UNIVERSITÉ DE RENNES 1

IREM RENNES

DE L'ÉCRITURE FRACTIONNAIRE à la MULTIPLICATION DES DÉCIMAUX

Liaison Cycle 3 - 6ème

IREM DE RENNES

NOVEMBRE 2010

2ème édition

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

IREM RENNES

DE L'ECRITURE FRACTIONNAIRE

à la

MULTIPLICATION DES DECIMAUX

Liaison Cycle 3 - 6ème

IREM DE RENNES

JUIN 2002

Malgré les soins apportés à la réalisation de ce document, il est possible que vous trouviez quelques erreurs (fautes de frappe, etc...). Si tel est le cas, écrivez à l'IREM en indiquant le numéro de ces pages, afin que nous puissions les remplacer.

ISBN 2-85728-061-0

Ont participé à la rédaction de ce document :

BELLIAN Christine
Ecole primaire de Cesson

BOUYAUX Thierry
Ecole primaire de Guichen

DENMAT Marie-Nöelle
Ecole primaire de Cesson

GIORGIUTTI Italo
Université de Rennes 1

KHLIFI Lakhdar
Collège des Hautes Ourmes - Rennes

LE POCHE Annick
Collège de Pacé

LE POCHE Gabriel
IUFM de Bretagne – Rennes

LOHYN Monique
Collège de Maure

METAYER Michel
Collège du Rheu

TÊTARD Pierre
Ecole primaire de Cintré

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Le point de vue historique

Fractions et décimaux : (historique)

Notre propos n'est pas de faire une compilation des divers travaux historiques relatifs aux fractions ou aux décimaux. Ce n'est pas ici la place d'un tel travail. Notre but est essentiellement de montrer que, contrairement aux décimaux, les fractions et l'écriture fractionnaire ne sont pas des inventions récentes et qu'elles ont été utilisées non seulement par les administrateurs et les plus grands mathématiciens mais par des sociétés entières.

Pour cela, nous nous contenterons de développer quelques exemples.
Nous avons retenu : **les "fractions égyptiennes", les "rapports" d'Euclide[4] et les "décimaux" de Stévin[5]**

Ces choix ont voulu tenir compte des considérations suivantes :

- en plus des problèmes de critique des sources, pour lesquels nous n'avons aucune compétence, il y a les problèmes des traductions. Celles-ci sont essentiellement des interprétations dans le cadre de théories mathématiques postérieures ; elles cachent les conceptions et les notations originales, nous avons préféré donner quelques exemples dans leurs textes originaux, des traductions et des commentaires, permettant de mieux cerner ces conceptions.

- il est impossible d'aborder l'histoire des fractions et des décimaux sans passer par celle des entiers. Cette dernière est d'une diversité exceptionnelle. Bien plus, certaines écritures comme chez les romains n'ont qu'une finalité informative, l'aspect calculatoire étant laissé à d'autres techniques par exemple celle des bouliers. Il en sera de même pour les fractions.

- il faut s'orienter dans l'histoire des fractions de manière pertinente pour "l'enseignement des mathématiques" à la charnière du primaire et du collège. Il faudrait parler de tous les travaux récents ne serait-ce que pour pouvoir expliquer les jugements de certains enseignants qui considèrent une seule conception savante des rationnels qui leur a été transmise, on ne sait comment, avec celle qu'il faut inculquer aux élèves..

Nommons ces conceptions :

-plus petit ensemble stable par les quatre opérations et contenant $\mathbb{N}$,

-couples d'entiers avec relations d'équivalence ad hoc,

- rapports de nombres (ou de grandeurs) commensurables avec explicitations d'unités de mesures (et la manière dont N opère sur ces couples),

- construction de $\mathbb{Q}$ à la Bourbaki,

- localisation dans les anneaux ou les catégories etc.

---

[4] Euclide 3$^{\text{ième}}$ siècle av JC
[5] Stevin 1548-1620 (Bruges)

Les exemples :

Pour analyser les exemples nous avons pensé que le meilleur cadre était celui des conceptions de Vergnaud, dans lequel il faut considérer à la fois une **famille de situations**, des interfaces (dans notre cas des **écritures)** et les **invariants opératoires.** (par exemple : utilisation systématique de tel ou tel algorithme, de notions géométriques, de partitions d'unités, conduites associées à des représentations de certains objets comme les entiers)

1. Les fractions de l'ancienne Egypte.

Le premier exemple que nous avons choisi est celui de l'ancienne Egypte parce qu'il semble aux antipodes du nôtre et donc qu'il y aura beaucoup de commentaires à faire.

Les situations :

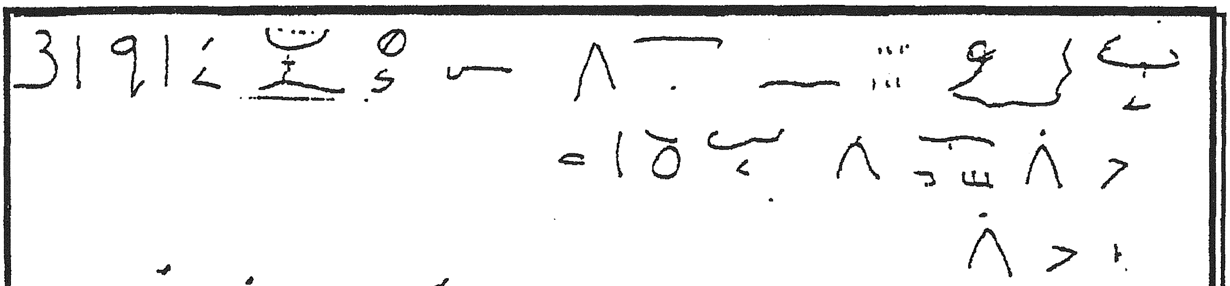
L'exemple que nous avons choisi de détailler est celui du problème 3 du papyrus de Rhind c'est un problème lié à la vie pratique, en fait un problème de partage, dont voici l'énoncé : " partage 6 pains entre 10 hommes".

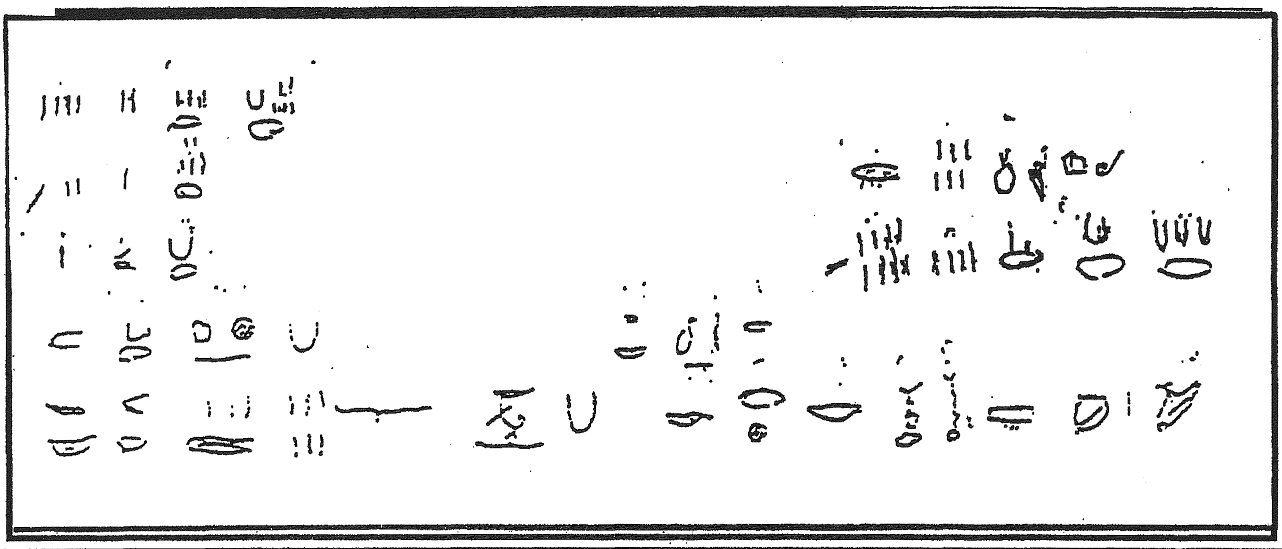
Dans ce papyrus, les problèmes sont regroupés en problèmes de même type. La majorité des problèmes sont liés à la vie pratique : en plus des problèmes de partage, on trouve des problèmes de calculs de longueurs, d'aires et de volumes, des problèmes de changements d'unités de mesures, des problèmes commerciaux, des problèmes d'impôts. Quelques problèmes sont des problèmes techniques voire mathématiques : cf. par exemple [Jean-Luc Chabert p. 103]

Voici donc le problème choisi : nous avons placé trois textes dans trois cadres. Le premier texte est à quelques reconstitutions près celui du papyrus. Il est écrit en caractères "hiératiques" (c'est l'écriture manuscrite des scribes)

Le second est la transcription de ce texte en caractères "hiéroglyphiques" (ces caractères sont ceux de l'écriture officielle)

Le troisième est une traduction française de ces textes. Comme ceux-ci sont écrits de droite à gauche la traduction sera disposée symétriquement par rapport à l'axe vertical de la feuille.





partage 6 pains entre 10 hommes fais la multiplication de

1/2 1/10 par 10 voici les calculs

1 1/2 1/10 /8 4 2/3 1/10 1/30

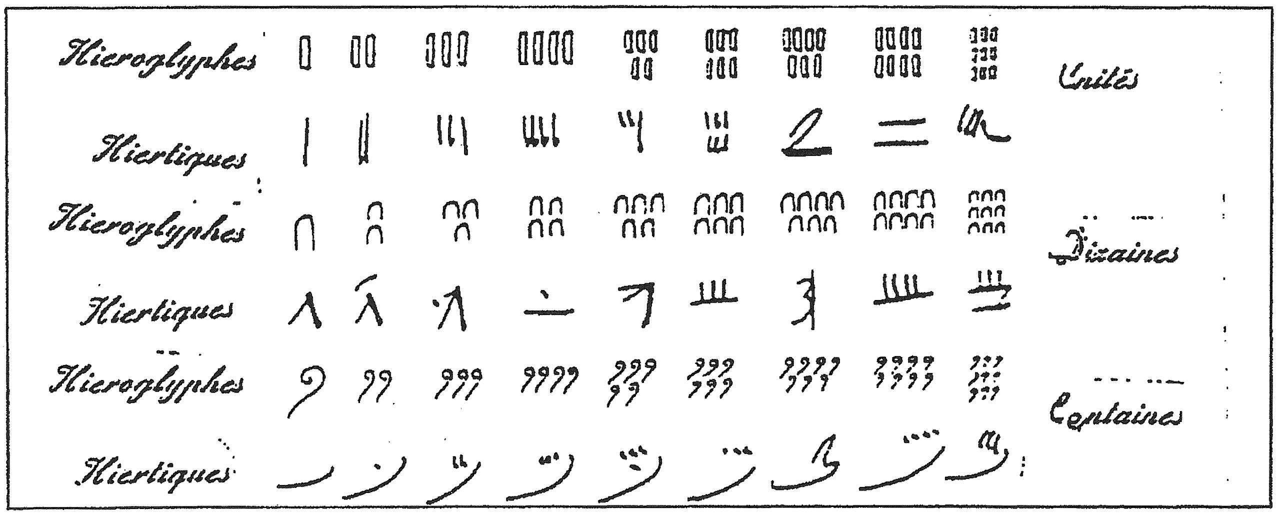
/2 1 1/5 total 6 c'est le résultat

4 2 1/3 1/15

<u>Ecritures :</u>

Voici quelques informations permettant de lire les chiffes ses deux premiers tableaux.

