donnés, on appelle H le point de D tel que le segment [AH] soit perpendiculaire à D. Justifier que pour tout point M de D on a AM > AH. **On dit que AH est la distance du point A à la droite D.**

FICHE III

TRIANGLES SEMBLABLES

EXERCICE 1



ABC est un triangle, [A'B'] un segment.

1°) Construis à la règle et au rapporteur le triangle A'B'C' dont les angles ont mêmes mesures que ceux du triangle ABC.

On dit que ces deux triangles sont semblables.

2°) Mesure les longueurs des côtés de ces deux triangles et complète le tableau suivant :

	Petit côté	Moyen côté	Grand côté
Triangle ABC			
Triangle A'B'C'			

Est-ce un tableau de proportionnalité ?

3°) Dessine d'autres triangles dont les angles ont mêmes mesures que ceux du triangle ABC. Les longueurs de leurs côtés sont elles proportionnelles à celles des côtés de ABC ?

EXERCICE 2

On donne les trois triangles suivants :

- le triangle ABC dont les longueurs des côtés sont AB = 2cm, BC = 3cm, CA = 4cm ;
- le triangle A'B'C' dont les longueurs des côtés sont A'B' = 3cm, B'C' = 4,5cm, C'A' = 6cm ;
- le triangle A"B"C" dont les longueurs des côtés sont A"B" = 4cm, B"C" = 6cm, C"A" = 8cm.

Dessine ci-dessous ces trois triangles et mesure leurs angles. Que constates-tu ?

FICHE IV

TRIANGLES SEMBLABLES ET CALCULS DE LONGUEURS

Propriétés

Lorsque deux triangles ont leurs angles de mêmes mesures, les longueurs des côtés opposés à ces angles sont proportionnelles.

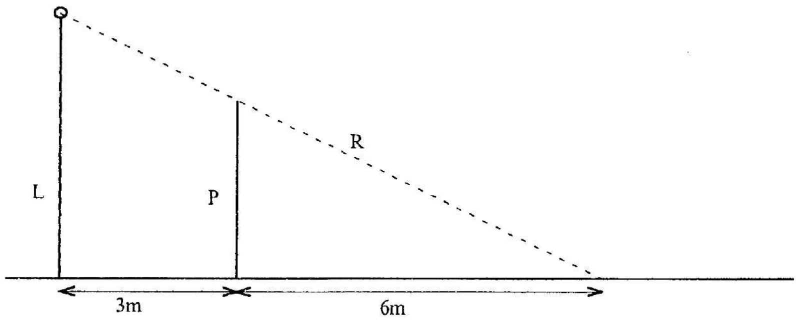
Lorsque deux triangles ont les longueurs des côtés proportionnelles, les angles opposés à ces côtés sont de mêmes mesures.

EXERCICE 1

ABC et A'B'C' sont deux triangles semblables: $\hat{A} = \hat{A}'$ et $\hat{B} = \hat{B}'$.On sait que AB = 2cm, BC = 3cm, AC = 4cm et A'B' = 17,5cm.

Calcule les longueurs des côtés A'C' et C'B' manquants.

EXERCICE 2

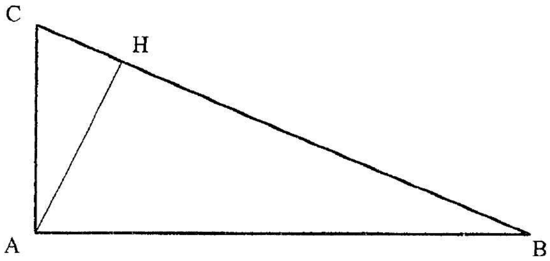


Sur le schéma ci-dessus, on peut observer un lampadaire vertical L, un piquet vertical P, un rayon lumineux en pointillés.

1°) Cette figure contient-elle des triangles semblables ?

2°) Sachant que le piquet mesure 2m de hauteur, quelle est la hauteur du lampadaire ?

EXERCICE 3



Le triangle ABC est rectangle en A. Le point H est le pied de la hauteur issue de A.

1°) Dans cette figure apparaissent trois triangles : ABC, ABH, ACH. Justifie que ces trois triangles sont semblables.

2°) Complète le tableau de proportionnalité suivant :

	Petit côté	Moyen côté	Grand côté
Triangle ABC			
Triangle ABH			
Triangle ACH			

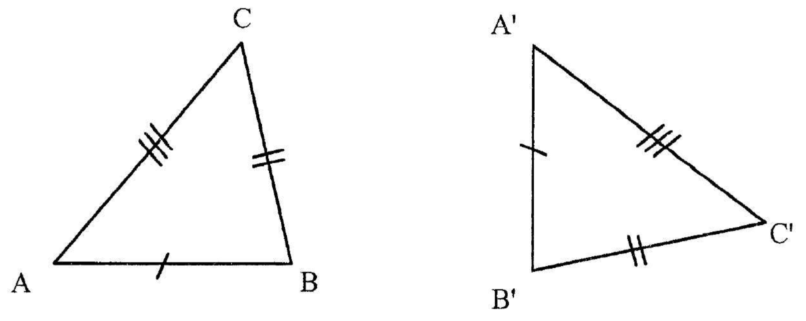
3°) Justifie que $AH^2 = HB \times HC$, que $AB^2 = HB \times BC$, et que $AC^2 = BC \times HC$.

FICHE V

TRIANGLES ISOMETRIQUES - PREMIER CAS

EXERCICE 1

Les triangles ABC et A'B'C' ci-dessous ont les particularités suivantes:
AB = A'B'; BC = B'C', CA = C'A'.



Que peut-on dire des fractions $\frac{AB}{A'B'}$ $\frac{BC}{B'C'}$ $\frac{CA}{C'A'}$? En déduire que ces triangles sont semblables et que $\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, $\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$.

On peut alors énoncer la propriété qui suit.

Propriété 1: deux triangles ABC et A'B'C' ayant leurs côtés respectifs de mêmes mesures sont isométriques (ou superposables). On peut, par une isométrie (ou par une succession d'isométries) amener ABC à coïncider avec A'B'C'.

EXERCICE 2

On donne le segment [AB].

1°) Construire aux instruments pour chacune des figures ci-dessous, un triangle ABC sachant que BC = 7cm et CA = 9cm.

Figure 1

Figure 2

2°) Les deux triangles dessinés sont-ils superposables ?

EXERCICE 3

On considère un triangle ABC isocèle en A. On désigne par H l'intersection de [BC] et de la médiatrice du côté [BC]. Justifier que les triangles ABH et ACH sont isométriques. Quelle est l'isométrie qui amène ABH en coïncidence avec ACH ?

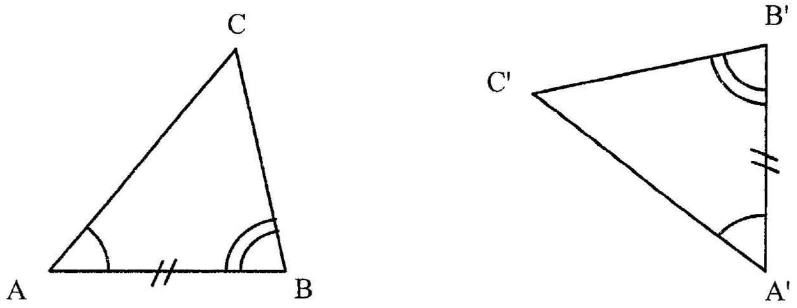
FICHE VI

TRIANGLES ISOMETRIQUES - DEUXIEME CAS

EXERCICE 1

Les triangles ABC et A'B'C' ci-dessous ont les particularités suivantes :

$AB = A'B'$; $\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$, $\widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'}$.



1°) Justifier que $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$ et donc que ces triangles sont semblables.
2°) Après avoir écrit les relations de proportionnalité correspondantes, établir que AC = A'C' et que BC = B'C'. Conclure à l'aide de la propriété 1.

On peut alors énoncer la propriété qui suit.

Propriété 2: deux triangles ABC et A'B'C' ayant un côté et ses deux angles adjacents de mêmes mesures sont isométriques (ou superposables). On peut, par une isométrie (ou par une succession d'isométries) amener ABC à coïncider avec A'B'C'.

EXERCICE 2

On donne le segment [AB].
1°) Construire aux instruments pour chacune des figures ci-dessous, un triangle ABC sachant que $\widehat{CAB} = 30°$ et $\widehat{CBA} = 45°$.

Figure 1

Figure 2

2°) Les deux triangles dessinés sont-ils superposables ?

EXERCICE 3

On considère un triangle ABC isocèle en A. On désigne par H l'intersection de [BC] et de la hauteur relative au sommet A. Justifier que les triangles ABH et ACH sont isométriques. Quelle est l'isométrie qui amène ABH en coïncidence avec ACH ?

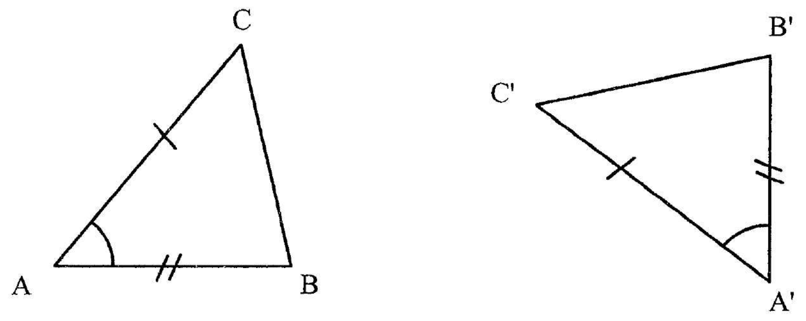
FICHE VII

TRIANGLES ISOMETRIQUES - TROISIEME CAS

EXERCICE 1

Les triangles ABC et A'B'C' ci-dessous ont les particularités suivantes :

$AB = A'B'$; $AC = A'C'$, $\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$.



1°) Tracer dans les triangles ABC et A'B'C' les hauteurs [CH] et [C'H'] relatives aux sommets C et C'. En Comparant les mesures de leurs angles et en utilisant le cas 2, justifier que les triangles rectangles ACH et A'C'H' sont superposables.
2°) A l'aide du théorème de Pythagore et en comparant les longueurs de leurs côtés, justifier que les triangles BCH et B'C'H' sont superposables.
3°) Comparer les longueurs des côtés des triangles ABC et A'B'C' et conclure avec la propriété 1.
On peut alors énoncer la propriété qui suit.

Propriété 3: deux triangles ABC et A'B'C' ayant un angle et ses côtés adjacents de mêmes mesures sont isométriques (ou superposables). On peut, par une isométrie (ou par une succession d'isométries) amener ABC à coïncider avec A'B'C'.

EXERCICE 2

On donne le segment [AB].
1°) Construire aux instruments pour chacune des figures ci-dessous, un triangle ABC sachant que $\widehat{CAB} = 30°$ et $CA = 8\text{cm}$.

Figure 1 Figure 2

A B B A

2°) Les deux triangles dessinés sont-ils superposables ?

EXERCICE 3

On considère un triangle ABC isocèle en A. On désigne par H l'intersection de [BC] et de la médiane relative au sommet A. Justifier que les triangles ABH et ACH sont isométriques. Quelle est l'isométrie qui amène ABH en coïncidence avec ACH ?

FICHE VIII

TRIANGLES ISOMETRIQUES - EXERCICES

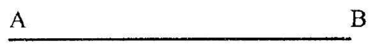
EXERCICES DE CONSTRUCTION

Les instruments autorisés sont la règle et le compas.

EXERCICE 1

On donne un segment [AH]. Construire le triangle équilatéral ABC dont [AH] est une hauteur.

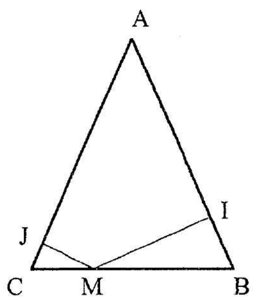
EXERCICE 2



On donne un segment [AB]. Construire le rectangle ABCD de centre O dont l'angle AÔD mesure 60°.

EXERCICES SUR LES DISTANCES

EXERCICE 1



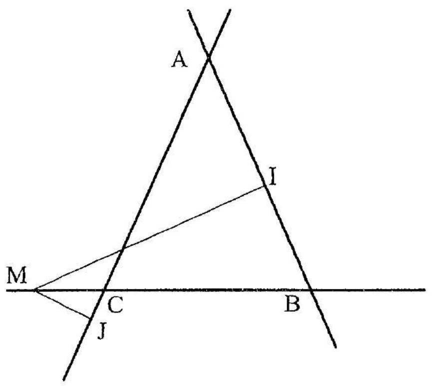
ABC est un triangle isocèle en A. Le point M est sur le côté [BC].

Le point I est le point de [AB] tel que les segments [MI] et [AB] soient perpendiculaires. Le point J est le point de [AC] tel que les segments [MJ] et [AC] soient perpendiculaires.

1°) Tracer la hauteur [CH] du triangle ABC, puis le point K tel que le quadrilatère MIHK soit un rectangle.

2°) Démontrer que les triangles CJM et CMK sont superposables puis que la somme des distances de M aux côtés [AB] et [AC] ne dépend pas de la position de M sur le côté [BC].

EXERCICE 2



ABC est un triangle isocèle en A. Le point M est sur la droite (BC) mais pas sur le côté [BC].

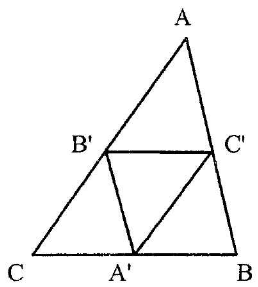
Le point I est le point de la droite (AB) tel que le segment [MI] soit perpendiculaire à la droite (AB). Le point J est le point de la droite (AC) tel que le segment [MJ] soit perpendiculaire à la droite (AC).

Par une méthode analogue à celle du précédent exercice, démontrer que la différence positive des distances de M aux droites (AB) et (AC) ne dépend pas de la position de M.

FICHE IX

TRIANGLES ISOMETRIQUES ET ISOMETRIES

EXERCICE 1

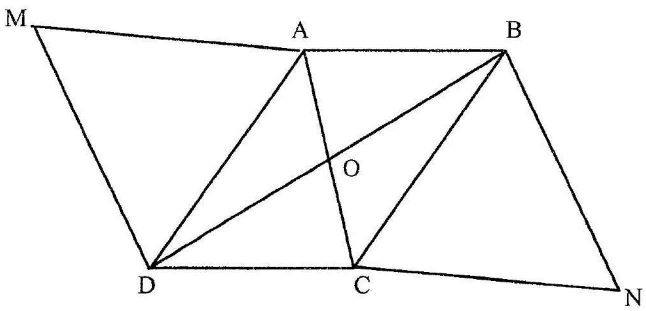


ABC est un triangle quelconque, A', B', C' sont respectivement les milieux des côtés [BC], [CA], [AB].

1°) Démontrer que les triangles AB'C', BC'A', CB'A', A'B'C' sont superposables.

2°) Par quelle isométrie le triangle AB'C' a-t-il pour image le triangle A'B'C'? Le triangle CB'A'? Le triangle BC'A'?

EXERCICE 2

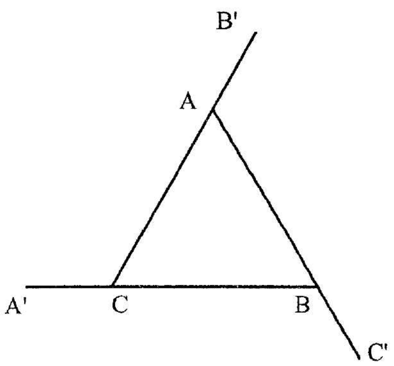


ABCD est un parallélogramme de centre O. Les triangles AMD et BNC sont équilatéraux.

1°) Démontrer que les triangles OCN et OAM sont superposables.

2°) Par quelle isométrie le triangle OCN a-t-il pour image le triangle OAM ? Qu'en déduire pour les points M, O, N ?

EXERCICE 3



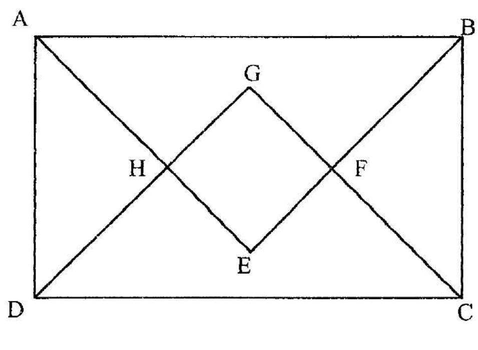
ABC est un triangle équilatéral. En prolongeant ses côtés de la même longueur on a obtenu les points A' sur (BC), B' sur (AC) et C' sur (AB).

1°) Démontrer que les triangles AB'C', BC'A', CA'B' sont superposables. Que peut-on dire du triangle A'B'C' ?

2°) Par quelle isométrie le triangle AB'C' a-t-il pour image le triangle BC'A'? Le triangle CA'B' ?

3°) Soit P l'intersection des droites (BB') et (CC'), Q l'intersection des droites (AA') et (CC'), R l'intersection des droites (AA') et (BB'). Démontrer que le triangle PQR est équilatéral.

EXERCICE 4



ABCD est un rectangle. Les droites (AE), (BE), (CG), (DG) sont les bissectrices respectives des angles $\widehat{DAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{CDA}$. Les droites (AE) et (DG) se coupent en H, les droites (BE) et (CG) se coupent en F.

1°) Démontrer que les triangles ABE et DGC sont superposables.

2°) Par quelle isométrie le triangle ABE a-t-il pour image le triangle DGC ?

3°) Démontrer que le quadrilatère EFGH est un carré.

CHAPITRE VI

ORDINATEUR ET TRANSFORMATIONS

A la fin de leur scolarité au collège, dans l'ensemble, les élèves savent construire les images des principales figures planes par les transformations qu'ils ont successivement étudiées.

Ils semblent beaucoup plus démunis lorsqu'ils sont confrontés à des problèmes nécessitant l'intervention des transformations. Il faut alors qu'ils reconnaissent des points **homologues**, des points **invariants**. Ils vont avoir besoin de considérer certains points comme intersection de deux **figures géométriques**. Ils vont être conduits à utiliser les **propriétés** des transformations. Ces différentes tâches sont loin d'être sans difficulté pour un élève.

Un logiciel comme CABRI-GEOMETRE peut apporter, semble-t-il, une aide à la compréhension de ces différentes notions. En effet, ce logiciel permet de visualiser le déplacement simultané d'un point et de son image par une transformation, dimension qui fait défaut lors du travail traditionnel sur un support papier.

Le travail présenté dans ce chapitre comporte quatre grands axes :

- la reconnaissance d'éléments homologues ;
- la découverte de points invariants ;
- le concept d'isométrie ;
- les figures géométriques engendrées par le déplacement d'un point.

Une fiche élève ainsi que la fiche professeur détaillée sont proposées pour chacun d'entre eux.

Grâce à la rapidité du travail effectué par l'ordinateur, plusieurs transformations sont observées en parallèle afin de pouvoir caractériser la transformation désirée. Par exemple, pour aborder la symétrie centrale, on pourra observer :

- une symétrie axiale qui possède une infinité de points invariants ;
- une symétrie oblique qui n'est pas une isométrie ;
- une symétrie glissée qui n'a pas de point invariant ;
- une composée homothétie - rotation car le centre, un point et son image ne sont pas alignés.

