IREM

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
des Pays de la Loire

Les nombres réèls

Journée d'Angers des 9 et 10 avril 1976

1976

PROGRAMME DES JOURNEES D'ANGERS SUR LES NOMBRES REELS

Quelques textes se trouvent réunis dans ce volume. Ce sont des textes assez disparates -et volontairement tels. Les réunir n'a pour but que de favoriser la discussion ... en évitant à chacun de "farfouiller" dans mille et un papiers épars.

POURQUOI LES NOMBRES REELS

J. DHOMBRES (Nantes)

La plupart des Etudiants en Mathématiques, une fois passé le toujours gaillard Baccalauréat, affrontent la théorie des Nombres Réels, lors du premier cours d'Analyse.

C'était, avant que l'on remplace la Géométrie par l'Axiomatique de la Géométrie dans le Secondaire, le premier contact avec une construction mathématique élaborée. Cette théorie "passe" généralement très mal !

Chacun sait qu'il existe plusieurs façons d'introduire les Nombres Réels. Cela se fait dans le cadre de la théorie naïve des ensembles (puisque la construction euclidienne de la mesure des grandeurs est oubliée) :

- soit par la méthode des suites de CAUCHY
- soit par la méthode des coupures de DEDEKIND
- soit par la méthode des développements décimaux illimités.

Chaque méthode a ses avantages -et ses inconvénients- Nous en discuterons à plusieurs reprises au cours de ces Journées, notamment dans le groupe de travail qui étudiera les liens pédagogiques entre le Secondaire et le DEUG Universitaire.

Qu'on me permette seulement de dire que je ne comprends guère pourquoi les protagonistes d'une méthode tiennent à <u>tout</u> faire en n'employant que leur seule méthode, sans faire appel à d'autres idées. Un simple exemple : avec la méthode des coupures, la notion de produit de deux Nombres Réels est un peu délicate et donne lieu, en quelques ouvrages, à des élucubrations étranges. Pourquoi ne pas prolonger par continuité le produit défini sur $\mathbb{Q}$?

Une autre remarque : l'essentiel est que la méthode qui permet de passer de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$, appliquée à $\mathbb{R}$, ne donne rien d'autre que $\mathbb{R}$. Pourquoi est-ce si rarement mis en lumière ?

Le plus étrange, à mon avis, est qu'après avoir finement ciselé $\mathbb{R}$, on établisse à la va-vite les théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues, etc. Encore plus étrange est que les programmes n'admettent pas que l'on envisage la continuité de $x \to \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$!

Mais ces questions sont anciennes. Alors pourquoi une réflexion des Animateurs des I.R.E.M. sur les Nombres Réels, et partant, sur l'Analyse dans le Secondaire ?

La réponse est fort simple et sans ambiguité : parce que de droite et de gauche, et pas seulement au niveau "officiel", se profilent des projets pour un nouvel enseignement de l'Analyse. La réflexion des I.R.E.M. doit donc répondre en exposant l'expérience acquise dans les groupes I.R.E.M. -sans plus- sans moins ! D'où l'idée d'organiser ces Journées, idée qui remonte à Mai 1975 - et depuis, bien des réunions "officielles" ont eu lieu dans les diverses Académies et à l'échelon national ; tant mieux !

Il est symptomatique de constater que la plupart des textes sérieux, et j'élimine derechef une multitude de manuels prétentieux, commencent par des remarques historiques. C'est peut-être même le seul moment où l'histoire des Mathématiques fasse une timide apparition dans l'Enseignement Secondaire (Irrationnalité de $\sqrt{2}$; nombre π , transcendance de e , constructions de CANTOR, etc). Ce fait pédagogique (provenant des

.../...

Maîtres, je le reconnais volontiers, et sans doute de l'habitude) m'a paru en soi intéressant. D'où l'idée de développer une partie d'épistémologie historique dans ces Journées.

QUELLE EST L'HISTOIRE DES NOMBRES REELS ?

Il me semble, qu'en prenant un peu de recul, on pourrait résumer ainsi :

Au IIIème siècle avant Jésus-Christ, une théorie axiomatique des proportions est établie pour rendre compte de la mesure des grandeurs et en particulier des grandeurs géométriques telles que les longueurs, les aires et les volumes. Cette théorie, par la force de ses enchaînements et l'élégance formelle de sa présentation, semble occulter une théorie du nombre en tant qu'objet seulement soumis à des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division. Le langage de la théorie des proportions, aux tonalités devenues géométriques, s'impose comme le langage dominant du monde savant jusqu'au début du XVIIIème siècle, tant en Occident que dans le monde musulman.

Parallèlement -mais à l'état rampant- une totalité numérique d'origine plus ancienne et aux résultats non négligeables, fait surface de temps à autre. Cette attitude numérique est la seule pratiquée en Chine, mais là elle ne débouche sur aucune formalisation et n'algébrise pas la notion de limite.

Les metteurs en scène du Savoir, que sont la plupart des philosophes occidentaux, sont de siècle en siècle éblouis par l'axiomatique simple de la Géométrie et les puissantes déductions qu'on en peut tirer, lesquelles semblent donner une prise sur le monde sensible et une clef pour découvrir l'architecture ordonnée du Monde. Le numérique et le quantitatif sont laissés dans l'ombre au profit de l'explication des formes, au profit des classifications en espèces, genres ou catégories. En Chine, la réflexion philosophique met la mathématique à une place précise : compter, mesurer, comparer, place qu'elle ne doit pas outrepasser.

Au milieu du XVIIème siècle, les deux langages se rencontrent dans l'algébrisation de la Géométrie. Paradoxalement, le langage et la pratique géométriques conservent la suprématie dans les présentations, même en ce qui concerne les nouveaux horizons du champ mathématique que sont les limites et les fonctions.

Un siècle de pratique et de réflexion scientifiques à partir d'expériences très simples et d'outils algébriques élémentaires réhabilite le numérique. C'est le siècle des mensurations de la terre et des recensements en tous genres. La Géométrie va éclater en plusieurs géométries et sa domination s'effondre. Du continu et de l'infini, on élimine lentement tout discours non quantifié et on aboutit par les limites, les intégrales ou les dérivées à une

structure qui se règle par les seules opérations autorisées du calcul. L'axiomatisation proprement dite du champ numérique, sur la base de l'arithmétique, s'effectue enfin vers 1870.

L'une des constructions développe avec la Théorie des Ensembles une axiomatique des Mathématiques à volonté globalisante. Cette dernière aboutit à une crise sur les fondements alors que règne l'idéologie du Progrès.

Les Philosophes, depuis l'ère des Lumières jusqu'à la fin du XIXème siècle, ne basent plus leurs jugements sur la mathématique du temps, mais sur une mathématique passée qui terminerait d'ailleurs les Mathématiques. Interpellé par la crise des fondements, le discours philosophique, s'il enveloppe l'effervescente Logique Mathématique, en a été évacué.

Une maîtrise quantifiée des paradoxes de l'infini s'offre le luxe de nouveaux édifices axiomatisés comme l'Analyse Fonctionnelle, la Topologie, l'Analyse constructive ou l'Analyse non-archimédienne. Ce triomphe de la formalisation aboutit à une conception de la Mathématique comme d'un jeu. Une tentative d'exposé linéaire des mathématiques, en refusant la démarche dialectique, ne peut aboutir et offre surtout un intérêt pédagogique.

L'angle de vue extérieur, du philosophe au psychanalyste en passant par le pédagogue, passe alors de la Mathématique au mathématicien.

L'étude historique et épistémologique détaillée de la notion de Nombre Réel montre que le Mathématicien, autrefois, ne formalisait qu'après avoir rencontré une irrégularité extérieure à sa pensée première et dans la mesure où il avait forgé un outil d'attaque de cette difficulté. C'est ce qui advint avec les irrationnels, avec les limites, pour le continu et pour l'infini, etc. - toutes notions dont la maîtrise est indispensable si l'on veut constituer un formalisme autour des réels. <u>Quelquefois, l'outil et même l'irrégularité perdent leur transparence dès la formalisation opérée</u>. S'il existe un monde des Idées Mathématiques, n'est-ce pas celui des irrégularités et des outils tout autant que celui des formes ?

Un tel résumé survole un grand nombre de faits que nous avons essayé d'analyser dans les volumes 3 et 4 de la Collection Nanta Iremica (Etude épistémologique et historique des idées de nombre, de continu et d'infini).

Ceci étant, et à moins d'être un fervent adepte de l'Epistémologie génétique, il reste le problème de l'Enseignement de l'Analyse d'une part, de la manipulation des nombres (rationnels, décimaux, réels) d'autre part. Je ne voudrais pas empiéter sur les discussions des divers sous-groupes de ces Journées, notamment sur le deuxième point. Je me contenterai donc d'indications générales, regrettant vivement que très peu de participants aient été intéressés par le projet d'un groupe de travail sur la relation concret-abstrait en Analyse et les blocages de langage qu'elle entraîne ; tant pis !

Parce que la manipulation, soi disant concrète, des ε et des δ provoque de mauvaises réactions, et parce que c'est la tendance innée de l'axiomatique qui règne actuellement, on veut algébriser l'Analyse. Soit ! En outre, on veut construire logiquement l'édifice. Soit ! Et ensuite, on vous fait le tour de passe-passe de la simplicité comme si les premiers éléments construits possédaient dans leur totalité les propriétés les plus simples. Ceci est visiblement faux pour l'Analyse puisque la Topologie usuelle du corps des rationnels est pathologique. Pour bien s'en persuader, un groupe de l'I.R.E.M. de NANTES a travaillé sur des espaces topologiques tels que $\mathbb{Q}$ et a essayé de dégager les idées abstraites sous la notion de limite (en éliminant le dénombrable, les ε, etc). Cela fait l'objet du volume 10 de Nanta Iremica (Analyse et Topologie).

Cela n'est pas d'une limpidité exemplaire ! En outre, pour montrer le mauvais genre du corps des rationnels, on exhibe des contre-exemples qui, neuf fois sur dix, présupposent l'image mentale du corps des réels sous-jacent ! Qu'on ne s'étonne plus de lire ici ou là que $\{x \backslash x \in \mathbb{Q} \ ; \ a \leqslant x \leqslant b \ ; \ a \neq b\}$ est compact !

Il me semble que, commencer par la Topologie de $\mathbb{Q}$ (et en plus la Topologie de l'ordre, c'est-à-dire, celle qui ne permet pas de visualiser par un dessin dans le plan et refuse donc le passage pourtant indispensable à deux variables), est une erreur pédagogique. La Topologie de $\mathbb{Q}$, la construction esquissée de $\mathbb{R}$ doivent venir en fin du cours d'Analyse. Agir autrement, c'est céder au prurit cartésien et postuler que le Collégien entre en classe de Mathématiques, la tête entièrement vide et prêt à tout construire à partir de zéro.

C'est faux ; d'abord parce que chaque Professeur a des prédécesseurs ; ensuite, parce que la construction à partir de zéro présuppose quand même les opérations autorisées de la théorie des Ensembles. Autant les insuffisances de la Géométrie Euclidienne me paraissaient difficiles à découvrir sur les bancs du Lycée, autant les paradoxes de la théorie naïve des Ensembles sont faciles à forger.

Bref, une fois encore, l'enseignement voudrait évacuer, dans un lointain mythique et inviolable, les fondements et, sur ces "bases", tout construire. Au contraire, quelques faits simples, constitutifs et caractéristiques de $\mathbb{N}$, et $\mathbb{R}$, suffisent pour pouvoir travailler.

Travailler comment ? Si l'on accepte les prémisses de l'algébrisation, il reste deux tendances :

- algébriser la notion de voisinage, éventuellement sous le langage enveloppant des filtres,
- en rester aux convergences de suites et donner une pratique basée sur des axiomes même redondants d'une notion notée $\text{Lim } x_n$.

Je n'ai justement pas envie de donner une liste d'axiomes, d'ailleurs caractéristique de la notion bien connue de limite. On imagine facilement qu'il convient de supposer la stabilité par addition, multiplication, et quelque chose qui se ramène aux suites adjacentes, aux segments emboîtés, etc.

De toutes façons, dans les deux méthodes, la notion de continuité devient une notion dérivée. Mais, nous en reparlerons lors de ces Journées. De toutes façons aussi, les deux méthodes éliminent les considérations vaseuses de fonctions qui ne pour-

raient être continues que sur un intervalle ouvert (mais non sur la réunion de deux tels intervalles !), sur l'importance donnée à la continuité à gauche et autres maladies éruptives qui, je l'espère, ne sont que l'acné de l'enseignement mathématique rénové.

Il ne me semble pas raisonnable, pour conclure, de trancher entre les deux tendances par de seuls arguments mathématiques. Ce qui me paraît assuré, c'est la tendance à l'algébrisation. Rendra-t-elle apparentes les difficultés ou les noiera-t-elle dans un brouillard pédant ?

Ajoutons que l'emploi de plus en plus commun de petits calculateurs de poche, et l'uniformisation du langage par l'algorithmique liée à l'Informatique, imposent pratiquement une telle algébrisation.

Le débat est ouvert.

QUINZE APOPHTEGMES

(pour amorcer débats autour des Réels)

G. Th. GUILBAUD
(Paris)

1. Pour beaucoup de gens, quand on dit "nombres", c'est "réels" qu'ils entendent. Car il y a bien d'autres espèces numériques. Comment diffuser un catalogue raisonné et pas trop pédant (pour tous !).

2. Pour rajeunir le Cinquième Elément Euclidien, parler de : Vernier, Gammes musicales, Nombres normalisés (Renard), etc. La technologie avec nous !

3. Quelques grands noms : Eudoxe, Stevin, Neper, du Bois Reymond, Lejeune-Dirichlet, Baire,... (les autres : tout le monde y pense).

4. Structures non-archimédiennes. Commencer par des textes de Pascal. Parcourir : les péadiques, les corps de Hardy, l'analyse robinsonienne,... A quoi ça sert ?

5. Non partes sed termini (Leibniz) : les points ne sont pas partie de la ligne. Léonard de Vinci dit la même chose. Que veulent-ils dire ?

6. Peano disait Q là où nous disons R, et R pour notre Q. Relire le Formulario.

7. Paradoxes. Il ne faut pas en abuser. Mais surtout distinguer ce qui porte sur l'ordre (Cantor et la suite) et ce qui porte sur la mesure (Borel est un bon guide, ainsi que Lebesgue et Baire).

8. Quand on parle "mesures" (dans le public non-mathématicien) on vise une qualification numérique, avec une structure. Laquelle ? Est-ce l'ordre ? l'addition ? les deux ? autre chose ? Prenez les Réels dit-on, pour avoir la paix ; (les réels comme tranquillisant).

9. Le comparatif et le superlatif : comment ils fonctionnent dans la langue et comment chez les réels (majorant, maximum, supremum).

10. Quels sous-corps de R connaissez-vous ?

11. Le rôle des carrés et des non-carrés dans un corps (corps pythagoriciens, théorème d'Artin et Schreier, etc. etc.).

12. Pour plaider l'utilité de R : exponentielles et logarithmes se vendront mieux que la géométrie.

13. On ne calcule guère dans R. Les informaticiens disent "REAL" mais c'est pas vrai !

14. On me dit "R" : je connais pas ! Car je fréquente, selon la saison :
    Soit (R, < , =) : l'ordre Thêta cantorien
    Soit (R, < , = , + , - , 0) : un abélien ordonné
    Soit le corps R
    Quand a-t-on "réellement" besoin de l'un ou l'autre ?

15. R se situe (comme ordre, comme groupe, comme corps) parmi d'autres structures analogues et différentes. Avis aux pédagogues.

LES MATHEMATIQUES DES ENSEIGNEMENTS ELEMENTAIRE ET SECONDAIRE

J. LERAY
Collège de France

[Ce document ne s'intéresse pas à l'Analyse en particulier, mais représente un courant actuel dont il serait excellent de mesurer les conséquences au niveau de l'Analyse.

Un travail possible serait d'écrire "à la LERAY", en ne prenant que des exemples tirés des notions de limite, de continuité, etc.]

Durant la période de scolarité obligatoire, l'enseignement des mathématiques doit être étroitement associé à celui de la physique et de la technologie. Le Programme de géométrie des classes de 4ème et 3ème , dont le contenu est celui que lui que lui prête un Commentaire ministériel aberrant, doit être profondément modifié : c'est l'observation et non la déduction qui peut réveler les faits géométriques aux enfants de 14 ans.

Seul le second cycle de l'enseignement secondaire doit procéder à la construction logique des diverses géométries usuelles. Il importe de ne pas modifier brusquement les programmes des classes préparant à des examens.

L'interprétation des programmes par les Inspecteurs généraux, les manuels et les enseignants est sujette à des erreurs psychologiques et scientifiques fréquentes et graves ; leur correction est difficile ; elle exige une solide formation scientifique des futurs enseignants ; elle exige aussi une nouvellle structure administrative.

1. LA NATURE DE L'ENSEIGNEMENT . - L'école fait comprendre à l'enfant le monde qui l'environne. Comprendre c'est, étymologiquement, "prendre dans ses mains" c'est saisir. L'enfant ne comprend que ce qu'il manipule, l'adolescent ce qu'il observe, le jeune homme ceux des concepts auxquels il dut recourir pour observer ; car observer c'est schématiser le concret, autrement dit l'abstraire. L'enseignement des mathématiques ne peut donc pas être dissocié avant l'adolescence de celui des sciences d'observation.

- La loi de Mariotte motive l'étude de la fonction : $v \mapsto \frac{c}{v}$.
- La dilatation thermique celle de la fonction : $t \mapsto c + k\,t$.

- Sur le banc d'optique la fonction objet $\mapsto$ image est homographique (involutive dans le cas élémentaire d'un miroir ou d'une lentille). L'intérêt de cet énoncé est d'être simple et conforme à l'expérience ; on peut, on doit même d'abord, l'enseigner sans le déduire des lois de la réflexion et de la réfraction.
- Empiriquement l'enfant connaît la force-vive d'un véhicule et son accélération centripède dans les virages ; leur proportionnalité au carré de la vitesse explique le danger de la vitesse et motive l'étude de la fonction $v \mapsto c\,v^2$ avant l'âge de conduire l'auto, dés l'âge du vélo.
- Enfin la notion de vitesse, qui intéresse l'enfant, est identique à celle de dérivée.

L'acquisition simultanée à partir de l'expérience de notions physiques et mathématiques apparentées développe tout ensemble l'intelligence, l'habileté manuelle et l'expression de la pensée. Elle fait rapidement reparcourir par l'enfant et l'adolescent les voies qui conduisirent, jadis, très lentement l'homme à comprendre, agir, parler. De même, pour se former, l'être humain a dû revivre à l'état embryonnaire l'essentiel de l'évolution qui créa son espèce. Toutefois l'acquisition des connaissances est influencée par un environnement qui évolue vite. L'enseignement doit constamment s'adapter au présent.

2. DEUX "CRIMES". - L'enfant a besoin d'être actif et d'être guidé.

Il était inhumain de lui imposer l'esclavage physique de nombreuses heures quotidiennes de cours dictés. C'est, aujourd'hui encore, un gaspillage inhumain de temps et de peine que la répétition monotone d'exercices d'un même type, que l'enseignement de vérités imposées, de formules et d'énoncés à apprendre par coeur, alors que l'élève doit apprendre à les reconstituer.

- Le bachotage contraint encore l'adolescent à l'étude monotone des signes de nombreux "trinômes".
- Actuellement certains enfants sont à longueur d'année astreints à effectuer des changements de base de numération. Est-ce afin d'enchaîner à des tables les enfants dont on a la garde ? . Est-ce pour avoir entendu dire que les ordinateurs emploient la base 2 et croirait-on que leurs utilisateurs aient à leur fournir des données dans cette base ?. Quelques changements de base suffisent pour que l'enfant comprenne mieux 1) le principe de la numération décimale 2) l'utilité de la division

des entiers.

- De tout temps des examinateurs dangereusement exigeants sanctionnent les élèves n'appliquant pas " la formule", même si le problème est choisi tel que sa solution n'exige pas l'emploi de "la formule".