Les écritures égyptiennes sont "décimales mais ce ne sont pas des écritures "positionnelles" comme le montre le tableau suivant



En effet, on a des caractères différents pour les unités les dizaines les centaines etc..

Les seules "fractions" utilisées par les Egyptiens sont les fractions "unitaires" (de numérateur égal à 1) et les fractions 2/3 et 3/4.

Pour représenter "1/n" on mettra, en écriture hiéroglyphique, le signe "" au-dessus de la représentation de "n" et, en écriture hiératique, le signe "".
Par exemple "247" s'écrit en écriture hiéroglyphique et en écriture hiératique; "1/247" s'écrira alors ou (ou , le "" est parfois supprimé).
On pourra repérer dans les textes égyptiens, de droite à gauche et de haut en bas 6, 10, 1/2, 1/10, 10, 1, 1/2; 1/10, 8, 4, 2/3, 1/10, 1/30, 2, 1, 1/5, 6, 4, 2, 1/3, 1/15.

Tout "nombre" se laisse décomposer en une suite de telles fractions différentes et d'un entier. Les interprétations que l'on peut donner de ces suites : ce sont qu'elles représentent le "tas" des quantités partielles. Par exemple le début de la seconde ligne 1/10 1/2 est compris comme la somme de ces deux nombres. Le "nombre" qu'on note actuellement "6/10", les scribes considèrent que ce n'est pas une véritable fraction (certains élèves de 6ème disent qu'elle n'est pas "calculée") Ils le pensent comme le résultat du partage de 6 objets par 10.

Mais comme dans beaucoup de problèmes on ne dit pas, ici, comment la solution a été trouvée. On ne fait en fait qu'une vérification. Cette solution devrait se faire "dans la tête" mais ne peut pas s'écrire dans la forme imposée par les scribes; elle peut apparaître ailleurs, mais pas dans un texte définitif. Par exemple, il suffit par la pensée de décomposer 6 comme "somme" de 1 et de 5 le résultat est alors comme la "somme " du résultat du partage de 1 par 10 et du résultat du partage de 5 par 10 c'est-à-dire de 1 par 2.

Le texte parle de multiplication de 1/10 1/2 par 10 et ailleurs de multiplication d'une fraction par une fraction. Cette multiplication est essentiellement une opération sur des symboles et de nature algorithmique à laquelle il est facile de donner du sens. On commence par remarquer que 10 est la somme de 2 et de 8.

La multiplication de 1/10 1/2 par 10 se fait en quatre étapes.

- a) on note le nombre 1/10 1/2 suivi d'un 1.

- b) puis le nombre 1/5 1 suivi de 2/ le 2 indiquant que l'on a multiplié le premier nombre par 2 le signe / indique que ce nombre intervient dans la décomposition de 10[6].

- c) 2 1/3 1/15 est le double de la ligne précédente (la consultation d'une table permet de savoir que le double de 1/5 est 1/3 1/15), le 4 que l'on a multiplié 1/10 1/2 par 4, c'est à dire 1/5 1 par 2.

- d) on interprète de même 1/30 1/10 2/3 4 8/ (le double de 1/15 étant 1/30 1/10). La somme des chiffres marqués est égale à 10.On fait alors la somme des parties de droites correspondantes qui est 6 - le calcul de ces sommes est, en général, omis sur le papyrus- sinon on utilise une technique analogue (ou presque) à notre réduction au même dénominateur et une écriture à "l'encre rouge", cette réduction permet de montrer que cette somme est égale à 6.

---

[6] les Egyptiens utilisent la duplication (multiplication par 2) pour leurs calculs et décomposent donc tout nombre en puissance de 2 (ici 10 = 2 + 8)

Du point de vue grammatical les chiffres et les fractions égyptiennes se comportent comme des déterminants de noms... Il faut leur donner deux statuts : un premier statut est celui de se référer à des quantités (dans le contexte des classes de situations considérées, le second celui se référer à une "action", on dirait maintenant une procédure, qu'on est capable de décomposer en une suite d'actions plus simples (ou plus techniques) et qui permettront de reconstruire l'action de départ, les "actions " primitives étant la duplication et "le partage en deux". Beaucoup de compositions d'actions deviennent évidentes à partir d'une logique du sens commun.

On pourra pour d'autres exemples se reporter à [Jean-Luc Chabert] et à [James Ritter].

A titre d'exemple, traitons "à l'Egyptienne" le problème du partage de 3 par 7 :

On remarque que 3 est la somme de 2 et de 1. Le résultat est donc la somme du *double de* 1/7 et de 1/7, une consultation des tables montre que ce double est 1/4 1/28.

Nous devons donc vérifier que la multiplication de 1/4 1/28 1/7 par 7 a pour résultat 3. Or 7 est la somme de 1, 2, 4. on a :

1/4	1/7	1/28		1/
1/2	1/4	1/14	1/28	2/
1 1/2	1/7	1/14		4/

Nous devons effectuer la somme des parties gauches :

Cela revient à une réduction au même dénominateur 28
(7 + 4 + 1) + (14 + 7 + 2 +1) + (28 + 14 +4 +2) qui vaut 84 multiple de 28 par 3

La somme vaut bien 3.

2. *Les "rapports" d'Euclide* et les "proportions".

Situations :

Le travail d'Euclide est essentiellement un travail de fondements à partir d'une axiomatisation. Il va considérer comme primitive la notion de "grandeur" et à partir de cette notion introduire celle de "rapport" et de "proportion", la somme de deux grandeurs et celle du produit d'une grandeur par un entier. Les références de base sont la géométrie et en particulier la "mesure" des longueurs, aires ou volumes et celles du sens commun. Ses référents favoris : essentiellement des segments, parfois des surfaces. Les sommes s'obtiennent à partir de "découpages".

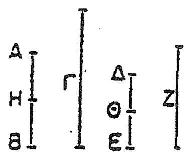
Le livre 5 s'occupe des "rapports" commensurables, et incommensurables et des proportions c'est à dire de l'égalité de tels rapports. Le livre 6 celui des liens de ces rapports avec la géométrie, par exemple du théorème de Thalès. Le livre 7 qui nous intéresse s'occupe des rapports dits" commensurables" de deux grandeurs (chacune de ces grandeurs est mesurée par une autre grandeur), de plus, il traite de pair ces proportions avec une théorie de la divisibilité des entiers.

On y démontre divers théorèmes d'arithmétique et divers théorèmes d'égalités de rapports dont nous donnons un exemple.

Nous remarquons qu'il n'y a pas d'opérations définies sur ces rapports ni même d'égalité entre rapports mais seulement qu'il traite de la relation de proportionnalité entre quatre grandeurs et de la vérité de cette relation.

Voici le texte du théorème 6 du livre 7 et tout d'abord le texte « original »

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ, καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ὅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

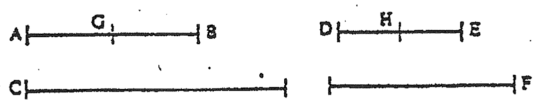


Ἀριθμὸς γὰρ ὁ AB ἀριθμοῦ τοῦ Γ μέρη ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ ΔE ἑτέρου τοῦ Z τὰ αὐτὰ μέρη, ἅπερ ὁ AB τοῦ Γ· λέγω, ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ AB, ΔE συναμφοτέρου τοῦ Γ, Z τὰ αὐτὰ μέρη ἐστίν, ἅπερ ὁ AB τοῦ Γ.

Ἐπεὶ γάρ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ AB τοῦ Γ, τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ὁ ΔE τοῦ Z, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB μέρη τοῦ Γ, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ ΔE μέρη τοῦ Z. διῃρήσθω ὁ μὲν AB εἰς τὰ τοῦ Γ μέρη τὰ AH, HB, ὁ δὲ ΔE εἰς τὰ τοῦ Z μέρη τὰ ΔΘ, ΘE· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν AH, HB τῷ πλήθει τῶν ΔΘ, ΘE. καὶ ἐπεί, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ AH τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΔΘ τοῦ Z, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ AH τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ AH, ΔΘ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Z. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ HB τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ HB, ΘE συναμφοτέρου τοῦ Γ, Z. ἃ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ AB τοῦ Γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ AB, ΔE συναμφοτέρου τοῦ Γ, Z· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

puis une traduction littérale de ce texte :

Si un nombre est des parties d'un nombre et qu'un autre [nombre] soit les mêmes parties d'un autre, ils seront aussi les deux ensemble les mêmes parties des autres, les deux ensemble, celle [s][46] qu'un seul est d'un seul.



En effet, qu'un nombre AB soit des parties d'un nombre C, et qu'un autre, DE, soit les mêmes parties d'un autre, F, celles que AB est de C.

Je dis que AB, DE les deux ensemble, sont aussi les mêmes parties de C, F les deux ensemble, celles que AB est de C.

En effet, puisque les parties que AB est de C, ces mêmes parties DE l'est aussi de F, autant donc il y a de parties de C dans AB, autant il y a aussi de parties de F dans DE. Que d'une part AB soit divisé en parties de C : AG, GB, d'autre part DE en parties de F : DH, HE ; alors la multitude des AG, GB sera égale à la multitude des DH, HE. Et puisque la partie que AG est de C, cette même partie, DH l'est aussi de F, donc, la partie que AG est de C, cette même partie AG, DH les deux ensemble la sont aussi de C, F, les deux ensemble (VII. 5). Alors pour les mêmes raisons, la partie que GB est de C, cette même partie, GB, HE, les deux ensemble, la sont aussi de C, F, les deux ensemble. Donc les parties que AB est de C, ces mêmes parties, AB, DE, les deux ensemble, les sont aussi de C, F, les deux ensemble. Ce qu'il fallait démontrer. [Euclide I]

Et, enfin, une traduction récente qui se veut compréhensible par le lecteur actuel.

Si deux nombres sont respectivement une même fraction de deux autres, leurs sommes, prises dans le même ordre, sont aussi la même fraction l'une de l'autre.

Soit AB un nombre qui est une certaine fraction du nombre Γ et un autre nombre ΔE même fraction que le précédent du nombre Z; je dis que la somme AB + ΔE est aussi la même fraction de la somme Γ + Z.