RECONNAISSANCE D'ÉLÉMENTS HOMOLOGUES

Le mouvement inhérent au logiciel permet d'animer simultanément les points ou les objets géométriques homologues.

La fiche I est un exemple du travail qui peut être mené avec n'importe quelle transformation connue ou inconnue des élèves.

A l'aide du logiciel une figure géométrique a été construite ainsi que son image par la transformation que l'on souhaite étudier. Toutes les constructions intermédiaires ont été cachées.

La fiche, copie de l'écran de l'ordinateur, est distribuée à chaque élève.

Grâce au mouvement effectué par chaque élève sur son ordinateur ou par l'un d'eux manipulant devant toute la classe, les élèves doivent repérer les points homologues et les nommer sur leur feuille. Il leur est demandé ensuite de décrire le mouvement de l'un des points en fonction du mouvement de son homologue.

POINTS INVARIANTS

Le mouvement permet de mettre en évidence et matérialiser le ou les points invariants.

La fiche II est un exemple de fiche alors distribuée à chaque élève.

Il est demandé dans un premier temps de déplacer l'un des points de façon qu'il soit confondu avec son image, puis de recommencer avec deux autres points. Le dernier point est alors déplacé de façon aléatoire afin de pouvoir émettre une conjecture quant au nombre de points invariants pour la transformation donnée.

Le travail de validation de la conjecture est fait grâce au logiciel :

- s'il y a un seul point invariant, trois des points sont déplacés afin qu'ils ne soient plus confondus avec leurs images, mais par contre il est demandé de tracer les segments formés par les différents points et leurs images afin de pouvoir décider si l'on peut placer sur la fiche II le point invariant de la transformation.
- s'il y a plusieurs points invariants qui semblent alignés, deux des points sont déplacés comme précédemment et il est demandé de tracer la droite passant par les deux points confondus avec leurs images ; la commande "lier un point à un objet" va alors permettre de vérifier que si un troisième point se trouve sur cette droite il est alors invariant. Il est demandé ensuite de relier chacun des points avec son image afin de pouvoir placer sur la fiche II les points invariants.

Pour que cette notion prenne sens et que certains théorèmes en acte erronés ne se mettent pas en place chez certains élèves, il est important d'étudier en parallèle avec la transformation souhaitée plusieurs autres transformations :

- une ne possédant pas de point invariant ;
- une ayant un point invariant non aligné avec chaque autre point et son image ;
- une avec plusieurs points invariants.

Il peut être intéressant de faire découvrir l'algorithme de construction grâce à la caractérisation des propriétés qui relient un point, son image et le ou les points invariants. Il est alors demandé de placer un point M quelconque sur la fiche II et de construire son image, puis d'expliquer par écrit quelles sont les constructions à exécuter. L'alternance du travail ordinateur et du travail papier crayon est indispensable pour qu'il y ait transfert de l'apprentissage. Chaque observation faite sur l'écran de l'ordinateur est retranscrite puis mise en acte.

ISOMÉTRIES

La rapidité du travail d'exploration conduit avec Cabri-géomètre va permettre de travailler sur plusieurs transformations lors d'une même séance. Il paraît intéressant de faire se côtoyer :

- des transformations connues par les élèves d'une classe donnée et la transformation nouvelle que l'on désire étudier ;
- des transformations contre-exemples des isométries comme la symétrie oblique ou l'homothétie si l'on se trouve au collège.

En effet, comment donner du sens à une notion si on ne peut pas la comparer ou la différencier d'une autre notion ?

Il est demandé pour chaque transformation proposée de mesurer les côtés et les angles des deux quadrilatères présents sur l'écran de l'ordinateur. Le mouvement des sommets génère très rapidement un grand nombre de cas de figures et chaque élève peut ainsi émettre des conjectures raisonnables.

Des critères vont donc pouvoir se mettre en place afin de décider du statut d'isométrie.

La fiche III est ensuite proposée afin de vérifier l'acquisition du concept.

ENSEMBLES DE POINTS

On peut s'interroger sur le sens qu'a pour un élève une phrase du genre : "l'image d'une droite est une droite par telle transformation". Bien entendu la plupart d'entre eux connaissent la rengaine, mais le concept d'ensemble de points est très difficile à concevoir pour eux.

Le mouvement inhérent au logiciel Cabri-géomètre, et les commandes "trace" ou "lieu de points" vont apporter ici une aide précieuse avec la visualisation de la construction point par point.

La fiche IV est un exemple de document qui peut être distribué à chaque élève.

Le travail commence par des observations afin d'émettre des conjectures quant au déplacement d'un point alors que son homologue décrit un segment, une droite ou un cercle.

Chaque élève est invité à noter sa conjecture sur la fiche, puis le travail de vérification est effectué avec le logiciel ; on demande le tracé du point considéré avec la commande mentionnée précédemment et ce tracé s'effectue point par point.

Il est ensuite demandé d'expliquer la façon qui paraît la plus rapide pour obtenir l'image d'une droite, l'image d'un segment, puis l'image d'un cercle.

Un bilan est ensuite fait pour comparer les stratégies proposées et pour les justifier , c'est alors l'occasion d'utiliser les différentes propriétés institutionnalisées.

Il est intéressant de noter la surprise des élèves quand ils découvrent l'effet de la symétrie oblique sur un cercle. Cela permet de faire un travail de réinvestissement intéressant sur la caractérisation du cercle et sur la signification de l'isométrie.

On peut penser que ces différentes activités aideront les élèves à matérialiser la présence d'une transformation lorsqu'ils seront en présence des figures figées comme on les trouve dans les livres. Ils auront un vécu qui leur permettra de pouvoir imaginer le mouvement.

FICHE I - Professeur

POINTS HOMOLOGUES

Organisation de la classe

Les élèves travaillent par groupe de 4. Ils observent ce qui se passe sur l'écran de télévision qui est relié à un seul ordinateur.

Les manipulations de l'ordinateur sont effectuées par un élève à tour de rôle. Chaque élève dispose de la fiche I élève qui est la copie de l'écran de l'ordinateur au début de l'activité.

La fiche I élève qui suit propose une copie d'écran pour une symétrie glissée.

Travail ordinateur	Travail papier crayon
Exercice 1 Un élève déplace l'un des points de la figure *F*, ce qui va permettre d'animer de façon concomitante le point homologue de la figure *F'*. Il nomme le point homologue. Avant le bilan le professeur prendra soin de mettre la figure *F* dans une position comparable à celle de la fiche possédée par les élèves. **Exercice 2** Un élève déplace le point A tantôt vers la droite de l'écran, puis vers la gauche, tantôt vers le bas de l'écran, puis vers le haut.	**Exercice 1** Chaque élève grâce à l'observation de ce qui se passe sur l'écran nomme les différents points de la figure *F'*. Le groupe confronte ses réponses et se met d'accord pour pouvoir répondre lors du bilan collectif qui suit. **Exercice 2** Chaque élève à la suite de l'observation complète les phrases. Le groupe confronte ses réponses avant le bilan collectif.

FICHE I - Élève

POINTS HOMOLOGUES

EXERCICE 1

En observant quel est le point qui se déplace en même temps qu'un point donné, trouve quel est le point homologue de A, tu le nommeras A'. Fais de même avec les points B, C et D.

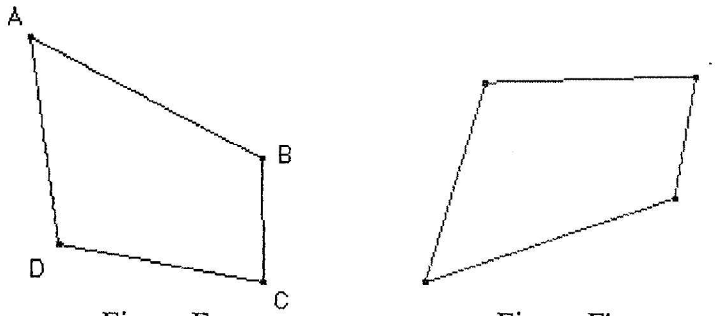


Figure F Figure F'

EXERCICE 2

Décris le mouvement de A' quand le point A se déplace.

Quand A se déplace vers la droite de l'écran, A' se déplace..

Quand A se déplace vers la gauche de l'écran, A' se déplace..

Quand A se déplace vers le haut de l'écran, A' se déplace ....

Quand A se déplace vers le bas de l'écran, A' se déplace..

FICHE II - Professeur

POINTS INVARIANTS

Organisation de la classe

Les élèves travaillent par groupe de 4. Ils observent ce qui se passe sur l'écran de télévision qui est relié à un seul ordinateur.

Les manipulations de l'ordinateur sont effectuées par un élève à tour de rôle.

Sur l'écran se trouvent à présent les figures *F* et *F'* munies des noms des différents points .

Chaque élève a devant lui la fiche II élève copie de l'écran du début de l'activité.

La fiche II élève qui suit propose une copie d'écran pour une symétrie orthogonale.

Travail ordinateur	Travail papier crayon
Exercice 1 Un élève vient essayer de superposer A et A', puis B et B', C et C' et enfin D et D '.	**Exercice 1** Chaque élève émet une 1ère conjecture quant au nombre de points invariants sur la fiche I.
Exercice 2 S'il y a un seul point invariant, un élève vient déplacer B, C et D pour que leurs points homologues apparaissent et laisse cependant A et A' confondus. S'il y a plusieurs points invariants, un élève vient déplacer C et D pour que leurs points homologues apparaissent et laisse A et A' confondus ainsi que B et B'. Il trace alors la droite passant par A et B puis le point C est lié à cette nouvelle droite. Le point C est alors déplacé de même que le point D.	**Exercice 2** Chacun d'entre eux est invité à affiner la conjecture émise précédemment, puis un bilan collectif a lieu.

Travail ordinateur	Travail papier crayon
Exercice 3 Un élève vient délier le point C de la droite (AB), puis il déplace C et D de façon qu'ils ne soient pas confondus avec leurs images sur l'écran. Il trace ensuite les segments [CC'] et [DD']. A la demande d'élèves de la classe des angles ou des segments peuvent être mesurés pour affiner l'observation.	**Exercice 3** Chaque élève doit construire, s'il a suffisamment d'informations, les points invariants de la transformation sur la fiche II. Un bilan collectif est fait.
Exercice 4 Un élève vient mettre en gras ou en couleur tous les points invariants par la transformation.	**Exercice 4** Chaque élève place un point quelconque sur la fiche I qu'il nomme M, puis il lui est demandé de construire son image M ' par la même transformation et d'écrire le programme de construction utilisé.

FICHE - II Élève

POINTS INVARIANTS

EXERCICE 1

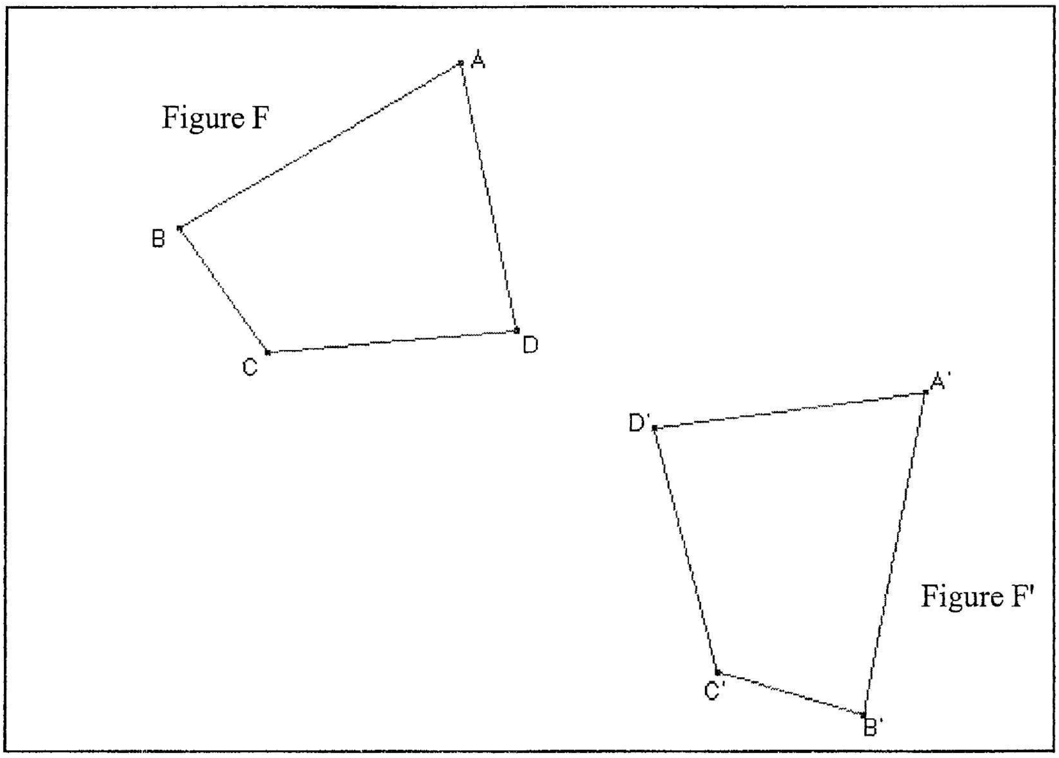
Combien de points invariants semble posséder cette transformation ?

EXERCICE 2

Affine la conjecture émise précédemment.

EXERCICE 3

En observant sur l'écran les positions relatives des différents points, placer le ou les points invariants par la transformation étudiée. Laisser apparents les traits de construction nécessaires.



EXERCICE 4

Placer un point M quelconque, et tracer son image par la transformation étudiée.
Écrire le programme de construction nécessaire pour obtenir cette image.

FICHE III - Professeur

ISOMETRIES

Organisation de la classe

Les élèves travaillent par groupe de 4. Ils observent ce qui se passe sur l'écran de télévision qui est relié à un seul ordinateur.

Les manipulations de l'ordinateur sont effectuées par un élève à tour de rôle.

Sur l'écran se trouvent à présent les figures *F* et *F'* munies des noms des différents points.

Chaque élève a devant lui la fiche II élève copie de l'écran du début de l'activité.

Travail ordinateur	**Travail papier crayon**
Exercice 1 Un élève vient faire mesurer par le logiciel les longueurs des côtés du quadrilatère F, puis celles du quadrilatère F'. Les angles des deux figures sont ensuite marqués et mesurés. **Exercice 2** Un élève vient déplacer l'un après l'autre les différents sommets de la figure F.	**Exercice 1** Après observation, chaque élève émet sur son cahier de nouvelles conjectures concernant la transformation étudiée. **Exercice 2** Chacun vérifie que sa conjecture reste valable à la suite du mouvement.

Un bilan collectif a lieu, mettant en évidence les critères de reconnaissance d'une isométrie.

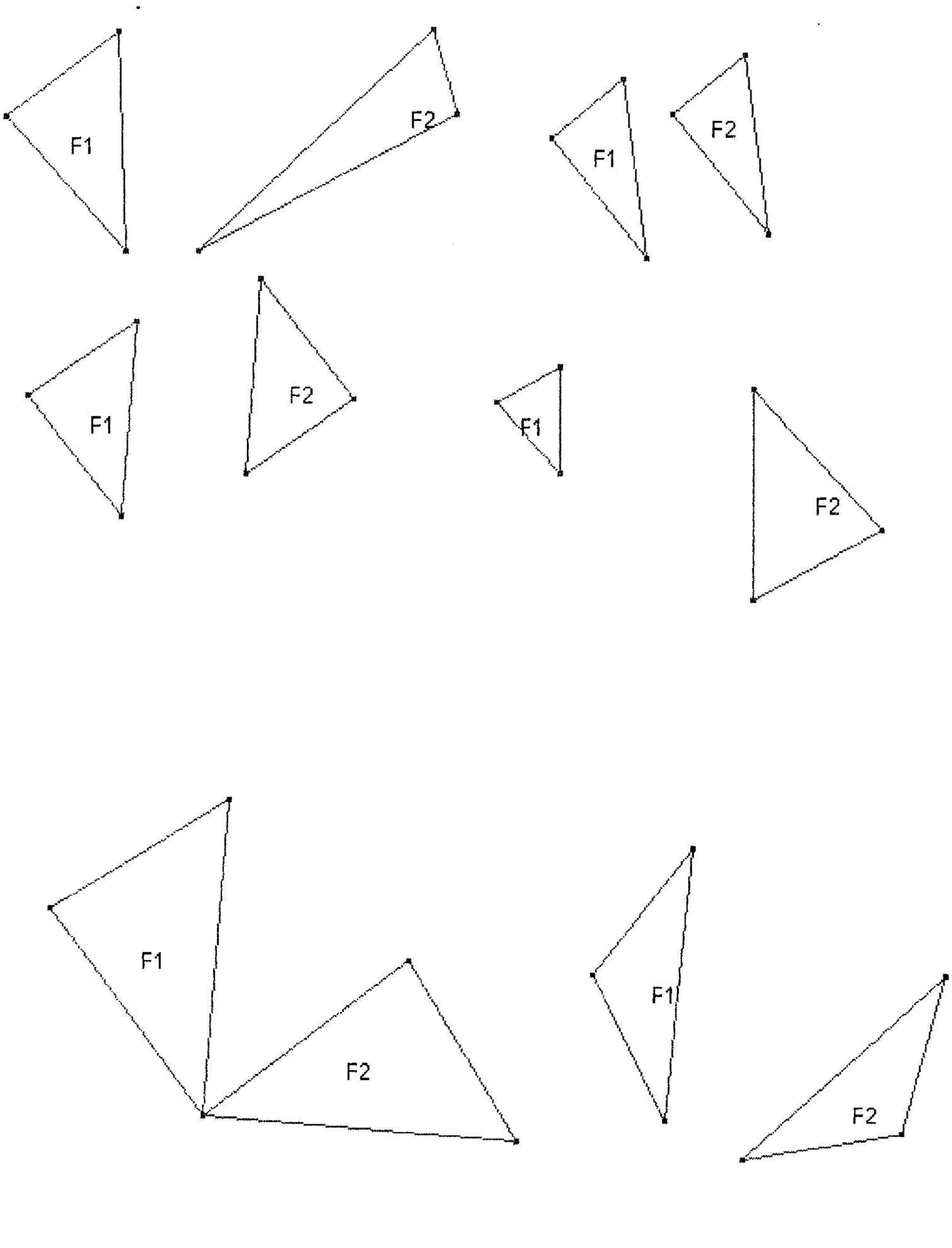
Lors d'une autre séance, **la fiche III élève** sera distribuée à chaque élève afin de vérifier que le concept d'isométrie a été compris.

FICHE III - Élève

ISOMÉTRIES

EXERCICE

Reconnaître si F1 et F2 sont isométriques dans chacun des cas. Expliquer votre réponse.



FICHE IV - Professeur

ENSEMBLES DE POINTS

Organisation de la classe

Les élèves travaillent par groupe de 4. Avant cette activité, la transformation étudiée a été caractérisée. Ils observent ce qui se passe sur l'écran de télévision qui est relié à un seul ordinateur.

Les manipulations de l'ordinateur sont effectuées par un élève à tour de rôle.

Sur l'écran se trouvent à présent les figures *F* et *F'* munies des noms des différents points.

Chaque élève a devant lui la fiche II élève copie de l'écran du début de l'activité et la fiche IV élève.