Il est non moins inhumain d'abandonner un élève aux balbutiements de sa propre créativité, aux propos oiseux d'un groupe de condisciples, à des occupations trop puériles pour son niveau intellectuel, même si cette puérilité s'exprime en un langage précieux . Aider efficacement des éléves à élaborer la solution correcte d'un problème, mathématique ou non, à la présenter et à la rédiger correctement , n'est-ce pas la meilleure façon de leur apprendre à créer?

L'instituteur (Freinet) qui, en observant le comportement d'enfants, comprit l'importance de la créativité dut quitter l'Education nationale ; aujourd'hui, en commentant ses méthodes en l'absence d'élèves, ne craint-elle pas de les altérer ?.

Ces diverses erreurs prouvent que beaucoup d'enseignants ont besoin de discuter les problèmes psychologiques et scientifiques qu'ils rencontrent avec des collègues de tous les ordres d'enseignement, en toute simplicité ; ils doivent être autorisés à inviter certains d'entre eux dans leur classe.

3. UNE FAUTE "pire qu'un crime" est la confusion de la pensée scientifique contemporaine et du mode de pensée de l'élève. C'est méconnaître et la science et l'enfant que lui répéter des fragments des cours d'Universités : l'écolier n'est pas un savant à l'échelle réduite.

Or un texte officiel (Bull. offic. Educ. nat., n°45, 2 déc. 1971, p 2.886) recommande d'initier l'élève de 4 éme, âgé de 14 ans, à la géométrie en les termes suivants :

" Une droite euclidienne D est un ensemble E

" muni d'une famille F de bijections de E sur R

" telle que, pour tout élément f de F et pour

" toute constante réelle a, les applications

" définies par $g(M) = f(M) + a$ et $g'(M) = f(M) - a$

"appartiennent aussi à F ; et réciproquement..."

Ce texte énonce une vérité banale pour le mathématicien professionnel. Mais le Ministre qui l'a promulgué et son successeur ont eu la sincérité de reconnaître qu'il dépasse leur entendement, donc, certainement, celui des écoliers de 14 ans ; ces deux Ministres l'ont cependant maintenu en vigueur.

Imposer d'autorité des vérités scientifiques à des enfants, qui ne pourront que les répéter sans les comprende, et construire la géométrie sur de telles pierres angulaires a les conséquences sociales les plus graves.

> D'une part c'est écarter des études scientifiques et techniques tous les enfants intelligents qui n'ont pas le privilège d'être rassurés par un adulte capable de les avertir et les convaincre qu'ils ont raison de ne pas comprendre ce qu'on leur enseigne. D'autre part c'est pousser vers ces études les enfants les plus inaptes à les faire : ceux qui apprennent par coeur et récitent sans comprendre.

Cette faute pédagogique résulte d'une erreur scientifique, que nous dénoncerons ci-dessous ; elle prouve le danger de vouloir conformer l'enseignement à la science quand on la connaît mal : les enseignements élémentaire et secondaire ont absolument besoin qu'une partie de leurs maîtres et professeurs aient une solide culture scientifique : l'Université seule est capable de la procurer.

4. L'ESOTERISME de l'actuel enseignement mathématique élémentaire et secondaire lui est néfaste : cet enseignement devrait employer le langage courant, en le complétant seulement par des termes indispensables, employés par les utilisateurs des mathématiques. Un excès de définitions non motivées et que l'école laisse sans application est un non-sens, même si leur importance scientifique et technique est indiscutable.

La définition d'une notion mathématique a pour mobile et justification la diversité des applications qui en sont faites . On ne doit donc introduire une notion qu'au moment où, ayant déjà rencontré quelques uns de ses emplois, on va en rencontrer d'autres, d'un intérêt certain.

Faute d'avoir respecté cette règle, l'enseignement mathématique élémentaire et secondaire s'est à la fois alourdi et stérilisé.

- Le texte ministériel que cite le n° 3 distingue trois sortes de droite : la droite physique, la droite euclidienne et la droite affine ; ces adjectifs donnent à la notion de "droite" des sens absolument différents du sens qu'il a à la fois dans le langage courant, en physique et en technique ; nous verrons qu'il en va de même pour bien d'autres termes : l'écolier est contraint d'employer en classe de mathématique un jargon en désaccord avec la langue française.
- La notion de droite euclidienne, définie par ce même texte, attache, de façon immuable, à chaque "droite" une unité de longueur qui lui est propre ; c'est en contradiction avec la géométrie classique, la physique et la technique ; cela complique et obscurcit le changement d'unité de longueur.
- L'enseignement élémentaire fait longuement jouer les enfants avec des ensembles finis pour leur faire acquérir la notion de nombre d'éléments d'un tel ensemble et par là-même la notion de nombre naturel ; mais il rend ces jeux moins efficaces en substituant à l'expression "nombre d'éléments d'un ensemble" le terme savant "cardinal d'un ensemble", dont la logique mathématique n'a besoin qu'à propos d'ensembles infinis (et qu'elle oppose au terme "ordinal"), mais qu'ignorent les autre sciences, les techniques et le langage courant.
- Il y a plus grave : l'enseignement secondaire s'est créé une langue mathématique qui lui est propre, qu'il nomme "mathématiques modernes", que la science mathématique, les autres sciences et les techniques ignorent ; souvent les examens contrôlent moins les connaissances mathématiques authentiques des éléves que l'emploi qu'ils font de ce jargon : par exemple au lieu de demander à un enfant toutes les solutions d'une équation , on lui demande de "définir en extension l'ensemble des solutions d'une équation" (ces termes n'appartiennent pas au langage scientifique) ; ou bien on lui demande de distinguer le sens des termes "fonction" et "application" qui sont synonymes dans le langage scientifique authentique ; on exige qu'il écrive tantôt cos, tantôt Cos.
- Certains professeurs du secondaire imposent même à leurs élèves des termes qu'ils ont créés, des vues qui leur sont propres et que seul leur enseignement emploie. (Cette paranoïa a pu contraindre le professeur de physique d'une classe terminale à inclure dans son propre enseignement les mathématiques qui lui sont nécessaires !)

Les quelques signes d'aliénation que présente actuellement l'enseignement mathématique secondaire s'aggraveront, s'il est chargé de former lui-même ses professeurs.

Ces signes montrent l'urgence de débarrasser l'enseignement mathématique élémentaire et secondaire de ses maladresses et aberrations actuelles ; cela réduira son volume, parfois considérablement ; il sera donc possible de réintroduire dans cet enseignement des notions qu'il dédaigne maintenant d'enseigner, quelque utiles qu'elles soient.

5. DES RETOUCHES DE L'ENSEIGNEMENT actuel sont donc necessaires.

Bien entendu, le temps n'est plus où, pour pouvoir gagner leur vie dès 12 ou 14 ans, les enfants devaient être exercés à compter comme des mécaniques. Actuellement, il est primordial que l'enfant assimile parfaitement la notion de nombre naturel, donc manipule des ensembles finis. L'école maternelle l'a toujours su et a créé dès le 19 ème siecle les jeux appropriés. Il importe qu'en participant à ces jeux le maître emploie les termes scientifiques : le langage ensembliste. Cela consiste à ne pas parler d'un tas de cubes, d'un groupe d'enfants, mais d'un ensemble de cubes, d'un ensemble d'enfants ; à ne pas mettre l'un avec l'autre deux tels groupes, mais à réunir deux tels ensembles ; à compter le nombre de leurs éléments (sans lui donner, prématurément et malencontreusement, son nom savant : "cardinal") ; à introduire les notions d'intersection, d'ensemble vide, de bijection. L'école doit enseigner ce vocabulaire comme tout autre par le bon usage qu'elle en fait; il ne s'agit point là de "la théorie des ensembles" ; nous l'expliqueront ultérieurement. Ce vocabulaire ne doit pas faire l'objet de chapitres spéciaux, ressassés inutilement au début de chaque année scolaire ; ses termes ne doivent pas être l'objet de schématisations systématiques : la vraie mathématique n'abuse ni des bijections, ni des flèches ; elle ignore les " diagrammes de Venn" : définir un ensemble, ce n'est pas "mettre une ficelle autour" . Un ensemble ne doit être défini que s'il y a quelque intérêt à le faire : tels l'ensemble des maîtres et celui des élèves de l'école, celui des habitants de l'agglomération, de la France, de la Terre.

L'enfant d'aujourd'hui doit pouvoir manier de très grands nombres (alors que l'enfant de la Grèce antique avait une numération qui s'arrêtait à dix mille, synonyme alors de l'infini). Il doit pouvoir discerner le plus nombreux de deux ensembles par les propriétés suivantes : un ensemble fini ne peut être mis en bijection avec l'une de ses parties propres ; si l'ensemble e peut-être mis en bijection avec une partie propre de l'ensemble fini E , alors e est moins nombreux que E.

La propriété que nous venons de souligner caractérise les ensembles finis ; il importe que l'enfant constate qu'elle n'est pas vérifiée par le seul ensemble infini qu'il connaisse, celui des nombres naturels : l'addition d'un nombre > 0, la multiplication par un nombre > 1 le mettent en bijection avec l'une de ses parties propres.

Nos sens n'observent pas l'infini ; c'est notre esprit qui le conçoit. Nous devons révéler à l'adolescent, en classe de 4 ème, qu'il peut concevoir l'infini et raisonner sur l'infini. En acquérant les notions fondamentales de la géométrie (point, droite,etc.) grâce au dessin géométrique, en acquérant la notion de nombre réel grâce au développement décimal, l'adolescent se familiarisera avec suffisamment d'exemples d'ensembles infinis pour concevoir enfin la notion d'ensemble infini ; Elle appartiendra à son vocabulaire ; il la maniera avec bon sens.

- Ce bon sens le gardera des écueils sur lesquels la théorie des ensembles resta longtemps échouée : il suffit en effet de croire qu'on peut concevoir "l'ensemble de tous les ensembles" pour aboutir rapidement à des contradictions.
- Les éviter en toute logique requiert la théorie des ensembles, c'est-à-dire la logique mathématique, qui définit la notion d'ensemble par un choix d'axiomes ; ce choix n'est pas unique : de même existent plusieurs choix des axiomes de la géométrie, définissant la géométrie euclidienne, la sphérique et celle de Lobatchevski.
- L'enseignement secondaire a bien mal évité les dangers que recèle la notion d'ensemble infini : tel manuel cite, à titre d'exemple, "l'ensemble des propriétés d'un élément", notion aussi absurde que celle de "l'ensemble de tous les ensembles"; d'autres font des raisonnements faux , parce qu'ils ne font pas état de la propriété caractéristique des ensembles finis.

L'on voit quelle erreur pédagogique commet le texte ministériel que cite le n°3 : l'adolescent ne peut concevoir la notion générale d'ensemble infini avant d'avoir conçu les ensembles infinis dont la géométrie est l'objet.

Ce texte contient aussi une erreur scientifique : on ne peut définir la géométrie à partir de la notion d'ensemble infini que si l'on a défini cette notion par les axiomes qui constituent la logique mathématique ; or la compréhension de ces axiomes exige une puissance d'abstraction dont ne dispose aucun adolescent et que seule l'Université peut faire acquérir à certains étudiants.

> Ce texte ministériel signifie ceci : puisque l'adolescent a longuement joué, enfant, avec des ensembles finis et s'est ainsi familiarisé avec le langage ensembliste, on peut sans précaution, sans préavis, par surprise, lui faire appliquer ce langage aux ensembles infinis ; à cette fin, on le laissera ignorer quelle différence existe entre les ensembles finis et infinis. C'est croire qu'un abus de langage artificieux peut remplacer l'acquisition d'une notion, qui se trouve être l'une des plus difficiles conquêtes de l'esprit humain. Ce faisant, on trouble les plus intelligents de nos adolescents et on les prive d'un plaisir intellectuel.

Il est donc capital de débarrasser, à partir de la classe de 4 ème. l'enseignement de la géométrie du verbiage mystérieux et nocif dont on l'a gonflé. Durant la période de scolarité obligatoire, l'adolescent ne peut découvrir les faits géométriques fondamentaux par voie déductive ; il n'est apte qu'à les observer, puis à raisonner sur eux, en particulier à calculer sur les grandeurs géométriques qui interviennent en physique et en technique : vecteurs (centres de gravité) ; longueurs de segments ; produits scalaires (travail de forces) ; produits vectoriels (aires) ; longueurs d'arcs de courbes et de cercles (isométrie : droite $\rightarrow$ courbe) ; angles (non orientés et orientés) ; lignes trigonométriques ; relations métriques ; changements d'unités. Il est essentiel que l'adolescent maîtrise le langage géométrique qui régit toutes les branches des mathématiques et leurs applications, et qui, en tous domaines, est le meilleur guide de l'intuition. Enfin, il est bon de lui faire comparer les deux géométries qu'il peut observer : la géométrie euclidienne, où existe un transport parallèle, permettant de calculer la somme des angles d'un polygone plan ; la géométrie sphérique (celle de notre globe terrestre) où l'équateur et deux méridiens définissent des triangles dont la somme des angles excède évidemment deux droits.

Ce n'est qu'après la période de scolarité obligatoire que l'enseignement secondaire pourra employer le concept d'ensemble infini, l'algèbre et le calcul différentiel pour étudier par voie déductive et non plus empirique l'espace euclidien et quelques autres espaces : vectoriels, affines.

> Note. - Au sujet des mathématiques dans l'enseignement élémentaire, M. DUMA, Inspecteur général de l'Enseignement élémentaire, a présenté un excellent rapport, en janvier 1973, à la Commission que présidait M. A. Lichnerowicz.

6. PEDAGOGIE - Un professeur perfectionne son enseignement en observant les réactions des élèves quand il renouvelle et varie son enseignement : c'est en classe que se découvre la pédagogie.

- Elle ne consiste pas à traiter l'enfant en adulte à petite échelle (par exemple en réglant l'un de ses jeux par un procédé d'informatique).
- Elle ne consiste pas à choisir pour matières d'enseignement des jeux mathématiques (qu'on trouve dans des recueils classiques de "mathématiques amusantes").
- Elle ne consiste pas à faire subir à l'enfant un dressage analogue à celui d'un animal savant.

Elle consiste à découvrir l'activité qui peut satisfaire actuellement la curiosité des enfants d'un certain âge. Cette recherche peut être facilitée par des discussions avec les personnes les plus diverses.

- Le maître ne peut intéresser l'élève que si ses propos sont simples et clairs, donc exprimés en français : ≪ x = y ≫ est une phrase grammaticalement correcte, de sujet x, de verbe = ,... L'abus des abréviations et symboles (par exemple une suite de quantificateurs) n'est que jargon.
- Le maître doit choisir le degré de rigueur qui convient à l'élève et non celui auquel il a lui-même accédé : la science accroît sa rigueur quand son progrès l'exige ; elle ne peut avoir une rigueur absolue, même si elle en donne l'illusion

aux esprits superficiels.

- La solution générale d'un problème général est souvent peu maniable ; la mathématique est aussi l'art de mieux résoudre chaque problème particulier : il n'est point de problème résolu, mais seulement des problèmes plus ou moins résolus.
- L'élève doit comprendre qu'employer les mathématiques, c'est schématiser les problèmes concrets en problèmes mathématiques qu'on puisse résoudre. C'est manier la notion d'approximation, c'est-à-dire de voisinage. C'est estimer les conséquences des manques de rigueur.

La recherche n'est pas, comme la lecture d'un traité, la découverte d'une suite de vérités. Elle consiste à énoncer, abandonner souvent, réussir parfois à prouver des jeux d'hypothèses. Enseigner les mathématiques, c'est enseigner l'art de déceler ses propres erreurs et le courage de les corriger.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE EN QUESTION ?

Rédaction provisoire d'un dossier établi par le Groupe "Analyse" de l'I.R.E.M. de LYON.

I — Rappel des objectifs du groupe :

1. Bilan de l'enseignement actuel de l'analyse (résultats, points forts et points faibles).
2. Etude critique des manuels actuels, des programmes et de leurs commentaires, du bac.
3. Rédaction de documents (cours, exercices) à l'usage des enseignants dans le cadre des programmes actuels.
4. Recherche des noyaux—thèmes possibles pour un enseignement de l'analyse dans le second cycle.
5. Connaissance souhaitables pour les enseignants. Réflexion en conséquence sur la formation initiale et permanente.
6. Eventuellement, approfondissement mathématique de tel ou tel point ; historique d'une notion.

II — Les diverses activités du groupe :

A) Les Réels :

Durant tout un semestre, l'activité du groupe a consisté à s'interroger sur R, fondement de l'analyse dans le second cycle des lycées.

Les questions posées :

1) Qu'en disent les programmes et leurs commentaires ?
2) Qu'en disent les manuels ?
3) Qu'en connaissent les élèves ?
4) Que faut-il connaître de R pour comprendre l'analyse enseignée au lycée ?
5) Quelles sont les diverses constructions de R ?
6) Quelle est l'histoire de R ?

Réponses ou débuts de réponse :

1) De fil en aiguille, le groupe a été amené à remonter jusqu'à l'école primaire pour étudier la vision de R donnée par les programmes successifs.

E.P. ★ Les activités de mesurage commencent au Cours Elémentaire , et c'est au Cours Moyen qu'apparaissent pour la première fois les nombres décimaux, les fractions et les encadrements.

P.C. ★ En Sixième, R intervient dans quatre paragraphes sur cinq du programme:

II Nombres entiers et décimaux

III Etude d'objets géométriques et physiques donnant lieu à mesures (choix d'une unité, ordre de grandeur, encadrement)

IV Méthodes de repérage

V Nombres relatifs

Le programme de cinquième développe l'étude des nombres relatifs (entiers et décimaux) au niveau opératoire, et introduit la valeur absolue.
Les commentaires du cycle d'observation insiste bien sur le point de départ concret et expérimental qui s'impose, ainsi que sur l'importance des travaux pratiques.

En Quatrième , c'est l'approche des réels par l'intermédiaire des encadrements en décimaux. La droite mathématique est mise axiomatiquement en bijection avec R (les graduations).

En Troisième , R devient un corps totalement ordonné, et Q s'introduit comme simple sous-corps de R. On commence à résoudre des équations et des inéquations, à utiliser des tables numériques.

Ces programmes de Quatrième et de Troisième ont fait couler beaucoup d'encres. La dernière circulaire en date, (19/2/73) déclare :

"Il importe :
— de maintenir et d'enrichir la pratique du calcul numérique, de familiariser avec l'usage des tables ;
— de préparer aux techniques utiles aux autres disciplines ;
— de savoir poser et résoudre des problèmes

...... "

S.C. ★ En Seconde , le paragraphe II s'intitule: Introduction à l'analyse.
Il commence par des révisions de quatrième et de troisième sur R et les calculs numériques.

La circulaire du 6/4/71 rappelle "l'intérêt et l'urgence d'un enseignement méthodique et persévérant du calcul".

En Première , on ne revient plus sur R en tant que tel, sinon à propos des calculs numériques, des résolutions d'équations et d'inéquations, et des notions de continuité, limite, dérivation.

En Terminales A et B , on ne revient pas sur R .

En Terminales C , D et E , on entre dans la structure fine de R en le caractérisant par la propriété de la borne supérieure.
Un paragraphe détaillé traite du calcul numérique.
Mais celui-ci figure dans les allègements qui sont reconduits d'année en année ...

2) *R dans les manuels*

Le groupe n'a pas cherché à faire une analyse fouillée de tous les manuels sur la question, en utilisant par exemple la grille de l'A.P.M. . Il s'est limité aux sections C du second cycle, et à quelques auteurs seulement.

Les quelques remarques qui suivent ont donc un caractère très partiel.