En effet, ΔE étant la même fraction de Z que AB l'est de Γ, il y a dans ΔE autant de quantièmes de Z qu'il y a dans AB des quantièmes de Γ. Partageons donc AB en quantièmes de Γ et soient AH, HB, ... ceux-ci (m en tout); de même partageons ΔE en des quantièmes ΔΘ, ΘE, ... de Z (m en tout). Nous avons :

$$(1) \quad AB = AH + HB + \cdots = \frac{1}{n}\Gamma + \frac{1}{n}\Gamma + \frac{1}{n}\Gamma + \cdots \quad (m \text{ fois})$$

$$(2) \quad \Delta E = \Delta\Theta + \Theta E + \cdots = \frac{1}{n}Z + \frac{1}{n}Z + \frac{1}{n}Z + \cdots \quad (m \text{ fois})$$

Le nombre des quantièmes AH, HB, ... sera évidemment égal à celui des quantièmes ΔΘ, ΘE, ..., et comme ΔΘ est le même quantième de Z que AH l'est de Γ, il en résulte que la somme AH + ΔΘ est même quantième de la somme Γ + Z que AH l'est de Γ (*VII.5*).

Pour les mêmes raisons HB + ΘE est même quantième de Γ + Z que HB l'est de Γ. En additionnant (1) et (2) on a donc :

$$AB + \Delta E = (AH + \Delta\Theta) + (HB + \Theta E) + \cdots$$
$$= \frac{1}{n}(\Gamma + Z) + \frac{1}{n}(\Gamma + Z) + \cdots$$

Ecriture :

C'est l'écriture habituelle des textes géométriques d'Euclide assez proche du langage commun. Il y a tout un vocabulaire qui pourtant n'est pas celui du langage ordinaire, de même pour la grammaire.

Invariants opératoires :

Un "nombre" est par définition une collection d'unités. Ce pourra être une collection de bâtons, d'entiers arithmétiques, un segment découpé en segments unités, une surface découpée en morceaux égaux..... le terme" fraction" est une collection contenue dans une autre collection, ces deux collections ayant les mêmes unités. La démonstration éclaire le sens de "même" qui n'est pas celui de "égal".

Si on parcourait le livre 5 en détail on remarquerait qu'on y parle que de rapports égaux, donc on utilise des relations portant sur quatre objets. Mais on en vient à des critères arithmétiques (PGCD ou la recherche d'une unité de mesure commune, produit des extrêmes égal au produit des moyens, PPCM). L'égalité de rapports pose problème nous le verrons dans l'exemple. La définition de rapports commensurables qui fait d'abord intervenir une unité de mesure va devenir plus intrinsèque et plus opérationnelle.

Deux grandeurs étant données; pour voir si elles sont commensurables :

- on pourrait utiliser l'algorithme du PGCD - en construisant une unité de mesure commune -.

- on pourrait également utiliser la technique du PPMC à savoir : si deux grandeurs A et B sont telles que les grandeurs nA et mB sont égales alors le rapport (traduisons "la fraction") de A sur B égal à m/n.

C'est ce qu'on appelle aujourd'hui la méthode de "commensuration" qui est en général plus efficace que celle de la "partition d'unité".

Le théorème, énoncé dans l'extrait, est démontré en utilisant une procédure de "partition d'unité".

Nous allons en donner une autre démonstration en utilisant la méthode de commensuration" :

On va se donner quatre segments A, B, C, D tels que les rapports de A sur B et de C sur D soient égaux à m/n, donc nA est égal à mB et nC est égal à mD.

En mettant bout à bout A et C on obtient un segment E on peut découper nE en m segments égaux à B et m segments égaux à D donc en m segments égaux au segment F obtenu en mettant bout à bout des segments B et D. C.Q.F.D

Au cours des âges, la théorie d'Euclide, qui s'écrivait à l'origine comme la partie géométrique des "éléments" a subi toute une série d'algébraïsations, ponctuées d'interdits et les notations ont fini par se stabiliser par exemple dans une forme qu'on peut trouver dans [Tannery]. Mais un vocabulaire et diverses notations ont survécu.

3. Stévin ou l'écriture décimale

Situations :

Stevin a proposé son système, après la mise en place en Europe du système décimal universel. Il a semblé à Stévin que les fractions dont le dénominateur était une puissance de 10 étaient amplement suffisantes pour tous les besoins de la vie pratique.

Ecritures :

Ces fractions pourront être écrites mais avec des notations plus efficaces que les notations en vogue. Par exemple :

" 261 43/1000 s'écrirait 261 0 0 1 4 2 3

Neper utilisera la notation 261.043 qui deviendra sur le continent 261,043

Invariants opératoires :

Ce sont les règles algorithmiques habituelles du calcul des décimaux.

Conclusions :

Les Egyptiens font certes appel au calcul, mais l'écriture proche d'une "idéographie" et l'utilisation de procédures primitives que sont la duplication et le partage en deux permet de sauvegarder le sens.

Dans le sillage d'Euclide, si on veut éviter une algébraïsation trop rapide il convient de ne pas se restreindre aux seules techniques de "partition de l'unité".

L'utilisation exclusive des décimaux, risque d'aboutir à des obstacles didactiques importants. Par contre elle permet un passage rapide aux "réels".

La vision qu'il faut avoir sur les fractions c'est qu'il "existe" un objet "fraction" dont chacun a une certaine intuition. Ces fractions vont s'écrire sous des formes diverses comprises par toute une communauté et sur lesquelles on va pouvoir faire diverses opérations.

Il faudra aider l'élève à construire du sens à partir des classes de situations. Il faudra que le professeur comprenne qu'il peut être prisonnier des conceptions de certains auteurs aussi prestigieux soient-ils. Le professeur ne devra pas chercher à pénaliser l'élève qui s'écarte de ces conceptions. On pourra seulement reprocher aux élèves, en le leur expliquant, de ne pas avoir respecté une certaine institutionnalisation.

Les points de vue des institutions

Eléments de réflexion concernant les notions de décimaux et de fractions au cycle 3 et en sixième

A- Une première entrée a consisté à examiner les principaux textes officiels :

<u>Etat actuel des programmes officiels sur les notions de "fraction" et de décimaux :</u>

cycle 3 : extraits du programme du cycle des approfondissements 1995

Nombres et calcul

- ***fractions simples** : écriture, comparaison de fractions de même dénominateur.*

- ***nombres décimaux :***
  - *écriture à virgule, écriture fractionnaire, passage d'une écriture à l'autre,*
  - ordre sur les décimaux (comparaison, encadrement),
  - *pratique du calcul exact ou approché en utilisant :*

    - *les techniques opératoires (addition, soustraction; multiplication et division d'un décimal par un entier)*
    - *le calcul réfléchi (mentalement ou avec l'aide de l'écrit)*
    - *la calculatrice dans les situations où son usage s'avère pertinent*
    - *l'ordre de grandeur (encadrement, valeur ajoutée)*
    - *problèmes relevant de l'addition et de la soustraction, de la multiplication et de la division d'un décimal par un entier, de la division décimale de deux entiers.*

Sixième : extrait du programme[7] officiel

*1. nombres entiers et **décimaux** : écriture et opérations*

- *utiliser l'écriture décimale et en connaître le sens*
- *multiplier et diviser un décimal par 10; 100; 1000 ou par 0,1; 0,01; 0,001*
- *techniques opératoires :*
  - *addition, soustraction et multiplication...*
  - *effectuer, dans les cas simples, la **division décimale d'un nombre entier ou décimal par un nombre entier...***

2. quotient de deux nombres entiers

écriture fractionnaire

- *placer le quotient de deux entiers sur une droite graduée dans les cas simples,*
- *savoir utiliser un quotient de deux entiers dans un calcul sans effectuer la division.*
- *reconnaître, dans des cas simples, que deux écritures fractionnaires différentes sont celles d'un même nombre.*

Extension aux décimaux

*3. Nombres **décimaux en écritures décimales et fractionnaire***

- *pour les nombres décimaux courants, passer d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire et vice-versa,*
- *ranger des nombres donnés en écriture décimale.*
- *sur une droite graduée :*
- *lire l'abscisse d'un point ou en donner un encadrement,*
- *situer un point d'abscisse donnée.*

---

[7] l'application a été effective en septembre 1996

Texte sur l'articulation école collège B.O. n°44 du 5 décembre 1996

extraits :

*..3.2 **Nombres décimaux** : écriture et opérations*

A l'école primaire, seules quelques fractions simples usuelles (demi, tiers, fractions décimales) sont utilisées par les élèves, et éventuellement travaillées plus longuement dans le but d'introduire les nombres décimaux par le biais des fractions décimales...L'approche des écritures fractionnaires reste donc très modeste à l'école primaire : ni les calculs, ni les comparaisons, ni les équivalences ne sont l'objet de compétences attendues...

Le sens même de l'écriture à virgule est repris en sixième, pour assurer une bonne compréhension des règles de comparaison et des calculs. Plusieurs aspects sont à mettre en place concernant les nombres décimaux :...

*Ces différents aspects sont en général travaillés dès l'école primaire, **l'introduction par les fractions décimales étant aujourd'hui la plus fréquente**...*

Au cycle des approfondissements...

Les élèves sont capables d'additionner et de soustraire deux nombres décimaux...

Les nombres décimaux sont également utilisés dans des problèmes de division prolongée au delà de la virgule, sans que pour autant l'écriture fractionnaire ne soit introduite pour désigner le quotient.

Les élèves sont capables de calculer le produit et le quotient d'un décimal par un entier.

En sixième, les différentes significations des nombres décimaux sont reprises, le quotient $\frac{a}{b}$ acquiert le statut de nombre qui peut-être approché par un décimal : les élèves étudient le produit et le quotient de deux décimaux.

En sixième, il s'agit donc désormais de faire acquérir par les élèves le produit de deux nombres décimaux, aussi bien pour ce qui concerne la technique de calcul que pour ce qui concerne le sens....

Pour faire le point nous avons également pu nous appuyer sur le document[8] émanant de l'inspection pédagogique régionale de notre académie et destinée aux professeurs de mathématiques enseignant en 6ème.

Le document fournit une grille de comparaison des programmes et quelques précisions.

---

[8] daté du 27 août 1996

<u>Extraits</u> :

Le produit (resp. le quotient) de deux décimaux n'est pas un objectif du cycle 3...c'est l'année suivante que l'on aura à construire l'algorithme, mais pas avant de lui avoir donné du sens.

Entretenir les connaissances : passer, pour un nombre décimal, d'une écriture à virgule à une écriture fractionnaire et vice-versa.

En ce qui concerne les écritures fractionnaires usuelles, ..c'est seulement en 6ème que $\frac{3}{4}$ *accède au statut de nombre. Auparavant l'interprétation repose essentiellement sur le partage (l'unité partagée en 4 dont on prend 3 morceaux ou bien 3 partagé en 4)*

> Au cycle 3 comme en sixième chacun des textes insiste sur la nécessité de considérer **l'écriture fractionnaire décimale comme l'une des écritures des décimaux.**
>
> L'on constate que dans les programmes des deux niveaux, la rubrique "fractions" précède celle des "décimaux" ce qui peut laisser supposer que l'introduction de l'écriture fractionnaire précède celle de l'écriture à virgule encore appelée écriture décimale.