Travail ordinateur	**Travail papier crayon**
Exercice 1 Un élève vient construire un segment à l'extérieur des deux figures et lier A à ce segment. Il déplace A de façon qu'il décrive tout le segment et les élèves observent le mouvement de A'.	**Exercice 1** Chaque élève émet une conjecture quant à la figure géométrique décrite par A' lors du déplacement de A. Le travail de groupe permet de préciser la conjecture avant un premier bilan oral.
Exercice 2 Un élève vient utiliser la commande "trace" et demande à l'ordinateur de laisser la trace des différentes positions de A' sur l'écran lorsque A se déplace.	**Exercice 2** Les conjectures sont alors validées par l'observation de l'écran de l'ordinateur. Chaque élève propose la stratégie qui lui paraît la plus performante pour faire la construction proposée.

Le même travail est ensuite recommencé avec une droite, puis avec un cercle.

FICHE IV - Élève

ENSEMBLES DE POINTS

EXERCICE 1

Après observation de ce qui se passe sur l'écran de l'ordinateur, complète la conjecture que tu peux faire:

Quand A se déplace sur un segment, A' semble décrire...

Quand A se déplace sur une droite, A' semble décrire...

Quand A se déplace sur un cercle, A' semble décrire..

EXERCICE 2

Écrire un programme de construction permettant d'obtenir l'image d'un segment par la transformation étudiée.

Écrire un programme de construction permettant d'obtenir l'image d'une droite par la transformation étudiée.

Écrire un programme de construction permettant d'obtenir l'image d'un cercle par la transformation étudiée.

CHAPITRE VII

ISOMETRIES ET PAVAGES

I - LES PAVAGES

D'une façon générale, paver le plan, c'est le recouvrir complètement sans chevauchement.

Dans l'étude des transformations, il est intéressant de considérer les pavages du plan par des polygones réguliers. On utilise des pavages respectant deux conditions :

- un sommet d'un polygone n'est en contact qu'avec des sommets d'autres polygones ;
- on retrouve la même configuration autour de chaque sommet.

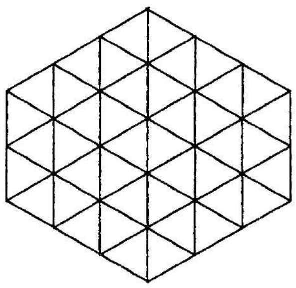
Sous ces conditions, on démontre qu'on ne peut réaliser que trois types de pavages utilisant un seul polygone régulier et huit types de pavages utilisant plusieurs polygones réguliers ; ces pavages sont dits réguliers et semi-réguliers.

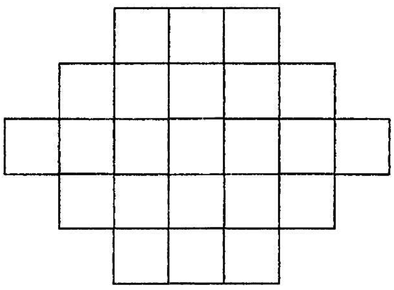
Ces pavages possèdent la propriété d'être invariants par deux translations dont les vecteurs ont deux directions différentes ; on peut remarquer que de nombreux pavages qui possèdent cette propriété ne sont pas réguliers ni semi-réguliers.

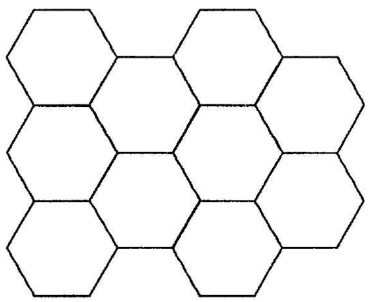
L'intérêt des pavages de ces deux types dans l'étude des transformations est qu'ils permettent de mettre en évidence les isométries sur des figures familières : carrés, triangles......

On montre ci-après les dessins des trois pavages réguliers et des huit pavages semi-réguliers.

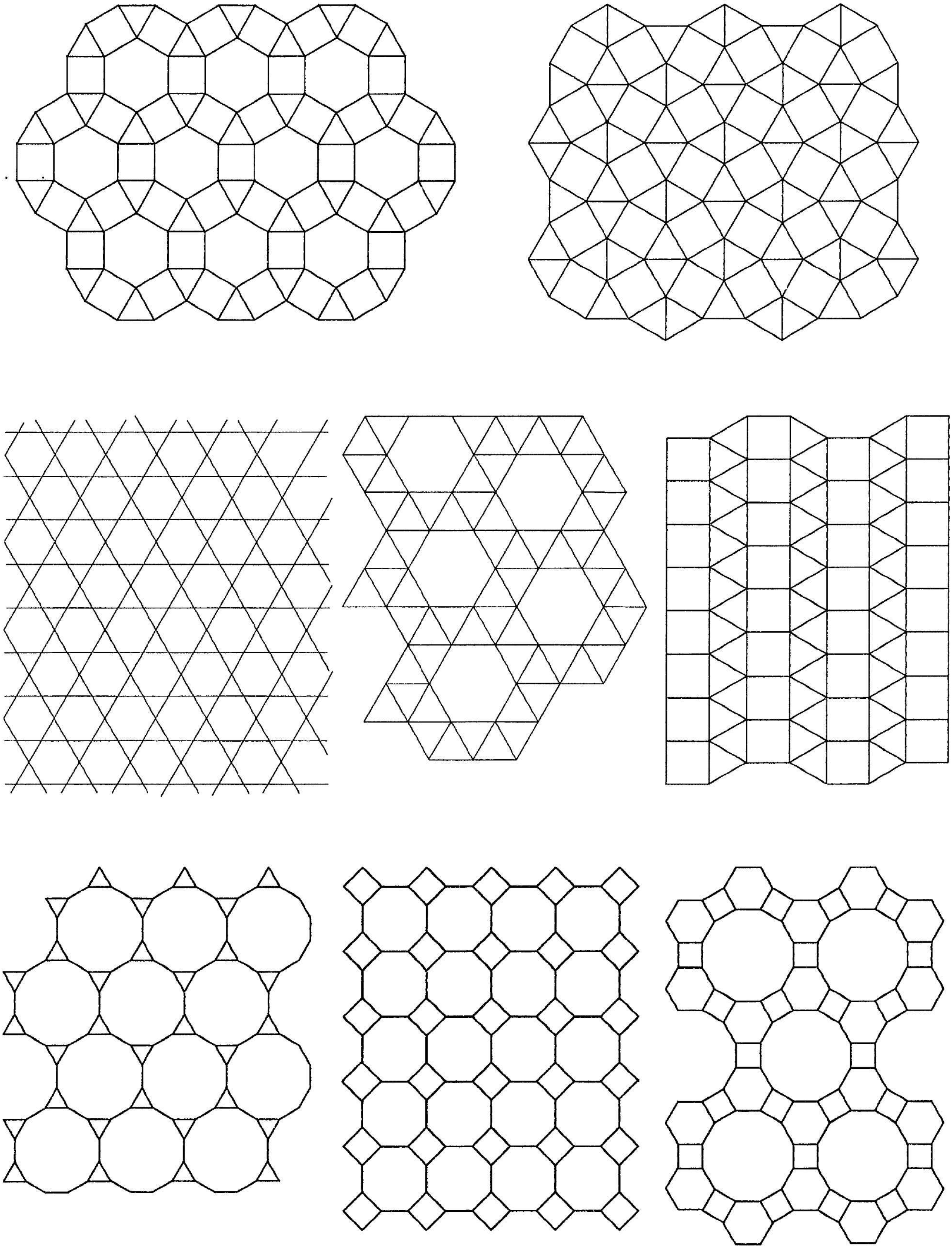
a) Les trois pavages réguliers







b) Les huit pavages semi-réguliers



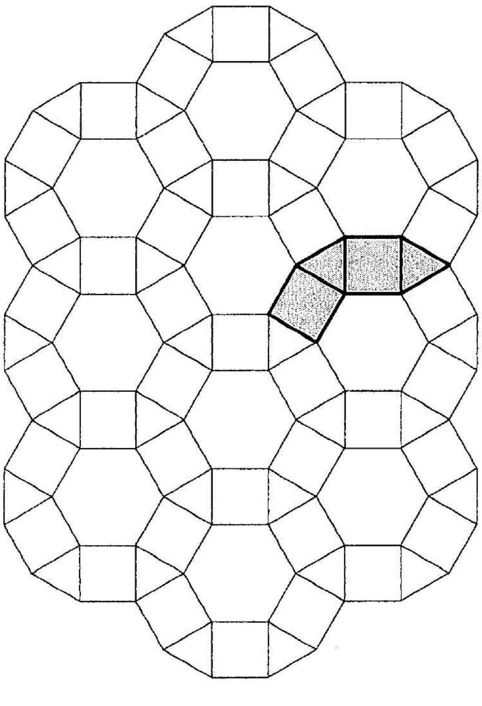
II - LES MOTIFS

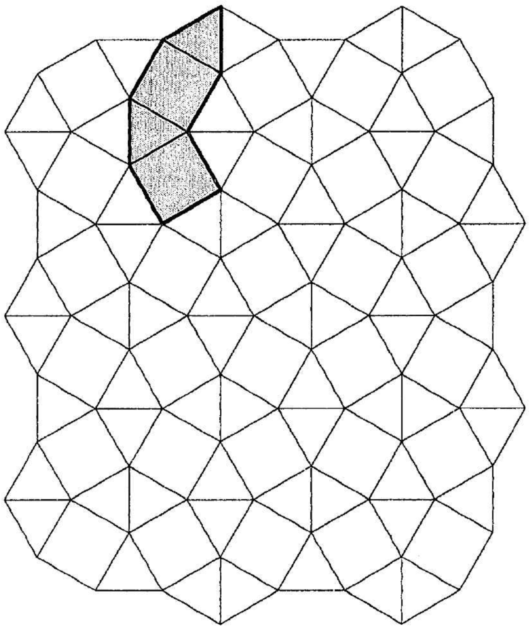
De par leurs propriétés de répétition, les pavages constituent une structure du plan que nous pouvons utiliser comme cadre de travail sur les isométries ; pour cela, nous sommes amenés à considérer dans le pavage un motif, c'est-à-dire un polygone formé par la réunion de plusieurs polygones réguliers adjacents, et que nous pourrons retrouver sur le pavage.

Pour être pédagogiquement efficace, il nous semble important que le motif remplisse deux conditions :

- être ni trop simple, ni trop compliqué ;
- ne pas présenter de centre ou d'axe de symétrie.

Les conditions nous ont amené à utiliser deux pavages semi-réguliers dont les dessins et les motifs sont donnés ci-après.





III - LES ACTIVITÉS

Les pavages nous permettent de familiariser les élèves avec les isométries en utilisant les pavages semi-réguliers comme support. Ils présentent un avantage majeur, à savoir que la figure image par la transformation n'est pas tracée, mais les segments constituant cette figure le sont, et de plus, la régularité garantit l'isométrie. L'élève n'a pas de nouveau tracé à réaliser, il lui suffit de découvrir sur le dessin les sommets et les côtés qui vont lui donner l'image cherchée.

De plus, la recherche de l'isométrie associant deux motifs donnés amène à la notion d'axe et de centre de symétrie, et d'une façon générale, à la mise en évidence d'une transformation associant deux figures isométriques.

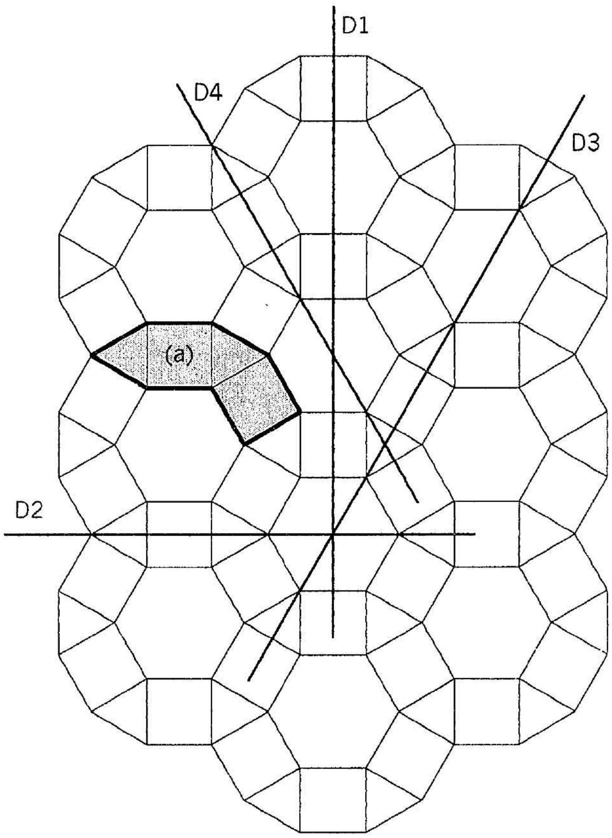
Enfin, le fait que l'image d'un motif soit contenue dans le pavage facilite la mise en œuvre de successions d'isométries et permet l'introduction des produits d'isométries. L'élève peut suivre les différentes étapes avant d'aboutir à l'image finale.

En conclusion, les activités proposées dans ce chapitre utilisent le fait que les pavages structurent le plan d'un maillage très précis qui permet, avec un minimum de constructions usuelles, d'associer par des isométries ou des produits d'isométries des polygones choisis comme motifs. Dans ces activités, les constructions de base des isométries disparaissent au profit d'un guidage visuel très précis. L'élève peut s'exprimer sur les transformations dans un cadre expérimental, ce qui n'exclut pas le recours éventuel aux algorithmes de définition des transformations et aux instruments.

IV - LA PRATIQUE

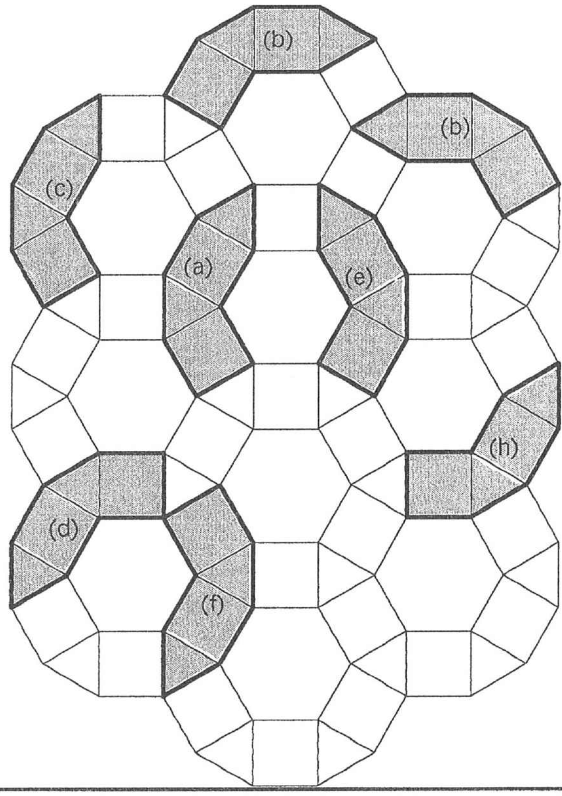
Pour utiliser ces fiches, il faut à priori expliquer aux élèves ce qu'est un pavage et un motif dans un pavage.

On leur propose ensuite deux types de fiches :

<table>
<tr><th colspan="2">FICHE TYPE I</th></tr>
<tr><td>On considère un pavage et un motif dans ce pavage ; l'activité consiste à mettre en évidence dans le pavage les transformés du motif par des isométries, et à justifier leurs positions.</td><td>
</td></tr>
</table>

FICHE TYPE II

On considère un pavage et plusieurs motifs isométriques ; l'activité consiste à trouver l'isométrie ou le produit d'isométries qui associent ces motifs.



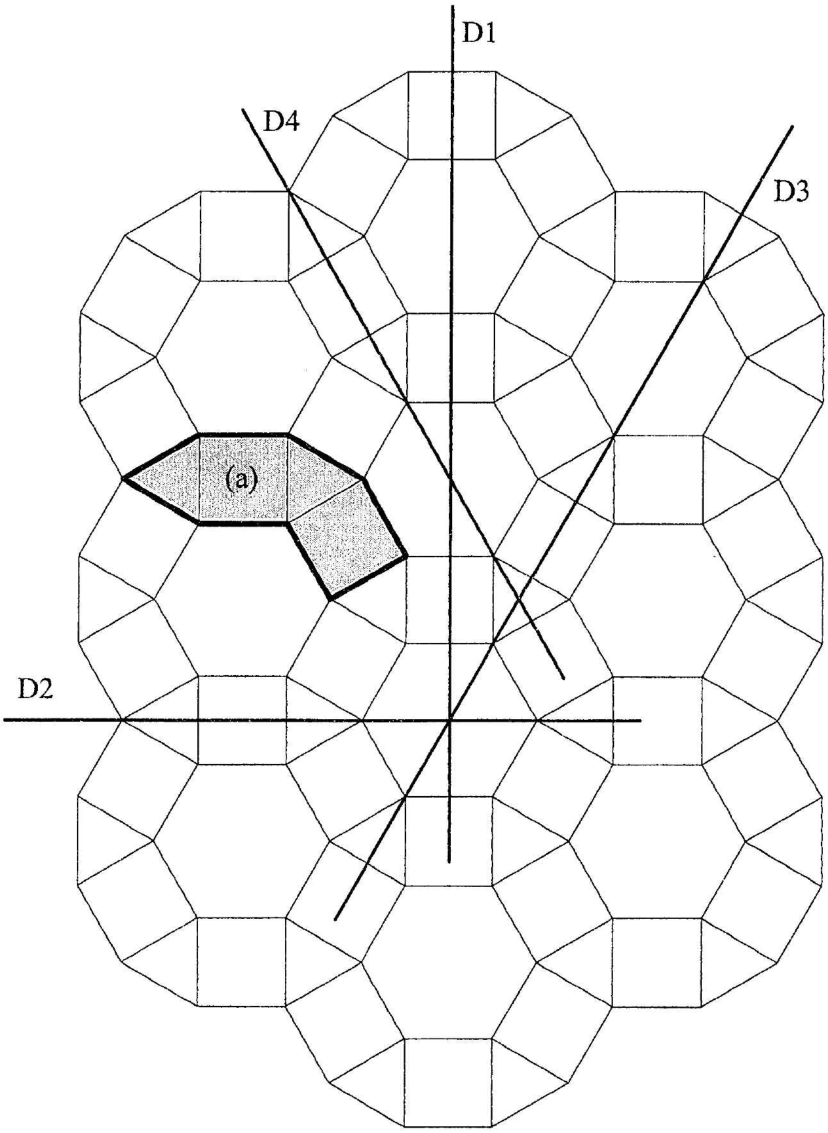
Il est à remarquer que ces activités ne se limitent pas à la mise en évidence de figures ou de transformation, mais trouvent leur intérêt dans les justifications fournies par les élèves.

Enfin, les activités suivantes peuvent être proposées aussi bien au collège qu'en seconde où elles constituent un panorama très utile pour un rappel et une mise en ordre des notions élémentaires et fondamentales sur les isométries.