⋆ Les livres que M. Monge (Ed. Belin) a pris la précaution de faire écrire à une jeune équipe d'enseignants se caractérisent par un exposé très sec et très dogmatique des notions du programme, desquelles on ne s'écarte pas . Il y a peu d'exemples d'illustration. Les exercices sont rassemblés en fin de chapitre, en nombre assez important, mais en y regardant de plus près, ils sont presque tous du même type (exercices d'exposition ou didactiques), et ils sont bien plus nombreux quand il s'agit d'illustrer une technique que de faire comprendre une notion.
Dans le Monge de Première C , aucun chapitre, aucun rappel sur R : le programme n'en parle pas non plus.

Tiré du Monge de Terminales C, voici deux phrases donnant le ton d'une certaine pédagogie :

— "Nous rappelons quelques notations: N (...) , Z (...) , Q (...) , R (...) . Tous ces nombres sont bien connus du lecteur qui sait les manipuler depuis plusieurs années ..."
— "Conformément au programme, nous nous contentons d'énoncer d'abord *les** propriétés fondamentales de R, puis de démontrer *les** conséquences de ces dernières".

Mais il faut reconnaître à ces manuels leur présentation claire et rigoureuse, ce qui en fait un bon aide mémoire pour les élèves.

⋆ Les manuels de la collection P. Vissio, chez Delagrave, ont une originalité qui mérite dêtre rappelée:

— découpage du programme en thèmes autonomes, un chapitre par thème;
— chaque chapitre est précédé d'une introduction motivant l'étude du thème;
— chaque définition est également motivée et précédée d'exemples;
— nombreux exercices en cours et en fin de chapitre, résolus ou accompagnés d'indications;
— brèves notices historiques.

* souligné par nous

En Seconde, Première et Terminales, plusieurs chapitres sont consacrés à R , qui est étudié sous un double point de vue :

— *point de vue de l'algèbre* : R n'est pas construit, mais présenté comme une extension nécessaire de Q; c'est pourquoi l'introduction de R est précédée de la construction et de l'étude minutieuse (et hors programme) de Z et de Q (même de N en Terminale C !).

— *point de vue de l'analyse :* les notions topologiques (hors programme) d'ouverts, fermés, voisinages sont introduites, ainsi que $\overline{R}$. Comme il y a très peu d'exercices correspondants, on peut se demander si ces notions ne sont pas introduites un peu trop tôt.

Ces manuels sont un remarquable outil d'exposition, bien motivant pour celui qui veut se passionner pour les mathématiques, et très (trop ?) fouillé. C'est plus un livre du professeur que de l'élève.

3) *R et les élèves*

On lira ci-joint le compte-rendu de l'enquête que nous avons mené auprès d'élèves et d'étudiants de tous niveaux et de toutes sections à partir de la troisième.

4) On ne peut répondre à cette question qu'après avoir examiné de plus près quelle analyse on doit enseigner en première et en Terminales.
Nous y reviendrons.

5) *Constructions de R*

Nous n'avons fait que les évoquer: à partir des décimaux, à partir des suites de Cauchy, à partir des coupures de Dedekind.
Il n'est pas question de construire R dans le secondaire, mais un enseignant ne peut se permettre d'ignorer le problème.
On trouvera une étude assez détaillée des développements décimaux des Réels dans le document de F.C.: "les nombres réels" ainsi que dans l'article de DEHAME (Bulletin de l'APM numéro 275—276).

6) *Histoire de R*

Il peut être bon de se reporter à la note historique de Bourbaki concernant les réels, et aussi à :

* la correspondance de Dedekind à Lipschitz, où apparaît nettement en quoi Dedekind a véritablement construit R, et ce qui le distingue d'Eudoxe et de sa théorie des rapports de grandeur
("Sur l'histoire des Sciences" de M. Fichant et M. Pécheux (Maspero)).
* le concept de réel, in "les idéalités mathématiques" de J.F. Desanti (Seuil) où le philosophe nous montre bien en quoi R se distingue du "continu géométrique".

B L'analyse proprement dite

L'enquête que nous avons menée et les réflexions des collègues du second degré sur les difficultés qu'ils rencontrent dans l'enseignement de l'analyse incitent à faire un constat d'échec, puis à se demander si cet échec tient aux contenus, aux méthodes ou aux deux, puis à faire des propositions pour améliorer cette situation.

C'est pourquoi nous examinerons successivement les points suivants :

1) Quelle analyse nous fait-on enseigner ?
2) Quels sont les objectifs déclarés de cet enseignement de l'analyse ?
3) Quelles sont les difficultés rencontrées par les collègues dans l'enseignement de l'analyse ?
4) Quelles propositions peut-on faire ?
5) Quelles sont les documents actuellement rédigés par le groupe ?

1) *L'analyse dans les programmes*

Elle se résume à quatre mots : *continuité* — *limites* — *dérivation* — *intégration* (sauf en terminale A où ne figure pas l'Intégration).
Il s'agit de fonctions numériques d'une variable réelle, avec interprétation géométrique ou cinématique, et éventuellement extension aux fonctions vectorielles d'une variable réelle.
Les suites ne sont considérées que comme cas particulier des fonctions numériques.
Ces notions ont pour but l'étude locale et globale des fonctions numériques .
Il s'agit de savoir construire une représentation graphique, avec quelques tangentes, et éventuellement faire un calcul d'aire ou prouver l'existence d'une racine à une équation.
Quelques applications à la physique sont mentionnées à propos de la cinématique et du calcul intégral.

2) *Objectifs*

A part les objectifs immédaits s'exprimant en terme de savoir et de savoir-faire énoncés au paragraphe précédent, il n'est peut-être pas inutile de rechercher les objectifs de l'enseignement des mathématiques prônés par les rédacteurs des divers commentaires ou instructions.
Il y a d'abord "l'objet de l'enseignement du second degré", qui date de 1938.
"Viser à former l'esprit et à donner une culture générale; favoriser le libre et complet développement des facultés; cultiver chez l'enfant tout ce qui fait l'excellence de l'homme: l'intelligence, le coeur, le caractère, le sens moral, le goût du bien".
"Est-il nécessaire d'ajouter qu'un bon enseignement des mathématiques loin d'inciter l'élève "à mépriser ou à méconnaître (...) les valeurs spirituelles : l'art, la pensée, le désintéressement, l'enthousiasme, la foi", le mettra au contraire à même de comprendre (...) le rôle de ces "impalpables leviers" dans tous les domaines du travail, de l'effort et de la persévérance ?"

En Seconde C : " (...) il s'agit d'éveiller ou de développer les aptitudes scientifiques de tous les élèves de Seconde C, dans une parité de bon aloi, et de les amener à déboucher, selon la vocation de chacun et dans une répartition équilibrée, dans l'une ou l'autre des sections C et D de la classe de Première".
(instruction du 6/2/70).
A propos des programmes de Terminales
"Sa seule exigence est qu'au terme de l'année scolaire les élèves aient compris et sachent utiliser les notions qu'il a énumérées.
Moderniser l'enseignement des mathématiques n'autorise en rien à s'affranchir du souci de leurs applications (...)"
"Donner aux futurs bacheliers les bases mathématiques solides et fécondes qui leur permettront d'aborder tels ou tels de ces domaines particuliers conduit à leur dispenser d'abord un enseignement général et de ce fait, tourné vers l'abstraction. Ce serait, toutefois, une erreur

de penser que, seules, comptent l'acquisition des concepts, la construction des théories à partir d'axiomes au choix habile et laborieux: la science mathématique ne peut se passer d'utiliser des techniques, qui doivent faire, dès lors, l'objet d'un enseignement et d'un entraînement".
"Le baccalauréat est la sanction normale de l'enseignement dans les classes terminales".
"La physique utilisera selon ses besoins les notions élaborées par les mathématiques".
(circulaire du 26/7/71).

Voilà une interdisciplinarité conçue pour le moins à sens unique !

3) *Critique des programmes et difficultés d'enseignement*

a) Continuité

- Les élèves ont un bagage d'exemples nettement insuffisant pour appréhender correctement cette notion.
- Inutile d'insister sur la lourdeur de l'écriture de Cauchy, qui relève de la haute voltige dans les sphères de l'abstraction.
- Cette écriture n'a d'ailleurs pas le temps de devenir opératoire car toutes les propriétés des fonctions continues sont admises et il devient par la suite très rare de devoir faire appel à la définition, sauf dans certains sujets de bac particulièrement vicieux (Cf. Aix — Marseille — Série C — 1974).
- La discontinuité est peut-être plus simple à formuler (en termes d'intervalles), mais là encore on n'obtient pas une définition pratique.

b) Limite

- Cette notion s'introduit naturellement "à l'infini" pour les suites et les fonctions, et beaucoup moins naturellement en un "point fini", car la plupart des fonctions usuelles sont continues.
- La grosse difficulté dans l'enseignement de cette notion tient au vocabulaire: l'histoire nous a légué toute une conception mécaniste, et le fameux "tend vers" n'a pas fini de faire des ravages.
- L'introduction de $\overline{\mathrm{R}}$ ne semble pas s'imposer, car cela peut ajouter à la confusion.
- A noter que la définition donnée dans les commentaires de Terminales C pour limite d'une fonction en un point a est imprécise: avec une telle définition, il n'y a pas unicité de la limite si a est un point isolé.
- Les diverses extensions de la notion de limite conduisent à une quinzaine de définitions. Ce n'est pas une raison suffisante pour introduire les filtres, mais une notion unificatrice comme celle de limite suivant un ensemble d'intervalles peut rendre service.
- Les commentaires ne disent pas un mot de la limite d'une fonction composée: c'est pourtant de cette notion que l'on a besoin dans tous les calculs de limites par "changement de variable", dont certains manuels ne se privent pas sans se poser de questions sur la validité d'une telle méthode.
- Un certain nombre de limites s'obtiennent par encadrement (par exemple quand il n'y a un cosinus ou un sinus). On pourrait admette une fois pour toutes les propriétes (intuitives) suivantes:

si $\lim\limits_{x_0} f = \ell$ et si $g \leqslant f$ et si g a une limite en x_0

alors $\lim g \leqslant \ell$.

Et si $f \leqslant h \leqslant g$,

Si $\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} g = \ell$ alors $\lim\limits_{x_0} h$ existe et est égal à ℓ.

c) *Dérivation*

Voici une liste certainement non exhaustive de ce qui fait problème dans l'enseignement de la dérivation et de ses applications :

— le manque d'exemples de motivation aux notions de dérivée et de différentielle.
— la notation dy/dx
— la comparaison de Δy et de dy
— la notion de tangente ("verticale" ou non)
— la définition d'une fonction dérivée
— la notion de branche infinie, de direction asymptotique, d'asymptote. (Aucune méthode de recherche systématique ne doit, d'après les commentaires, être donnée aux élèves; certains sujets de bac semblent l'ignorer).
— les notions de convexité (et de point d'inflexion), qui nous semblent être à tort absentes des programmes.
— le fait que, pour chercher si f est dérivable en x_0, sachant qu'elle est dérivable "autour" de x_0, les élèves aient tendance à chercher $\lim\limits_{x_0} f'$, où la limite de f' à l'infini pour voir s'il y a une direction asymptotique.
— le peu de conformité entre la cinématique enseignée en mathématique et ce qu'en font les physiciens.

d) *Intégration*

— la définition de l'intégrale de Riemann est très délicate, quelle que soit la méthode, et très lourde dès que l'on veut démontrer la moindre propriété (ne serait-ce que pour les fonctions en escalier).
— on se demande vraiment l'utilité de cette notion quand on s'aperçoit que sa seule utilité est de servir de notation (d'ailleurs inutilement compliquée : que vient faire dx ? pourquoi ne pas se contenter de $\int_a^b f$?) à certaines fonctions primitives !
— mais l'intégration peut-elle se confondre avec la "primitivation" ? et est-elle l'opération inverse de la dérivation ?
— on trouve dans le programme ce "théorème" : toute fonction continue ou monotone par morceaux sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$! Cela peut être faux si f n'est pas bornée !
— Les applications de l'intégration à la physique ne sont pas tellement utilisables par les physiciens: ceux -ci continuent en effet à interpréter dx comme une "petite variation" de x, et on se demande pourquoi les élèves ont du mal à être rigoureux en mathématiques !

4) *Des propositions*

a) au niveau des objectifs et des programmes :

A l'heure où les finalités de l'enseignement des mathématiques sont loin de faire l'unanimité, il n'est pas question pour nous de proposer une solution dont l'élaboration nous dépasse (ne serait-ce que par son caractère interdisciplinaire).

Il s'agit d'indiquer simplement ici des directions de réflexion, à partir de quelques textes :

— La Charte de Caen, de l'APM
— Mission des IREM dans la Formation continue (Texte de la commission Nationale des IREM)
— Compte Rendu de la rencontre APM—IREM de Toulouse en décembre 1975 (Thème : dynamique des programmes et finalités de l'enseignement des mathématiques).

Quant aux programmes, il nous semble important de les envisager dans une perspective de noyaux (contenus minimums et comportements ~~à~~ exiger) et de thèmes (permettant d'atteindre les noyaux ; il en faudrait une liste surabondante dans laquelle chaque professeur n'aurait qu'à puiser).
Ce n'est qu'à plus ou moins long terme que se dégageront les idées essentielles de notre recherche.
A court terme, nous avons envisagé de mener de front deux types d'activités :

b) Mises au point théoriques sur certaines notions d'analyse, avec étude des retombées pédagogiques éventuelles.
C'est ainsi que des exposés ont porté sur :

- la notion de filtre
- la notion de différentielle

Un autre moyen de se poser des questions en analyse et d'essayer de répondre au test ci-joint.

c) Recherche de thèmes de motivation ou d'illustration

Exemples :

- Introduction de la fonction Log par les aires
- Approche de la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto x^2$ en seconde.

Autres thèmes à l'étude :

- les fonctions numériques en seconde
- les fonctions circulaires
- continuité et limites
- Dérivation et approximation

5) Les *réalisations du groupe "Analyse" de l'IREM de LYON*

Pour les professeurs

- Un document sur l'introduction de la fonction Log par les aires
- Un document sur la fonction $x \longmapsto x^2$ en seconde
- Un test d'analyse en 65 questions
- L'enquête sur R .

BIBLIOGRAPHIE

- les polycopiés de l'IREM de LYON d'ARSAC et de DIAZ
  surtout
  - les nombres réels (ci-joint)
  - Espaces métriques : introduction — définitions
  - Espaces métriques et applications continues
  - A propos de la notion de limite d'une suite ~~:~~ réflexion sur la notion de limite
  - Limites de points de vecteurs, de droites
  - Théorie complète de l'aire dans le plan (~~35 bis~~)
- les documents de BARRA et PENSEC (IREM de POITIERS)
  Fonctions
  Dérivation
- un document de l'IREM de BASSE--NORMANDIE
  Initiation à l'ANalyse (PORQUET — TOFFIN)
-

— une document de l'IREM de MARSEILLE (MOUCHE — JOLIMAITRE)
Motivation à l'étude des fonctions et à l'analyse du second cycle

— Divers articles sur la continuité dans les bulletins APM numéros 253, 258 , 278 , 283.

— "A propos des asymptotes" par R. MATAGNE (in Mathematica et Paedagogia n°62)

— "Sur l'acquisition des structures numériques en fin de 3e" (ci-joint)
(Enquête de l'IREM de Strasbourg in Educational Studies in Mathematics n°5)

— "Le premier enseignement de l'analyse" (PAPY)
(Presses universitaires de Bruxelles)

— "Leçons d'analyse mathématique" - ARLON 8 et 9 -
(par Frédérique PAPY - CBPM)

— "Eléments de topologie" par A. et G. REVUZ
(Le cours de l'A.P.M. t. III)

LE POURQUOI ET LE COMMENT DES NOMBRES REELS AU XIXe SIECLE

P. DUGAC
Université PARIS VI

Au dix-huitième siècle, on utilise en analyse, de façon systématique, les intégrales et les séries pour, entre autres, définir de nouvelles fonctions, développer les fonctions en séries entières et en séries trigonométriques, chercher les solutions des équations différentielles et calculer, avec une approximation donnée, les valeurs des fonctions en certains points. Ainsi les notions de limite et de convergence sont sous-jacentes à une partie importante des mathématiques de ce siècle. D'autre part, les démonstrations que l'on tente alors de certains théorèmes essentiels des mathématiques, tels que celui de d'Alembert-Gauss ou celui des valeurs intermédiaires, impliquent les propriétés qu'une fonction continue sur un sous-ensemble fermé et borné de $\underline{R}^2$ atteint sa borne inférieure et qu'une suite majorée admet une limite. De sorte que, d'une façon ou d'une autre, on se ramène au critère de Cauchy, dont la démonstration de la condition suffisante, comme on en prendra pleinement conscience dans la seconde moitié du dix-neuvième siècle, exige la "construction" de l'ensemble $\underline{R}$ des nombres réels.

La gestation de la théorie des nombres réels dans la première moitié du dix-neuvième siècle.

Lorsque Gauss, dans un inédit qui doit dater du tournant du dix-huitième au dix-neuvième siècle, définit un majorant $\underline{b}$ d'une suite bornée, et note l'existence d'un nombre $\underline{a}$ plus petit que $\underline{b}$ et qui n'est pas un majorant de la suite, il affirme qu'en parcourant "d'une façon continue" toutes les valeurs entre $\underline{a}$ et $\underline{b}$ on obtient "nécessairement" le plus petit majorant, c'est-à-dire la borne supérieure de la suite.

Bernard Bolzano publie en 1816 un livre sur Le théorème du binôme dans lequel il indique que la notion de nombre irrationnel n'est pas encore sérieusement fondée, se proposant d'y revenir dans un travail ultérieur. En 1817, dans son mémoire sur le théorème des valeurs intermédiaires, et après avoir introduit le "critère de Cauchy", avant Cauchy, il tente de démontrer que ce critère est une condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série de fonctions. Sa démonstration de la réciproque repose sur la simple affirmation que l'existence de la limite "ne contient rien d'impossible", car l'hypothèse de son existence "permet de déterminer cette grandeur avec la précision que l'on voudra". Le cercle vicieux était inéluctable, tant que les mathématiciens ne prirent pas conscience que, préalablement à la définition de la limite, il fallait définir les objets auxquels cette définition était applicable, à savoir l'ensemble des nombres réels $\underline{R}$.

A.L.Cauchy, dans son Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique, publié en 1821,

27

introduit le "critère de Cauchy", condition nécessaire et suffisante de la convergence d'une série numérique. La démonstration de la condition suffisante se réduit à la phrase : "Réciproquement, lorsque ces diverses conditions sont remplies, la convergence de la série est assurée". Dans ce même traité, dans la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires, Cauchy suppose implicitement vérifiées les propriétés qu'une suite croissante majorée et une suite décroissante minorée sont convergentes.

En plus de ces difficultés à propos des questions où intervenait la notion de limite, difficultés qui exigeaient une définition rigoureuse de l'ensemble R, on peut avancer deux autres raisons qui semblent, surtout la seconde, avoir incité les mathématiciens qui réfléchissaient sur les fondements à "construire" l'ensemble des nombres réels. Il y a eu, d'abord, une meilleure connaissance des nombres irrationnels grâce, d'une part, à la démonstration de l'impossibilité de résoudre, en général, par radicaux les équations algébriques et, d'autre part, à la démonstration, faite par Liouville en 1844, que l'ensemble des nombres transcendants est infini. Ensuite, il y a eu la tendence générale à bâtir l'ensemble de l'analyse à partir des nombres entiers (Dirichlet affirmait que tout théorème d'algèbre et d'analyse "peut s'énoncer comme un théorème sur les nombres entiers"). De cette nécessité, interne à l'analyse, de rendre ses bases rigoureuses, naîtront trois théories différentes des nombres réels que l'on va examiner maintenant, en les replaçant dans leur contexte mathématique et historique.

La théorie des nombres réels de Karl Weierstrass.