B- Une seconde entrée a consisté à regarder quelques ouvrages récents en usage dans les classes à travers une grille d'analyse très simple :

Légende du tableau :

Ouvrages choisis
de cycle 3 :

Nouvel objectif calcul CM1 Hatier 1995 : NOC1 ; nouvel objectif calcul CM2 Hatier 1996 : NOC2
Optimaths CM1 Hachette 1997: O1; optimaths CM2 Hachette 1998 : O2
Diagonale CM1 Nathan 1996 : D1; diagonale CM2 Nathan 1994 : D2

de 6ème :
Triangle Hatier 1996 : T; Cinq sur cinq Hachette 1996 : C; Bordas 1996 : B

<u>Questions retenues</u> :

FRACTIONS (autres que décimales) :

- dans le manuel, les fractions, autres que décimales, précèdent les décimaux ? Colonne 1

- quel est le contexte d'introduction des écritures fractionnaires ? Colonne 2
- quel choix de nombres et quelles notations associées ? Colonne 3

DECIMAUX :

- quel premier choix pour l'écriture d'un décimal ? Colonne 4
- quel contexte d'introduction des décimaux ? Colonne 5
- comment est assuré le passage d'écriture fractionnaire à l'écriture à virgule? Colonne 6

	C1	C2	C3	C4	C5	C6
	Fractions			Décimaux		
NOC1	oui	mesures de segments	$\frac{a}{2^i}$	écritures fractionnaires	partage de segments	calculatrice
NOC2	non	mesures d'aires	$\frac{a}{2^i}$	écritures à virgule	addition et soustraction hors contexte	tableau de numération
O1	oui	mesures de bandes	$\frac{a}{2^i}$	écritures fractionnaires	mesures de segments	tableau de numération
O2	oui	partages équitables quotient d'une division	$\frac{a}{2^i}$ $\frac{b}{10^j}$ $5 : 10 = \frac{5}{10}$	écritures fractionnaires	quotient d'une division	tableau de numération
D1	oui	mesures de segments, fraction d'une aire	$\frac{a}{2}, \frac{b}{4}, \frac{a}{3}, \frac{b}{9}, \frac{a}{5}$	écritures fractionnaires	mesures de segments	tableau de numération
D2	oui	fraction d'une quantité	$\frac{a}{2^i}$	écritures fractionnaires	graduations	notations de Stevin[9]
T	non	Quotient de 2 entiers	$\frac{a}{b}$	les 2 écritures	graduations	rappel : pas d'aide
C	non	Quotient de 2 entiers	$\frac{a}{b}$	les 2 écritures	mesures de différentes grandeurs	tableaux de numération et de conversion
B	non	quotient de 2 entiers dans le cadre de partages	$a : b = \frac{a}{b}$	les 2 écritures	unités légales de longueur et graduations	tableau de numération

<u>Dans les manuels examinés</u> :

- Au cycle 3, les auteurs donnent d'abord du sens aux écritures fractionnaires.

Ils se limitent à une famille de fractions - en général celles de dénominateur des puissances de 2 - qu'ils introduisent dans un contexte de mesures ou de partage.

Le décimal est introduit comme cas particulier de fraction avec son écriture fractionnaire décimale. Le passage à l'écriture à virgule est assuré par l'utilisation d'un tableau de numération et plus rarement par l'utilisation de la calculatrice.

- En classe de sixième, les décimaux sont les premiers réintroduits. Ils sont désignés dès le départ sous plusieurs écritures et en général pour repérer des points sur des graduations.

Les fractions, quant à elles, sont réintroduites comme quotient de deux entiers naturels.

[9] mathématicien flamand du $16^{ème}$ siècle : il a introduit de nouvelle écritures pour les nombres décimaux.

Constat :

A l'école élémentaire, les auteurs proposent en général une progression : fractions, fractions décimales, écritures à virgule. Le savoir sur les fractions demeure très contextualisé, celui sur les décimaux est plus automatisé ; il repose pour sa compréhension sur celle des écritures fractionnaires.

En sixième, les décimaux sont supposés être connus et ne sont jamais réintroduits. En particulier, l'introduction à partir des fractions, dans un contexte de mesure ou de partage n'est jamais reprise. Les fractions quelconques semblent toujours être introduites, postérieurement, comme quotient de deux entiers.

C- Une troisième entrée a consisté à s'informer du point de vue des chercheurs en didactique et des équipes IREM connues pour avoir travaillé sur le sujet :

* **Douady, Perrin** à travers la brochure de **L'IREM de Paris VII** "Nombres décimaux, liaison Ecole-Collège" Publication n° 62 Février 1986.

Les auteurs se proposent d'introduire de nouveaux nombres - les fractions - dans des situations de mesure de longueur et d'aires où les nombres entiers sont insuffisants.

La facilité du partage de l'unité en deux conduisent les élèves à utiliser des fractions ayant comme dénominateur : 2,4, 8... 3, 6, 12.. 5, 10, 20
Les décimaux, sous forme de fractions décimales, sont utilisés pour simplifier les calculs.

Situer les nombres sur une droite graduée permet plus facilement de les ordonner.
Les nouveaux nombres sont réinvestis, comme coefficients de fonctions linéaires, dans des situations de proportionnalité.

Le produit de fractions apparaît comme la mesure de l'aire d'un rectangle.
L'écriture décimale à virgule apparaît, comme convention pour simplifier l'écriture, lors de l'introduction du tableau de numération.

* **Brousseau** à travers la brochure de **l'IREM de Bordeaux** intitulée "Rationnels et Décimaux dans la scolarité obligatoire" parue en 1987.

Les écritures fractionnaires sont introduites au cours d'une situation de comparaison de l'épaisseur de feuilles de papier ou de carton.

Ces fractions seront ensuite utilisées dans un contexte de mesures de différentes grandeurs.

Les décimaux interviennent dans les situations sous forme de fractions décimales, leur placement sur une droite graduée est assuré en lien avec les mesures de longueur.

Le passage à l'écriture décimale s'effectue par l'introduction conventionnelle de la virgule à l'aide du tableau de numération.

Le produit de deux fractions est introduit dans un contexte d'agrandissement de dessins géométriques

***L'INRP et son équipe ERMEL** à travers son ouvrage "Apprentissages numériques et résolution de problèmes" CM1 Hatier 1997.

L'ouvrage propose successivement :

- de construire le sens des écritures fractionnaires -la famille : demis, quarts.- dans un contexte de mesurage de longueurs de bandes,
- de placer, sur une droite graduée, les points désignés par ces écritures,
- d'étendre à d'autres fractions ($\frac{a}{3}$ $\frac{b}{5}$ $\frac{c}{10}$) le travail sur la droite gradué,
- de privilégier les partages par 10 pour introduire les fractions décimales sur le support de la droite graduée,
- d'utiliser le tableau de numération pour introduire l'écriture à virgule.

Il traite ensuite spécifiquement la comparaison des décimaux écrits sous forme décimale et s'efforce d'obtenir pour ce type d'écritures la maîtrise de la technique opératoire de l'addition et de la soustraction.
Le produit d'un décimal par un entier reste limité à un entier inférieur à 10 et s'appuie sur la signification fractionnaire des décimales.

*** IREM de Picardie (AMIENS)**
Brochure : liaison Cycle 3-6ème, un apprentissage des nombres décimaux Mars 1997

L'ouvrage propose une progression s'appuyant sur les comparaisons multiplicatives entre nombres mesurant des longueurs.

En CM1 :

- Il introduit à la fois l'écriture fractionnaire ($\frac{1}{10}$ comme convention d'écriture) et à virgule (0,1 comme écriture calculette obtenue en tapant 1:10) comme **deux écritures possibles du nombre 10 fois plus petit que 1** qu'il généralise aux fractions usuelles ($\frac{a}{b}$ est le nombre b fois plus petit que a).
- Il assure ensuite le passage de la définition comparative à la définition additive dans un contexte de construction de fractions décimales représentées par des bandes. (le dixième de 23 ou $\frac{23}{10}$ ou 2,3 ou 23 fois $\frac{1}{10}$ ou 2 +$\frac{3}{10}$ ou 2 +0,3)

*** IREM de Normandie (ROUEN)**
Brochure : La machine à partager. Fractions et décimaux au cours moyen.

L'introduction des fractions est perçu par la nécessité de coder des longueurs plus petites que l'unité.
Celles-ci sont réinvesties pour coder des aires inférieures puis supérieures à l'unité.
Le passage aux droites graduées permet d'intercaler les fractions par rapport aux entiers.
Le passage au codage usuel du nombre décimal sous forme d'écriture à virgule intervient tardivement dans la progression après un moment important consacré à faire acquérir des habilités calculatoires sur les fractions décimales.

Nous constatons que la plupart des auteurs choisissent de privilégier, pour les nombres décimaux, les écritures fractionnaires décimales en les introduisant, le plus souvent dans un contexte de mesures de longueur.

Ils espèrent ainsi :

- proposer des problèmes qui rendent nécessaire l'introduction de nouveaux nombres
- assurer la rupture entre naturels et décimaux en privilégiant l'écriture fractionnaire qui en est éloignée.

Le rapport des élèves au savoir

Repérage de quelques difficultés

Quelles sont les difficultés traditionnellement recensées sur les nombres décimaux ?

1- le décimal est perçu comme la juxtaposition de deux entiers ce qui provoque des erreurs:

* dans la comparaison[10] : **2,234 > 2, 3** car 234 > 3
* dans les calculs :

17,3 + 21,8 = 38,11
0,3 x 0,3 = 0,9

2- la partie décimale est perçue comme un entier, ayant un nombre limité de chiffres, non détachable de la sous-unité (comme 3,25 pour 3 F et 25 centimes ou 13, 56 comme 13 mètres et 56 centimètres) ce qui provoque ce type de comportement :

* il n'y a **pas de nombre décimal entre 4,32 et 4,33**
* **2,5 est différent de 2,50**
* **3,40 a comme prédécesseur 3,39**

Les explications le plus souvent avancées pour justifier ce type de comportement sont les suivantes :

* **les décimaux sont introduits[11] comme nouveaux codages de mesures complexes utilisant des entiers comme 2 m et 36 centimètres = 2,36m**

Les mesures complexes souvent retenues sont les suivantes :

- les francs et les centimes
- le mètre et ses sous-unités légales (dm, cm, mm)
- le kilomètre et ses sous-unités

* **la connaissance des entiers se stabilise en CM1 et les élèves veulent continuer à faire fonctionner les habitudes acquises.**

D'autres difficultés :

3- une nouvelle[12] difficulté : la multiplication d'un décimal par un entier

6 x 3 a souvent, comme premier sens celui d'une addition itérée 6 + 6 + 6 (6 itéré 3 fois ou 3 fois 6) ou 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 (3 itéré 6 fois ou 6 fois 3).

Souvent, de nombreux maîtres ont été habitués[13], **à tort,** à imposer aux élèves comme seule égalité licite

- l'égalité $\boxed{6 \times 3 = 6 + 6 + 6}$ (lue usuellement 3 fois 6 est égal à 6 plus 6 plus 6) n'assurant que péniblement la commutativité 6 x 3 = 3 x 6.