ACTIVITE 1

Colorier la figure transformée de la figure (a) par :

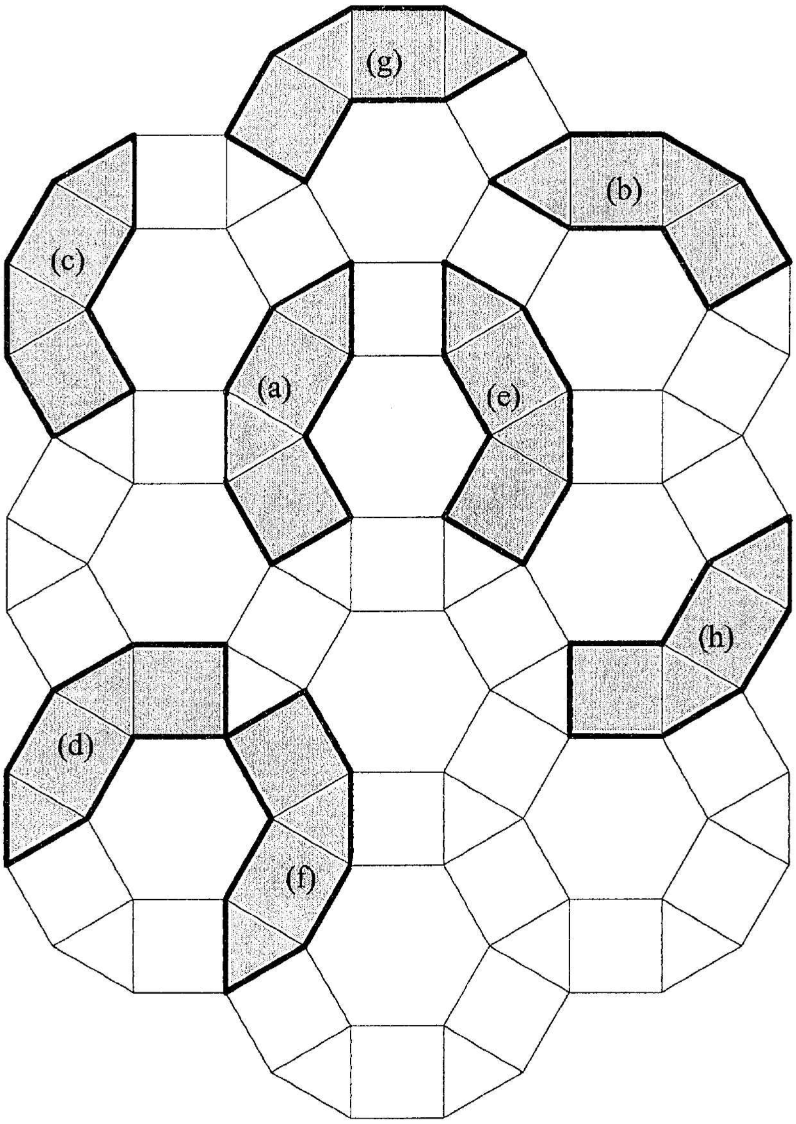
1°) La symétrie par rapport à la droite D1; on la notera (b).
2°) La symétrie par rapport à la droite D2; on la notera (c).
3°) La symétrie par rapport à la droite D3; on la notera (d)
4°) La symétrie par rapport à la droite D4; on la notera (e).



ACTIVITE 2

Toutes les figures dessinées sont superposables car elles sont formées avec les mêmes éléments de base assemblés de la même façon.

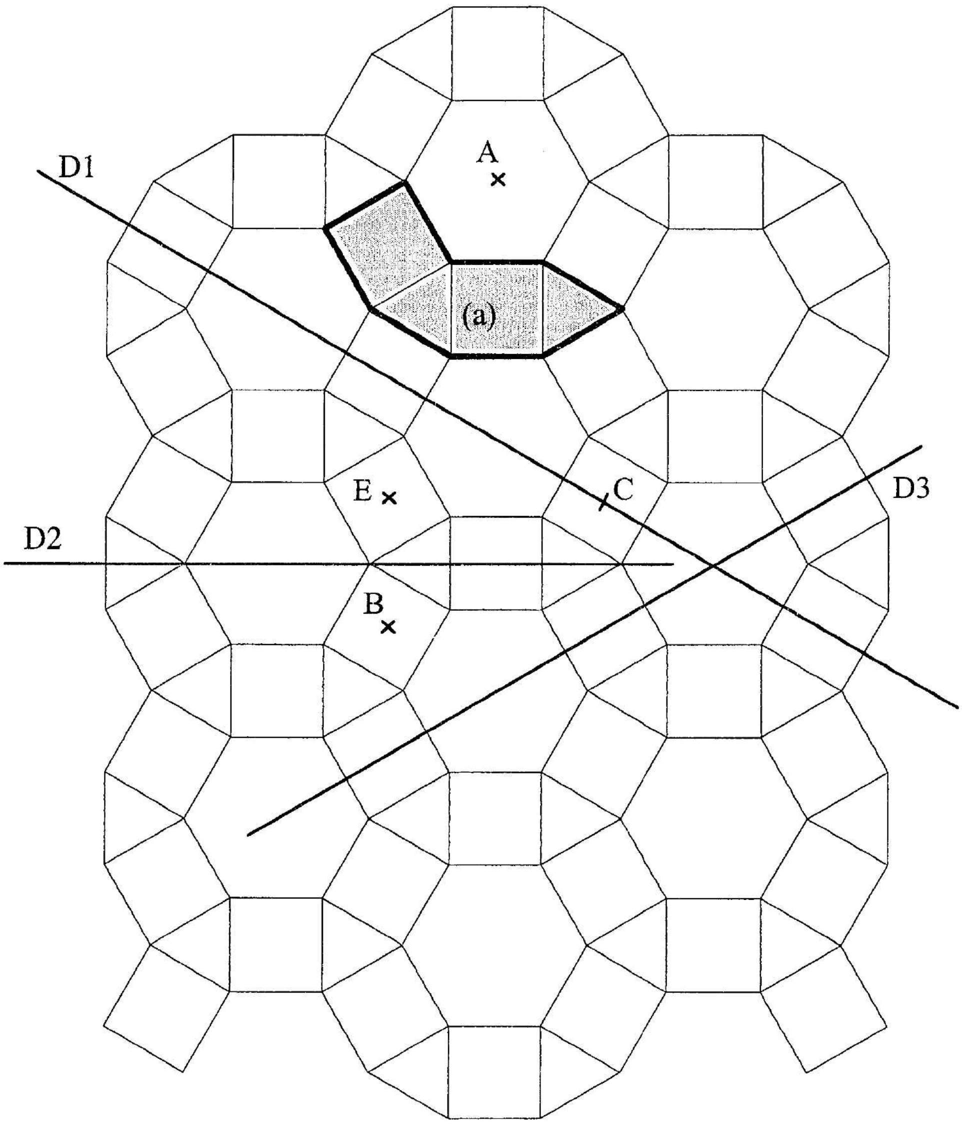
On considère la figure (a) formée de deux carrés et de deux triangles équilatéraux. Chercher s'il existe une symétrie axiale permettant de passer de (a) à (b) ; si c'est le cas, tracer en couleur la droite D5 axe de cette symétrie. Effectuer la même recherche, toujours à partir du motif (a), en essayant de passer à (c), à (d), ...etc....



ACTIVITE 3

Colorier la figure transformée de la figure (a) par la symétrie par rapport :

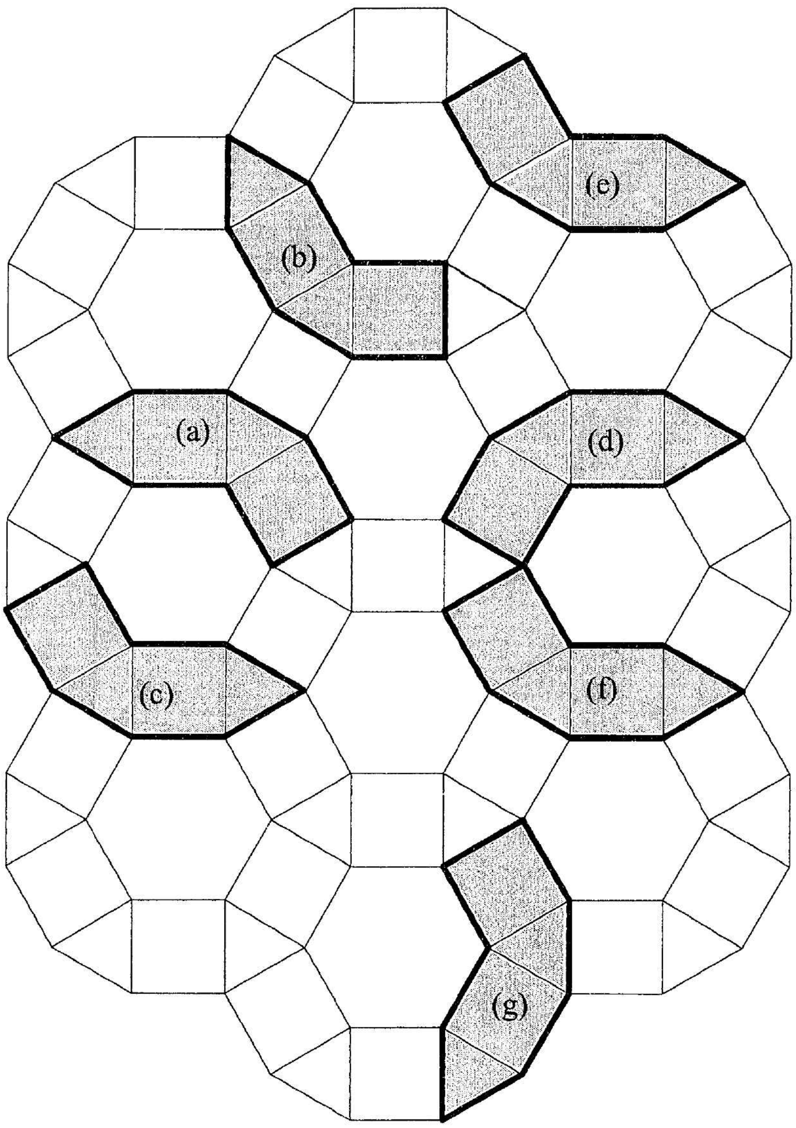
1°) À la droite D1 ; on la notera (b).
2°) À la droite D2 ; on la notera (c).
3°) À la droite D3 ; on la notera (d).
4°) Au point A ; on la notera (e).
5°) Au point B ; on la notera (f).
6°) Au point C ; on la notera (g).
7°) Au point E ; on la notera (h).



ACTIVITE 4

Par quelle symétrie passe-t-on : de la figure(a) à la figure (b) ?
de (a) à (c) ?
de (a) à (d) ?
de (a) à (e) ?
de (a) à (f) ?
de (a) à (g) ?

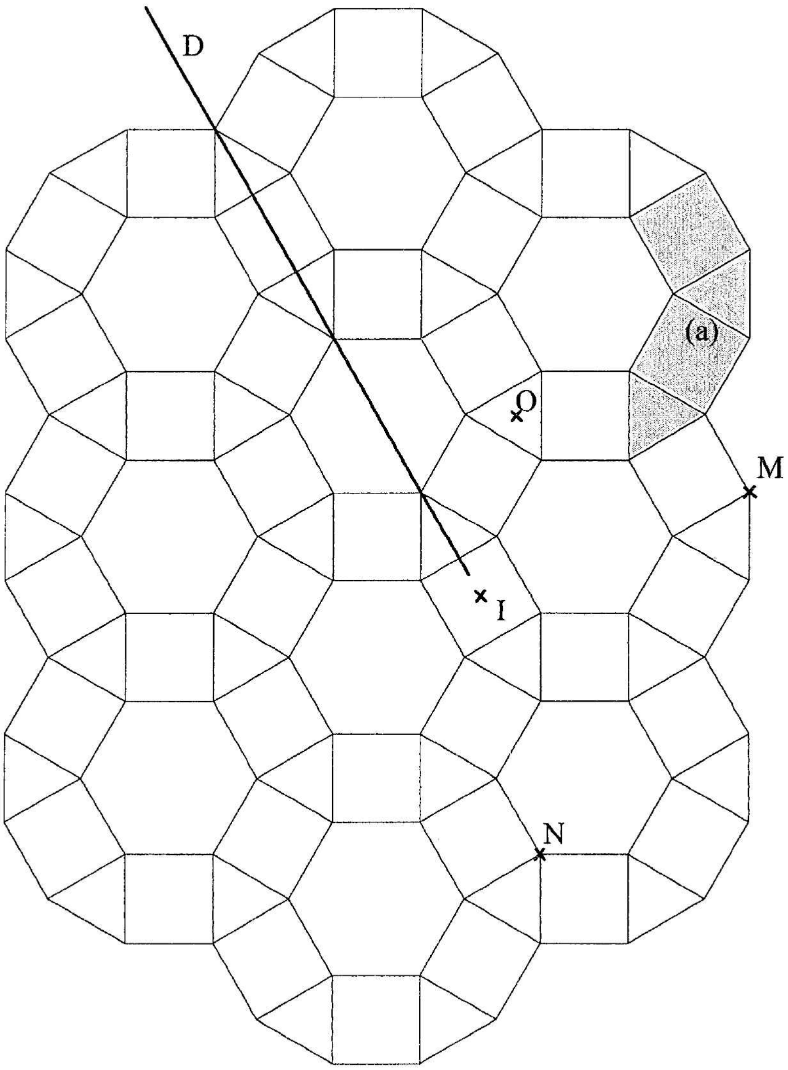
On tracera et on nommera dans chaque cas l'axe ou le centre de la symétrie.



ACTIVITE 5

Mettre en évidence en utilisant des couleurs différentes :

1°) L'image (b) de la figure (a) par la symétrie de centre I.
2°) L'image (c) de la figure (a) par la symétrie d'axe D.
3°) L'image (d) de la figure (a) par la rotation de centre O et d'angle 120° de sens direct.
4°) L'image (e) de la figure (a) par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$.

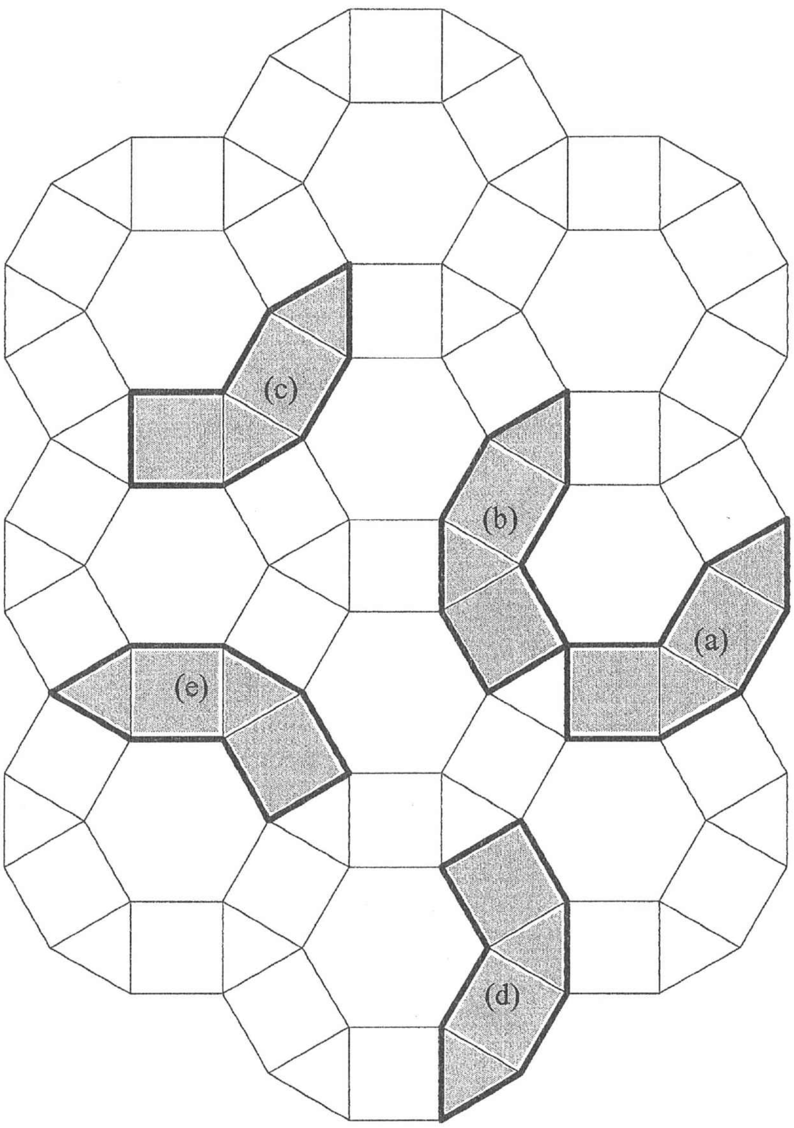


ACTIVITE 6

Par quelle transformation géométrique étudiée précédemment peut-on passer :

1°) De la figure (b) à la figure (a) ?
2°) De la figure (b) à la figure (d) ?
3°) De la figure (a) à la figure (c) ?
4°) De la figure (a) à la figure (e) ?

Tracer et nommer les éléments qui les caractérisent.

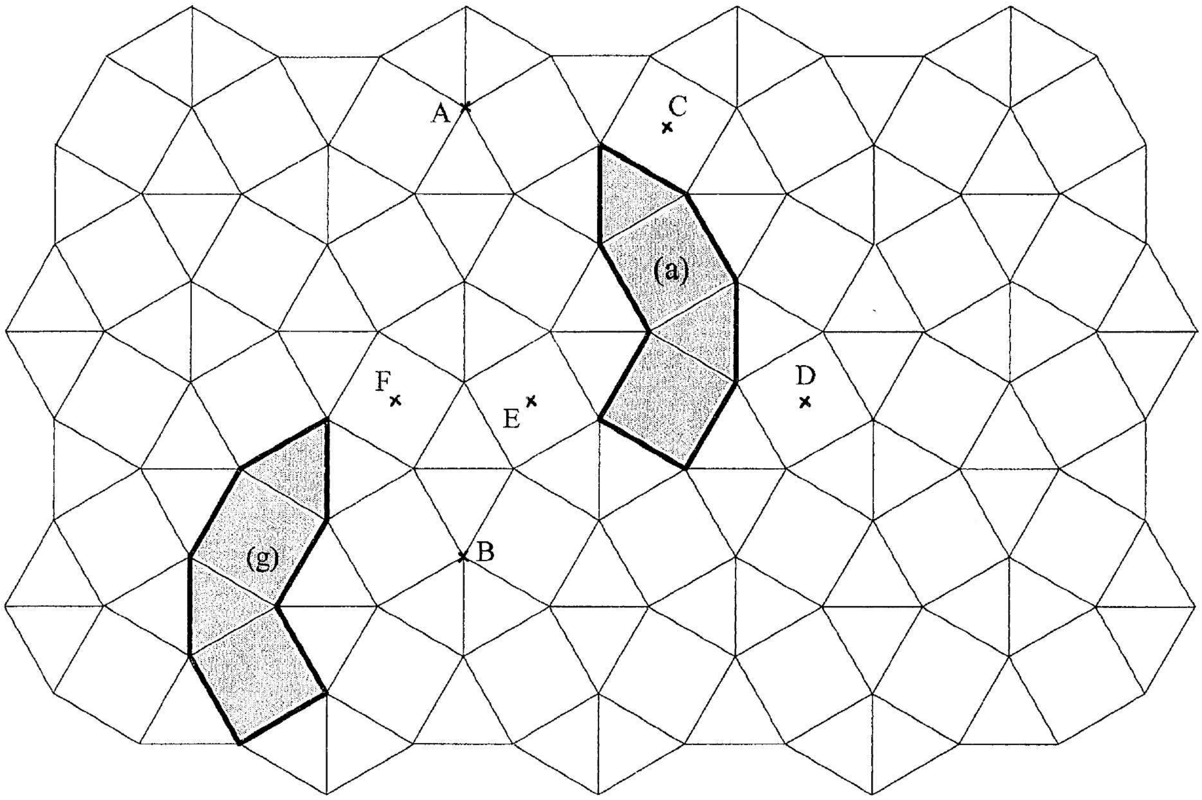


ACTIVITE 7

Mettre en évidence en utilisant des couleurs différentes :

1°) L'image du motif (a) par la symétrie de centre D et marquer (b) sur le dessin obtenu.
2°) Le motif (c) symétrique de (a) par rapport à la droite (AB).
3°) L'image (d) de la figure (a) par la rotation de centre C et d'angle 90° de sens direct.
4°) Le translaté (e) de (a) par la translation de vecteur $\overrightarrow{CF}$.
5°) L'image (f) de (a) par la rotation de centre E et d'angle 90° de sens indirect.