Bien que la théorie des nombres réels de Weierstrass n'ait pas été ni la première théorie rigoureuse conçue, ni la première publiée, c'est toutefois celle qui a été la première à cristalliser autour d'elle cette vaste réforme de l'analyse qui finira par lui donner la forme que nous lui connaissons aujourd'hui. En 1856, Weierstrass est nommé à l'Université de Berlin, et c'est alors qu'il va commencer une remise en question systématique des fondements de l'analyse, tels qu'ils étaient établis à cette époque. Dans ses cours à l'Université de Berlin, Weierstrass exposait sa théorie des fonctions au cours d'un cycle, généralement de deux ans, et dont le schéma général était le suivant:

La théorie des fonctions analytiques

La théorie des fonctions elliptiques

Applications des fonctions elliptiques à la géométrie et à la mécanique

La théorie des fonctions abéliennes.

Pour construire cet édifice mathématique, Weierstrass exposait d'abord sa théorie des nombres réels et les opérations arithmétiques sur ces nombres. Après quoi, il introduisait les nombres complexes, les polynômes, les fractions rationnelles, les séries entières et, finalement, les fonctions analytiques, et

28

définissait les opérations arithmétiques sur elles. L'étude des fonctions analytiques achevée, le cycle de Weierstrass se poursuivait par celle des fonctions elliptiques et abéliennes. Ainsi donc la théorie des nombres réels était la base même sur laquelle reposait l'édifice mathématique weierstrassien.

On peut situer l'élaboration de la théorie des nombres réels de Weierstrass vers 1863. Elle fut publiée, pour la première fois, par E.Kossak en 1872 d'après les notes prises au cours de Weierstrass du semestre d'hiver 1865-1866 sur la Théorie générale des fonctions analytiques. Pour l'essentiel, Weierstrass va exposer, pendant plus de vingt ans, la même théorie des nombres réels, et on suivra ici la rédaction inédite d'Adolf Hurwitz du cours de Weierstrass du semestre d'été 1878 intitulé Introduction à la théorie des fonctions analytiques.

L'existence de l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls $\underline{N}$ étant admise par Weierstrass, il commence par définir la notion d'égalité qui va jouer un rôle fondamental dans sa théorie des nombres réels. Il affirme que deux nombres entiers sont égaux s'ils sont composés de même nombres d'unités, et cette "correspondance, désignée par $a=b$, est telle que,si $a=b$ et $b=c$, on ait aussi $a=c$ ". Pour définir les nombres rationnels positifs, Weierstrass introduit la notion de "parties exactes de l'unité" : $\frac{1}{n}$ est la $n^{\text{ième}}$ partie exacte de l'unité si, et seulement si, $n.\frac{1}{n} = 1$. Pour donner la définition de l'égalité de deux nombres rationnels, qui sont des combinaisons linéaires finies à coefficients entiers de ces nouveaux nombres (les parties exactes de l'unité), Weierstrass utilise les transformations suivantes que l'on peut faire sur ces nouveaux nombres : 1°) n éléments quelconques de la forme $\frac{1}{n}$ peuvent être remplacés par l'unité ; 2°) tout nombre peut être remplacé par ses parties exactes (par exemple 1 par $p.\frac{1}{p}$). Alors un nombre rationnel sera représenté par un "agrégat", c'est-à-dire un ensemble fini, dont les éléments appartiennent à $\underline{Q}_+$. Ainsi, par exemple, $\frac{4}{3}$ pourra être représenté par l'agrégat $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$ (qui est une des représentations, parmi une infinité de possibles, de $\frac{4}{3}$). Maintenant on peut définir l'égalité de deux nombres rationnels : On dira que deux nombres rationnels a et b sont égaux si l'agrégat a peut être trasformé, par les transformations élémentaires précédentes, en a' de façon que a' contienne les mêmes éléments, et le même nombre de fois, que b.

A partir de l'unité et de ses parties exactes, qui sont en nombre infini, on pourrait constituer des agrégats ayant un nombre infini d'éléments (c'est-à-dire des suites d'une infinité de nombres rationnels). Mais pour définir rigoureusement ces nouveaux nombres, composés d'une infinité d'éléments, "il est nécessaire que ces éléments soient pris dans le domaine des nombres existants (unité et ses parties exactes) d'après une loi bien déterminée". Le premier pas vers la définition de ces nouveaux nombres, qui sont une extension des nombres rationnels

29

positifs, va être l'introduction de la notion ensembliste d'un nombre a' partie de a : "On dira que a' est une partie de a, si l'on peut transformer a' en a",de façon que tous les éléments de a" se trouvent autant de fois en a qu'en a" ", a pouvant contenir d'autres éléments. Il faut noter que a' est appelé une partie de a si a' contient seulement "un nombre fini d'éléments de a ", ce qui permet de définir l'égalité de deux agrégats composés d'une infinité d'éléments de Q_+. Cette notion permet à Weierstrass de donner une nouvelle définition de l'égalité : "On dira que deux nombres a et b sont égaux si toute partie de a peut être transformée en une partie de b,et réciproquement toute partie de b en une partie de a ". L'égalité ainsi définie possède les propriétés de symétrie et de transitivité. Cette nouvelle définition de l'égalité entraîne une nouvelle définition de l'inégalité entre deux nombres a et b : on dira que b $>$ a, si toute partie de a est une partie de b et s'il existe un nombre c qui est une partie de b, mais n'est pas une partie de a.

Pour définir maintenant les nouveaux nombres, composés d'une infinité d'éléments, Weierstrass introduit un critère de valeurs finies: "On dira qu'un nombre a a une valeur finie, s'il existe un nombre b plus grand que a, b étant composé d'un nombre fini d'éléments" de Q_+. Grâce à ce critère, Weierstrass peut définir les nouveaux nombres, composés d'une infinité d'éléments, et montrer que les opérations élémentaires de l'arithmétique sont encore valables pour ces nouveaux nombres. En définissant la soustraction pour ces nouveaux nombres, on obtient alors l'ensemble R des nombres réels.

Ainsi, en définitive, le nombre réel pour Weierstrass est la classe d'équivalence pour la relation d'équivalence définie par l'égalité des agrégats satisfaisant au critère de valeurs finies. Alors, pour un tel agrégat, représentant de sa classe, ou bien il existe dans Q un nombre qui lui correspond, ou bien sa classe définira un nouveau nombre, un nombre irrationnel.

La théorie des nombres réels de Richard Dedekind.

Nommé en 1858 professeur de mathématiques à l'Ecole polytechnique de Zurich, c'est en préparant la Première partie du calcul différentiel et intégral, pour le semestre d'hiver 1858-1859, que Dedekind sentit la nécessité d'élaborer une théorie des nombres réels. (Dedekind, comme d'ailleurs Weierstrass avant son arrivée à Berlin, n'a jamais enseigné auparavant les premiers éléments de l'analyse mathématique). Revenu en 1862 à Brunswick, sa ville natale, ainsi que celle de Gauss, pour y enseigner à l'Ecole polytechnique, il fait pendant le semestre d'hiver 1862-1863 un cours sur le Calcul différentiel et intégral, dont le paragraphe 1 de l'introduction est intitulé : Le domaine des nombres réels; sa continuité. C'est au paragraphe 4 qu'il introduit la notion de limite, donc après avoir défini

30

les nombres réels, et démontre que toute suite croissante majorée admet une limite. Mais c'est seulement en 1872 (bien qu'il eût envisagé dès 1870, au moins, de publier sa théorie) que Dedekind fait paraître son livre Continuité et nombres irrationnels.

Dès le début de sa préface, Dedekind précise que les considérations qu'il va exposer datent de l'automne 1858, car c'est alors qu'il sentit "le manque d'une base réellement scientifique de l'arithmétique". Ce manque se manifeste, en particulier, dans les questions de limites et notamment lors de la démonstration du théorème qu'une suite croissante majorée admet une limite, et où l'on a recours à "l'évidence géométrique". Et, lorsqu'il eut à faire son premier cours d'analyse, son "sentiment d'insatisfaction fut si puissant qu'il décida fermement de réfléchir jusqu'à ce qu'il trouve des fondements purement arithmétiques, et tout à fait rigoureux, aux principes de l'analyse infinitésimale". Poursuivant sa critique des méthodes géométriques, Dedekind écrit que c'est par ce moyen que l'on démontrait le théorème cité, à savoir que toute suite croissante majorée admet une limite. Or ce théorème, ou un autre qui lui est équvalent, "pourrait être considéré, d'une certaine façon, comme un fondement suffisant de l'analyse infinitésimale". Sur ce point, il est d'accord avec Méray, ainsi qu'avec Weierstrass, dont le critère de valeurs finies équivaut à l'énoncé de ce théorème. Il restait donc à Dedekind à "découvrir l'origine de ce théorème dans les éléments d'arithmétique", ce qu'il réuissit à accomplir le 24 novemebr 1858 (cette précision ne doit pas étonner, car Dedekind tenait un journal qu'il semble avoir détruit avant sa mort).

Dans le paragraphe 1, Propriétés des nombres rationnels, Dedekind dit expressément qu'il suppose construite l'arithmétique de l'ensemble $\underline{Q}$ des nombres rationnels qui est un corps, notion que Dedekind avait introduite en 1871. Pour Dedekind, il est important de mettre en évidence la propriété de $\underline{Q}$ d'être un ensemble infini totalement ordonné. Relativement à cette relation d'ordre dans $\underline{Q}$, on a les propriétés suivantes : I) Si $\underline{a} > \underline{b}$ et $\underline{b} > \underline{c}$, alors $\underline{a} > \underline{c}$. II) Si $\underline{a} \neq \underline{b}$, alors il existe une infinité de nombres rationnels compris entre $\underline{a}$ et $\underline{b}$. (Il est remarquable que Dedekind mette aussi clairement en valeur la propriété de densité des nombres rationnels et introduise ainsi, à la base de l'analyse, une propriété topologique importante). III) Si $\underline{a}$ est un élément de $\underline{Q}$, alors on peut partager tous les nombres de $\underline{Q}$ en deux classes A_1 et A_2 de façon que, quel que soit $a_1 \in A_1$, on ait $a_1 < \underline{a}$, et, quel que soit $a_2 \in A_2$, on ait $a_2 > \underline{a}$; le nombre $\underline{a}$ pouvant être adjoint, à volonté, à A_1 ou à A_2. (Cette définition de la coupure dans l'ensemble des nombres rationnels, faisant intervenir une partition de $\underline{Q}$ en deux sous-ensembles, fonde la définition dedekindienne des nombres sur la notion même d'ensemble. De plus, dans cette troisième propriété intervient l'idée de la totalité des nombres rationnels, c'est-à-dire l'idée de la totalité des éléments d'un ensemble infini).

Le paragraphe 4 est intitulé Création des nombres irrationnels. Ainsi, on est averti, par avance, qu'il s'agira de "créer" ces nombres. Dedekind note d'abord que tout nombre rationnel a premet de diviser l'ensemble de tous les nombres rationnels en deux classes telles que A_1 et A_2 décrites ci-dessus. Soit maintenant un partage quelconque de $\underline{Q}$ en deux classes A_1 et A_2 tel que tout nombre de A_1 soit plus petit que tout nombre de A_2 ; alors on dira qu'un tel partage est une "coupure" et on la désignera par (A_1,A_2). Ainsi, on pourra dire qu'un nombre rationnel engendre une coupure, ou plutôt deux, "mais on ne les considérera pas comme essentiellement différentes". De plus, cette coupure possède la propriété : ou bien A_1 a un plus grand élément, ou bien A_2 a un plus petit élément. Et réciproquement, si une coupure possède cette propriété, elle sera engendrée par le plus grand nombre de A_1 ou le plus petit de A_2. Dedekind donne ensuite l'exemple d'une infinité de coupures qui ne sont pas engendrées par des nombres rationnels. Pour Dedekind, c'est dans ce fait que toutes les coupures ne sont pas engendrées par des nombres rationnels que réside "l'incomplétude" ou "la discontinuité" de l'ensemble des nombres rationnels. "Maintenant, chaque fois qu'il existe une coupure (A_1,A_2) qui n'est pas engendrée par un nombre rationnel, on crée ainsi un nouveau nombre, un nombre irrationnel a qu'on considère comme entièrement défini par cette coupure (A_1,A_2)". A partir de cette définition, à toute coupure correspond un nombre, et un seul, rationnel ou irrationnel, et Dedekind considère deux nombres comme "différents ou inégaux si, et seulement si, ils correspondent à des coupures essentiellement différentes".

Dedekind montre alors que la relation d'ordre de $\underline{Q}$ se prolonge à $\underline{R}$ qui est "continu".

Les théories des nombres réels de Charles Méray et de Georg Cantor.

C'est Charles Méray qui a publié le premier, en 1869, une théorie rigoureuse des nombres irrationnels. Méray y est amené en appliquant avec esprit de suite l'idée de base de sa conception d'analyse, qui en était aussi l'instrument unificateur, à savoir le développement des fonctions en série de Taylor. Cette idée, exprimée pour la première fois par Lagrange, Méray l'a développée en 1868 et l'a poursuivie dans ses travaux ultérieurs.

Dans son mémoire sur les nombres irrationnels, Méray indique d'abord que deux "principes" étaient à cette époque le fondement essentiel de toutes les parties des mathématiques où intervenait la notion de limite. Le premier principe était qu'une suite croissante majorée (resp. décroissante minorée) tend vers une limite. Le deuxième principe était qu'une suite de Cauchy tend vers une limite. "Jusqu'à présent on a regardé ces propositions comme des axiomes", mais cette

32

façon de faire n'évitait pas "la nécessité d'introduire dans les raisonnements la conception assez obscure de nombre incommensurable". C'est pourquoi Méray décide de suivre "une voie détournée", mais "plus sûre", qui le conduit à définir d'abord les nombres irrationnels et,par là même, à clarifier la notion de limite.

Soit une "variable progressive" (c'est-à-dire une suite) $\underline{v} = (v_n)$, $n \in \underline{N}$, $v_n \in \underline{Q}$, qui tend vers une limite $V \in \underline{Q}$, alors $\underline{v}$ est une suite de Cauchy. Si maintenant $\underline{v}$ est une suite de Cauchy, et s'il n'existe pas de nombre rationnel vers lequel converge $\underline{v}$, on dira qu'une telle suite converge vers une "limite fictive". L'introduction de nouveaux nombres, les "limites fictives", va permettre à Méray de compléter $\underline{Q}$. En effet, Méray définit d'abord la notion de suites de nombres rationnels "équivalentes", "et on voit de suite que deux variables équivalentes à une troisième le sont entre elles". Ainsi, il s'agit, comme on le dit aujourd'hui, d'une relation d'équivalence. La définition de Méray du nombre irrationnel va correpondre à un passage au quotient par cette relation d'équivalence. Effectivement, il affirme qu'un "signe quelconque" pourrait désigner la limite fictive d'une suite $\underline{v}$ et "le même signe pourra représenter" toute suite "équivalente à $\underline{v}$". Ainsi, si $\underline{a}$ est un nombre rationnel positif tel qu'il n'existe pas de $p,q \in \underline{Z}^*$, avec $\underline{a} = (\frac{p}{q})^2$, alors " $\sqrt{\underline{a}}$ désignera dans le langage cette racine fictive et dans les calculs toute variable progressive dont le carré tend vers $\underline{a}$ ".

Méray montre aussi que l'ensemble $\underline{R}$, construit à l'aide des suites de Cauchy, conserve l'ordre total de $\underline{Q}$.

Une théorie semblable fut élaborée par Georg Cantor. Elle fut publiée, en 1872, d'abord par E.Heine, puis par Cantor lui-même. (On peut remarquer que Cantor avait fait ses études à Berlin, entre 1863 et 1866, au moment où Weierstrass y exposait sa théorie des nombres réels). Pour démontrer un théorème d'unicité pour les séries trigonométriques, Cantor se sent obligé de commencer par quelques explications "destinées à mettre en lumière les diverses manières dont peuvent se comporter des grandeurs numériques en nombre fini ou infini".

Soit $A = \underline{Q}$ et (1) $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ une suite de Cauchy de nombres rationnels. Cantor exprime cette propriété de la suite (1) de la façon suivante : "La suite (1) a une limite déterminée $\underline{b}$ ", $\underline{b}$ n'étant rien d'autre "qu'un signe particulier relié à la suite (1) ". Soit maintenant une deuxième suite (1') $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n, \ldots$ ayant "une limite déterminée $\underline{b}'$ ". Si (1) et (1') sont équivalentes, alors Cantor pose $\underline{b} = \underline{b}'$; sinon, elles vont définir soit $\underline{b} > \underline{b}'$, soit $\underline{b} < \underline{b}'$. S'il existe une suite de nombres rationnels (a'_n) , avec $a'_n = \underline{a}$ quel que soit n, et équivalente à (a_n), alors on pose $\underline{b} = \underline{a}$; sinon, on aura soit $\underline{b} > \underline{a}$, soit $\underline{b} < \underline{a}$.

Cantor alors poursuit : "De ces définitions, et de celles qui suivent

immédiatement, il résulte que, b étant la limite de la suite (1), $b-a_n$ devient un infiniment petit à mesure que n croît; ce qui justifie par conséquent, d'une manière précise, la désignation de "limite de la suite (1)" donnée à b ". Mais ici on ne comprend pas bien ce que signifie la suite de terme général $b-a_n$, dans le cas où (a_n) ne converge pas vers un nombre rationnel, les nombres irrationnels n'étant pas encore définis par Cantor. Celui-ci a senti lui-même la difficulté, car dans la traduction française de ce mémoire, publiée en 1883 et qu'il a lui-même révisée, il a ajouté après le mot "résulte" : "(et on peut démontrer rigoureusement cette conséquence)", parenthèse qui ne figure pas dans le texte original. Cantor donnera un exposé plus précis de sa théorie en 1883, en affirmant que b est déterminé par les suites équivalentes (a_n), c'est-à-dire que l'on complète l'ensemble A par des êtres nouveaux qui sont des classes d'équivalence des suites de Cauchy. Cantor étend ensuite à l'ensemble B = $\underline{R}$ les opérations élémentaires de l'arithmétique définies dans A = $\underline{Q}$.

BIBLIOGRAPHIE

Pierre Dugac, Charles Méray et la notion de limite, Revue d'Histoire des Sciences, 23(1970), 333-350

Pierre Dugac, Eléments d'analyse de Karl Weierstrass, Archive for History of exact Sciences, 10(1973), 41-176

Pierre Dugac, Richard Dedekind et les fondements des mathématiques, Paris(Vrin), 1976, avec une préface de Jean Dieudonné

Pierre Dugac, Cours d'Histoire des mathématiques, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1975-1976

Pierre Dugac, Fondements de l'analyse (Chapitre d'une Histoire des mathématiques à paraître chez Hermann, publiée sous la direction de Jean Dieudonné)

LE LANGAGE DES APPROXIMATIONS

Filtres, Limites, Germes

G. Th. GUILBAUD

"... Henri Cartan a découvert (C.R. Acad. Sci. Paris, 1937, T.205,p.595)
"la notion de filtre qui élimine définitivement le dénombrable de la
"Topologie Générale, en se substituant à la notion de suite..."
(André Weil, Sur la Topologie Générale, 1937).

"... la notion de filtre est inséparable de celle de limite..."
(Nicolas Bourbaki, Introduction à la Topologie Générale, 1939).

A) Limite d'une suite.

Soit une suite : $s(1), s(2), s(3), \dots, s(n-1), s(n), \dots$
c'est-à-dire une fonction définie sur N (ensemble des entiers naturels) et prenant ses valeurs dans R (les réels) ou bien, tant qu'à faire, dans un espace quelconque X.

La proposition : "a est limite de la suite s(n)"
qu'on écrit : "$\lim s(n) = a$"
signifie :
"N'importe quel voisinage de a contient presque tous les s(n)"
(presque tous : c'est-à-dire tous les s sauf un nombre fini d'entre eux).

Dans le cas particulier d'une suite de nombres réels, on concrétisera la notion de voisinage et on dira par exemple :
"l'ensemble des entiers n tels que $a - e < s(n) < a + e$ comprend la quasi totalité ou encore : l'immense majorité des entiers".

Il s'agit donc d'une situation où apparaissent :
1°) Les parties de N dont la complémentaire est finie : c'est leur ensemble qui est chargé de donner un sens à "presque tous". Pour parler comme N. Bourbaki, on peut dire que c'est : "le Filtre de M.Frécher".