[10] voir l'étude de GRISVARD et LEONARD sur les règles implicites pour la comparaison des décimaux dans les bulletins n°327 et n°340 de l'APMEP
[11] cela correspond aux recommandations des instructions officielles valables de 1945 à 1970
[12] elle peut-être qualifiée de nouvelle dès l'instant où les anciens programmes permettaient d'introduire directement le produit de deux nombres décimaux au cours du cycle 3.
[13] cette habitude est issue des anciens programmes où la notion de nombre concret imposait aux maîtres de répondre à un problème en manipulant les nombres avec leur unité associée.
Ainsi le prix de 3 bonbons à 6 F devait s'écrire 6 F x 3 = 18 F
(le multiplicande 6 F devant précéder le multiplicateur 3, l'unité devant être mise en tête)

Cette fois le **produit 3 x 2,5** ne peut plus avoir deux interprétations, car que signifierait 3 "itéré 2,5 ". Seule est significative l'égalité **3 x 2,5 = 2,5 + 2,5 + 2,5**.

Les 2 facteurs ont de fait un rôle dissymétrique.

Des questions se posent alors :

Peut-on écrire sans problème 3 x 2,5 = 2,5 x 3 ?

Est-ce la multiplication d'un décimal par un entier qui a du sens ? ou la multiplication de deux nombres dont l'un est entier ?

Du fait de sa dissymétrie, le sens premier de la multiplication comme addition itérée est-il le plus pertinent ?

Ne faudrait-il pas introduire d'emblée une autre signification ?

- la multiplication de deux nombres entiers non nuls a toujours un résultat supérieur à chacun de ses deux facteurs et cela devient faux lors de l'introduction des décimaux.

0,5 x 6 =3 et 3 est inférieur à 6.

C'est pour cela, que bien souvent, **l'élève écrit 6 x 0,5 = 30**

4- une difficulté due aux notations des divisions :

"division avec reste"
ex : partage équitable de 22 tabourets entre 5 personnes

la division Euclidienne dans N x N

$$\begin{array}{|lcl} N \times N^* & \longrightarrow & N \times N \\ (22,5) & \longmapsto & (4, 2) \end{array}$$

4 est le quotient euclidien, 2 le reste
Bien souvent les enseignants utilisent, **à tort**, l'égalité :

22 : 5 = 4 r 2

"division sans reste"
ex : partage équitable de 22 litres de lait entre 5 personnes

la division dans Q

$$\begin{array}{|lcl} N \times N^* & \longrightarrow & Q \\ (22, 5) & \longmapsto & \frac{22}{5} \end{array}$$

$\frac{22}{5}$ est le quotient des deux entiers 22 et 5,
le résultat de la division de 22 par 5
On peut écrire avec raison :

$$22 : 5 = \frac{22}{5} = 4,4$$

Ce qui permet d'interpréter l'erreur comme : 22 : 5 = 4,2

Nous avons donc comme projet de vérifier l'état de connaissances des décimaux et des fractions auprès de nos élèves de CM2 et de sixième en nous efforçant d'analyser leurs erreurs.

LES TESTS

1 - ETAT DES LIEUX

Afin de construire des situations d'apprentissage et de remédiation, nous avons voulu faire un état des lieux dans des classes de CM1, CM2 et de 6ème pendant les deux années d'existence du groupe de recherche.

Pour établir ces tests, nous avons confronté nos points de vue sur les connaissances acquises ou non acquises dans ces différents niveaux. Cela a d'ailleurs permis une meilleure connaissance des programmes du Cycle 3 et de la classe de 6ème pour les différents participants.

Nous proposons **aux lecteurs une étude sur les microcompétences** dans les décimaux afin d'éclaircir ces divergences.

Les tests proposés aux enfants aborderont **essentiellement des situations de partages, de mesures** et **l'écriture des nombres décimaux sous différentes formes** dont les écritures fractionnaires.

2 - MICROCOMPETENCES ET DECIMAUX

A partir d'un document de l'IREM de MONTPELLIER (Un outil d'aide à l'analyse des compétences en mathématiques, liaison Cycle 3 - 6ème), nous avons étudié les microcompétences relatives aux décimaux et listé celles qui nous paraissaient être nécessaires voire indispensables pour les niveaux concernés.

Ce travail a permis de faire au moins trois constats:

-> une meilleure lecture et connaissance des programmes du cycle 3 pour les collègues de 6ème, par exemple : **l'apprentissage des divisions sont très étalées au cours des deux cycles.**

-> les **exigences des collègues de 6ème**, sont **parfois excessives** par rapport aux compétentes attendues au cycle 3 Cela est souvent dû à une connaissance partielle des programmes et aussi à des habitudes difficiles à combattre.

-> ces réflexions et discussions pourraient fournir **une base de travail pour la remédiation aux difficultés rencontrées par des élèves de 6ème..**

Avec l'étude des programmes du Cycle 3 et de 6ème, nous avons classé les microcompétences en différents groupes : les unités, le repérage, l'écriture des nombres et l'ordre des décimaux.

Nous avons donc établi un tableau récapitulatif des microcompétences :

-> acquises en fin de Cycle 3,
-> en cours d'acquisition au Cycle 3,
-> non abordées au Cycle 3,
-> en cours d'acquisition en classe de 6ème.

Vous trouverez en **Annexe n°1** les résultats de nos longues discussions présentés dans différents tableaux.

3 - LES TESTS

A la suite du travail sur les microcompétences et les décimaux, nous avons élaboré des tests pour des classes de CM1, CM2 et de 6ème.
Remarque : Le nombre d'élèves a été souvent plus élevé en 6ème compte- tenu de la composition du groupe la première année.

Les différents tests sont présentés selon les niveaux et non pas par ordre chronologique. A chaque fois, la date de passation est précisée. Pour chaque test, il est précisé :

-> les compétences testées,
-> les résultats statistiques,
-> une analyse de ces résultats,
-> quelques principales erreurs,
-> des photocopies de copies d'élèves.
-> des modifications possibles de ces tests pour une autre année.

Le test 1, passé dans trois classes de CM1 de commune différente, au début du mois d'octobre 1998, est une adaptation d'un test de 6ème, soit une population de 71 élèves.

Le test 2 a abordé les techniques opératoires, à la fin du mois de novembre 1997. Il a été distribué à une classe de CM2 de 27 élèves.

Le test 3 a abordé l'écriture des décimaux sous la forme d'un QCM. Il a été proposé de manière identique à trois classes de 6ème et une classe de CM2, soit une population de 107 élèves avec 78 élèves en 6ème et 29 en CM2.
(Cf : annexe 2 pour les données statistiques)
Le **test 4** a abordé les unités, les graduations et le placement de nombres sur une droite graduée. Il a été fait au cours du mois de novembre 1997 avec trois classes de 6ème et une classe de CM2, soit une population de 107 élèves avec 78 élèves en 6ème et 29 en CM2.
(Cf : annexe 3 pour les données statistiques)

Le test 5, passé dans 6 classes de 6ème de collèges différents, au début du mois d'octobre 1998, est une adaptation du test 4 de 6ème, soit une population de 145 élèves. Le contenu proposait des situations de partages, des classements d'écritures par rapport à l'unité et une simplification de l'exercice, placement de nombres sur une droite graduée, du test 4.

Trois autres tests, (**cf annexes 4**) sur d'autres thèmes, ont été préparés mais ils n'ont pas fait l'objet d'une étude. Ils sont simplement présentés comme des exemples. Les collègues intéressés pourront toujours les utiliser ou les adapter à leurs classes.

TEST 1	FICHE élève n°1	CM1

Exercice 1

Dans une boîte, il y a 250 billes. On fait des paquets de 50.
Combien de paquets va-t-on avoir ?

Exercice 2

Maman veut partager 36 bonbons entre ses 3 enfants.
Combien de bonbons aura chaque enfant ?

Exercice 3

2 enfants se partagent 3 pains au chocolat.
Quelle est la part de chacun ?

TEST 1 PARTAGES ET MESURES

Ce test est une adaptation d'un test proposé à des classes de 6ème en 1997. Il a été proposé dans des classes de CM 1 de trois communes différentes au début du mois d'octobre 1998.
71 enfants ont passé ce test.

Ce test propose :

-> des situations de partages dans un environnement familier aux enfants, fiche 1.

-> des situations de mesures de longueurs et d'aires, bandes et disques, fiche 2.

Chaque enfant a ses trois bandes, de couleurs différentes, à mesurer en carton souple. Il dispose également de six bandes unités blanches en carton souple. Il était également demandé, mais pas exigé, de reporter sur la feuille distribuée la procédure utilisée pour les bandes

RESULTATS

1- Données statistiques

Seul, le taux de réussite est donné. Ces résultats sont présentés dans les deux tableaux suivants :

Fiche 1	problèmes		
	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3
Réussite	73,3%	53,3%	53,3%

Fiche 2	Longueurs				bandes			disques	
	mesurer	Construire	graduer	4 U	5 U	0,5 U	3/4	1/2	1/3
Réussite	78,9%	46,4%	84,5%	88,7%	66,2%	40,8%	36,6%	46,5%	4,2%

2- Analyse des résultats

2.1 Fiche 1

Les enfants ont utilisé différentes procédures pour résoudre ces trois exercices:

-> procédure primitive : dessin,
-> procédures de calcul : additives, soustractives, mixtes ou multiplicatives.
-> procédure canonique : 36 : 3 pour ceux qui connaissent la technique de la division.
-> calcul pensé : 36 : 3 = 12

Différentes écritures ont été données pour le 3ème exercice :

$$1{,}5 \;;\; 1 \text{ et } \frac{1}{2} \;;\; \text{un et demi} \;;\; \text{un et une moitié} \;;\; 3\times\frac{1}{2} \;;\; 1+\frac{1}{2} \text{ ou un dessin}$$

Les plus nombreuses sont évidemment un et demi ou un et une moitié, 50%, et les dessins, 36%.

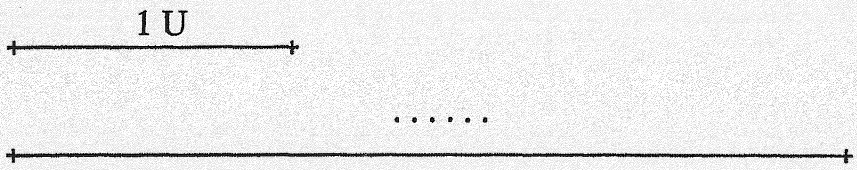
Plusieurs enfants ont donné, pour les trois exercices, les résultats en ajoutant, à chaque fois, les deux nombres de l'énoncé, par exemple: 250 + 50 = 300 ; 36 + 3 = 39 et 2 + 3 = 5.

Le dernier exercice a été plus difficile à résoudre car le premier nombre proposé dans l'énoncé était le plus petit.