Peut-on passer de (a) à (g) par une des quatre transformations étudiées en classe ? Sinon, trouver une succession de deux transformations amenant (a) sur (g).



ACTIVITE 8

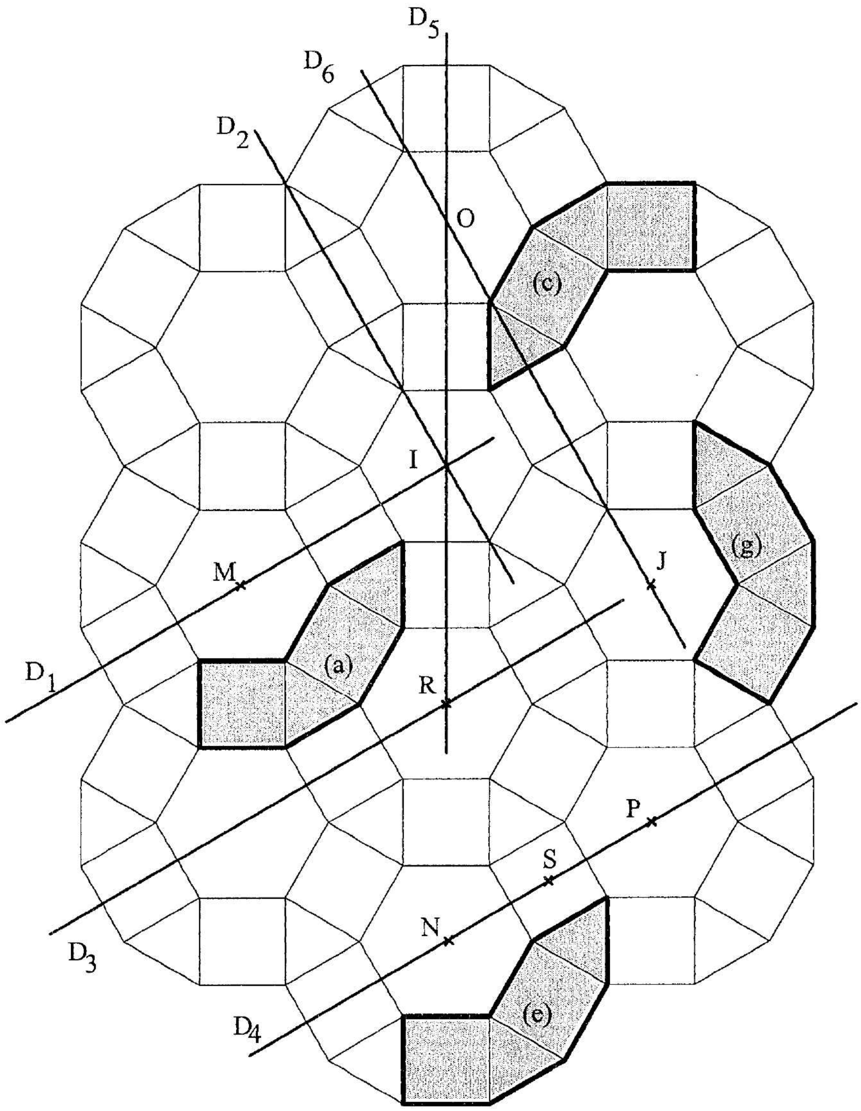
On considère le motif (a) formé de deux carrés et de deux triangles équilatéraux.

1°) Par quelle transformation passe-t-on de (a) à (c) ?
Mettre en évidence le symétrique (b) de (a) par rapport à D_1, puis le symétrique de (b) par rapport à D_2. Que remarquez-vous ? Justifiez ce résultat.

2°) Par quelle transformation passe-t-on de (a) à (e) ?
Mettre en évidence le symétrique (d) de (a) par rapport à D_3 puis le symétrique de (d) par rapport à D_4. Que remarquez-vous ? Justifiez ce résultat.

3°) Mêmes questions pour le passage de (a) à (g) avec les symétries par rapport aux droites D_5 et D_6.

4°) Mêmes questions enfin pour le passage de (a) à (e) avec les symétries par rapport aux points R et S.



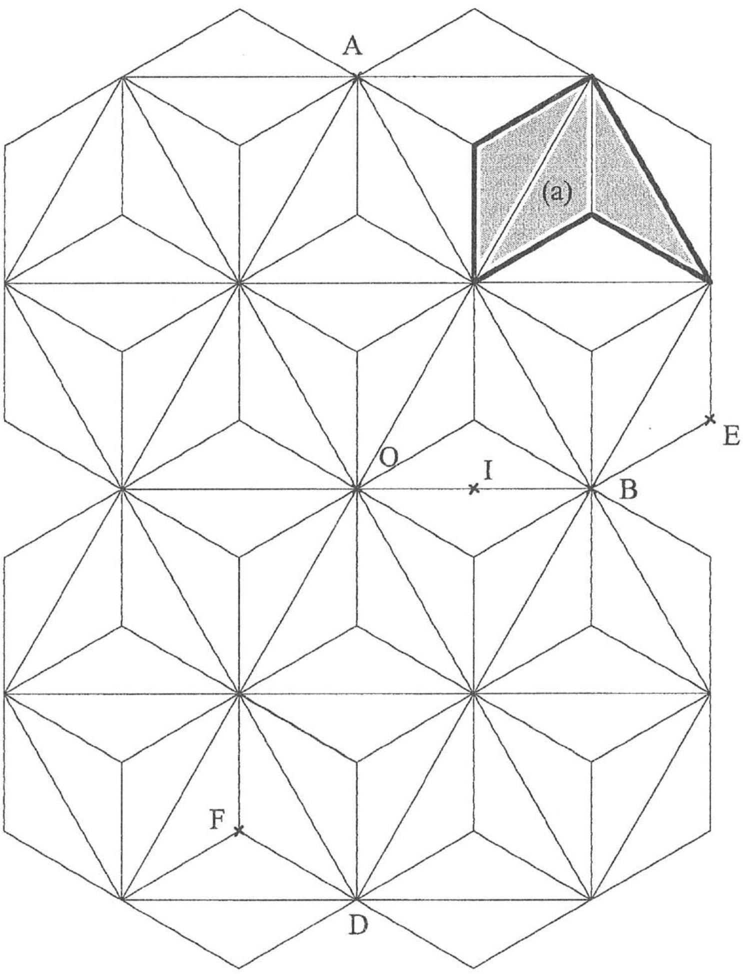
ACTIVITE 9

Dans le pavage fourni, qui n'est pas semi-régulier, tous les petits triangles sont isocèles et superposables ; avec trois de ces triangles, on a fabriqué le motif (a).

1°) Mettre en évidence en utilisant des couleurs différentes :

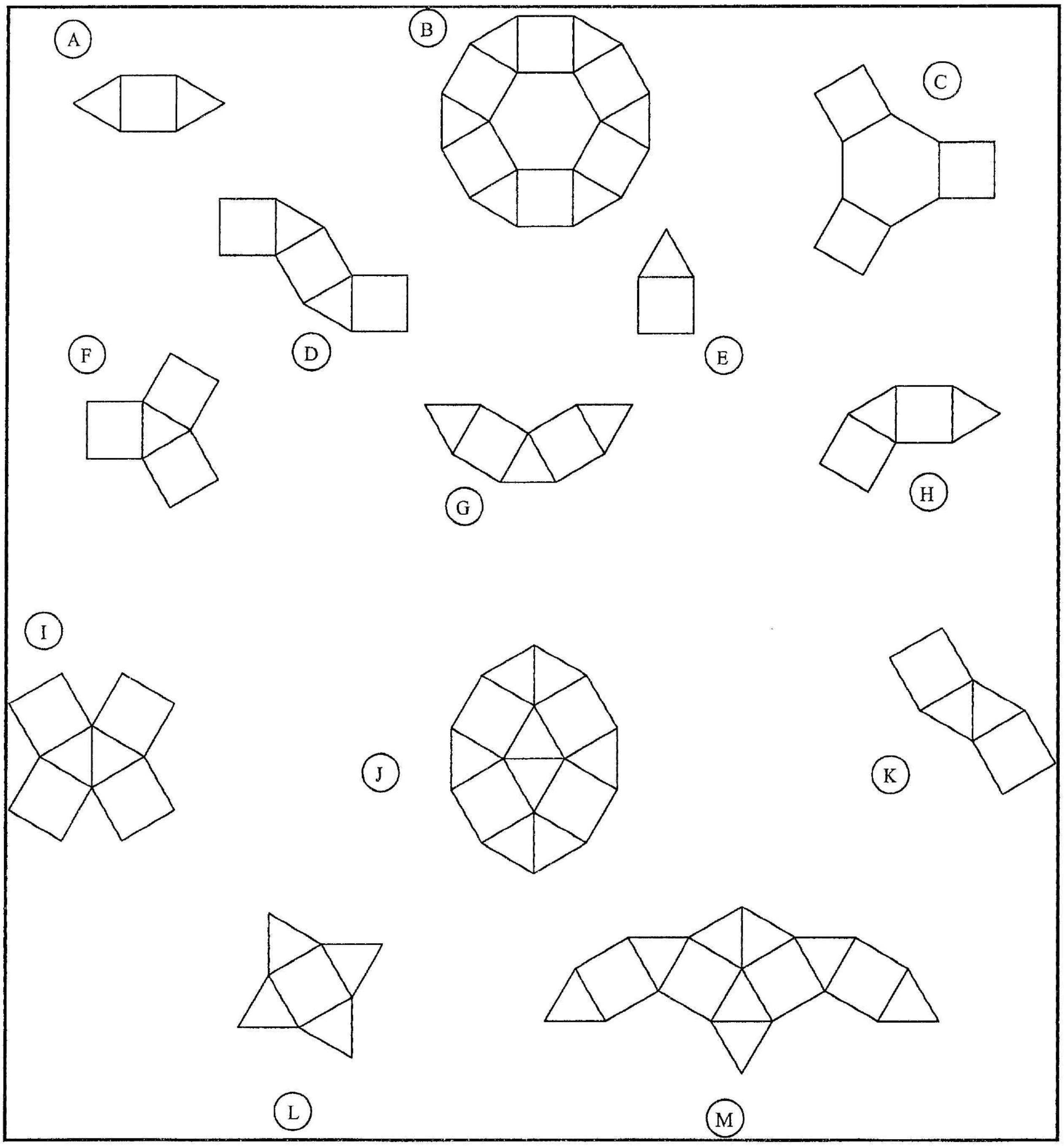
- l'image (b) de la figure (a) dans la symétrie par rapport à la droite (AB).
- l'image (c) de la figure (a) par la symétrie de centre I.
- l'image (d) de la figure (a) par la rotation de centre O et d'angle 60° de sens direct.
- l'image (e) de la figure (a) par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$.
- l'image (f) de la figure (a) par la rotation de centre O et d'angle 120° de sens indirect.

2°) Expliquer pourquoi on peut passer directement de (d) à (f) par la symétrie de centre O.