35

On n'oubliera pas ceci :
un élément de F est un ensemble d'entiers (F n'est pas une partie de N, mais un ensemble de parties).

2°) Les voisinages du point (a), dans l'espace X considéré : c'est leur ensemble, qu'on appellera le "filtre des voisinages de (a)".

C'est cet ensemble (V) qui est chargé de donner un sens précis à des expressions telles que : les (s) sont <u>presque égaux</u> à (<u>a</u>).

3°) L'application s de N dans X, qui à chaque n fait correspondre un x = s(n) et donc à toute partie P de N fait correspondre une partie Q de X, ce qu'on écrira sans vergogne :

$$Q = s(P)$$

4°) Muni de ces trois outils, on va pouvoir traduire en langage mathématique l'intention exprimée en langage vulgaire par des phrases telles que : "pour <u>presque tous</u> les n, a est <u>presque égal</u> aux s(n)"

On dira simplement :

pour tout <u>v</u> de la famille <u>V</u>
il existe un <u>f</u> de la famille <u>F</u>
tel que <u>s(f)</u> est inclus dans <u>v</u>

en symboles : $(\forall\, v, \exists\, f)\ (s(f) \subset v)$

<u>Nota Bene</u> : la proposition : $\lim s(n) = +\infty$ n'est pas la négation de ce qui précède (bien qu'on dise parfois, en langage négligé : croître sans limite).
Elle s'exprime au contraire selon le même schéma :

F est l'ensemble des parties de N dont la complémentaire est finie
V est l'ensemble des parties de R dont la complémentaire est bornée (qui, par conséquent, contiennent une demi-droite : ensemble des x supérieurs à a).

B) Continuité d'une fonction.

Cela concerne une fonction s qui applique un espace X dans un espace Y ; soit p un point de X, il lui correspond le point s(p) dans Y. Lorsque x est à peu près égal à p, est-ce que s(x) est à peu près égal à s(p) ? Si oui, on dit que l'application s est continue au point p. En langage "simple et précis" :

pour tout voisinage v de s(p), dans Y,
il existe un voisinage u de p, dans X,
tel que s(u) est inclus dans v.

On écrit alors : $\lim s(x) = s(p)$

C'est encore la même situation, à ceci près que les deux filtres en jeu sont ici des filtres de voisinage, l'un dans X, l'autre dans Y.

C) Enquêtes et Approximations successives.

Une approximation est une information partielle, mais qui en suppose d'autres, au moins possibles et de même sorte.
Au lieu de dire où se trouve exactement le point inconnu, on indique seulement une petite région où on peut le trouver. Au lieu de dire le nombre que vous savez, on dira qu'il est compris entre 3,14 et 3,15 (quitte à améliorer si l'on veut en savoir davantage).

Le roman policier ne vous dit pas tout de suite qui est le coupable, mais, progressivement vous fournit des informations incomplètes, et qui, comme on dit si bien, se "recoupent".

La situation proprement mathématique réduit d'abord toute information à la forme ensembliste :

"x est un élément de A"

et ensuite ne se contente pas d'une seule information de ce type, mais en prépare toute une famille (en général infinie).

On aura donc, dans un ensemble donné : l'espace X, tout un ensemble de parties de X : A,B,C,... dont chacune sera considérée comme"une approximation".

37

L'idée maitresse de la Topologie Générale est de ne pas se contenter des cas les plus célèbres, mais en fin de compte assez exceptionnels, par exemple celui-ci : suite d'approximations emboitées.
(ce cas est doublement particulier : 1°) de deux approximations quelconques, l'une est toujours une partie de l'autre : elles sont totalement ordonnées par l'inclusion,

2°) cet ordre est celui des entiers ,
on a numéroté les approximations, elles forment une suite (dénombrable).

On veut donc généraliser. Il faut bien entendu prendre quelques précautions: une famille quelconque de parties de X ne peut jouer le rôle souhaité. Deux précautions : l'une est tout à fait nécessaire, l'autre est seulement commode.

Première précaution : intersections.
C'est le recoupement des informations. Si l'on me dit que l'inconnue est un élément de A, et qu'on ajoute qu'elle est aussi un élément de B, j'en déduis qu'il faut la chercher parmi les éléments communs à A et B. Je postulerai donc : si A et B font partie de la famille des approximations, alors leur intersection fait aussi partie de la famille.

Deuxième précaution : inclusions.
Si je sais que l'inconnue est un élément de A, et si A est inclus dans B, j'en déduirai que l'inconnue appartient aussi à B. Bien sûr, l'approximation B est moins intéressante que A, mais il faut être prudent et je peux en avoir besoin.

Pour qu'un ensemble F de parties de X puisse être appelé un filtre, nous exigerons donc les deux conditions :
1°) l'intersection de deux parties, éléments de F, est un élément de F.
2°) toute partie de X qui contient un élément de F, appartient aussi à F.

(Attention! il ne faut pas confondre : contenir et appartenir, parties et éléments).

Ce n'est pas tout à fait terminé : si l'on se contentait des deux conditions précédentes, on risquerait d'avoir à appeler "filtres" des objets qui ne correspondraient pas à notre intention première : ceux que le folklore mathématicien appelle triviaux . Il y a ici deux sortes de ces cas extrêmes.

38

1°) On prend toutes les parties de X, ça n'apprend rien, ce n'est pas de la vraie information. Pour bannir ce cas il suffit de réclamer :

la partie vide n'est pas un élément de F.

2°) On n'en prend aucune, c'est encore pire : pas d'information du tout. Ici, il suffit d'exiger :

la partie pleine (l'espace X tout entier) est un élément de F.

Finalement voici la définition classique :
Un ensemble F de parties de l'ensemble X est appelé

$$\boxed{\text{filtre sur X}}$$

si, et seulement si, les conditions suivantes sont remplies :

1) X est un élément de F
2) la partie vide n'est pas un élément de F
3) l'intersection de deux éléments de F est élément de F
4) toute partie de X qui contient un élément de F est un élément de F.

D) Trois exemples d'emploi des filtres.

1°) Que faire d'une connaissance approchée ? La situation typique est la suivante. Une application f de X dans Y : si l'on connaît x, on calcule y = f(x). Mais si l'on ne connaît qu'une approximation ? Si l'on sait seulement que x appartient à la partie A de X, on en déduira que f(x) appartient à la partie f(A) de Y.

On aura donc besoin d'un filtre F au départ (ensemble de parties de X) et d'un filtre G à l'arrivée. Et l'on souhaitera : quelle que soit la "précision" qu'on exige à l'arrivée, on peut l'obtenir au moyen d'une précision suffisante au départ. Ce qui se formalise en :

Quel que soit l'ensemble B appartenant au filtre G,
il existe un ensemble A appartenant au filtre F,
tel que f(A) soit inclus dans B.

C'est cette situation qui a été illustrée plus haut par deux exemples : limite d'une suite et continuité d'une fonction.

39

2°) Une autre situation, non moins courante, est la suivante. On considère toutes les applications de X en Y (et non plus seulement une seule fonction). C'est-à-dire qu'on imagine toutes les façons de donner aux éléments de X des "valeurs" prises dans Y.

Etablissons un filtre au départ : un ensemble F de parties de X satisfaisant aux conditions requises. On dira alors que deux applications sont "presque égales" ou encore : "égales à la limite", lorsqu'elles sont égales pour un ensemble A appartenant à F : pour tout point de A elles ont même valeur.

Il est facile de voir que c'est là une relation d'équivalence : on obtient donc, grâce au filtre F, une classification des fonctions partant de X. Chacune des classes ainsi obtenues est appelée :

un germe de fonction

Au lieu de dire que deux fonctions sont "presque égales" on dira plus poliment : elles ont même germe selon le filtre F.

On remarquera que si une fonction f a une limite (selon le filtre F) toutes les fonctions du même germe ont la même limite. De sorte qu'on pourrait avantageusement parler, non plus des limites des fonctions, mais des limites des germes de fonctions.

3°) Munir un ensemble d'une topologie, c'est attacher à tout point un filtre, le filtre des voisinages de ce point. Autant de filtres que de points : mais il ne convient pas de choisir tous ces filtres indépendamment les uns des autres. Voici le type de liaison communément adopté.

Soit V(x) le filtre des voisinages du point x ; considérons un élément de ce filtre, qui est une partie v de l'espace X ; l'ensemble v est un voisinage pour x, mais aussi éventuellement pour d'autres points de l'espace. L'ensemble des points pour lesquels v est un voisinage constitue ce qu'on appellera l'intérieur de v. On exige alors que l'intérieur de v soit lui-même un voisinage de x, c'est-à-dire qu'il soit un élément de V(x). En langage familier cela équivaut à exiger : un voisinage de x est aussi voisinage de tous les points assez voisins de x, c'est une sorte de transitivité (dont l'analogue, pour les espaces métriques, où les voisinages sont des boules, n'est autre que la célèbre inégalité du triangle).

On n'oubliera pas de stipuler que x appartient à chacun de ses voisinages. Enfin dans la plupart des usages (mais non tous) on postulera que deux points dsitincts ont toujours deux voisinages disjoints (la technique d'approximations qui constitue la topologie doit pouvoir "séparer" les points : topologie dite séparée, ou de Hausdorf).

E) La Logique des Approximations dans le cadre des Algèbres de Boole.

1. La définition d'un filtre ne met en jeu aucune notion proprement topologique : on devrait même dire que c'est tout simplement de la logique (la logique des approximations). Il est alors convenable de rattacher la notion de filtre à la théorie des Algèbres de Boole.

2. On sait que l'ensemble des parties d'un ensemble peut être organisé comme une algèbre de Boole, au moyen des deux opérations binaires : l'intersection et la réunion, et de l'opération unaire : complémentation. Les autres relations, l'inclusion, par exemple, peuvent alors s'écrire au moyen d'équations booléennes.

3. Dans le vocabulaire booléen, la définition d'un filtre se traduit ainsi:

F est un filtre dans une algèbre de Boole B, signifie :

1°) F est un ensemble d'éléments de B

2°) si p et q sont éléments de F, alors $p \wedge q$ l'est aussi.

$$p \in F \quad \text{et} \quad q \in F \Longrightarrow p \wedge q \in F$$

3°) si p est élément de F, et q élément de B, alors $p \vee q$ est élément de F :

$$p \in F \quad \text{et} \quad q \in B \Longrightarrow p \vee q \in F$$

Pour exclure les cas triviaux on sera amené à préciser la situation des deux pôles (représentant respectivement la partie pleine et le partie vide de l'algèbre des parties d'un ensemble) :

$$\bigvee \in F \qquad \text{et} \qquad \bigwedge \notin F$$

Du point de vue algébrique, on voit donc que ce qui caractérise un filtre, c'est d'être : clos pour une opération ($\wedge$ ou inf) stable pour l'autre ($\vee$ ou sup).

4. Il s'agit d'une notion familière, bien qu'elle n'ait été formalisée qu'au cours du XIXe siècle : c'est la notion d'Idéal.

Pour prendre un exemple vraiment très élémentaire : dans l'anneau des entiers, la somme de deux nombres pairs est paire et un produit est pait dès que l'un des facteurs l'est (l'ensemble des pairs est clos pour l'addition et stable pour la multiplication).

Alors que dans les anneaux, les deux opérations (ordinairement nommées addition et multiplication) ne jouent pas le même rôle, dans une Algèbre de Boole la symétrie est parfaite (dualité, lois de Morgan).

Il y aura donc deux sortes d'objets pouvant jouer le rôle d'idéal. (Quand on voudra les distinguer, on pourra dire filtre et cofiltre).

5. Prenons un filtre dans une algèbre de Boole, tel qu'il a été défini plus haut.

Et prenons le complémentaire de chacun des éléments de F (attention pas le complément ensembliste de F !)
Il est facile de voir que l'ensemble J des complémentaires des éléments de F remplit les conditions suivantes :

$$p \in J \text{ et } q \in J \qquad p \vee q \in J$$
$$p \in J \text{ et } q \in B \qquad p \wedge q \in J$$
$$\wedge \in J \text{ et } V \notin J$$

C'est un cofiltre.

On remarquera que, pour parler d'approximations, aussi bien que d'enquêtes policières, les cofiltres sont aussi commodes que les filtres : il faut simplement procéder par éliminations, comme on dit, c'est-à-dire que l'information élémentaire, au lieu de :

"l'inconnue x appartient à A"

s'énonce :

"x n'appartient pas à A'"

Et pour choisir un exemple mathématique : le cofiltre de Fréchet est constitué par tous les ensembles finis de nombres entiers naturels.

6. Mais ne choisissons pas entre filtre et cofiltre ; prenons-les ensemble et disons plutôt que le schéma fondamental de l'information est le suivant :

les parties de X sont rangées en trois classes selon la réponse qu'on fera à la question : l'inconnue appartient-elle à la partie A ?

Si oui : A est un élément du filtre,
si non : du cofiltre.
Et il faut réserver le cas où l'on ne sait pas répondre. (cf. théorie générale des questionnaires).

7. C'est ici qu'il faut citer, à titre d'exemple, le cas des filtres <u>principaux</u>. Ce sont des cas particuliers, très particuliers et vraiment peu intéressants, mais (comme souvent en mathématiques) qu'on aurait tort d'oublier, car ils peuvent surgir quand on les attend le moins. Voici comment fabriquer un filtre principal :
on choisit une partie de X (ni vide, ni pleine) soit P avec sa complémentaire P'. Et si l'on demande :

est-ce que s est en A ?

on répond : oui si P est inclus dans A
non si P est inclus en A' (cest-à-dire si l'intersection de A et P est vide).
rien dans tout autre cas.

L'ensemble des parties A qui répondent "oui" est un filtre ; celles qui disent "non" constituent le cofiltre. Mais toute l'information donnée par le filtre peut être <u>résumée</u> (exhaustivement) par la donnée de P. On dira que le filtre est <u>engendré</u> par P.

8. Prenons au contraire le filtre de Fréchet : au cofiltre appartiennent les ensembles finis, au filtre les complémentaires des précédents. Mais l'ensemble des nombres pairs, ou celui des nombres premiers n'est ni l'un ni l'autre. D'autre part, le filtre n'est pas principal.

9. On est donc amené à distinguer, parmi tous les filtres imaginables, ceux, privilégiés, qui lèveraient toute incertitude. Ce sont les filtres maximaux (ou Ultrafiltres), analogues des idéaux maximaux.
Un untrafiltre (et son cofiltre) c'est donc un partage en deux classes des éléments d'une algèbre de Boole, satisfaisant aux conditions :

43

chacune des classes contient un pôle ($\wedge$ ou $\vee$)
appelons "oui" la classe où se trouve $\vee$, et "non" l'autre, celle de $\wedge$.
Si a appartient à "oui", son complémentaire a' est dans "non".
a $\wedge$ b est "oui" si a et b sont "oui"
a $\wedge$ b est "non" si a ou b est "non"
a $\vee$ b est "oui" si a ou b est "oui"
a $\vee$ b est "non" si les deux sont "non".
On peut donc, si l'on préfère, présenter la chose comme un morphisme de l'algèbre de Boole donnée sur l'algèbre de Boole simple à deux éléments : (oui,non).

10. Si l'on veut étudier, et approfondir les liaisons entre algébre de Boole et Topologie, on fera bien de lire :
Paul R. HALMOS, Lectures on Boolean Algebras, Van Nostrand math. studies, n°1, New-York, 1963, 148 p.

CALCUL INFINITESIMAL ET ANALYSE NON-STANDARD

G. WALLET (Poitiers)

"... Il se trouve que les règles du fini réussissent dans l'infini comme si il y avait des atomes..."

LEIBNIZ.

Le calcul infinitesimal a présenté tout au long de son histoire une dualité de méthode : utilisation d'une part de quantités infiniment petites, élaboration d'autre part de procédés de démonstration permettant d'évacuer les mêmes quantités. Déjà l'oeuvre d'Archimède est marquée par ce trait caractéristique. Cependant l'aspect rigueur de la démonstration y est largement dominant et servira d'ailleurs de modèle à des générations de mathématiciens. Ce n'est qu'au XVIIè siècle que le calcul différentiel et intégral dégage peu à peu sa spécificité en même temps que semble s'imposer l'usage au moins géométrique de l'infiniment petit. Cette tendance est illustrée particulièrement par FERMAT, PASCAL, HUYGENS, et BARROW. Dans la dernière partie de ce siècle, LEIBNIZ dégage l'infiniment petit de sa gangue géométrique et en fait un nombre, c'est à dire un objet mathématique susceptible de s'intégrer à des calculs ; avec l'aide de cet outil, il va pouvoir reconnaître et isoler les concepts fondamentaux du calcul infinitésimal. Mais déjà la polémique commence à propos du statut de l'infinitésimal et des contradictions qui semblent régler son usage. A partir du XVIIIè siècle, l'histoire du calcul différentiel est marqué par le rejet de ce qui avait permis son essort. BERKELEY dénonce de manière très violente l'extrapolation des opérations définies pour les grandeurs finies aux prétendus infiniment petits.

45

D'ALEMBERT, dans l'article de l'Encyclopédie consacré à la Différentielle, qualifie de métaphysique, d'obscur et inutile l'usage des quantités évanouissantes. Ainsi le titre même de l'ouvrage de LAGRANGE : "Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagé de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduit à l'analyse des quantités finies." Cette tendance se renforce jusqu'à l'élaboration dans le courant du XIXè siècle de l'approche moderne de l'analyse avec les travaux de CAUCHY, BOLZANO et WEIERSTRASS L'histoire semble alors avoir donné son verdict : l'infiniment petit n'a plus sa place dans l'édifice de l'analyse dont l'un des piliers est maintenant le concept de limite.

C'est en 1960 qu'un logicien américain, ABRAHAM ROBINSON a l'idée d'utiliser un modèle non-standard pour valider la notion d'infiniment petit. La théorie qu'il met au point, nommée Analyse Non-Standard est une véritable revanche posthume de LEIBNIZ. Il y est démontré que l'on peut reconstruire l'analyse classique en plongeant le corps des réels $\mathbb{R}$ dans un corps non-archimédien ${}^*\mathbb{R}$ dont certains éléments sont infiniment grands ou petits. On peut résumer le principe de la construction de la manière suivante. Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, et $\mathcal{U}$ un ultra-filtre contenant le filtre des complémentaires des parties finies de $\mathbb{N}$. Sur l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites de nombres réels, on définit la relation d'équivalence :

$$(x_n) \simeq (y_n) \iff \{k \in \mathbb{N} \mid x_k = y_k\} \in \mathcal{U}$$

On démontre alors que l'ensemble quotient ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ est un corps ordonné contenant $\mathbb{R}$. Les suites qui approchent l'infini définissent dans ${}^*\mathbb{R}$ des infiniment grands et celles qui approchent 0 définissent des infiniment petits. Les suites et fonctions définies sur $\mathbb{R}$ se prolonge de manière naturelle à ${}^*\mathbb{R}$. On définit la relation de proximité infinie par :

$$x \sim y \iff x - y \text{ est infiniment petit.}$$

Et l'on obtient des énoncés du type suivant :

- (x_n) converge vers $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si n infiniment grand implique $x_n \sim a$.
- Une fonction f admet $l \in \mathbb{R}$ pour limite en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si $x \sim a$ implique $f(x) \sim l$.
- $f'(x) \sim \frac{df}{dx}(x) = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$ avec $x \in \mathbb{R}$ et dx infiniment petit

C'est donc toutes les méthodes et intuitions des pionniers du calcul infinitésimal qui se trouvent restaurées par l'Analyse Non-Standard. Mais cette théorie ne se limite pas seulement au calcul différentiel et intégral élémentaire. La construction de $^*\mathbb{R}$ indiquée ci-dessus est un des cas particuliers d'un procédé de démonstration que ROBINSON et ses élèves ont appliqué de manière féconde à de nombreux domaines : topologie générale, théorie de la mesure, groupes topologiques, et groupes de Lie espaces vectoriels topologiques...