TEST 1 — **FICHE élève n°2** — **CM1**

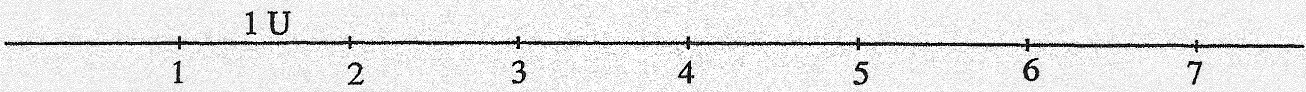
Exercice 1

Complète les pointillés :



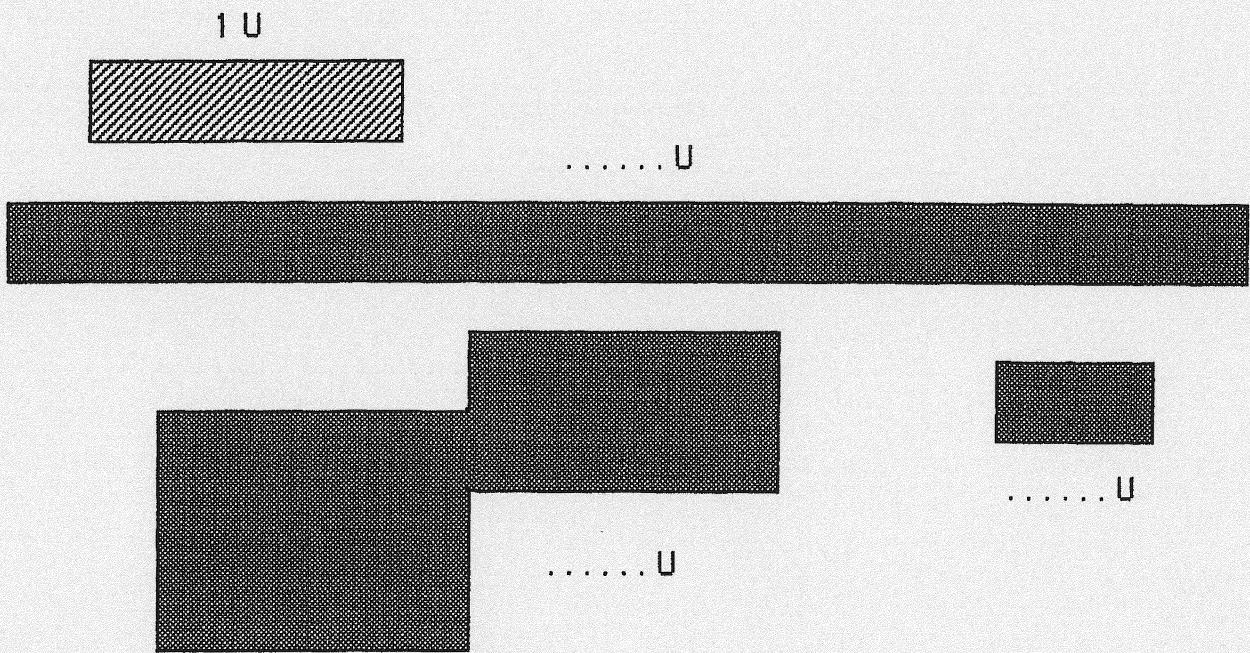
Construis un segment mesurant 5 U :

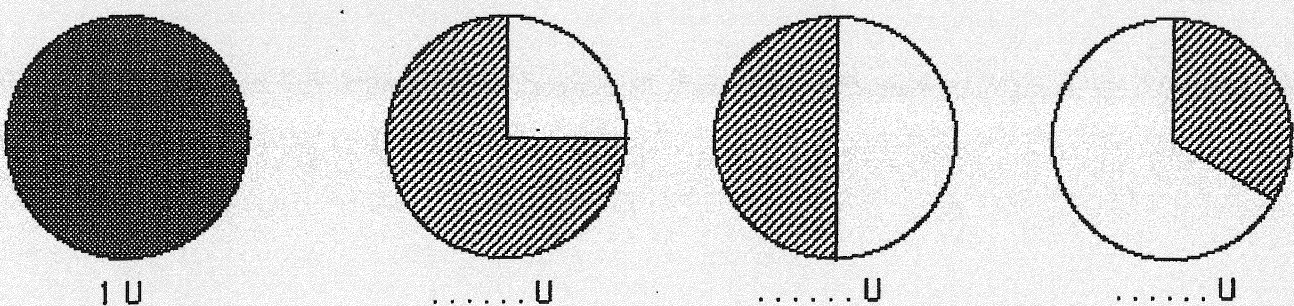
Complète les pointillés :



Exercice 2

Complète les pointillés :





Les mesures de longueurs ont toutes une réussite supérieure à 50% avec un taux de 79% pour la bande de longueur 3 U. La construction d'un segment de longueur 5 U nécessite des initiatives et le choix d'un matériel pour faire le tracé. Enfin pour la mesure sur la graduation, certains enfants ont confondu le nombre de repères et le nombre d'intervalles, les unité légales sont toujours aussi prégnantes.

Les mesures de d'aires pour les bandes sont nettement mieux réussies que les mesures des disques car il y avait des manipulations possibles avec le matériel distribué. Pour les disques, le tiers est très peu réussi. Certains enfants ont souvent compris qu'ils avaient des horloges et ont ainsi donné l'heure.

Les procédures utilisées ont été:

-> pour les longueurs, le report du segment unité a été fait avec une règle ou un compas et parfois avec du papier calque.

-> pour les bandes, la juxtaposition des bandes unités et le pliage d'une bande unité ont été fréquemment exploités.

-> pour les disques, la connaissance "culturelle", le partage de gâteaux, de pizzas en deux ou en quatre a permis d'obtenir plus facilement la réponse. Par contre, le partage en tiers est très peu fréquent. Un élève a d'ailleurs expliqué que sa maman partageait le gâteau en quatre pour les trois membres de la famille, la quatrième part était souvent donnée au plus gourmand ou conservée pour un autre repas.

CONCLUSION

Pour les enfants, la manipulation est très souvent une méthode naturelle pour résoudre de nombreux exercices. Il faut bien évidemment disposer du matériel adéquat, c'est-à-dire, souvent le fabriquer soi-même ou avec des collègues dans un travail en équipe.

L'utilisation de situations avec des grands nombres provoquera bien des ruptures et nécessitera la recherche de méthodes plus performantes et efficaces.

Pour des enfants, en difficulté, des situations avec des petites quantités permettront de mieux appréhender les exercices. Leur représentation sera moins longue et donc moins fastidieuse et certainement plus facile à réaliser. L'utilisation d'objets, billes, bâtons, cartes, etc. souvent exploitée dans les classes de primaire améliorera la compréhension et la réussite

TEST 2	FICHE élève	CM2

Prénom et nom : **Date :**

Calculer	Feuille de brouillon
750,38 + 32,065	
84,8 + 259,47	
0,14852 + 3965,3	
680,96 - 347,3	
36,2 - 19,52	
51,7 - 43,45	
12,7 x 4	
15 x 54,63	
271,36 x 100	
35,045 x 10	
153 : 10	
3,2 : 100	
100 : 2	
13 : 2	

TEST 2 CALCULS

Ce test a été proposé uniquement à une classe de CM2 à la fin du mois de novembre 1997. 27 enfants ont passé ce test.

Les compétences visées par ce test sont les suivantes:

-> sommes de décimaux,
-> différences de décimaux,
-> produit d'un entier par un décimal,
-> produit d'un décimal par 10, par 100,
-> quotient d'un décimal par 10, par 100,
-> quotient d'un entier par 2.

Chaque enfant a pu faire ses opérations sur la feuille. Cela nous a permis parfois de mieux suivre son raisonnement ou ses erreurs.

RESULTATS

1- Données statistiques

Ces résultats sont présentés dans le tableau suivant avec la convention suivante:

BR : bonne réponse **MR** : mauvaise réponse **NR** : pas de réponse

Opération	BR		MR		NR	
	effectif	%	effectif	%	effectif	%
750,38 + 32,065	16	59,3	11	40,7	0	0
84,8 +259,47	13	48,1	14	52,9	0	0
0,14852 + 3695,3	20	74,1	7	27,9	0	0
680,96 - 347,3	16	59,3	11	40,7	0	0
36,21 -19,52	21	77,8	5	18,5	1	3,7
51,7 - 43,45	12	44,4	14	52,9	1	3,7
12,7 x 4	16	59,3	11	40,7	0	0
15 x 54,63	12	44,4	12	44,4	3	11,2
271,36 x 100	6	23,2	20	74,1	1	3,7
35,045 x 10	4	14,8	22	81,5	1	3,7
153 : 10	7	25,9	12	44,4	8	28,7
3,2 : 100	1	3,7	9	33,3	17	63
100 : 2	18	66,7	5	18,5	4	14,8
13 :2	12	44,4	9	33,3	6	22,3

Opération	BR		MR		NR	
	effectif	%	effectif	%	effectif	%
trois additions	49	60,4	32	40,6	0	0
trois soustractions	49	60,4	30	37	2	2,6
produit d'un entier par un décimal	28	51,9	23	42,6	3	5,5
produit d'un décimal par 10, 100	10	18,5	42	77,8	2	3,7
quotient d'un décimal par 10, 100	8	14,8	21	38,9	25	46,3
quotient d'un entier par 2	30	55,6	14	25,9	10	18,5

2- Analyse des résultats

Nous pouvons donc constater que fin novembre, dans cette classe :

-> 60% des enfants réussissent l'addition et la soustraction des décimaux,
-> 52% des enfants réussissent la multiplication d'un entier par un décimal,
-> 55% des enfants réussissent la division d'un entier par 2,
-> la multiplication et la division par 10 ou par 100 sont faiblement réussies, moins de 20%.

La suite du travail au cours des mois suivants permettra d'améliorer ces différents résultats même si certaines erreurs subsisteront certainement en classe de 6ème l'année suivante.

3- Quelques erreurs

L'oubli de la retenue et la méconnaissance des tables de multiplication sont les principales erreurs rencontrées dans ces opérations. Quelques soustractions sont transformées en additions, cela relève certainement d'une inattention.

Cependant d'autres erreurs, moins fréquentes heureusement, sont présentes :

-> Elles permettent de déceler des conceptions erronées des nombres décimaux.

1. L'élève considère un décimal comme deux entiers séparés par une virgule.
Il opère séparément sur ces 2 parties.

Par exemple :

addition	soustraction	Multiplication	multiplication
84,8	51,7	12,7	54,63
+259,47	- 43,45	x 4	x 15
343,127	8,25	48,28	270,315
			54,63
			324,945

C'est également vrai dans le cas de la multiplication par 10 ou par 100,

271,36 x 100 =27100,36000 35,045 x 10 = 350,0450

L'élève aligne ou utilise les décimaux sans tenir compte du rôle des chiffres. Par exemple :

addition	soustraction[14]	Multiplication	multiplication
750, 38	51, 7	12,7	15
+ 32,065	- 43,45	x 4	x 54,63
782,103	08,32	48,28	45,00
			900,00
			6000,00
			75000,00
			81945,00

[14] pour la partie décimale, l'élève a transformé la soustraction 7-45 impossible en 45-7

**2. L'élève considère le décimal comme un nombre entier
Il ne tient pas compte de la virgule.**

L'élève applique, à tort, la règle de calcul sur les entiers.

1er exemple, l'élève ajoute des zéros à la fin du nombre :

271,36 x 100 =271,36000 35,045 x 10 = 35,0450

2ème exemple, l'élève aligne les chiffres des décimaux dans la disposition de l'opération :

addition	Soustraction	Soustraction
750,38	43,45	680,96
+ 32,065	- 51,7	- 347,3
1071,03	382,8	646,23

**3. L'élève néglige la partie décimale du nombre décimal.
Il évite ainsi le problème posé.**

L'élève effectue le calcul avec la partie entière, en oubliant la partie décimale ou un morceau.
Par exemple :

soustraction	soustraction	Multiplication	multiplication
680,96	51,7	12,7	15
- 347,3	- 43,45	x 4	x 54,63
333,60	08,30	48,7	60
			75
			810,63

271,36 x 100 =27100,36 35,045 x 10 = 350,045

-> Elles permettent de constater la confusion voulue[15] ou non entre les opérations.