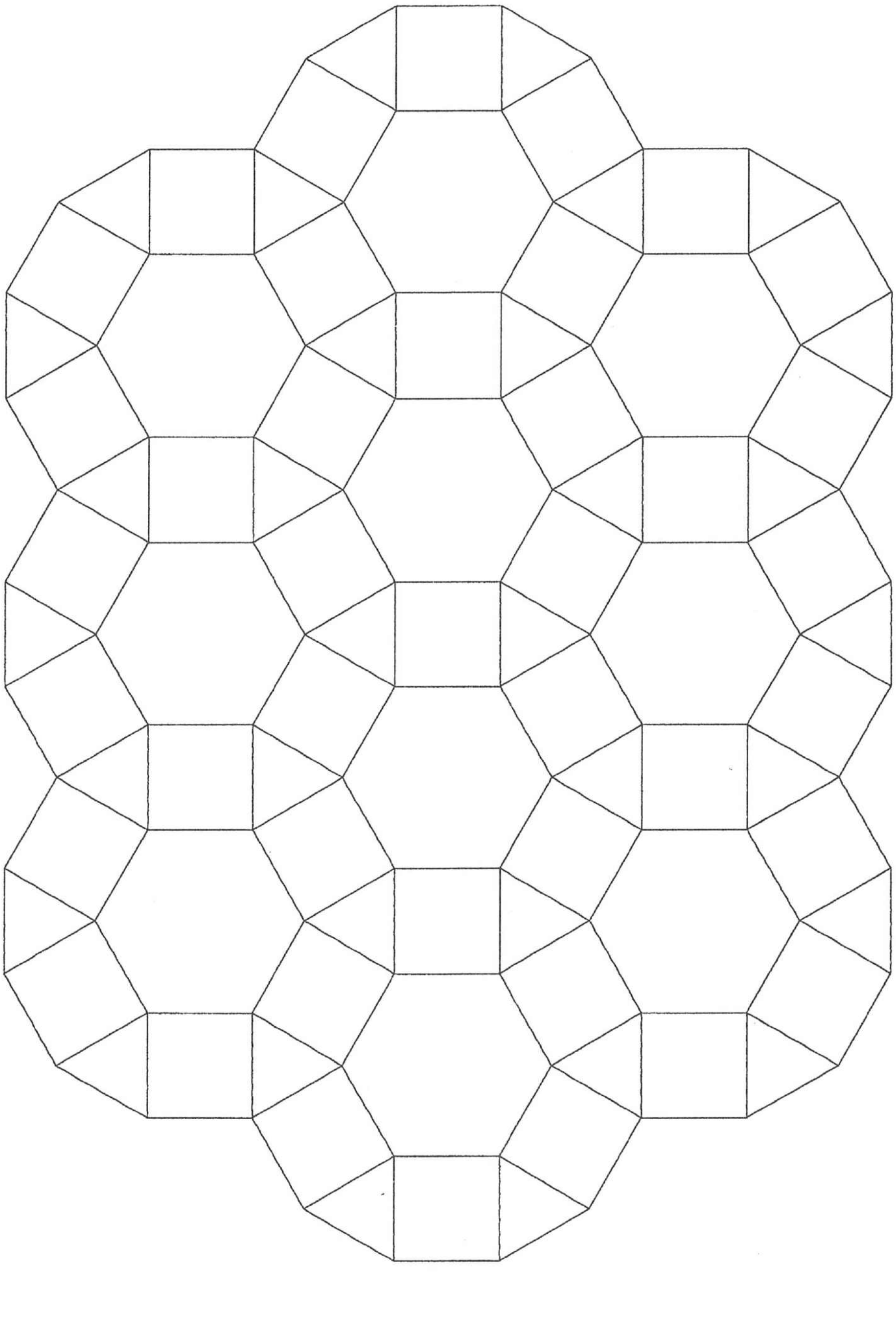


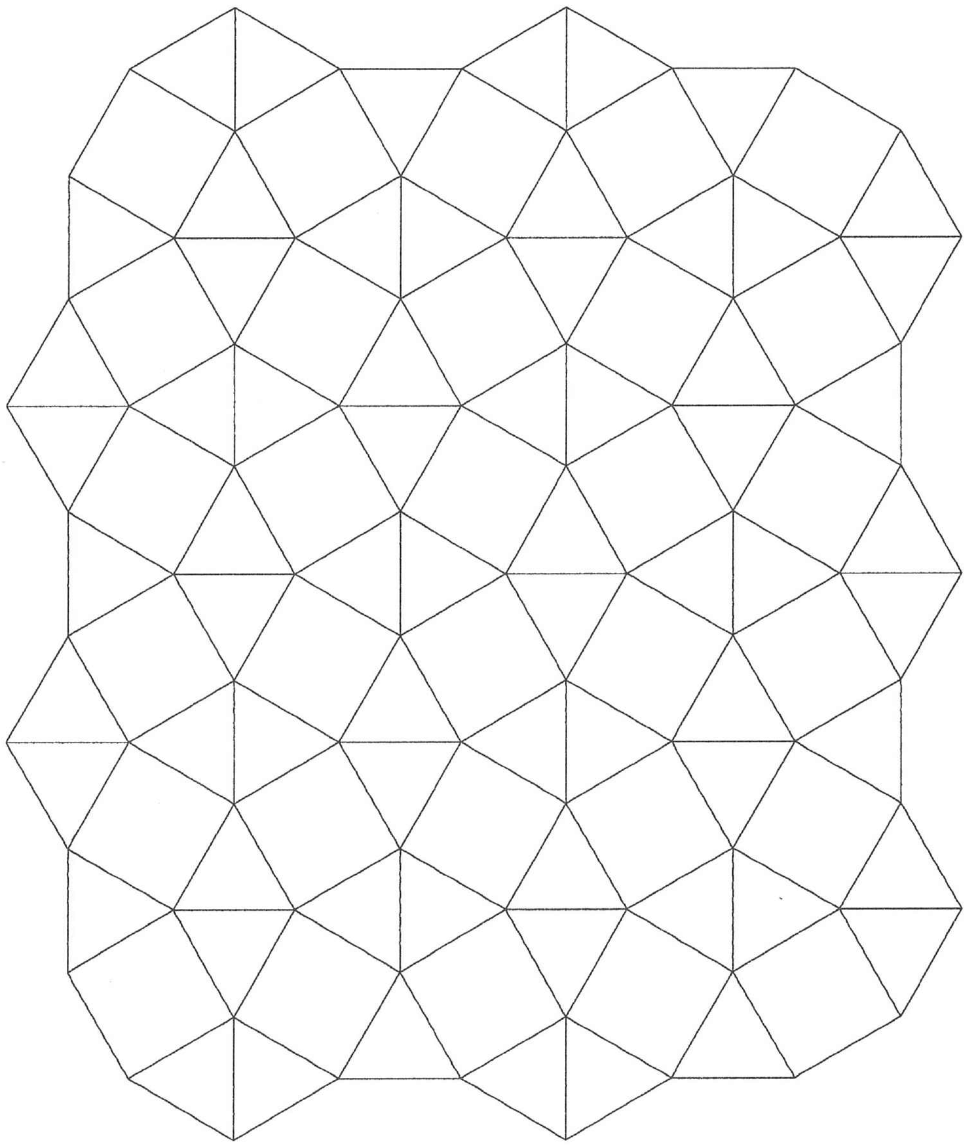
ACTIVITE 10

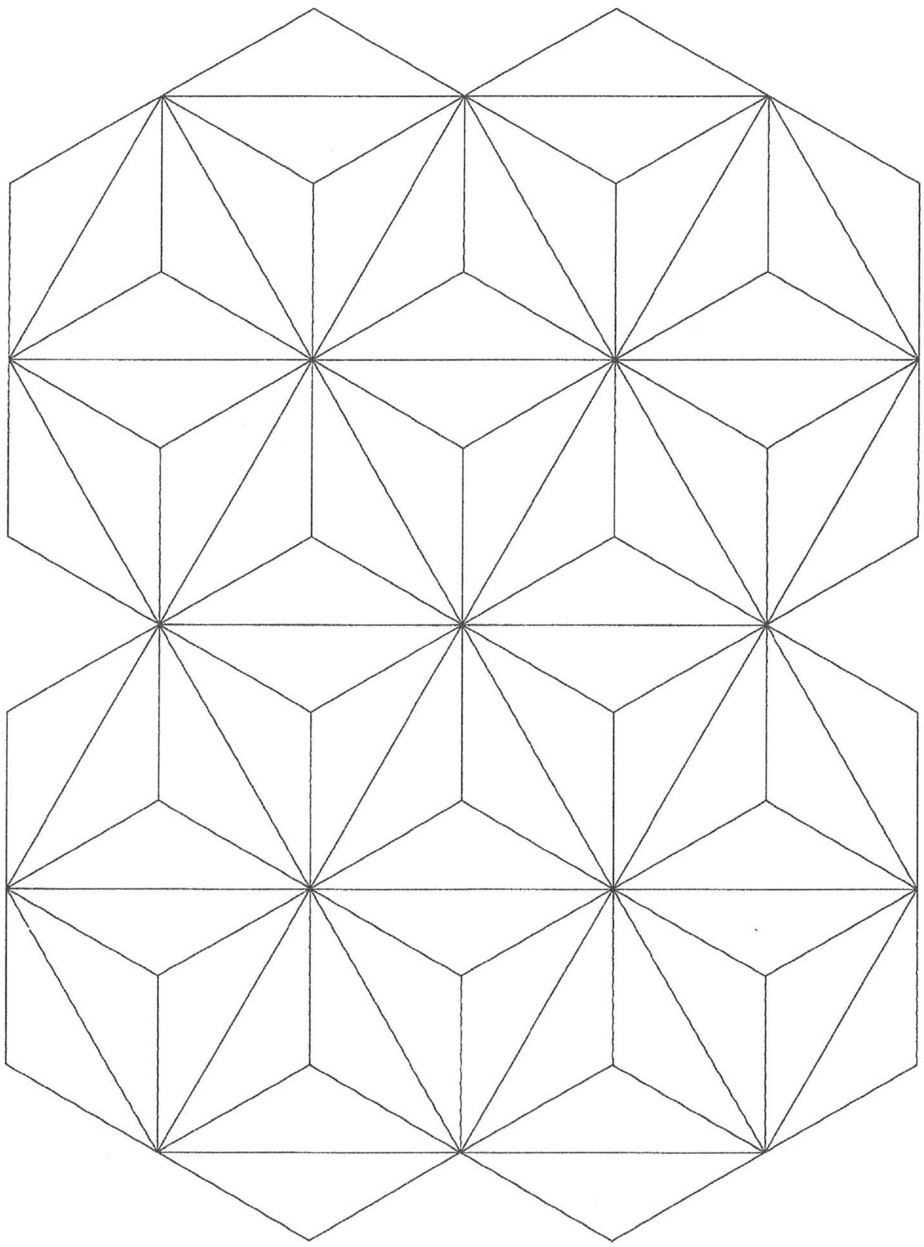
Tracer en couleur, lorsqu'ils existent, le ou les axes de symétrie des figures suivantes, puis, à côté de chacune d'elles, écrire le nombre de ces axes, enfin lorsqu'il y en a un, noter par un gros point d'une autre couleur le centre de symétrie.



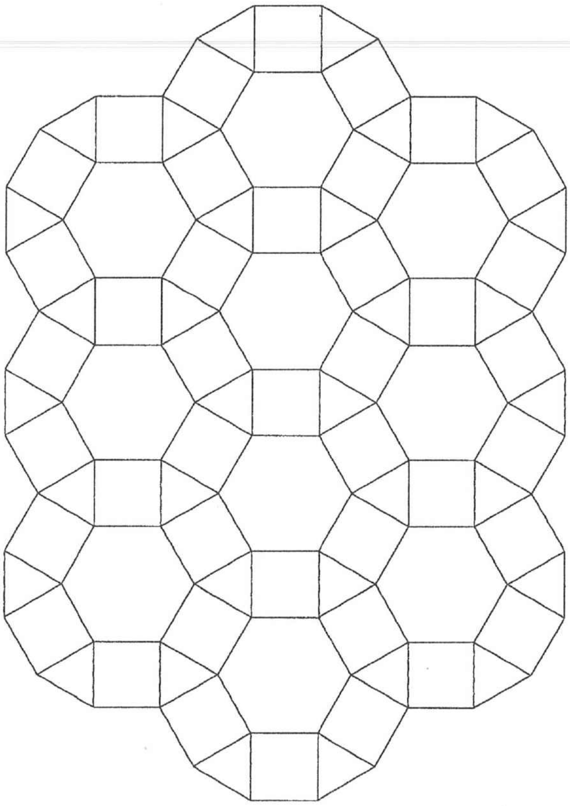
Les trois pavages utilisés dans ce chapitre, sont à photocopier sans modération pour créer de nouvelles activités, ou changer la position des motifs, des points et des droites.

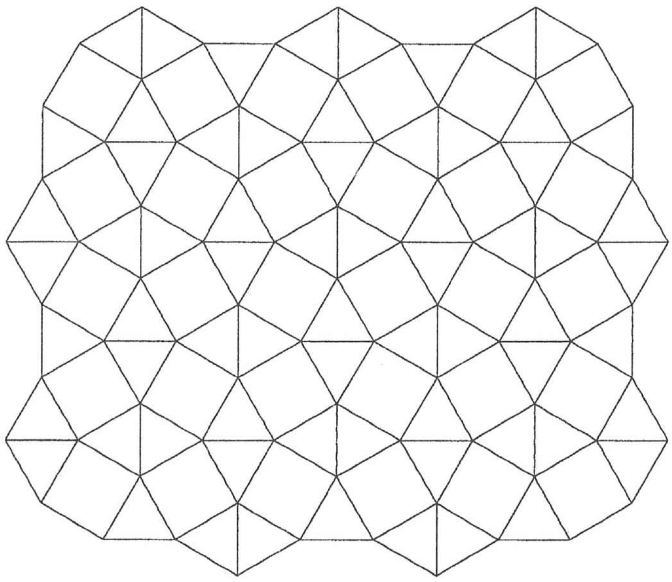


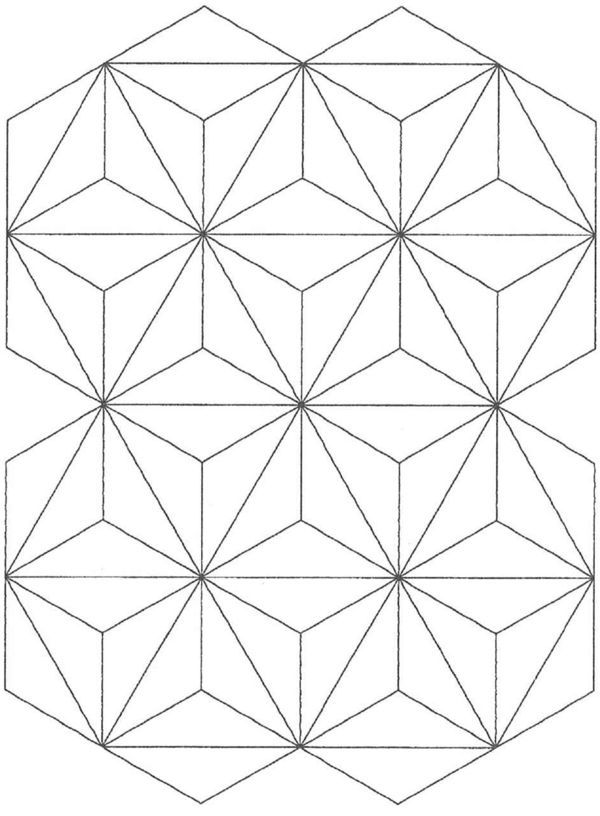


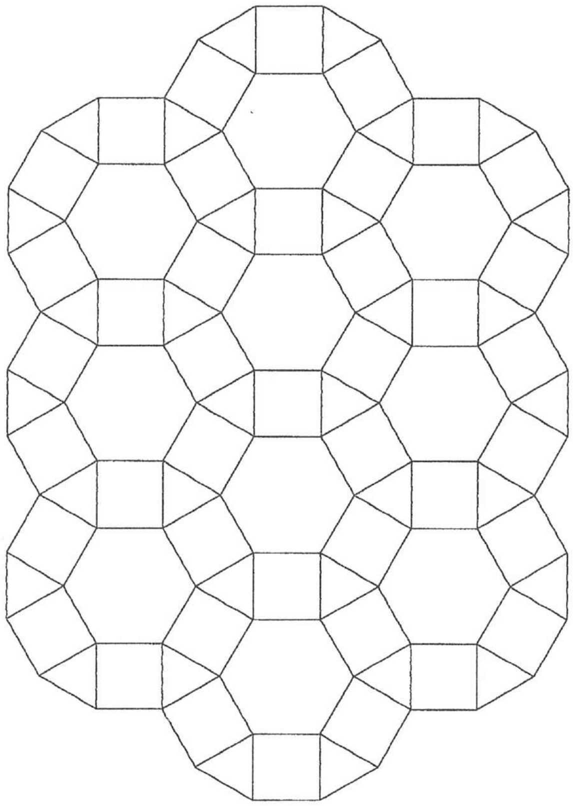


Les mêmes, plus petits, pour intégrer facilement à des textes.









CHAPITRE VIII

LE GROUPE DES ISOMETRIES DU PLAN EUCLIDIEN

I - INTRODUCTION

Les isométries étudiées au collège sont les symétries orthogonales, les symétries centrales, les rotations, les translations. Nous allons démontrer que ces quatre types d'isométries et leurs composées nous donnent la liste exhaustive des isométries du plan.

La définition des isométries (conservation des longueurs) implique que le produit de deux isométries est une isométrie. L'ensemble des isométries du plan muni de la loi de composition a une structure de groupe non commutatif :

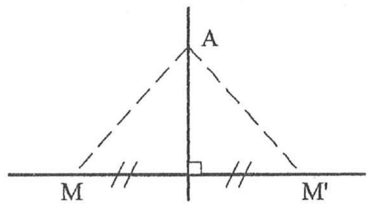
- les conditions de composition interne, d'associativité, d'existence d'élément neutre (l'application identique) sont satisfaites ;
- la non commutativité se justifie simplement par un contre exemple (le produit de deux symétries orthogonales différentes n'est pas commutatif) ;
- il suffit donc pour énoncer la structure de groupe de vérifier que chaque isométrie admet une isométrie inverse. Ce résultat est la conséquence de la classification des isométries qui permet d'en faire une liste exhaustive, et du fait que l'inverse d'une symétrie S_D est elle même, d'une translation $t_{\vec{u}}$ est $t_{-\vec{u}}$, d'une rotation $R_{(O,\alpha)}$ est $R_{(O,-\alpha)}$.

II - RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Des chapitres précédents, on peut retenir les propriétés suivantes qui vont être indispensables par la suite.

Propriété 1

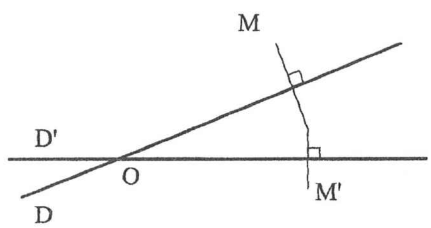
Si un point M a par une isométrie f, une image M' distincte de M, et si A est invariant par f alors A appartient à la médiatrice de [MM'].



Propriété 2

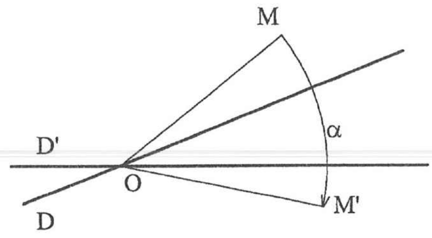
Le produit de deux symétries orthogonales d'axes D et D' sécantes en O est une rotation :

- de centre O
- d'angle $\alpha = 2(D, D')$.



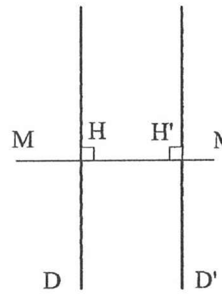
Propriété 3

Toute rotation r de centre O et d'angle α est décomposable en produit de deux symétries orthogonales d'axes D et D' sécants en O (l'un des deux étant choisi arbitrairement) tels que $2(\mathrm{D},\mathrm{D}') = \alpha$, ainsi $r = S_{\mathrm{D}'} \circ S_{\mathrm{D}}$.



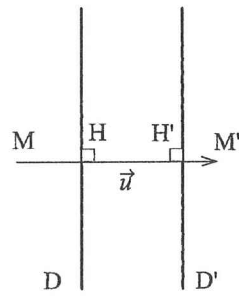
Propriété 4

Le produit de deux symétries orthogonales d'axes D et D' parallèles est une translation de vecteur $\vec{u} = 2\overrightarrow{\mathrm{HH}'}$ où H est un point de D et H' son projeté orthogonal sur D'.



Propriété 5

Toute translation de vecteur $\vec{u}$ non nul est décomposable en produit de deux symétries orthogonales d'axes D et D' parallèles, et perpendiculaires à la direction de $\vec{u}$ avec $\vec{u} = 2\overrightarrow{\mathrm{HH}'}$.



III - CLASSIFICATION DES ISOMÉTRIES DU PLAN AFFINE EUCLIDIEN

1^er^ cas : f a au moins trois points invariants A, B, C non alignés.

Si M est différent de $\mathrm{M}' = f(\mathrm{M})$ alors d'après la propriété 1, le point A appartient à la médiatrice de [MM']. Comme il en est de même pour B et C, $\mathrm{M} \neq \mathrm{M}'$ est impossible donc $f = Id$.

Remarque : il est évident que si f a plus de 3 points doubles non alignés, $f = Id$.

2^ème^ cas : f a au moins deux points invariants A et B ($\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$).

On note $\mathrm{M}' = f(\mathrm{M})$

- Soit $\mathrm{M} \notin (\mathrm{AB})$ avec M égal à M' et on est ramené au cas 1.
- Soit $\mathrm{M} \notin (\mathrm{AB})$ avec M différent deM', alors d'après la propriété 1, les points A et B appartiennent à la médiatrice de [MM'].
- Soit $\mathrm{M} \in (\mathrm{AB})$, si on suppose alors que $\mathrm{M}' \neq \mathrm{M}$ la droite (AB) ne peut être la médiatrice de [MM'], donc $\mathrm{M} = \mathrm{M}'$.

Dans ces deux derniers cas $f = S_{(\mathrm{AB})}$.

3ème cas : f a un seul point invariant A.

Considérons M différent de $M' = f(M)$, en appelant Δ la médiatrice de [MM'], alors $A \in \Delta$ et $\begin{cases} f \circ S_\Delta(A) = f(A) = A \\ f \circ S_\Delta(M') = f(M) = M' \end{cases}$, ainsi $f \circ S_\Delta$ a deux points doubles au moins A et M' et d'après le cas 2 ci-dessus :

- soit $f \circ S_\Delta = Id$ et $f = S_\Delta$, ce qui est impossible car f a un seul point double ;

- soit $f \circ S_\Delta = S_{\Delta'}$ avec $A \in \Delta'$ alors $f = S_{\Delta'} \circ S_\Delta$. Or Δ et Δ' sécantes en A, donc d'après la propriété 2, f est la rotation de centre A et d'angle $2(\Delta, \Delta')$.

4ème cas : f n'a aucun point invariant.

Considérons un point A avec $f(A) = A'$ alors $A \neq A'$. Appelons Δ la médiatrice de [AA']. On a $S_\Delta \circ f(A) = S_\Delta(A') = A$, donc $S_\Delta \circ f$ a au moins un point double A et d'après les cas 1, 2, 3 ci-dessus :

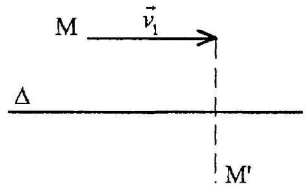
- soit $S_\Delta \circ f$ a trois points doubles, d'où $S_\Delta \circ f = Id$, et $f = S_\Delta$, ce qui est impossible car f n'a pas de point double ;

- soit $S_\Delta \circ f$ a deux points doubles, d'où $S_\Delta \circ f$ est une symétrie d'axe Δ'. Avec $S_\Delta \circ f = S_{\Delta'}$ on obtient $f = S_\Delta \circ S_{\Delta'}$. Si Δ est sécante à Δ' alors f est une rotation, ce qui est impossible car f n'a pas de point double. Donc Δ est parallèle à Δ' et $f = S_\Delta \circ S_{\Delta'}$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'après la propriété 4 ;

- soit $S_\Delta \circ f$ a un seul point double A, d'où $S_\Delta \circ f$ est une rotation de centre A. Avec $S_\Delta \circ f = R_A$ on obtient $f = S_1 \circ R_A$. D'après la propriété 3, on peut écrire $R_A = S_{D_1} \circ S_{D_2}$ en choisissant D_1 parallèle à Δ, ce qui conduit à $f = S_\Delta \circ S_{D_1} \circ S_{D_2}$ puis à $f = t_{\vec{u}} \circ S_{D_2}$.

En posant $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ avec $\vec{u}_1$ et D_2 de même direction et $\vec{u}_2$ de direction perpendiculaire à celle D_2 on obtient $f = t_{\vec{u}_1} \circ t_{\vec{u}_2} \circ D_{D_2}$. D'après la propriété 5, on peut écrire $t_{\vec{u}_2} = S_{\Delta'} \circ S_{D_2}$ où Δ' est parallèle à D_2. Cela conduit à $f = t_{\vec{u}_1} \circ S_{\Delta'} \circ S_{D_2} \circ S_{D_2}$ et enfin à $f = t_{\vec{u}_1} \circ S_{\Delta'}$ où $\vec{u}_1$ a même direction que D_2 et Δ'.

Remarque : $f = t_{\vec{u}_1} \circ S_{\Delta'}$ est appelée symétrie glissée et $t_{\vec{u}_1} \circ S_{\Delta'} = S_{\Delta'} \circ t_{\vec{u}_1}$, qui peut être illustré par la figure ci-contre.