BIBLIOGRAPHIE

- BADIOU.A.

La subvertion infinitésimale

Cahiers pour l'Analyse.

- LUXEMBURG W.A.J.

Applications of Model Theory to Algebra, Analysis, and Probability. Holt, Rinehart et Winston, New-York 1969.

- ROBINSON.A.

Non Standard Analysis. North Holland Amsterdam (1966).

DOCUMENTS DE L'I.R.E.M. DE MONTPELLIER

NOTE IMPORTANTE : Les documents ci-après font partie d'une série complète, et n'en prendre que deux (Documents n° 12 et n° 14) risque de fournir une image dénaturée d'un ensemble destiné au Premier Cycle.

Cependant, il est apparu intéressant de le faire pour assurer la discussion dans certains groupes de travail. On pourra toujours demander la collection complète à l'I.R.E.M. de MONTPELLIER.

LA DROITE EN BIJECTION AVEC $\mathbb{R}$

1 - Rappel et vocabulaire

* Une droite est un sous-ensemble du plan en bijection avec $\mathbb{R}$ (cf. axiome).

* Soit f la bijection de D sur $\mathbb{R}$ (on dit aussi que f est une graduation de $\mathbb{R}$).

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$M \longmapsto x$$

Le réel x associé à M est appelé **abscisse de M** ; on le note $f(M)$ ou x_M.

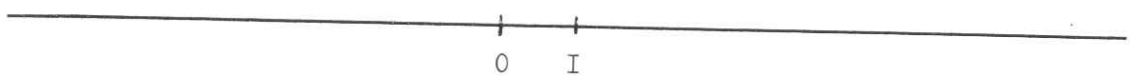
* Tout couple de points s'appelle bipoint.
Le bipoint (O, I) tel que :

$$f : O \longmapsto 0$$
$$I \longmapsto 1$$

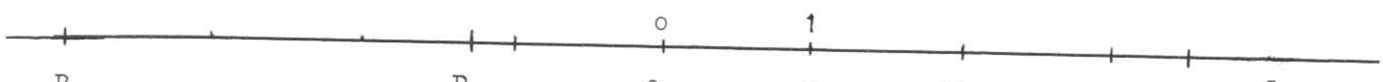
s'appelle le repère de la graduation ; O est l'origine.

* Exercice :

Marquer sur la droite D dessinée ci-dessous et de repère (O, I) les points A, B, C, E d'abscisses respectives : 3 ; - 1 ; 6,5 ; $\sqrt{2}$.



Quelles sont les abscisses des points marqués sur L ?



2 - Mesure algébrique d'un bipoint (A, B)

a) Définition : c'est le réel $x_B - x_A$, noté $\overline{AB}$.

Exercice 1 : Sur la droite D munie du repère (O, I), on donne les points A (2), B (- 3,5), C ($\frac{2}{7}$) , E (- $\frac{4}{3}$).

Calculer :

$\overline{AB}$ =	$\overline{EA}$ =
$\overline{BC}$ =	$\overline{OB}$ =
$\overline{AC}$ =	$\overline{OE}$ =
$\overline{CE}$ =	$\overline{BA}$ =
$\overline{AA}$ =	$\overline{CC}$ =

$3\,\overline{AB} + \overline{AC} - 2\,\overline{AE}$ = ...

Exercice 2 : Sur la droite de l'exercice 1, trouver les points M, P, Q tels que : $\overline{AM} = 4$, $\overline{PB} = -\frac{1}{2}$, $\overline{QC} = 7$.

b) Propriétés

* Soit A un point d'une droite graduée D, calculer $\overline{AA}$.

Que dire du point M de D sachant que $\overline{AM} = 0$?

* Comparer $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$, A et B étant deux points quelconques de D.

* A, B, C étant trois points quelconques de D, montrons que : $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Théorème : Quels que soient les points A, B, C d'une droite graduée :

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

Cette propriété s'appelle "la relation de Chasles"

Application : Exprimer $\overline{BC}$ à partir de la relation ci-dessus.

Exercice : A, B, C, P, F étant des points d'une droite D graduée, écrire plus simplement :

1) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CP} + \overline{PF} =$

2) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} =$

Complétez $\overline{AP} + \ldots\ldots + \overline{BC} = \overline{AC}$

3 - Milieu d'un bipoint (A, B)

* Exercice : Sur une droite D munie d'un repère, marquer les points A, B, C, E d'abscisses respectives : -2, 4, 7, -5.

Marquer à l'aide d'un pliage ou de tout autre procédé,

- le point I, "milieu" de (A, B),

- le point J, "milieu" de (B, C),
- le point K, "milieu" de (A, E).

Quelle est l'abscisse de I ? de J ? de K ?

Calculer :

$\overline{AI} = \dots$	$\overline{BJ} = \dots$	$\overline{AK} = \dots$
$\overline{IB} = \dots$	$\overline{JC} = \dots$	$\overline{KE} = \dots$

* Problème : Etant donnés deux points A et B d'abscisses respectives a et b, cherchons un point I tel que :

$$\overline{AI} = \overline{IB}$$

Cherchons l'abscisse x de I.

x vérifie l'équation : $x - a = b - x$

$$x = \frac{a + b}{2}$$

* Définition : Le point I tel que $\overline{AI} = \overline{IB}$ est le milieu de (A, B).

* Propriété : Le milieu de (A, B) a pour abscisse la demi-somme des abscisses des extrémités.

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$$

* Remarque : I est aussi le milieu de (B, A). Par la suite, nous dirons aussi milieu de la paire {A, B}, milieu du segment [AB].

4 - Distance de deux points

La distance des points A et B de la droite D, munie d'un repère (O, I) est la valeur absolue de $\overline{AB}$.

Notation : $d(A, B) = AB = |\overline{AB}| = |x_B - x_A|$

<u>Remarque</u> : C'est aussi la distance des réels x_A et x_B.

* <u>Exercices</u>

1) Soit A d'abscisse - 3 ; B d'abscisse 1,5.

Calculer la distance des points A et B.

Remarquons que c'est la mesure de $[AB]$ en prenant pour unité $[OI]$.

2) Sur la droite D, on considère les points A, B, C, E, F, G d'abscisses respectives : $- 3$; $1,5$; $\frac{7}{2}$; $\frac{3}{4}$; $- \frac{5}{4}$; $- 2,72$.

Calculer AC =

AE =

FG =

CE =

EA =

BB =

CA =

BG =

* <u>Propriétés</u> : Quels que soient les points A, B et C d'une droite munie d'un repère (O, I), on a :

$d(A, B) \geqslant 0$

$d(A, A) = 0$

si $d(A, B) = 0$, alors $A = B$

$d(A, B) = d(B, A)$

$d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C)$ car

d'après la relation de Chasles, $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$

d'où $|\overline{AC}| = |\overline{AB} + \overline{BC}|$

or la somme de deux réels de même signe est

la somme de deux réels de signes contraires est

Dans les deux cas; $|\overline{AB} + \overline{BC}| \leqslant |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$

c'est-à-dire $d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C)$

EXERCICES SUR LA DROITE

1) Sur une droite D munie d'un repère (O, I), on donne les points A d'abscisse (- 3,5) et I d'abscisse 7,8.
Trouver le point B tel que I soit le milieu de (A, B).

2) Sur la droite D graduée, le point A a pour abscisse - 3.
Trouver les points N tels que d(A, N) = 5.

3) Sur la droite D graduée, on donne deux points M ($x_M = 1,2$) et N ($x_N = 4$).
Chercher :

a) un point G tel que : $7\,\overline{GM} + 5\,\overline{GN} = 0$

b) un point G' tel que : $3\,\overline{G'M} + 3\,\overline{G'N} = 0$

c) un point K tel que : $\frac{27}{4}\,\overline{KM} - \frac{27}{4}\,\overline{KN} = 0$

4) Montrer que, quels que soient les points A, B, C, M d'une droite D, munie d'un repère,

$$\overline{AM}\,.\,\overline{BC} + \overline{BM}\,.\,\overline{CA} + \overline{CM}\,.\,\overline{AB} = 0$$

5) Chercher un point M d'une droite (AB) graduée tel que $3\,\overline{MA}^2 + \overline{AB} = 3\,\overline{AM}\,.\,\overline{BM}$ dans chacun des cas suivants :

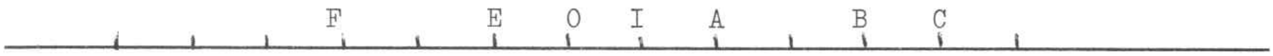
a) dans le cas où (A, B) est le repère,

b) dans le cas où $x_A = 1,4$ et $x_B = - 4,4$.

CHANGEMENTS DE REPERES

I - <u>OBSERVATIONS</u>

Soit une droite D et f la graduation associée, (O,I) le repère de f



On peut graduer la droite en prenant d'autres repères.

A l'aide du calque, nous prendrons comme nouveau repère :

<u>figure 1</u> : le bipoint (B,C). Marquer les abscisses des points

<u>figure 2</u> : le bipoint (O,A). Marquer les abscisses des points

<u>figure 3</u> : le bipoint (O,E). Marquer les abscisses des points

<u>figure 4</u> : le bipoint (E,F). Marquer les abscisses des points

Compléter le tableau suivant :

repère	$\overline{AC}$	$\overline{BE}$	$\overline{FC}$	$\overline{CI}$	
(O,I)					
(A,B)					X X
(O,E)					X.. X.. X..
(E,F)					X..
(B,C)					

<u>Conclusion</u> :

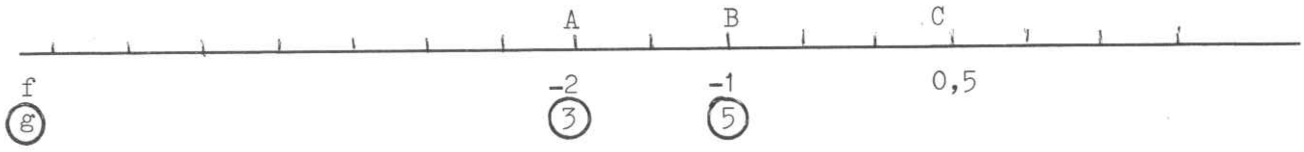
Sur la droite physique une graduation est déterminée par le choix d'un repère. Si f et g sont deux graduations, on a $\overline{MN}g = a\ \overline{MN}f$, a étant un réel non nul.

Nous avons admis qu'à toute droite D est associée une bijection f de D vers $\mathbb{R}$. Il existe d'autres bijections de D vers $\mathbb{R}$. Nous n'étudierons que les bijections g telles que $\overline{MN}g = a\ \overline{MN}f$, a étant un réel non nul.

II - CALCUL DES NOUVELLES ABSCISSES

A) Exercice 1

Soient deux graduations f et g de la droite Δ



(1) Trouver a tel que : $\overline{AB}g = a\ \overline{AB}f$

Calculer $\overline{AC}f$ puis $\overline{AC}g$ puis $g(C)$

(2) Soit le point E tel que $f(E) = -15$

Calculer $\overline{BE}f$, $\overline{BE}g$ puis $g(E)$

(3) Soit le point M tel que $f(M) = x$

Calculer $\overline{BM}f$, $\overline{BM}g$, $g(M)$

(4) Inversement sachant que $g(N) = -10$

Calculer $f(N)$

B) Exercice 2

Compléter le tableau suivant :

f et g étant deux graduations d'une même droite

X	A	B	C	E	F	M	N	P
f(x)	4	5	1	-8	-2	x		
g(x)	1	-2					7	4

Figure 1

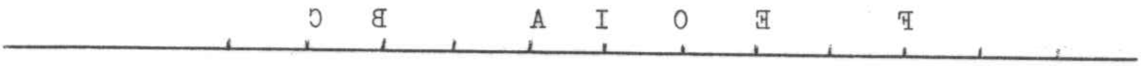


Figure 2

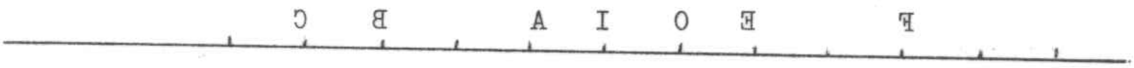


Figure 3

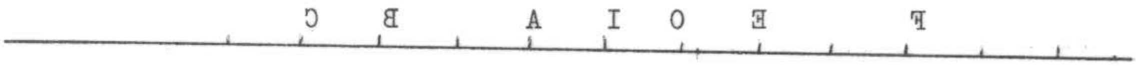


Figure 4

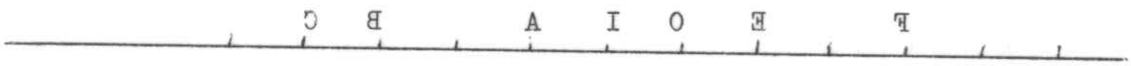


Figure 1

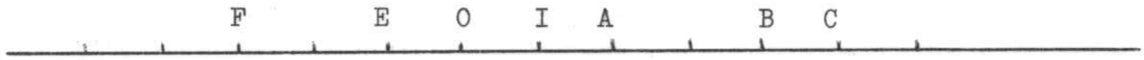


Figure 2

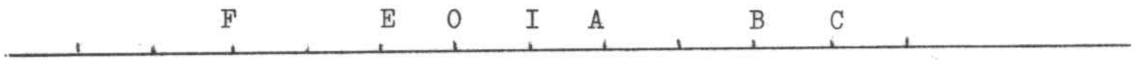


Figure 3

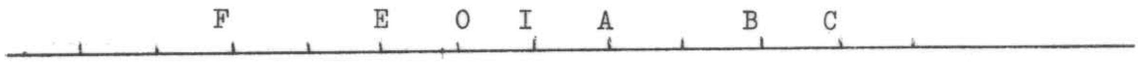
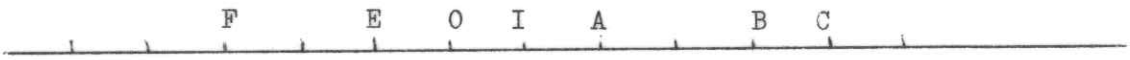


Figure 4



C) Cas général

Soient deux graduations f et g, et a le réel non nul tel que pour tout point M et N $\overline{MN}\ g = a\ \overline{MN}\ f$.

Exprimons g(M) en fonction de f(M)

Soit A l'origine de g

$\overline{AM}\ g = a\ \overline{AM}\ f$

$g(M) - g(A) = a\left[f(M) - f(A)\right]$

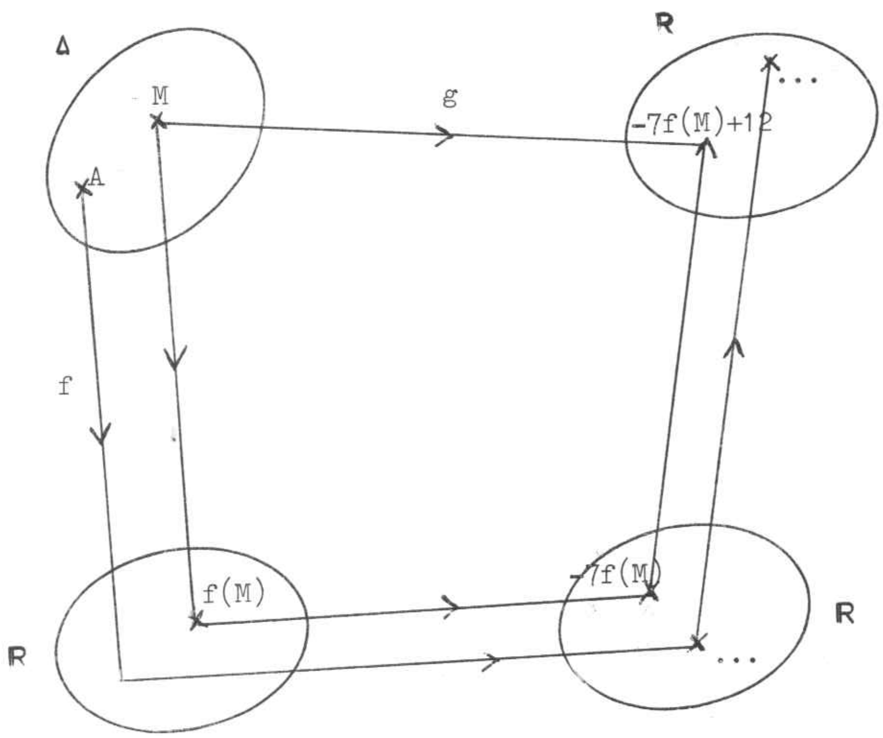
$g(M) = a\ f(M) - a\ f(A)$

Appelons b le réel $-a\ f(A)$

(1) $\boxed{g(M) = a\ f(M) + b \quad a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R}}$

D) Exercice 3

Soit f la bijection associée à la droite Δ et g une application de Δ dans $\mathbb{R}$ telle que : $g(M) = -7f(M) + 12$



(1) g est-elle une bijection ?

(2) Vérifier que pour tout point M et N, $\overline{MN}g = -7\ \overline{MN}\ f$

III - QUE DEVIENNENT LES PROPRIETES ETUDIEES POUR UNE GRADUATION QUAND ON CHANGE LE REPERE ?

a) Mesures algébriques

$\overline{MN}\ g = a\ \overline{MN}\ f$

Remarque : Si $a = 1$ $\overline{MN}\ g = \overline{MN}\ f$

La relation 1 devient $g(M) = f(M) + b$

Si 0 est l'origine de f $g(0) = b$

On passe d'une graduation à l'autre par une translation.

Dans ce cas, on peut envisager $\overline{MN}$ sans préciser par rapport à f ou à g.

La droite D munie des graduations du type: $M \longmapsto f(M) + b$ est appelée un axe.

b) Relation de Chasles

1) La démonstration faite pour f reste valable pour g (cf: page 12.3)

2) Autre démonstration : $\overline{AB}\ f = \overline{AC}\ f + \overline{CB}\ f$

$$a\ \overline{AB}\ f = a\ \overline{AC}\ f + a\ \overline{CB}\ f$$

$$\overline{AB}\ g = \overline{AC}\ g + \overline{CB}\ f$$

Quels que soient les points A, B, C la relation $\boxed{\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}}$ ne dépend pas du repère choisi.

c) Distance

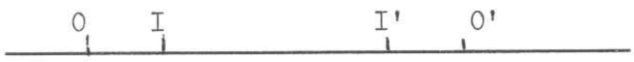
$d(M,N)g = |a|\ d(M,N)f$

car $d(M,N)\ g = |\overline{MN}\ g| = |a\ \overline{MN}\ f| = |a|\,|\overline{MN}|\ f = |a|\ d(M,N)f$

Si $|a| = 1$ $d(M,N)\ g = d(M,N)\ f$

$a = 1$ on retrouve l'axe associé au repère $(0,I)$

$a = -1$ on retrouve l'axe associé au repère $(I,0)$



d) Ordre

Comparons les signes de $\overline{MN}\ g$ et $\overline{MN}\ f$

Si $a > 0$ l'ordre sur Δ définie par f est le même que celui défini par g.

Si $a < 0$ l'ordre sur Δ est changé.

e) Milieu

A l'aide de f, aux points A et B on a associé le point I tel que :

$\overline{AI}\ f = \overline{IB}\ f$

$a\ \overline{AI}\ f = a\ \overline{IB}\ f$ donc $\overline{AI}\ g = \overline{IB}\ g$

Pour rechercher le milieu de [AB] on peut utiliser n'importe quelle graduation.