L'élève transforme la soustraction en une addition ou encore effectue correctement une division euclidienne à la place d'une division.

-> Elles permettent de constater que l'élève considère certaines opérations comme impossibles.à réaliser par exemple 3,2 : 100 ou 13 : 2 .

CONCLUSION

Pour les enfants, les opérations, addition, soustraction et multiplication par un entier, sont souvent bien maîtrisées à l'aide des techniques à condition de comprendre l'écriture des décimaux. La division n'est pas encore réussie, à cette période de l'année de la classe de CM2. Il est vrai également que la division est une des priorités dans les classes de $6^{ème}$ et de $5^{ème}$ du collège.

[15] bien souvent les élèves transforment la soustraction en une addition plus facile à calculer

TEST3 | **Fiche élève** | **CM2-6ème**

Ecriture des nombres :

Entoure la ou les réponses possibles et barre la ou les réponses fausses.

0023,040	023,04	23,4	23,04	23,40
0,308	00,38	0,3080	0,380	00,308
sept centièmes	7,00	$\frac{7}{100}$	$7\times\frac{1}{100}$	0,07
cent un millièmes	1,101	101,101	0,101	101,000
cent onze unités un centième	111,1	111,01	111,001	$111+\frac{1}{100}$
$\frac{25}{10}$	$25\times\frac{1}{100}$	2,5	0,25	$\frac{250}{100}$
$(7\times10)+(3\times1)+(5\times\frac{1}{10})$	$73+\frac{5}{10}$	$70+\frac{35}{100}$	73,5	$\frac{735}{100}$
1,7	$\frac{1}{10}\times17$	$\frac{17}{10}$	$10+\frac{7}{100}$	dix-sept centièmes
2,5	vingt unités et cinq dixièmes	25 : 10	$2+\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10}+\frac{5}{100}$
25 : 100	vingt-cinq centièmes	20,5	$2+\frac{5}{100}$	0,25
$\frac{31343}{1000}$	$31+\frac{34}{100}+\frac{3}{1000}$	3,1+0,343	$3+\frac{134}{100}+\frac{3}{1000}$	31,343
$8+\frac{35}{100}$	$\frac{3}{10}+\frac{5}{100}+8$	8,35	$8+\frac{3}{100}+\frac{5}{1000}$	$\frac{835}{100}$
Le nombre de centaines dans 23 405 est	4	23	234	34
Le nombre de dixièmes dans 35,47 est	3	354	4	7
Le chiffre des centaines dans 1320,65 est	13	5	2	3
cent trois dixièmes	$100+\frac{3}{10}$	100,3	$\frac{103}{10}$	$10+\frac{3}{10}$
cent et trois dixièmes	$100+\frac{3}{10}$	100,3	$\frac{103}{10}$	$10+\frac{3}{10}$

Test 3 Ecritures

Ce test a abordé l'écriture des décimaux sous la forme d'un QCM. Il était constitué de 15 items, 2 ont été rajoutés pour améliorer ce test pour les prochaines années. Chaque item proposait quatre réponses possibles, chaque enfant devait entourer la ou les bonnes réponses et barrer la ou les réponses fausses.

Proposé de manière identique à trois classes de 6ème et une classe de CM2, ce test concerné une population de 107 élèves avec 78 élèves en 6ème et 29 en CM2. Il a été passé au début du mois de novembre 1997.

Les microcompétences proposées devaient être toutes acquises en fin de Cycle 3, sauf la première citée ci-dessous :

-> *Savoir qu'on peut mettre des zéros supplémentaires au début de la partie entière ou à la fin de la partie décimale sans changer le nombre.*

-> Savoir qu'on peut enlever les zéros, s'il y en a, au début de la partie entière, sans changer le nombre sauf le zéro du chiffre des unités.

-> Savoir qu'on peut enlever les zéros, s'il y en a, à la fin de la partie décimale, sans changer le nombre.

-> Savoir qu'un nombre décimal peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale.

-> Savoir à partir d'un nombre décimal, donné avec une virgule, écrire ce nombre à l'aide d'une somme du type :

7 + (3 x 1/10) + (5 x 1/1)	(type I)
7 + (3/10) + (5/100)	(type II)
321/100 ou 3210/1000 etc.	(type III)

-> Savoir écrire un nombre décimal à l'aide d'une virgule, s'il est donné sous la forme d'une écriture du type I, du type II ou du type III.

-> Savoir trouver, par exemple le *chiffre* des centaines et le *nombre* de centaines, etc.

-> Savoir que lorsqu'un nombre est écrit à l'aide d'une virgule, les places des chiffres des dixièmes et des dizaines ne sont pas "symétriques" par rapport à la virgule.

-> Savoir, à partir de l'écriture en chiffre d'un nombre décimal, lire ou écrire ce nombre en lettres en utilisant tous les mots : unité, dixième, centième, etc.

Les microcompétences proposées se trouvent dans l'écriture du nombre proposé ou dans les réponses attendues.

RESULTATS

Les tableaux récapitulatifs se trouvent en ANNEXE 2

1- Quelques explications

Comme les différents items comportent souvent plusieurs réponses correctes, le dépouillement des résultats a été établi avec les critères suivants :

- Réponse correcte : toutes les réponses sont correctes.

- Réponse correcte et oubli d'une réponse : les réponses données sont correctes mais il y a au moins une réponse correcte oubliée.

- Réponse fausse : toutes les réponses sont fausses.

- Réponse fausse et oubli d'une réponse : les réponses sont fausses mais il y a au moins une réponse fausse.

- Réponse correcte et réponse fausse : certaines réponses sont correctes et d'autres sont fausses.

- Réponse absente : l'élève n'a pas répondu à la question posée.

Les résultats sont donnés séparément, pour les 6ème et les CM2, pour tenter d'établir une comparaison sur l'évolution des enfants sur une année, même si ces deux populations sont différentes. D'autre part, le type d'erreurs indiqué correspond soit à une réponse fausse soit à l'oubli d'une bonne réponse.

Par exemple, dans le premier item, il y a deux réponses correctes à trouver et donc aussi deux réponses fausses. Un élève a donc différentes possibilités pour répondre, il peut donner une bonne réponse, oublier l'autre bonne réponse et donner une réponse fausse, etc.

2- Données statistiques

Voir ANNEXE 2

3- Analyse des résultats

La différence entre les deux niveaux CM2 et 6ème est sensible dans l'ensemble de ce test. Cela peut s'expliquer pour plusieurs raisons:

-> la différence d'âge entre les deux populations,
-> les microcompétences sont encore en cours d'acquisition au cours de la classe de CM2,
-> l'effectif des deux populations testées, 29 en CM2 et 78 en 6ème,
-> le type de ce test qui impose de barrer les réponses fausses,
-> ce test a été passé très tôt dans l'année scolaire.

Examinons les réponses à quelques items.

Le **rôle du zéro dans l'écriture d'un décimal** demandé dans les deux premiers items, la réussite, complète, en $6^{ème}$ tourne de 60% et celle du CM2 autour de 40%. Par contre, en prenant les bonnes réponses avec un oubli éventuel, les performances sont nettement meilleures : autour de 75% en $6^{ème}$ et 63% en CM2.

0023,040	023,04	23,4	23,04	23,40
0,308	00,38	0,3080	0,380	00,308

Le passage de **l'écriture littérale d'un décimal à une autre écriture** (écritures à virgule, écriture fractionnaire ou formes multiplicatives ou additives) est réussie avec une grande différence selon les deux niveaux :

sept centièmes	7,00	$\frac{7}{100}$	$7\times\frac{1}{100}$	0,07
cent un millièmes	1,101	101,101	0,101	101,000
cent onze unités un centième	111,1	111,01	111,001	$111+\frac{1}{100}$

-> en $6^{ème}$: réussite complète, de 93% à 50%, soit une moyenne de 74%,
-> en CM2: réussite complète, de 48% à 17%, soit une moyenne de 29%,
-> en $6^{ème}$: réussite avec un oubli éventuel, de 93% à 82%, soit une moyenne de 89%,
-> en CM2: réussite avec un oubli éventuel, de 86% à 48%, soit une moyenne de 65%.

Cela donne donc une réussite largement au dessus de la moyenne en CM2 et très bonne en $6^{ème}$.

Le passage de **l'écriture décimale (à virgule ou fraction décimale) d'un nombre décimal à d'autres écritures** n'a pas donné les résultats espérés dans les deux niveaux :

1,7	$\frac{1}{10}\times 17$	$\frac{17}{10}$	$10+\frac{7}{100}$	dix-sept centièmes
$\frac{25}{10}$	$25\times\frac{1}{100}$	2,5	0,25	$\frac{250}{100}$
2,5	vingt unités et cinq dixièmes	25 : 10	$2+\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10}+\frac{5}{100}$

-> l'écriture 25 : 10 du nombre décimal 2,5 semble méconnue par les élèves des deux niveaux. Nous retrouverons cette difficulté dans les écritures possibles de 25 : 100. C'est-à-dire que la liaison entre les décimaux et la division n'est pas encore faite.

-> l'écriture de 1,7 sous la forme du produit $\frac{1}{10}\times 17$ a été souvent oubliée. Par contre, l'écriture de 2,5 sous la forme de la somme $2+\frac{5}{10}$ a été plus facilement trouvée; l'écriture

-> les autres écritures de la fraction décimale $\frac{25}{10}$ ont été souvent oubliées que ce soit l'écriture décimale 2,5, (33% d' oublis) ou l'écriture fractionnaire $\frac{250}{100}$, (48% d' oublis).

Le **rôle des chiffres dans l'écriture d'un décimal** a été bien réussie malgré des confusions entre nombre et chiffre, dizaine et dixième et centaine et centième.

CONCLUSION

Ce test fait apparaître des difficultés **surtout dans les écritures fractionnaires des nombres décimaux** et aussi **dans les écritures sous "forme d'opérations"**. La division 25 : 100 n'est pas l'écriture du décimal 0,25. La connaissance de 2,5 sous la forme fractionnaire $\frac{25}{10}$ n'est pas encore maîtrisée aussi bien en 6ème qu'en CM2.

Les performances entre les deux niveaux se situent dans les intervalles suivants;

-> en 6ème: réussite complète, de 93% à 47%, soit une moyenne de 60%,
-> en CM2: réussite complète, de 62% à 14%, soit une moyenne de 31%,
-> en 6ème: réussite avec un oubli éventuel, de 93% à 64%, soit une moyenne de 75%,
-> en CM2: réussite avec un oubli éventuel, de 74% à 38%, soit une moyenne de 60%.

Finalement, malgré ce test sous forme de QCM, nous pouvons constaté que 75% des élèves de 6ème ont maîtrisé l'essentiel des items et 60% des élèves de CM2 même si certains points sont encore à travailler au cours de la suite de la scolarité.