Conclusions

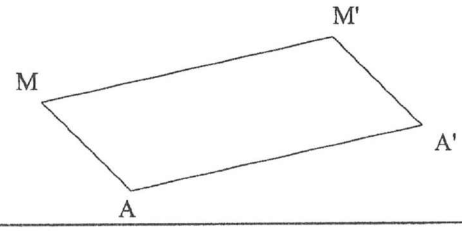
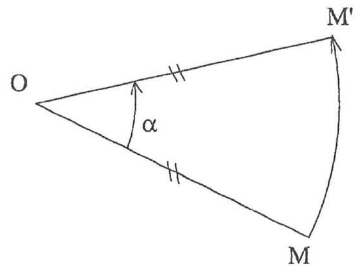
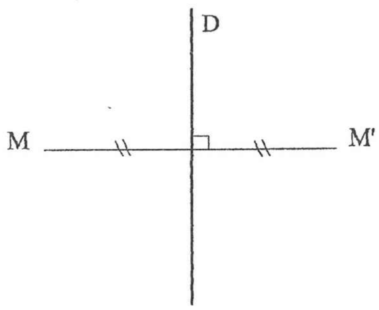
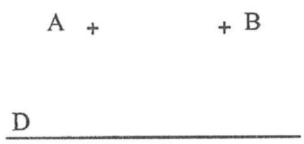
1) Une isométrie plane est donc :

- soit un **déplacement** qui conserve les angles orientés : translation ou rotation d'angle α (si $\alpha = \pi$, il s'agit de la symétrie centrale) ou identité ;

- soit un **antidéplacement** qui ne conserve pas les angles orientés : symétrie orthogonale ou symétrie glissée (composée d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite D et d'une translation dont le vecteur à même direction que D).

2) Chacune de ces isométries ayant une isométrie réciproque, l'ensemble des isométries du plan a bien la structure de groupe pour la loi de composition.

IV – PANORAMA DES ISOMETRIES

DEPLACEMENTS	**Translation** On se donne deux points A et A' du plan. La transformation ponctuelle qui à chaque point M du plan fait correspondre le point M' tel que AA'M'M soit un parallélogramme est une translation.	
	Rotation On se donne un points O du plan et un angle orienté α. Considérons la transformation ponctuelle qui à chaque point M du plan fait correspondre le point M' respectant la propriété suivante : les longueurs OM et OM' sont égales et l'angle orienté formé par les demi-droites OM et OM' est égal à α. C'est une rotation de centre O et d'angle α.	
ANTIDEPLACEMENTS	**Symétrie orthogonale** On se donne une droite D du plan. Considérons la transformation ponctuelle qui à chaque point M du plan fait correspondre le point M' respectant la propriété suivante : la droite MM' est perpendiculaire à D et les points M et M' sont à égale distance de D de part et d'autre de cette droite. C'est une symétrie orthogonale d'axe D.	
	Symétrie glissée On se donne une droite D et deux points A et B du plan. Les points A et B sont distincts, la droite (AB) est parallèle à D. Considérons la transformation ponctuelle qui à chaque point M du plan fait correspondre le point M' respectant la propriété suivante : dans la symétrie orthogonale d'axe D, M' est le symétrique du point M" tel que ABM"M soit un parallélogramme. C'est une symétrie glissée d'axe D et de glissement de A vers B.	

IV - FICHES ACTIVITÉS

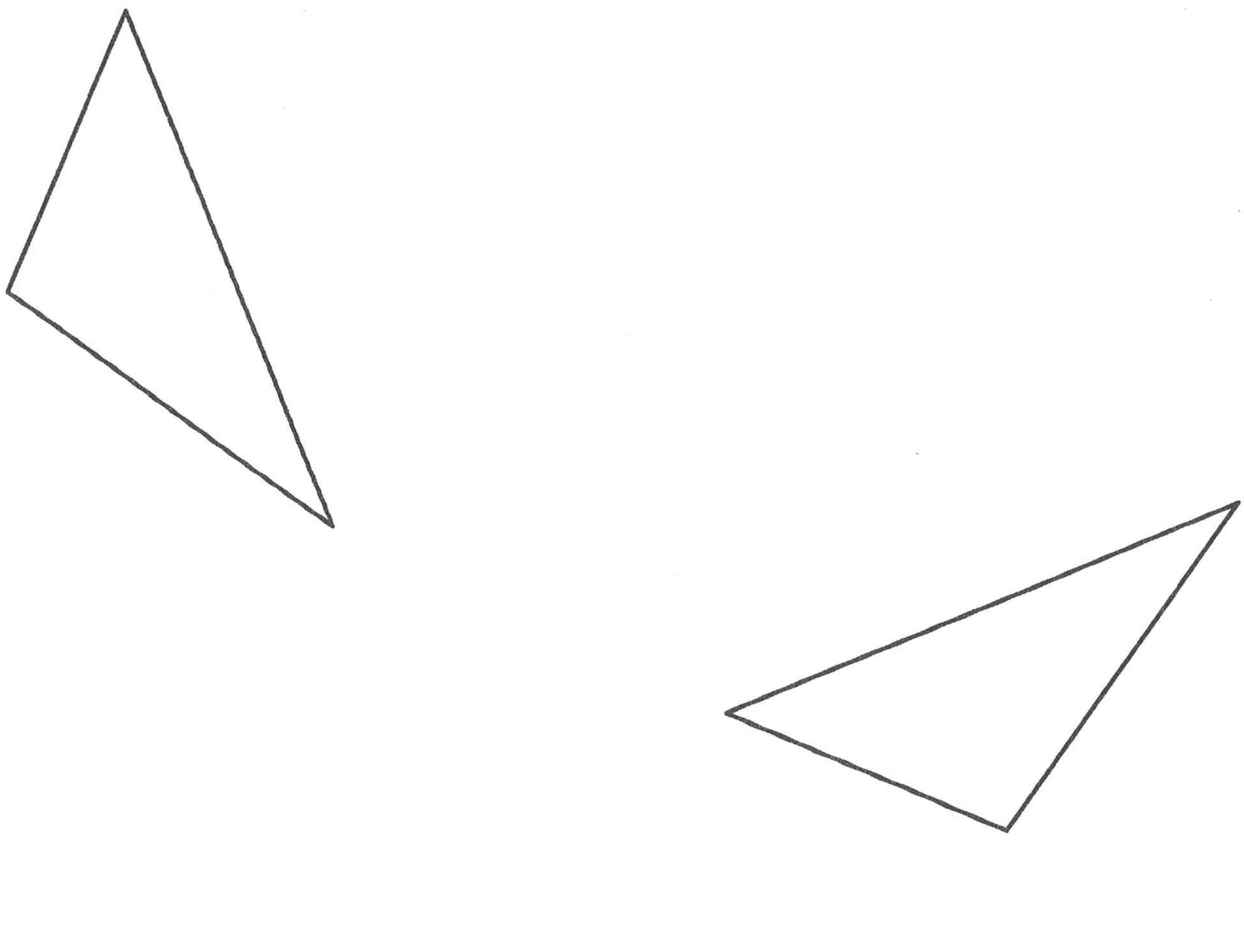
Dans les activités qui suivent, il faudra accepter la correspondance isométrique entre les triangles, préalable indispensable à la détermination de l'isométrie elle même, qui survient secondairement.

Cette acceptation résulte de la comparaison de longueurs, d'angles remarquables, repérés sur les deux triangles et plus généralement de l'acceptation du fait qu'ils sont superposables. Quelle est dans cette acceptation la place des "cas d'égalité des triangles " non formalisée en général, mais utilisée souvent de fait par les élèves ?

Nous retrouvons dans ces fiches cette constatation déjà citée, à savoir que dans la reconnaissance d'une isométrie les éléments statiques précèdent les éléments dynamiques.

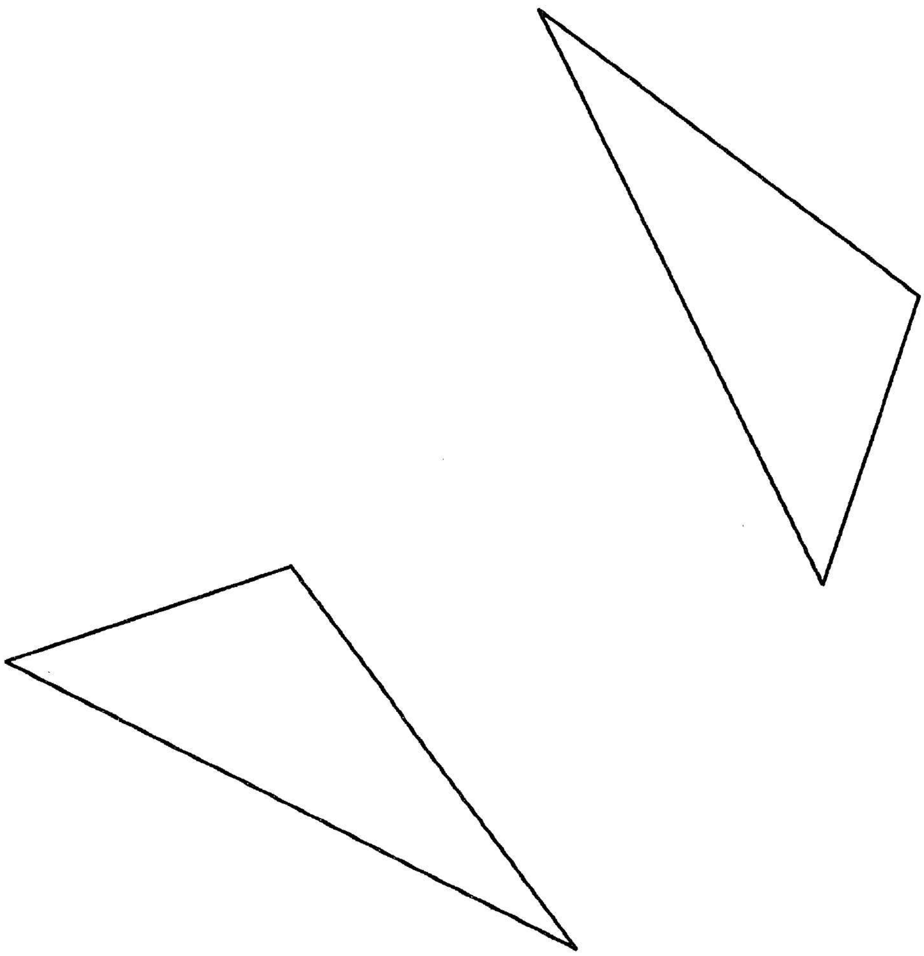
FICHE 1

Mettre en évidence la forme réduite de l'isométrie qui fait correspondre les deux triangles.



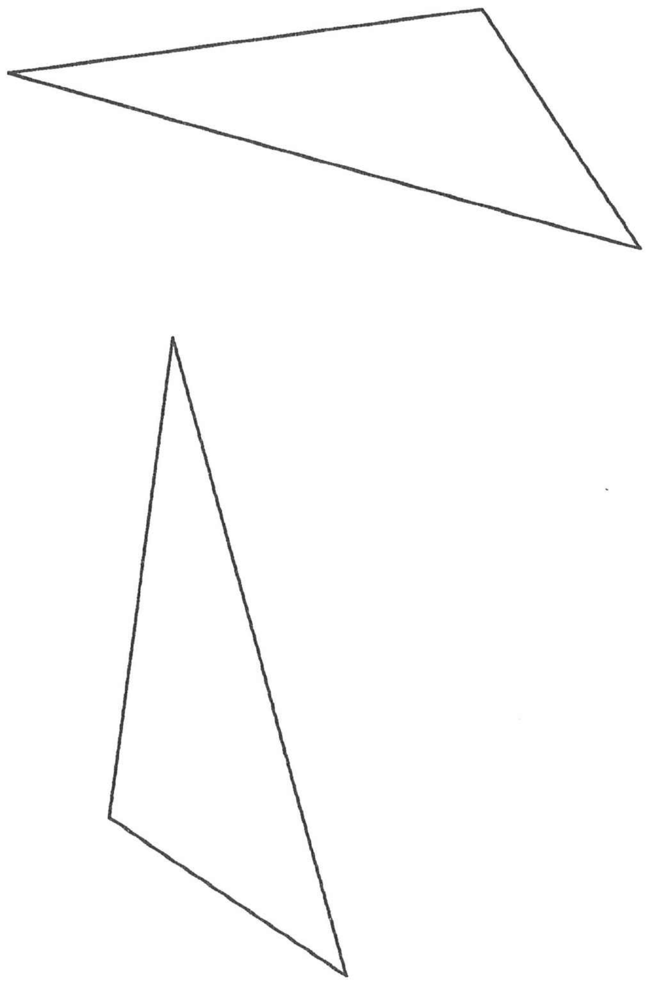
FICHE 2

Mettre en évidence la forme réduite de l'isométrie qui fait correspondre les deux triangles.



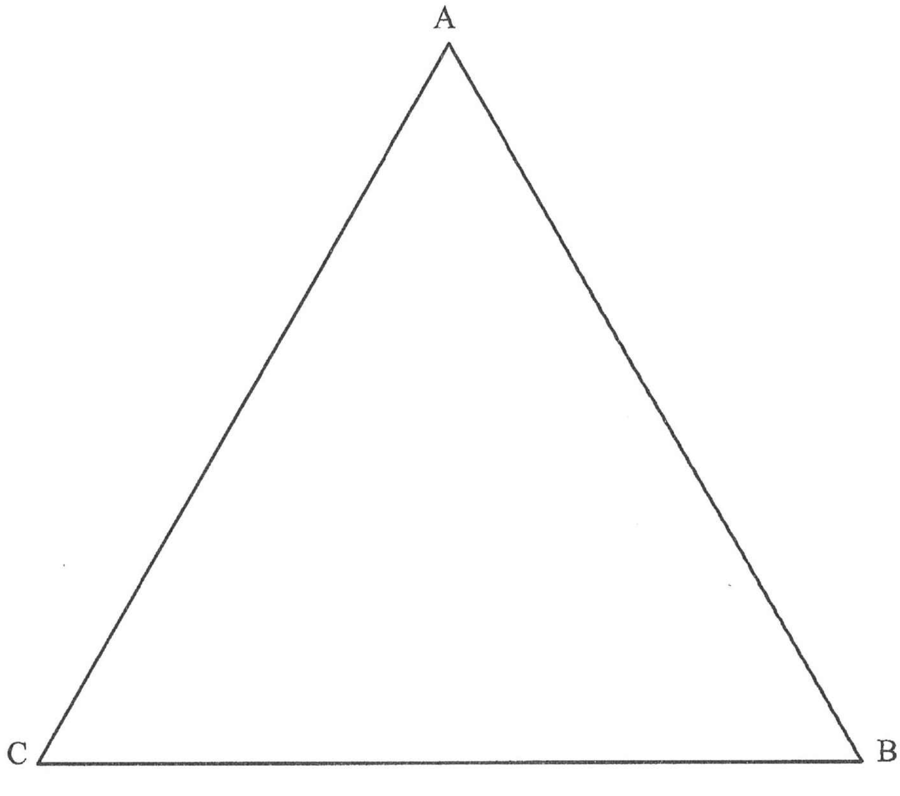
FICHE 3

Mettre en évidence la forme réduite de l'isométrie qui fait correspondre les deux triangles.



FICHE 4

Le triangle ABC ci - dessous est équilatéral. Déterminer la forme réduite de la composée : $R_C \circ R_B \circ R_A$ où R_C, R_B, R_A sont les rotations de centre respectifs C, B, A, et d'angle $\frac{\pi}{3}$.



CHAPITRE IX

PANORAMA DES TRANSFORMATIONS PONCTUELLES DU PLAN

Les pages qui suivent présentent l'essentiel des transformations ponctuelles en dimension 2.
Toutes les transformations présentées dans les tableaux (I, II, III, IV, V, VI) sont inversibles et débouchent sur des structures de groupes. Le tableau VII présente une organisation de ces transformations autour de leurs principaux invariants.

Le tableau I donne le **groupe des déplacements**, transformations qui résultent du glissement dans le plan.

Le tableau II donne le **groupe des isométries**, transformations qui résultent du mouvement dans le plan (groupe principal de la géométrie métrique).

Le tableau III donne le **groupe des similitudes**, transformations qui conservent les rapports des longueurs dans le plan (ou groupe principal de la géométrie euclidienne).

Le tableau IV donne le **groupe des transformations affines**, transformations qui conservent le barycentre dans le plan.

Les tableaux V et VI enfin donnent à voir deux transformations que l'on ne rencontre guère dans les manuels d'aujourd'hui (l'homologie et l'inversion), mais qui apparaissent encore quelquefois, sans être citées, au hasard d'exercices. Elles peuvent cependant servir d'appui pour fournir des exemples de transformations ne conservant pas telle ou telle propriété.

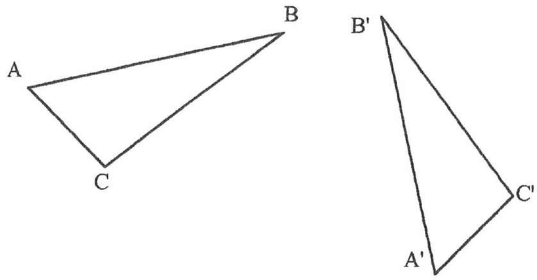
Les définitions données pour ces transformations ne sont pas toutes de même nature.
Celles concernant le groupe des similitudes sont données par un algorithme permettant la construction de l'image d'un point. Il s'agit là de la généralisation des algorithmes de construction du chapitre II.
Par contre pour l'affinité, la transvection, l'homologie et l'inversion, l'algorithme n'est pas donné. La construction de l'image d'un point ne peut résulter que de la définition même de la transformation.
Qu'il s'agisse d'une affinité, transvection, homologie qui conservent l'alignement, construire l'image d'un point revient à construire les droites – images de deux droites qui passent par ce point. Les éléments fixes de la transformation facilitent cette construction.
Pour l'inversion, le moteur de la construction réside (par l'égale puissance de deux points par rapport à un cercle) dans la cocyclicité de deux couples de points homologues.

TABLEAU I

DEPLACEMENTS

On se donne deux triangles égaux et de même orientation ABC et A'B'C' du plan.

La transformation ponctuelle du plan qui à A, B, C fait respectivement correspondre A', B', C' et qui conserve les distances est un déplacement



Les déplacements se résument aux translations et rotations (identité comprise) dont la symétrie centrale n'est qu'un cas particulier. On obtient donc :

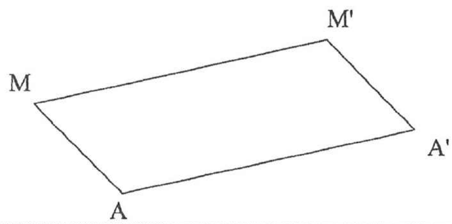
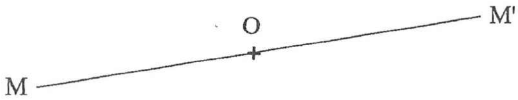
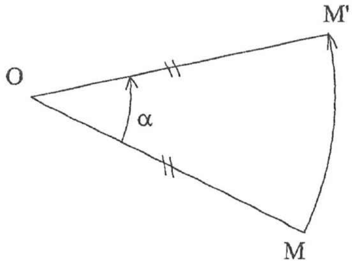
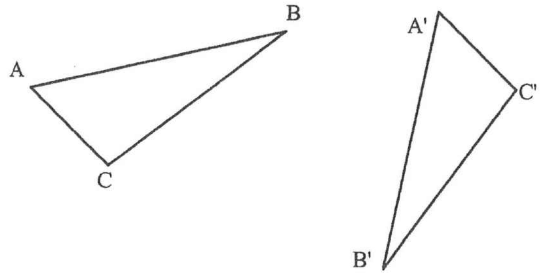
Translation On se donne deux points A et A' du plan. La transformation ponctuelle qui à chaque point M du plan fait correspondre le point M' tel que AA'M'M soit un parallélogramme est une translation.	
Symétrie Centrale On se donne un point O du plan. Considérons la transformation ponctuelle qui à chaque point M du plan fait correspondre le point M' respectant la propriété suivante : le point O est le milieu du segment [MM']. C'est la symétrie centrale de centre O.	
Rotation On se donne un points O du plan et un angle orienté α. Considérons la transformation ponctuelle qui à chaque point M du plan fait correspondre le point M' respectant la propriété suivante : les longueurs OM et OM' sont égales et l'angle orienté formé par les demi-droites OM et OM' est égal à α. C'est une rotation de centre O et d'angle α.	