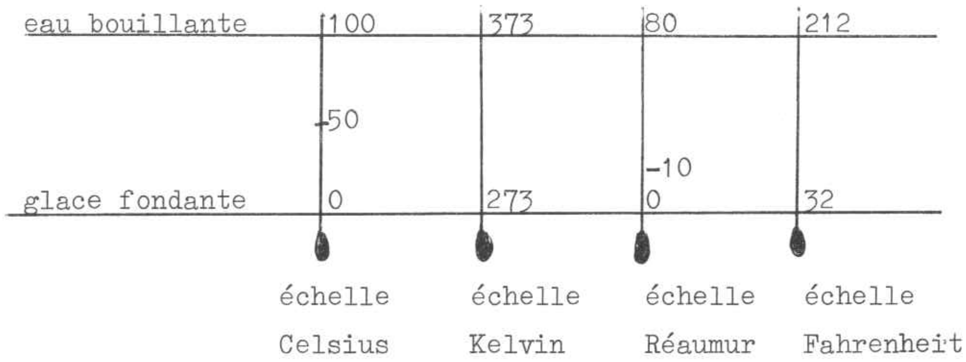
IV - EXERCICES

Exercice 1

Sur le tableau ci-contre vous trouverez les distances en km de villes à partir de Paris.
Compléter ce tableau en inscrivant
- ces distances exprimées en miles
(1 mile $\simeq$ 1609 m)
- les distances de ces villes à partir de Lyon exprimées en km puis en miles.

	kms	kms	miles	miles
PARIS	0		0	
LYON	445	0		0
VALENCE SUD	549			
NIMES OUEST	699			
BEZIERS "	809			
NARBONNE	834			

Exercice 2



Un thermomètre peut être considéré comme une droite physique pour laquelle les graduations généralement utilisées qu'on appelle échelles de températures sont l'échelle Celsius, l'échelle Kelvin et l'échelle Réaumur et l'échelle Fahrenheit
Convertir dans les autres échelles :

50° Celsius et 10° Réaumur.

Exercice 3

Le franc vaut 13,5 pesetas et il faut 1,20 F pour 1 mark. Compléter le tableau :

Valeur en francs	5			x		
Valeur en pesetas		180			y	
Valeur en mark			15,60			z

-=-=-=-=-=-=-=-=-

DOCUMENT SUR LES REELS DE

L'I.R.E.M. DE GRENOBLE

Il s'agit du document de travail n° 11, servant à la deuxième année de formation continue des P.E.G.C. C'est une présentation des Réels qui utilise coupures et nombres décimaux.

Dans ce document il est admis a priori que les ensembles $\mathbb{N}$ *(des naturels),* $\mathbb{Z}$ *(des entiers) et* $\mathbb{D}$ *(des décimaux) munis de leurs structures usuelles sont bien connus.*

A une approche axiomatique de $\mathbb{R}$ *comme corps ordonné complet, nous préférerons une approche plus constructive à l'issue de laquelle un réel apparaîtra comme représenté par une (ou deux) écriture illimitée précédée d'un signe.*

Les propriétés et les théorèmes sont cités sans preuve explicite, seules des indications sont données. Il appartient au lecteur de se convaincre de l'exactitude des énoncés. Il sera guidé pour cela par une fiche annexe écrite à cet effet. Il ne devra pas se priver de faire des dessins.

I – VOCABULAIRE DES ENSEMBLES ORDONNES.

1.1 Soit E un ensemble ordonné et A une partie de E.

1.1.1 *Définition.* On dit que a *est le plus grand élément de* A lorsque a est un élément de A tel que pour tout élément x de a, on a $x \leqslant a$.

On définit de manière analogue l'expression a *est le plus petit élément de* A.

Exemples. Dans $\mathbb{N}$ naturellement ordonné, l'ensemble I des nombres impairs a un plus petit élément : *un*, et n'a pas de plus grand élément.

Soit X un ensemble quelconque et E l'ensemble des parties de X ordonné par l'inclusion. Prenons pour A l'ensemble E lui-même, il admet un plus grand élément X et un plus petit élément ϕ.

1.1.2 *Définition.* On dit que u *majore* A ou de manière synonyme que u *est un majorant de* A lorsque u est un élément de E tel que pour tout élément x de A, on a $x \leqslant u$.
On définit de manière analogue les expressions : u *minore* A et u *est un minorant de* A.

Exemples. Dans $\mathbb{N}$ naturellement ordonné toute partie est minorée par *zéro* et l'ensemble des naturels dont l'écriture binaire comporte cinq chiffres au plus est majoré par *cent.*

1.1.3 *Définition.* On dit que E *est totalement ordonné* ou de manière synonyme que *l'ordre sur* E *est total,* lorsque quels que soient x et y de E on a $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

Exemple. L'inclusion sur l'ensemble des parties de X n'est pas en général un ordre total.
L'ensemble $\mathbb{N}$ est totalement ordonné pour l'ordre naturel. Il est usuel de schématiser un ordre total par un trait allant de gauche à droite. Sur un tel schéma un point à gauche d'un autre est considéré comme représentant un élément plus petit. Par exemple le schéma ci-dessous représente un ensemble A majoré par un élément u.

1.2 Dans ce document pour toute la suite les ordres considérés sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{D}$ sont les ordres usuels.

1.2.1 *Propriété.* Dans $\mathbb{N}$ toute partie non vide a un plus petit élément.

1.2.2 *Propriété.* Dans $\mathbb{N}$ une partie est finie si et seulement si elle est majorée.

1.2.3 Dans $\mathbb{Z}$ la propriété énoncée pour $\mathbb{N}$ en 1.2.1 n'est pas vraie. Par exemple, $\mathbb{Z}$ en tant que partie de lui-même n'a pas de plus petit élément.

1.2.4 *Propriété.* Dans $\mathbb{Z}$ toute partie non vide minorée (resp. majorée) a un plus petit (resp. grand)élément.

1.2.5 *Propriété.* Dans $\mathbb{Z}$ une partie est finie si et seulement si elle est à la fois minorée et majorée.

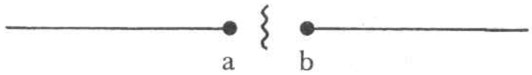
1.3 Soit un ensemble E totalement ordonné.

1.3.1 *Définition.* On appelle *coupure* de E, un couple (A, B) de parties de E telles que $A \neq \phi$, $B \neq \phi$, $A \cup B = E$ et quels que soient x de A et y de B on a $x < y$.
On schématise

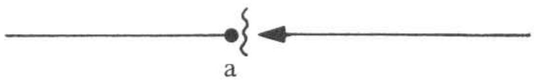
De cette définition il découle que tout élément de A minore B, que tout élément de B majore A et que A et B sont disjoints, c'est-à-dire $A \cap B = \phi$.

A priori, on peut envisager quatre types de coupures (A, B) :

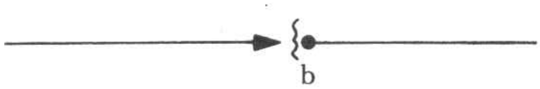
Trou. La partie A a un plus grand élément a et la partie B un plus petit élément b.
Les éléments a et b sont dits *consécutifs.*



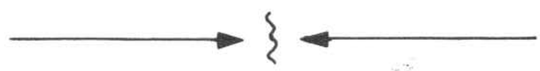
Bâbord. La partie A a un plus grand élément a et la partie B n'a pas de plus petit élément.



Tribord. La partie A n'a pas de plus grand élément et la partie B a un plus petit élément b.



Lacune. La partie A n'a pas de plus grand élément et la partie B n'a pas de plus petit élément.



1.3.2 Soit (A, B) une coupure de $\mathbb{Z}$, on constate que A a un plus grand élément a et que B a un plus petit élément b. Il y a un trou.

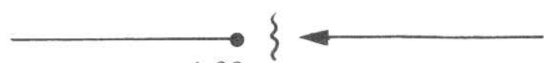
1.3.3 *Propriété.* L'ensemble $\mathbb{Z}$ est plein de trous (l'ensemble $\mathbb{N}$ aussi, évidemment).

1.3.4 *Propriété.* L'ensemble $\mathbb{D}$ est sans trou.
En effet dans $\mathbb{D}$ entre deux éléments différents il s'en trouve nécessairement un troisième différent des deux précédents.

1.3.5 Par contre dans $\mathbb{D}$ on trouve hormis les trous tous les autres types de coupures.

Exemples.

1.3.5.1 Soit A l'ensemble des décimaux x tels que $x \leqslant 1{,}32$ et B l'ensemble complémentaire. La coupure (A, B) est bâbord.



1.3.5.2 Soit A l'ensemble des décimaux x tels que $x < 2{,}01$ et B l'ensemble complémentaire. La coupure (A, B) est tribord.

1.3.5.3 Soit A l'ensemble des décimaux x tels que $3x < 1$ et B l'ensemble complémentaire. La coupure (A, B) est une lacune.

En effet, soit u un élément de A, on constate que $u + \dfrac{1 - 3u}{10}$ est un élément de A strictement supérieur a u et par conséquent A n'a pas de plus grand élément. De même soit v un élément de B, on constate que $v - \dfrac{3v - 1}{10}$ est un élément de B strictement inférieur à v et par conséquent B n'a pas de plus petit élément.

pour 1.3.5.1

n	a_n	b_n
0	0	2
1	1,3	1,4
2	1,32	1,33
3	1,320	1,321
4	1,3200	1,3201
5	1,32000	1,32001

pour 1.3.5.2

n	a_n	b_n
0	2	3
1	2,0	2,1
2	2,00	2,01
3	2,009	2,009
4	2,0099	2,0100
5	2,00999	2,01000

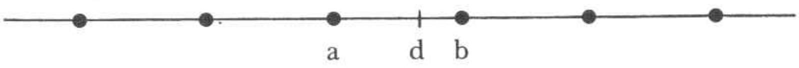
pour 1.3.5.3

n	a_n	b_n
0	0	1
1	0,3	0,4
2	0,33	0,34
3	0,333	0,334
4	0,3333	0,3334
5	0,33333	0,33334

On remarque que les écritures des a_n sont «emboitées» en ce sens que pour $m <$ l'écriture de a_m s'obtient à partir de celle de a_n en supprimant les $(n - m)$ chiffres les plus à droite.
De ce fait la liste des a_n est entièrement caractérisée par la liste des chiffres successifs, qui apparaissent lorsque n augmente.
Par exemple dans les trois cas ci-dessous :
1,32000000......
2,00999999......
0,33333333......

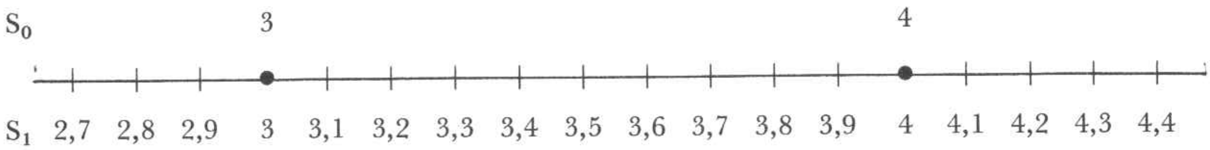
II – ETUDE DES COUPURES DE $\mathbb{D}$.

2.1 En quelque sorte les éléments de $\mathbb{D}$, qui n'appartiennent pas à $\mathbb{Z}$ s'intercalent entre les éléments de $\mathbb{Z}$. Plus précisemment pour un décimal d non entier il existe deux entiers consécutifs a et b tels que $a < d < b$.



Notons S_0 l'ensemble $\mathbb{Z}$;

S_1 l'ensemble des décimaux, dont l'écriture usuelle comporte au plus un chiffre après la virgule



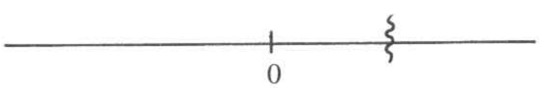
et plus généralement S_n l'ensemble des décimaux, dont l'écriture usuelle comporte au plus n chiffres après la virgule.

On a : $S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset S_n \subset \ldots$

L'ensemble $\mathbb{D}$ est la réunion des ensembles S_n.

Pour chaque valeur de n l'application $x \longmapsto 10^n x$ de S_n dans $\mathbb{Z}$ est un isomorphisme d'ordre et pour un décimal d non élément de S_n il existe deux éléments de S_n consécutifs a_n et b_n tels que $a_n < d < b_n$.

2.2 Dans $\mathbb{D}$ l'application $x \longmapsto x + a$, où a est un entier, est un automorphisme d'ordre, qui conserve globalement chaque S_n. Afin de simplifier notre étude nous ne considérons, jusqu'à nouvel ordre, que des coupures (A, B) de $\mathbb{D}$ telles que 0 appartient à A.



Nous notons K l'ensemble de ces coupures.

2.2.1 Soit (A, B) un élément de K. Notons A_n et B_n les ensembles $A \cap S_n$ et $B \cap S_n$. Le couple (A_n, B_n) est une coupure de S_n, du type trou. Notons a_n le plus grand élément de A_n et b_n le plus petit élément de B_n.

Pour les coupures étudiées en 1.3.5 on obtient respectivement :

2.2.2 Une liste de chiffres telle que celle ci-dessus sera appelée par la suite *écriture illimitée.* On peut considérer qu'une telle écriture (qui ne peut évidemment être matérialisée) est représentative d'une application α de $\mathbb{Z}$ dans l'ensemble des chiffres, telle que $\alpha(n)$ est nul pour n supérieur à une certaine valeur.

Par exemple :

... 5	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6 ...
... 0	0	0	0	0	3 ,	1	4	1	5	9	2 ...

Pour chaque n entier, $\alpha(n)$ est appelé *chiffre de rang* n. Les zéros à gauche ne sont pas écrits.

2.2.3 Par la suite nous désignons abusivement par α aussi bien l'application que sa représentation et par $\mathbb{E}$ l'ensemble des écritures illimitées.

A chaque coupure (A, B) correspond une unique écriture illimitée α. Autrement dit nous venons de définir une application θ de l'ensemble K des coupures (A, B) de $\mathbb{D}$ telles que $0 \in A$, dans l'ensemble $\mathbb{E}$ des écritures illimitées.

2.3 Il est naturel d'ordonner l'ensemble K par la relation $(A, B) \leqslant (A', B')$ vérifiée si et seulement si $A \subset A'$.

Cet ordre est total.

Soient α et α' les écritures illimitées associées à deux coupures distinctes (A, B) et (A′, B′).

Reconnaître que (A, B) est inférieur à (A′, B′) c'est reconnaître l'existence d'un décimal d appartenant à B et à A′. Il suffit en fait de chercher d parmi les nombres a'_n associés à (A′, B′).

Pour n assez grand, on a $\alpha(n) = \alpha'(n) = 0$, par conséquent l'ensemble V des entiers n tels que $\alpha(n) \neq \alpha'(n)$ est majoré (et non vide puisque $\alpha \neq \alpha'$). Par suite V admet un plus grand élément m. Si $m \geqslant 0$, $a_0 \neq a'_0$; si $m < 0$, $a_{-m} \neq a'_{-m}$. Dans le premier cas, posons $k = 0$; dans le deuxième cas, $k = -m$. Si $a_k < a'_k$ alors $b_k \leqslant a'_k$ c'est-à-dire que l'élément a'_k de A′ est aussi un élément de B et par suite $(A, B) < (A', B')$; sinon $(A', B') < (A, B)$.

2.3.1 *Propriété.* L'application θ définie au 2.2.3 est une bijection. D'une part c'est une injection (d'après 2.2.3). D'autre part soit α une écriture illimitée, pour chaque naturel n, désignons par a_n le décimal obtenu en ne conservant de α que les chiffres de rang supérieur ou égal à −n. Prenons pour A la partie constituée des éléments x de $\mathbb{D}$ tels que pour un n au moins on ait $x \leqslant a_n$ et soit B la partie complémentaire de A dans $\mathbb{D}$. On constate que (A, B) est une coupure dont l'image θ est précisément α. Autrement dit, θ est surjective.

2.3.2 On appelle *ordre lexicographique* sur $\mathbb{E}$ l'ordre obtenu par transport selon θ de l'ordre défini ci-dessus pour K.
On constate que pour cet ordre on a : $\alpha < \alpha'$ si et seulement si $\alpha(m) < \alpha'(m)$ pour le plus grand élément m de l'ensemble des entiers n tels que $\alpha(n) \neq \alpha'(n)$.

2.3.3 Pour un élément α de $\mathbb{E}$ trois cas se présentent.

— 1er cas. $\alpha(n) = 9$ pour tout n inférieur à un certain élément de $\mathbb{Z}$.
Par exemple : 2,0099999...... .
Alors α n'a pas de *précédent*, c'est-à-dire que l'ensemble des éléments de $\mathbb{E}$ strictement inférieurs à α n'a pas de plus grand élément. Par contre α a un *suivant*, c'est-à-dire que l'ensemble des éléments de $\mathbb{E}$ strictement supérieurs à α a un plus petit élément. Par exemple le suivant de 2,009999.... est 2,0100000....

— 2ème cas. $\alpha(n) = 0$ pour tout n inférieur à un certain élément de $\mathbb{Z}$.
Par exemple : 1,32000.... .
Alors α a un précédent, mais n'a pas de suivant.
Par exemple le précédent de 1,32000.... est 1,319999... .

— 3ème cas. Autre que le premier et le deuxième.
Par exemple : 0,33333.... .
Alors α n'a ni précédent, ni suivant.

2.3.4 *Propriété.* Dans $\mathbb{E}$ il y a des trous. Il suffit de couper entre deux éléments consécutifs tels 2,009999.... et 2,01000.... .

2.3.5 *Propriété.* Il existe une bijection naturelle entre les trous de $\mathbb{E}$ et l'ensemble $\mathbb{D}_+$ des décimaux positifs.
En effet à chaque décimal positif correspond une coupure bâbord et une coupure tribord, auxquelles correspondent deux écritures illimitées consécutives dans $\mathbb{E}$, l'une se terminant par des neufs, l'autre part des zéros. Ces deux écritures étant les «bords» d'un trou, coupure de $\mathbb{E}$. Inversement deux éléments consécutifs de $\mathbb{E}$ sont les écritures illimitées associées aux coupures bâbord et tribord correspondant à un même décimal positif.

III – ENSEMBLE ORDONNE $\mathbb{R}_+$.

3.1 Dans $\mathbb{E}$ confondons deux éléments consécutifs. C'est-à-dire, considérons la relation d'équivalence notée $\equiv$, telle que :

un élément qui n'a ni suivant, ni précédent est seul dans sa classe et deux éléments consécutifs sont dans la même classe.

3.1.1 *Propriété.* L'ordre lexicographique sur $\mathbb{E}$ est compatible avec la relation $\equiv$.
En ce sens que si $\alpha \equiv \beta$, $\alpha' \equiv \alpha$ et $\beta' \equiv \beta$ alors $\alpha < \beta$ équivaut à $\alpha' < \beta'$.

3.2 *Définition.* On désigne par $\mathbb{R}_+$ l'ensemble quotient $\mathbb{E} / \equiv$.

Un élément r de $\mathbb{R}_+$ est appelé *nombre réel positif,* il a selon le cas une ou deux écritures illimitées.

L'ensemble $\mathbb{R}_+$ est naturellement ordonné par passage au quotient, compte tenu de la propriété 3.1.1. C'est-à-dire que $r \leqslant r'$ si et seulement si il existe des écritures α et α' de r et r' telles que $\alpha \leqslant \alpha'$ dans $\mathbb{E}$.

3.2.1 On identifie $\mathbb{D}_+$et l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}_+$ qui ont deux écritures illimitées.
Ainsi un décimal positif est un réel positif, qui a deux écritures illimitées et une infinité d'écritures limitées.
Par exemple : 1,239999....
1,240000....
1, 24 1,240 1,2400 etc...

3.2.2 *Propriété.* L'ensemble $\mathbb{D}_+$ est dense dans $\mathbb{R}_+$. C'est-à-dire qu'entre deux réels distincts il existe un décimal.

3.2.3 *Propriété.* L'ensemble $\mathbb{R}_+$ est sans trou. On l'a fait exprés, en confondant les éléments consécutifs de $\mathbb{E}$.

3.2.4 *Propriété.* L'ensemble $\mathbb{R}_+$ est sans lacune.
Soit (M, N) une coupure de $\mathbb{R}_+$. Notons A et B les ensembles $M \cap \mathbb{D}_+$ et $N \cap \mathbb{D}_+$ alors (A, B) est une coupure de $\mathbb{D}_+$ à laquelle correspond une écriture illimitée et par suite un réel r. On constate que r est plus grand que tout élément de M et plus petit que tout élément de N. Autrement dit la coupure (M, N) est soit du type bâbord soit du type tribord puisque r appartient soit à M, soit à N.

3.3 Soit E un ensemble ordonné et A une partie de E on dit que s *est la borne supérieure de* A lorsque s est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A.

On définit de manière analogue l'expression s *est la borne inférieure de* A.

Exemples. Dans $\mathbb{N}$ soit F l'ensemble des naturels impairs dont l'écriture décimale usuelle comporte deux chiffres, cet ensemble a pour borne inférieure 11 et pour borne supérieure 99. (Ces deux nombres appartiennent à F).

Dans $\mathbb{D}$ soit G l'ensemble des x tels que $|3x| < 1$, bien que minoré et majoré cet ensemble n'a ni borne inférieure, ni borne supérieure.

Par contre, soit H l'ensemble des x tels que $x < 1$ cet ensemble admet une borne supérieure 1 (qui n'appartient pas à H).

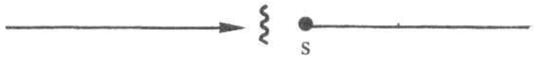
3.3.1 *Propriété.* Dans $\mathbb{R}_+$ toute partie non vide majorée (resp: minorée) admet une borne supérieure (resp. inférieure).
En effet, soit P une partie non vide de $\mathbb{R}_+$ majorée par v.

Soit M l'ensemble des x de $\mathbb{R}_+$ tels qu'il existe un élément p de P tel que $x \leqslant p$. Cet ensemble M contient P. Il n'est pas vide. Soit N le complémentaire de M dans $\mathbb{R}_+$. Le réel v appartient à N, qui n'est donc pas vide. On constate que le couple (M, N) est une coupure de $\mathbb{R}_+$.

— 1er cas. Cette coupure (M, N) est du type bâbord.

L'ensemble M a un plus grand élément s, qui nécessairement appartient à P. Ce réel s est la borne supérieure de P.

— 2ème cas. Cette coupure (M, N) est du type tribord.



L'ensemble N a un plus petit élément s. Cet ensemble est l'ensemble des majorants de P. Le réel s est la borne supérieure de P.

IV — OPERATIONS DANS $\mathbb{R}_+$.

4.1 Dans $\mathbb{D}_+$ nous connaissons l'addition avec laquelle l'ordre est compatible en ce sens que :

$a \leqslant b$ équivaut à $a + c \leqslant b + c$ quels que soient a, b et c de $\mathbb{D}_+$.

La question se pose de savoir s'il est possible de définir dans $\mathbb{R}_+$ une addition (notée pour l'instant $\mathbin{+\!\!+}$) qui d'une part prolonge l'addition dans $\mathbb{D}_+$ c'est-à-dire que si a et b sont des décimaux alors $a \mathbin{+\!\!+} b$ est $a + b$ et d'autre part soit telle que l'on ait : a $\leqslant$ b équivaut à a $+\!\!+$ c $\leqslant$ b $+\!\!+$ c quels que soient a, b et c de $\mathbb{R}_+$.

La réponse est oui.

Plus précisément il apparait comme nécessaire de définir a $+\!\!+$ b comme la borne supérieure de l'ensemble des sommes d + e où d et e sont des décimaux inférieurs respectivement aux réels a et b. Ce nombre étant aussi la borne inférieure de l'ensemble des sommes f + g où f et g sont des décimaux supérieurs respectivement à a et b.

4.2 De manière analogue nous connaissons dans $\mathbb{D}_+$ la multiplication avec laquelle l'ordre est compatible en ce sens que : quels que soient a, b et c (c > 0) de $\mathbb{D}_+$.

a $\leqslant$ b équivaut à a $\times$ c $\leqslant$ b $\times$ c.

On définit dans $\mathbb{R}_+$ une multiplication (notée pour l'instant $\times\times$) qui prolonge la multiplication de $\mathbb{D}_+$ et telle que :

a $\leqslant$ b équivaut à a $\times\times$ c $\leqslant$ b $\times\times$ c quels que soient a, b et c (c > 0) de $\mathbb{R}_+$.

4.3 On peut montrer que l'addition $+\!\!+$ est commutative, associative et qu'elle admet zéro pour élément neutre.

De même on peut démontrer que la multiplication $\times\times$ est commutative, associative, qu'elle admet un élément neutre 1, que tout élément non nul admet un inverse et qu'elle est distributive par rapport à l'addition.

V – LA STRUCTURE ($\mathbb{R}$, +, $\times$, $\leqslant$).

5.1 Au chapitre II nous nous sommes volontairement limités aux coupures (A, B) de $\mathbb{D}$ telles que 0 soit un élément de A. Si nous n'avions pas fait cette restriction nous aurions défini (avec quelques difficultés techniques supplémentaires) un ensemble d'écritures illimitées précédées d'un signe et un ensemble $\mathbb{R}$ dit *ensemble des nombres réels* contenant $\mathbb{D}$.

5.2 On munit $\mathbb{R}$ d'une addition, d'une multiplication et d'un ordre (notés désormais +, $\times$ et $\leqslant$) tels que :

a) $\mathbb{R}$ *est un corps commutatif.*

b) $\mathbb{R}$ *est totalement ordonné.*

c) $\mathbb{R}$ *est archimédien* (quels que soient deux réels positifs u et v de $\mathbb{R}$ il existe un naturel n tel que u $\leqslant$ nv).

d) *Dans* $\mathbb{R}$, *toute partie non vide majorée admet une borne supérieure et toute partie non vide minorée admet une borne inférieure.*

5.3 Les propriétés a), b), c), d) énoncées ci-dessus sont *caractéristiques* en ce sens que toute structure analogue vérifiant ces propriétés est *isomorphe* à ($\mathbb{R}$, +, $\times$, $\leqslant$).

Par exemple, pour trouver un surensemble de $\mathbb{Z}$ qui n'ait pas de trou, il n'est pas necessaire d'intercaler entre deux éléments consécutifs de S_n neuf éléments intermédiaires, un seul aurait suffit. En procédant de la sorte nous aurions été amené à définir les écritures *binaires* illimitées, et aurions abouti à la même structure

5.4 Comme groupe additif $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Z}$ comme sous groupe, et comme corps contient le corps des fractions de $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire l'ensemble (noté $\mathbb{Q}$) des produits d'un entier par l'inverse d'un entier non nul.

Les éléments de $\mathbb{Q}$ sont appelés les *nombres rationnels*. Ils sont caractérisés par le fait que leurs écritures illimitées sont périodiques à partir d'un certain rang. Les éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont appelés les *nombres irrationnels*.

Compte tenu des diverses identifications on a

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

BIBLIOGRAPHIE SUR LES REELS ET SUR L'ANALYSE DANS LE SECONDAIRE

Cette bibliographie n'est qu'un modeste hors d'oeuvre, et les Journées devraient permettre de passer au plat de résistance. On devrait aussi faire des commentaires sur ces livres, en vue d'une publication dans le Bulletin Inter-I.R.E.M. par exemple.

OUVRAGES DE TYPE UNIVERSITAIRE (Compléments d'information)

R. BAIRE	Théorie des Nombres Irrationnels, des Limites et de la Continuité - PARIS VUIBERT
	Leçons sur les Fonctions Discontinues - PARIS GAUTHIER-VILLARS (1905)
H. LEBESGUE	Sur la Mesure des Grandeurs - Monographie sur l'enseignement Mathématique (1956)
I. NIVEN	Irrational Numbers (Carus monograph n° 11) - WILEY and Sons (1956)
	Numbers : Rational and Irrational - NEW YORK RANDOM HOUSE (1961)
G. CHOQUET	Topologie - MASSON (1964).

Bien entendu les "manuels" usuels introduisent $\mathbb{R}$ d'une façon ou d'une autre. On citera -parmi d'autres- :

- LELONG-FERRAND - ARNAUDIES : "Analyse" (Armand COLIN)
- CHAMBADAL - OVAERT : "Cours de Mathématiques" (GAUTHIER-VILLARS)
- COUTY - EZRA : "Analyse" (Collection U)
- REVUZ : "Mathématiques pour l'élève-professeur".

OUVRAGES "DE VULGARISATION"

S. DROBOT	Real Numbers - PRENTICE HALL (1964)
L. ZIPPIN	Uses of Infinity - RANDOM HOUSE (1962)

OUVRAGES DE REFLEXION PEDAGOGIQUE

PAPY	Nouvelles leçons d'Analyse Mathématique par Frédérique - Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique (1967)
	Le premier enseignement de l'Analyse - P.U.F. (1968)
I.R.E.M. de MONTPELLIER	Documents pour le 1er Cycle (1975-1976)(cf. Document joint)
I.R.E.M. de GRENOBLE	Les Nombres Réels (cf. Document joint) (1972-1973)
I.R.E.M. de LIMOGES	3 Constructions complètes des Nombres Réels (suites de CAUCHY, coupures et Nombres Décimaux) et équivalences (1975-1976)
I.R.E.M. de NANTES	Analyse et Topologie (cf. Nanta Iremica) (1975-1976)

.../...

I.R.E.M. de TOULOUSE — Notions de Limite (1975) (ARDITTI) : par les filtres

J. DIEUDONNE — Algèbre Linéaire et Géométrie Elémentaire - PARIS HERMANN (1964) - p. 21-28 pour les Nombres Réels

I.R.E.M. de LYON — Les Nombres Réels I (formation continue des Maîtres du 2e Cycle) (1975-1976) : ce document construit les Nombres Réels par les développements décimaux illimités.

DEHAME — Bulletin de l'A.P.M. - N° 275-276

I.R.E.M. de BASSE-NORMANDIE (PORQUET - TOFFIN) — Initiation à l'Analyse

Sur l'acquisition des structures numériques en fin de 3e :

- I.R.E.M. de STRASBOURG : "Educational Studies in Mathematics" 5 (1974) - p. 441-459

OUVRAGES D'EPISTEMOLOGIE ET D'HISTOIRE

On a repris la bibliographie du volume n° 3 de Nanta Iremica (Etude historique et épistémologique de la notion de Nombre Réel, de Continu et de Mesure) (cf. Photocopie).

C.B. BOYER — Viete's Use of Decimal Fractions - Mathematics Teacher 55 (1962) - p. 123-127

Zero : the symbol, the concept, the number - National Mathematics Magazine 18 (1944) - p. 323-330

F. CAJORI — A History of Mathematical Notations (2 vol. - 2nd Ed.) - OPEN COURT (1951)

W.F. CONANT — The number concept, its origin and development - NEW YORK MAC MILLAN (1931)

Le National Council of the Teachers of Mathematics a fait paraître plusieurs articles et deux ouvrages sur l'utilisation de l'histoire des Mathématiques dans les classes du Secondaire (31st Yearbook of the N.C.T.M. - WASHINGTON)

P.S. JONES — The History of Mathematics as a teaching tool - The Mathematics Teacher 50 (1957) - p. 59-64

FREITAG H.T. et H. — Using the History of Mathematics in Teaching in the Secondary School Level - The Mathematics Teacher 50 (1957) - p. 220-224

J.A. RUDNICK — Numeration systems and their classroom Roles - Arithmetic Teacher 15 (1968) - p. 138-147

D.E. STRUIK - J. GINSBURG — Numbers and Numerals - N.C.T.M. (1937)

D.J. STRUIK — Simon Stevin and the Decimal Fractions - Mathematics Teacher 52 (1959) - p. 474-478

M.F. WILLERDING — Infinity and its presentation at the High School Level - School Science and Mathematics 63 (1963) - p. 463-474.

BIBLIOGRAPHIE

Etude épistémologique et Historique des idées de nombre, de mesure et de continu (Nanta Iremica - Vol. 3)

La bibliographie sur le sujet est considérable et on se contentera de citer ici, chapitre par chapitre, les ouvrages constamment utilisés, ainsi que des références bibliographiques concernant certaines Oeuvres Originales. En tête, on a noté quelques références générales utiles tout au long du texte.

REFERENCES GENERALES

J. T. DESANTI : La Philosophie Silencieuse ou critique des philosophies de la science.
Ed. du Seuil Paris 1975

M. KLINE : Mathematical Thought from Ancient to Modern Times
Oxford University Press New-York 1972

R. TATON et collaborateurs :
Histoire de la Science
5 volumes P. U. F. 1957

F. RUSSO : Eléments de Bibliographie en Histoire des Sciences
Paris Hermann 1959

N. BOURBAKI : Eléments d'histoire des mathématiques
Paris Hérmann 1960

STRUIK : A source book in Mathematics
Harvard 1969

J. NEEDHAM : Science and Civilisation in China - Vol. I, II, III
Cambridge University Press 1959

CHAPITRE I

Nombre et mesure dans la Mathématique grecque jusqu'à Euclide

EUCLIDE : Opera omnia (grec et latin)
Edition J. L. Heiberg, H. Menge 8 volumes 1883 - 1916

PEYRARD : Les Eléments d'Euclide
Traduction française de Peyrard (1809)
Réédition Blanchard

T. L. HEATH : The thirteen Books of Euclid's Elements
Cambridge 1926
(Nouvelle édition chez Dover)

H. SCHOLZ : Warum haben die Griechen die Irrationalzahlen nicht aufgebaut
Kant Studien (1928) p. 35-72

A. KOYRE : Etudes d'histoire de la pensée philosophique
(Remarques sur les paradoxes de Zénon)
Gallimard Paris 1961

CHAPITRE II

Nombre et mesure chez les Alexandrins

NICOMAQUE : Introductio arithmetica
(Traduction anglaise M. L. d'Ooge New-York 1926)

PROCLUS : Les commentaires sur le premier livre des Eléments d'Euclide
Trad. française P. Ver Eecke Bruges 1943

THEON DE SMYRNE : Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium
Trad. française J. Dupuis Paris 1892

ARCHIMEDE : L'Oeuvre complète
Trad. française P. Ver Eecke (Réédition Blanchard 1961)

DIOPHANTE : L'arithmétique
Trad. française P. Ver Eecke (Réédition Blanchard 1959)

J. ITARD : Les livres arithmétiques d'Euclide
Hermann 1961

KURT VON FRITZ : The discovery of Incommensurability by Hippasos of Metapontum
Annals of Mathematics vol. 48 (1945) p. 242-264

CHAPITRE III

Algébrisation du domaine numérique

N. H. ABEL : Oeuvres Complètes 1881
2 volumes

B. DATTA , A. N. SINGH :
History of Hindu Mathematics
Lahore 1935

E. GALOIS : Oeuvres Mathématiques
Gauthier Villars 1897

C. F. GAUSS : Disquisitiones Arithmeticae 1801

A. P. JUSCHKEWITSCH :
Geschichte der Mathematik in Mittelalter
Teubner Verlag Leipzig 1964

JACQUES PELETIER DU MANS :
Eléments géométriques d'Euclide traduits en français et dédiés à la noblesse française 1611

J. PIERPONT : Early History of Galois's Theory of Equations
Bull. Amer. Math. Soc. 4 (1898) 332-340

LEONARDO PISANO : Scritti di Leonardo Pisano
Publicati da B. Boncompagni 1-2 Roma 1857-1862

F. VIETE : Opera Mathematica
Leyden 1646

S. STEVIN : Les Oeuvres Mathématiques (1634)
(Réédition d'une partie)

CHAPITRE IV

Algébrisation des grandeurs continues : le calcul différentiel et intégral

L. CARNOT : Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal
(Réédition Blanchard Paris 1970)

A. L. CAUCHY : Cours d'Analyse algébrique Paris 1821

R. DESCARTES : Oeuvres
Ed. C. Adam et P. Tannery Paris 1893-1913 (Librairie VRIN)

HELLMOTZ : Zahlen und massen erkenntnis theoritisch betrachter
Leipzig 1887

H. LEBESGUE : Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives
Gauthier-Villars 1903
: Leçons sur les séries trigonométriques
Gauthier-Villars 1905

G. W. LEIBNIZ : Mathematische Schriften
Ed. Gerhardt Berlin 1849-1863
: Der Briefwechsel mit Mathematikem 1899
: Oeuvres (Traduction française)
Firmin-Didot 1859-1875

J. F. MONTLUCA : Histoire des Mathématiques
Réédition Albert Blanchard 1960

I. NEWTON : The Mathematical Works - Mathematical Papers
Johnston Reprint Coys 1964-1967 (Réédition)
: Mathematical Principles of Natural Philosophy
University of Californa Press 1946 (Réédition)

B. PASCAL : Oeuvres Complètes
La Pléiade

CHAPITRES V ET VI

Fondation des grandeurs continues et Arithmétisation de l'infini

Beaucoup de références de textes originaux sont données dans le texte même.

B. BOLZANO : Paradoxen des Unendlichen
Berlin Mayer und Müller 1899
: Rein analytischer Beweis...
Ostwald's Klasscher n° 153 Leipzig 1905

G. CANTOR : Gesammelte Abhandlungen
Berlin Springer 1932

J. CAVAILLES : Philosophie Mathématique
(C'est l'ouvrage le plus utilisé dans ce chapitre et que le lecteur aurait avantage à méditer. C'est un chef-d'oeuvre du genre. On y trouvera en appendice la traduction française de la correspondance entre Dedekind et Cantor).

R. DEDEKIND : Was sind und was sollen die Zahlen
Braunschweig Vieweg u. Sohn 1887
(traduit en anglais, chez Dover 1963 : Essays on the theory of numbers).

: Stetigkeit und Irrationale Zahlen
Idem

: Gesammelte mathematische Werke
Braunschweig 1932

: Voir aussi l'ouvrage de J. Cavaillès pour les lettres de Dedekind à Lipschitz.

J. DESANTI : Les idéalités mathématiques
Ed. du Seuil 1968

M. FICHANT - M. PECHEUX :
Sur l'histoire des Sciences (Cours de Philosophie pour Scientifiques)
Maspéro 1969

E. KANT : Critique de la Raison Pure (Traduction française)
Bibliothèque de Philosophie contemporaine
P.U.F. 1971

C. MERAY : Nouveau Précis d'Analyse Infinitésimale
Paris Savy 1872

A. TARSKI : Sur les ensembles finis
Fund. Math. T 6 (1925) p. 45-65

WHITEHEAD - RUSSEL :
Principia Mathematica
Cambridge T. I, II, III 1910, 1912, 1913

A. ROBINSON : Non Standard Analysis
Springer Verlag

GARNIR, de WILDE, SCHMETS :
Analyse fonctionnelle : théorie constructive des espaces à semi-normes (1968)

CHAPITRE VII

Aperçus sur un développement parallèle en CHINE

J. NEEDHAM : Science and Civilisation in China - Vol. III -
Cambridge University Press 1959

AUTRES PUBLICATIONS DE LA COLLECTION

NANTA - IREMICA

(Parues ou à paraître)

Volume N° 1	Introduction à la logique	MM. DURAND, VAN DEN BOSSCHE
Volume N° 2	Introduction à la Théorie des Ensembles	MM. DURAND, VAN DEN BOSSCHE
Volume N° 3	Etude épistémologique et historique de la notion de nombre réel et de mesure des grandeurs	Jean DHOMBRES
Volume N° 4	Documents relatifs au Volume N° 3	Jean DHOMBRES
Volume N° 5	Le langage BASIC	M. BELHACHE
Volume N° 6	Echec en Mathématiques	A. BIGARD
Volume N° 7	Eléments d'Analyse Fonctionnelle	Jean DHOMBRES
Volume N° 8	Algèbre linéaire et Géométrie vectorielle	R. SEROUX
Volume N° 9	Méthode Mathématiques Modernes utilisées en Théorie de l'approximation	Jean DHOMBRES
Volume N° 10	Analyse	Melle VENARD Jean DHOMBRES
Volume N° 11	Le langage PL/I	M. BELHACHE

Pour se procurer ces livres s'adresser à :

I.R.E.M de NANTES

Université de Nantes

38, boulevard Michelet

BP 1044 44037 NANTES-CEDEX