TABLEAU II

ISOMETRIES

On se donne deux triangles égaux ABC et A'B'C' du plan.

La transformation ponctuelle du plan qui à A, B, C fait respectivement correspondre A', B', C' et qui conserve les distances est une isométrie.

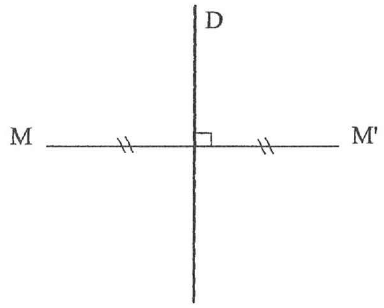


Les isométries se résument aux déplacements du tableau précédent et aux antidéplacements présentés ci-dessous.

Symétrie orthogonale
On se donne une droite D du plan.

Considérons la transformation ponctuelle qui à chaque point M du plan fait correspondre le point M' respectant la propriété suivante :
la droite (MM') est perpendiculaire à D et les points M et M' sont à égale distance de D de part et d'autre de cette droite.

C'est une symétrie orthogonale d'axe D.



Symétrie glissée
On se donne une droite D et deux points A et B du plan. Les points A et B sont distincts, la droite (AB) est parallèle à D.

Considérons la transformation ponctuelle qui à chaque point M du plan fait correspondre le point M' respectant la propriété suivante :
dans la symétrie orthogonale d'axe D, M' est le symétrique du point M" tel que ABM"M soit un parallélogramme.

C'est une symétrie glissée d'axe D et de glissement de A vers B.

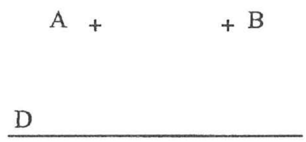
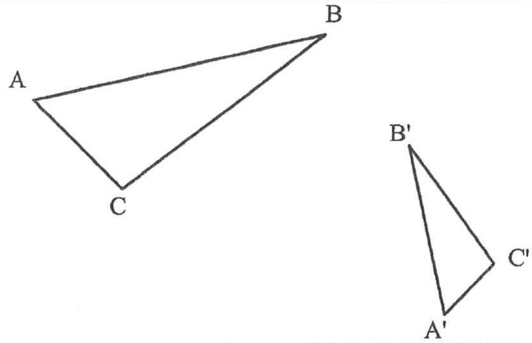


TABLEAU III

SIMILITUDES

On se donne deux triangles semblables ABC et A'B'C' du plan.

La transformation ponctuelle du plan qui à A, B, C fait respectivement correspondre A', B', C' et qui conserve les barycentres est une similitude.



Les similitudes sont des composées d'isométries du tableau précédent et d'homothéties. Une similitude est directe lorsque elle se réduit à la composée d'un déplacement et d'une homothétie, elle est inverse lorsqu'elle se réduit à la composée d'un antidéplacement et d'une homothétie.

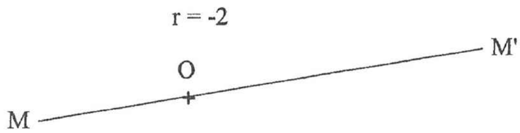
Homothétie

On se donne un point O du plan et un nombre réel r, $r \neq 0$.

Considérons la transformation ponctuelle qui à chaque point M du plan fait correspondre le point M' respectant la propriété suivante :

les points O, M, et M' sont alignés, le rapport $\frac{OM'}{OM}$ est égal à r et les points M et M' sont de part et d'autre de O si et seulement si $r < 0$

C'est une homothétie de centre O et de rapport r.



Similitudes

ABC est un triangle rectangle en A et H est le pied de sa hauteur issue de A.

Les triangles ABC et AHC sont semblables et n'ont pas la même orientation, le passage de ABC à AHC se réduit à une réflexion dont l'axe passe par C et à une homothétie de centre C. Il s'agit d'une similitude inverse.

Les triangles AHC et AHB sont semblables et de même orientation, le passage de AHC à AHB se réduit à une rotation et à une homothétie de même centre H. Il s'agit d'une similitude directe.

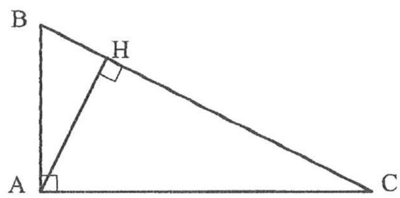
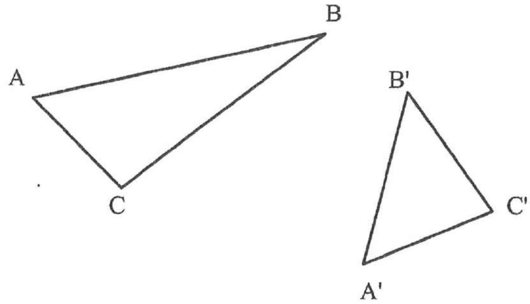


TABLEAU IV

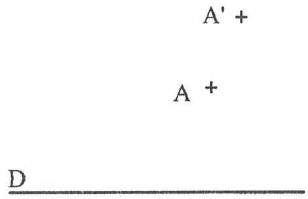
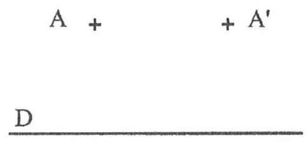
TRANSFORMATIONS AFFINES

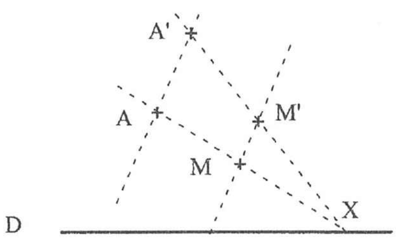
On se donne six points A, B, C, A', B', C' du plan, les points A, B, C ne sont pas alignés.

La transformation ponctuelle du plan qui à A, B, C fait respectivement correspondre A', B', C' et qui conserve le barycentre est une transformation affine.



Il résulte de cette définition que toutes les transformations vues dans les tableaux précédents sont des transformations affines. Il en existe d'autres comme les affinités et transvections qui suivent, ainsi que leurs composées.

Affinité On se donne une droite D et deux points A et A' du plan. Les points A et A' sont distincts, ils ne sont pas sur D et la droite AA' n'est pas parallèle à D. La transformation ponctuelle du plan qui laisse fixe chaque point de D, qui à A fait correspondre A' et qui conserve le barycentre est une affinité.	
Transvection On se donne une droite D et deux points A et A' du plan. Les points A et A' sont distincts, ne sont pas sur D et la droite AA' est parallèle à D. La transformation ponctuelle du plan qui laisse fixe chaque point de D, qui au point A fait correspondre A' et qui conserve le barycentre est une transvection.	



La construction de l'image d'un point M est donnée ci-contre en traits pointillés pour l'affinité. La conservation du barycentre garantit :

- l'alignement des images de points alignés ;
- la conservation des proportions sur une même droite.

L'image d'un point M s'obtient en construisant l'image de la droite (AX) qui passe par M, le point X étant fixe, et en respectant à l'aide du théorème de Thalès les proportions sur cette droite.

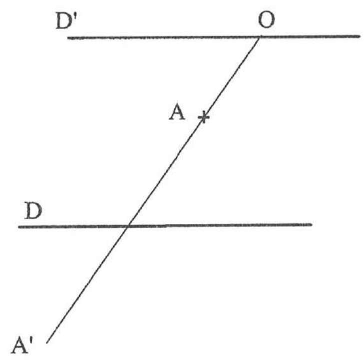
TABLEAU V

HOMOLOGIE

On se donne une droite D et trois points O, A et A' alignés. Le point O n'appartient pas à D. Les points A et A' sont distincts, ils ne sont pas sur la droite D, ils ne sont pas sur la droite D', parallèle à D passant par O.

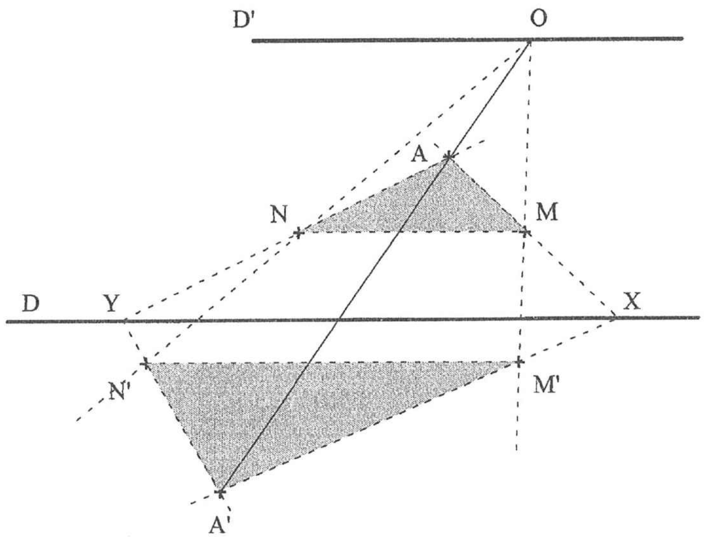
Considérons la transformation ponctuelle qui respecte les propriétés suivantes :
- elle laisse fixe le point O et chaque point de la droite D ;
- elle transforme le point A en A' ;
- elle conserve l'alignement ;
- un point M et son transformé M' s'il existe sont alignés avec O.

Cette transformation ponctuelle est une homologie de centre O, d'axe D.



La construction des images de deux point M et N est donnée ci-dessous en traits pointillés pour l'homologie. La conservation de l'alignement et l'utilisation des points fixes sont les moteurs de ces constructions.

L'image d'un point M s'obtient en construisant l'image de la droite (AX) qui passe par M, le point X étant fixe. L'image M' de M est l'intersection de (OM) et (A'X).



Le triangle M'A'N' est alors l'image du triangle MAN.

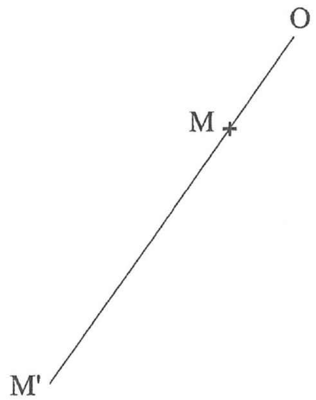
TABLEAU VI

INVERSION

On se donne un point O du plan et un nombre réel k, k ≠ 0.

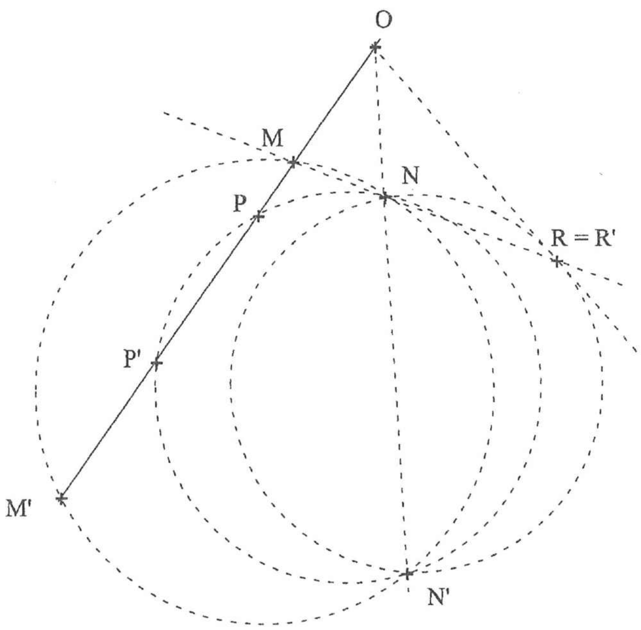
Considérons la transformation ponctuelle qui à chaque point M du plan fait correspondre le point M' respectant la propriété suivante :
les points O, M, et M' sont alignés, le produit de OM par OM' est égal à la valeur absolue de k et les points M et M' sont de part et d'autre de O si et seulement si k < 0.

C'est une inversion de centre O et de puissance k.



On peut mettre en évidence que tout point N, non aligné avec O et M, a une image N' sur le cercle circonscrit du triangle MM'N. En effet, $\overline{OM} \times \overline{OM'} = k = \overline{ON} \times \overline{ON'}$ est une condition (nécessaire et suffisante) de cocyclicité des points M, M', N, N' lorsque O, M, N ne sont pas alignés.

La construction des images de trois points N, P et Q s'obtient donc par alignement et cocyclicité. On a volontairement choisi O, M, P d'une part, et M, N, R d'autre part, alignés afin de bien mettre en évidence la conservation ou non de cet alignement.



De plus, comme on a choisi $OR = \sqrt{|k|}$, le point R est invariant. L'ensemble de ces points invariants est le cercle de centre O et de rayon OR, appelé cercle d'inversion.

Plus généralement l'inversion transforme tout élément de l'ensemble des cercles et des droites du plan en une droite ou un cercle du plan. La droite (OM) est transformée en elle même, la droite (MR) est transformée en cercle circonscrit au triangle M'N'R'.

TABLEAU VII

INVARIANTS DES PRINCIPAUX GROUPES DE TRANSFORMATIONS PONCTUELLES PLANES

Toutes les transformations sont inversibles

Invariants / Groupes	Position	Direction	Orientation	Distance	Angle	Parallélisme	Alignement	Cercles-droites
Identité								
Translations								
Déplacements								
Isométries								
Similitudes								
Transformations Affines								
Groupe Projectif dont homologie								
Groupe Circulaire dont inversion								

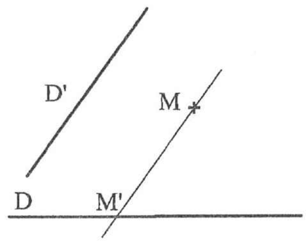
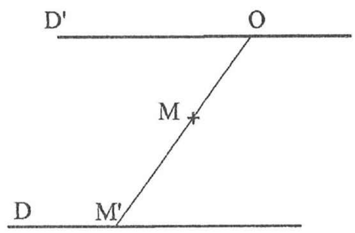
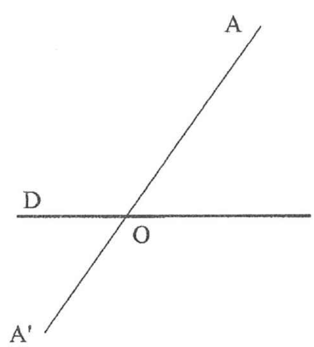
Lorsque les invariants d'un groupe A donné sont contenus dans les invariants d'un groupe B, le groupe B est un sous groupe de A.

De ce fait, tous les groupes de transformations, de l'identité au groupe projectif, sont emboîtés. C'est ce qui explique le double cadre intérieur. Un autre invariant commun à tous ces groupes est le birapport de quatre points alignés, soit : $(A,B,C,D) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$.

En excluant les transformations affines et le groupe projectif, on peut observer un autre emboîtement, de l'identité au groupe circulaire. Un invariant commun à tous ces groupes est le birapport de quatre points quelconques, soit : $(A,B,C,D) = \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} : \frac{z_D - z_A}{z_D - z_B}$, où z_A, z_B, z_C, z_D sont les affixes respectives des points A, B, C, D dans le plan complexe.

TABLEAU VII

PROJECTIONS

Projection cylindrique sur une droite : On se donne deux droites D et D' non parallèles. La transformation ponctuelle du plan qui à chaque point M du plan fait correspondre le point M' de D' tel que la droite MM' soit parallèle à D' est la projection cylindrique sur D parallèlement à D.	
Projection centrale sur une droite : On se donne une droite D et un point O n'appartenant pas à D. Appelons D' la parallèle à D passant par O. Considérons la transformation ponctuelle qui à chaque point M du plan n'appartenant pas à D', fait correspondre le point M' respectant la propriété suivante : M' est le point d'intersection des droites OM et D. Cette transformation ponctuelle définie sur l'ensemble des points du plan à l'exclusion des points de D' est la projection centrale de centre O sur la droite D.	
Élation : On se donne une droite D et trois points O, A et A' alignés. Le point O appartient D. Les points A et A' sont distincts, ils ne sont pas sur la droite D. Considérons la transformation ponctuelle qui respecte les propriétés suivantes : elle laisse fixe chaque point de la droite D, elle transforme le point A en A', elle conserve l'alignement, un point M et son transformé M' s'il existe sont alignés avec O. Cette transformation ponctuelle est une élation de centre O, d'axe D.	

Homographie : On se donne huit points A, B, C, D, A', B', C', D' du plan de sorte que trois points pris parmi A, B, C, D ne sont pas alignés et que trois points pris parmi A', B', C', D' ne sont pas alignés.

Considérons la transformation ponctuelle qui respecte les propriétés suivantes :

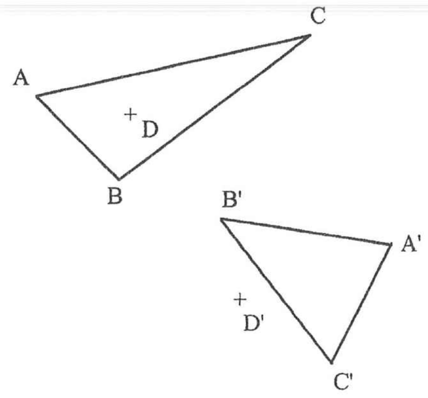
elle transforme respectivement les points A, B, C, D en A', B', C', D',

elle conserve l'alignement,

elle conserve le rapport anharmonique* de tout quadruplet de points alignés.

Cette transformation ponctuelle est une homographie.

* pour un quadruplet (A, B, C, D), le rapport anharmonique est $\frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}$.



TITRE : Enseigner les transformations

AUTEURS

André AMSALEM - Noël BASCOU - Thierry BERTHOMIER - Freddy BONAFÉ - Robert BRUNET - Arlette CHEVALLIER - Marie-Claire COMBES - Alain DEVILLE - Liliane DRAY - Jean-François FAVRAT - Jacques NAUDEILLO - Nicole PAILHAS - Jean-Pierre ROBERT - Mireille SAUTER.

COORDONATEUR : Freddy BONAFÉ

ÉDITEUR : I.R.E.M. de MONTPELLIER

MOTS CLÉS : Mouvement - Isométries - Transformations - Activités - Cabri Géomètre

RÉSUMÉ

Ce document à été réalisé à partir d'une réflexion sur l'enseignement des transformations et d'expérimentations réalisées en classe.

Une première partie est consacrée aux isométries (programme du collège). Nous avons fait le choix d'introduire les isométries par le mouvement, puis de les mettre en œuvre par des algorithmes de construction. Un chapitre sur "les transformations déformantes" permet de souligner les propriétés de conservation des isométries. Cette première partie est complétée par un travail sur le logiciel "Cabri - Géomètre", qui apporte un complément d'outils pédagogiques .

Une deuxième partie, plus théorique, est consacrée à la classification des isométries. Elle se termine par un panorama des transformations du plan.

L'ensemble des chapitres du document est accompagné de fiches d'exercices utilisables en classe.

NOMBRE DE PAGES : 109

N° ISBN : 2 - 909916 - 34 - 0