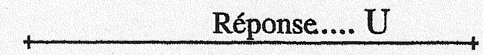
Remarques : après la passation de ce test, nous avons ajouté deux nouveaux items:

cent trois dixièmes	$100+\frac{3}{10}$	100,3	$\frac{103}{10}$	$10+\frac{3}{10}$
cent et trois dixièmes	$100+\frac{3}{10}$	100,3	$\frac{103}{10}$	$10+\frac{3}{10}$

TEST4	Fiche élève n°1	CM2-6ème

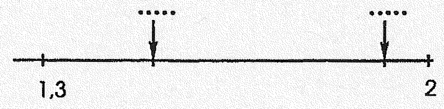
Exercice 1

Voici un segment unité U. Détermine la longueur de ce segment en complétant les pointillés.



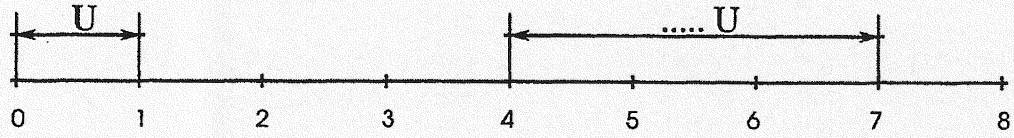
Exercice 2

1- A quels nombres décimaux correspondent les deux flèches ?

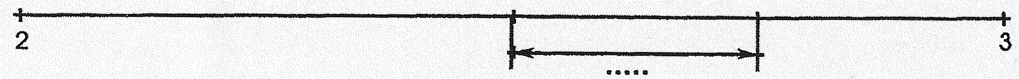


2- Place sur le segment les nombres décimaux 1,7 et 1,41.

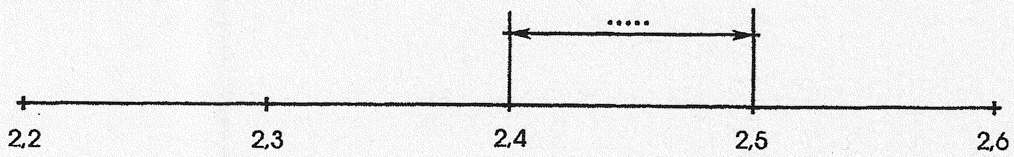
Exercice 3 Compléter les pointillés.



Exercice 4 Compléter les pointillés.



Exercice 5 Compléter les pointillés.



TEST 4	Fiche élève n°2	CM2-6ème

Exercice 6

1- Place le plus précisément sur la droite graduée les nombres :

$\frac{7}{4}$ $\frac{1}{3}$ 1,25 3,06 4,5 $\frac{163}{40}$ $\frac{9}{2}$

2- Donne les explications :

$\frac{7}{4}$

$\frac{1}{3}$

1,25

3,06

4,5

$\frac{163}{40}$

$\frac{9}{2}$

Analyse
GRADUATIONS ET MESURES

Ce test a abordé les unités, les graduations et le placement des nombres sur une droite graduée. Il a été fait au cours de la 2$^{\text{ème}}$ semaine du mois de novembre 1997. Il a été proposé de manière identique à trois classes de 6$^{\text{ème}}$ et une classe de CM2, ce test concerne une population de 111 élèves avec 82 élèves en 6$^{\text{ème}}$ et 29 en CM2.

Certaines des microcompétences proposées sont considérées en cours d'acquisition en Cycle 3:

-> Savoir, qu'à partir d'une unité de longueur donnée, on peut mesurer n'importe quel segment donné en découpant l'unité.

-> Savoir que découper l'unité en 10 parties égales *est un choix*, et qu'il y en a d'autres.

-> Savoir qu'à certains points d'une droite graduée, on peut faire correspondre des nombres entiers.

-> Savoir placer sur une droite graduée, à origine et unité précisée, le point correspondant à :

- un entier,
- un décimal non entier,
- une fraction.

-> Savoir trouver sur une droite graduée le nombre correspondant à un point connu ou donner un encadrement de ce nombre.

Pour l'exercice 1, trois versions différentes sont proposées : aucune indication, proposition d'un outil: une règle graduée ou du papier calque (fourni). Pour les autres exercices aucune précision n'est apportée, ce qui d'ailleurs entraînera des erreurs, en particulier l'utilisation de la règle graduée.

RESULTATS

Les résultats sont présentés en ANNEXE 3

1- Quelques explications

Ces résultats sont présentés avec les effectifs et les pourcentages, dans les tableaux suivants avec la convention suivante:

BR : bonne réponse **MR** : mauvaise réponse **NR** : pas de réponse

Les résultats des deux niveaux sont une nouvelle fois présentés avec deux populations dont les effectifs sont dans un rapport de 1 à 3.

2- Données statistiques

Voir ANNEXE 3

3- Analyse des résultats

Exercice 1

Pour la mesure du segment, les résultats dépendent peu de l'instrument utilisé en 6ème. Le papier améliore nettement le résultat. Par contre, en CM2, les instruments n'apportent rien, aucune bonne réponse n'est trouvée. D'autre part, beaucoup de réponses sont données sans tenir compte de l'unité imposée. Les résultats sont donnés en cm et en mm. Un encadrement de la longueur du segment est proposé: $1 < U < 2$.

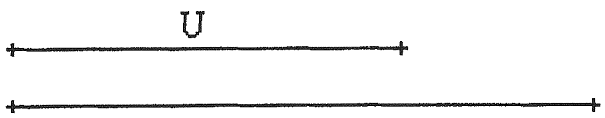
Les procédures utilisées par les élèves sont :

-> le report de l'unité sur le segment à mesurer avec ou sans papier calque,

-> la mesure de l'unité et du segment à mesurer avec la règle graduée.

-> la comparaison de l'unité et du segment à mesurer. Cela ne permet pas d'obtenir le résultat.

La disposition du segment unité et du segment à mesurer a facilité la réponse.



Exercice 2

En CM2, il y a très peu de bonnes réponses. Nous trouvons l'erreur classique de l'ordre des décimaux. Comme les décimaux sont compris entre 1 et 2, leur partie entière est 1 et donc la disposition proposée est le rangement des parties décimales des nombres. Ainsi avons-nous pour beaucoup d'élèves le rangement suivant :

$1{,}7 < 1{,}27 < 1{,}41 < 1{,}85$

En 6ème, cette erreur a été rencontrée seulement 5 fois sur les 82 élèves. Il y a eu une nette amélioration au cours du CM2 précédent.

Les procédures utilisées par les élèves sont difficiles à déceler sur leur feuille. Il aurait fallu leur demander d'expliquer oralement ou par écrit leur démarche.

Exercice 3

Dans les deux niveaux, la mesure, 3 U, du premier segment a une réussite supérieure à 50 %. Par contre, pour les deux autres mesures, la réussite est très faible.

Les procédures utilisées par les élèves sont difficiles à déceler sur leur feuille. De nombreux élèves ont donné les réponses en cm et mm sans tenir compte de l'unité imposée. Il est vrai que pour les deux derniers segments, elle est implicite. Il faut donc deviner l'unité pour pouvoir répondre correctement.

Exercice 4

La quantité importante de nombres à placer sur la droite graduée a ajouté une difficulté supplémentaire à cet exercice.

Les nombres décimaux n'ayant pas la même partie entière, nous ne retrouvons pas la même erreur que dans l'exercice 2. Le classement est réussi à 55% en $6^{ème}$ et à 17% en CM2.

Cet exercice met en évidence la non connaissance des écritures fractionnaires. La majorité des élèves assimilent les écritures fractionnaires à des nombres décimaux. Ainsi avons-nous très fréquemment:

$$\frac{1}{3}=1{,}3 \quad \frac{7}{4}=7{,}4 \quad \frac{9}{2}=9{,}2 \quad \frac{1}{3}=3{,}1 \quad \frac{7}{4}=4{,}7 \quad \frac{9}{2}=2{,}9$$

Les trois premières écritures sont très nombreuses. Pour les élèves le trait de fraction est assimilé à la virgule.

La fraction $\frac{163}{40}$ a été très peu traitée car le numérateur et le dénominateur sont des grands par rapport aux autres nombres des écritures fractionnaires.

Très peu d'élèves ont associé l'écriture fractionnaire à un quotient.

Cet exercice sera repris dans le test 5 passé en 1998 sous une forme plus simple.

CONCLUSION

Ce test a donné beaucoup d'indices sur les écritures décimales et fractionnaires pour établir des activités d'apprentissage et de remédiation. Cela permettra d'éviter certaines difficultés rencontrées par les enfants des classes de CM2 et de $6^{ème}$.

TEST 5	Fiche élève n°1	$6^{ème}$

Exercice 1

1- Mesure, à l'aide de la bande unité blanche, la longueur de chaque bande de couleur. Ecrire ton nom et le résultat sur chaque bande.

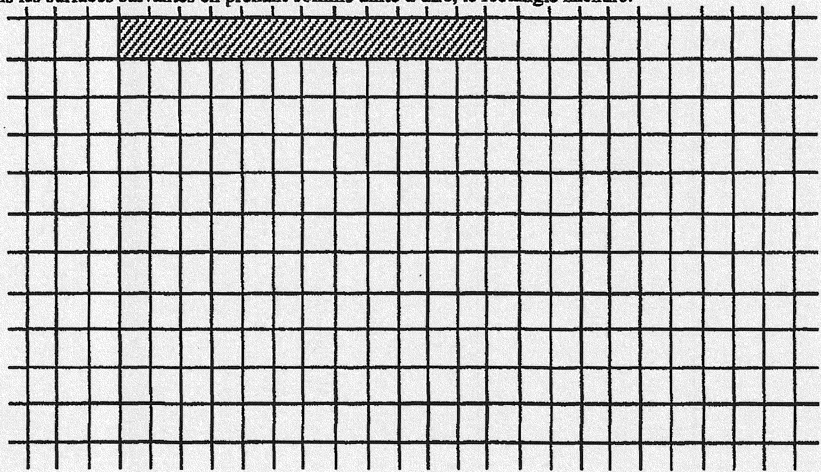
2- Construis, au dos de la feuille à l'aide de la bande unité blanche, les segments suivants :

mesure du segment [AB]: $\frac{1}{4}$ — mesure du segment [EF]: $2+\frac{1}{2}$

mesure du segment [GH]: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ — mesure du segment [IJ]: $\frac{3}{2}$

Exercice 2

Construis les surfaces suivantes en prenant comme unité d'aire, le rectangle hachuré.



$\frac{3}{2}$

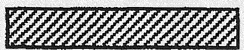
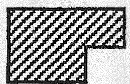
$\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$

Exercice 3

1- Mesure les surfaces suivantes en prenant comme unité d'aire, le rectangle hachuré.

2- Indique, chaque fois que c'est possible, plusieurs écritures de la mesure des surfaces.

Surfaces	Mesure des surfaces
	
	
	

TEST 5	Fiche élève n°2	$6^{ème}$

Exercice 1

Paul veut partager équitablement 3 baguettes de pain de même longueur entre 4 personnes. Dessine la part de chacun.

Exercice 2

Nathalie partage équitablement 7 pizzas entre ses 3 amies.

1- Représente chaque pizza par un disque et dessine la part de chacun.

2- Ecris chaque part de deux façons différentes.

Exercice 3

Partage le segment suivant en 5 parties égales en utilisant le réseau de droites parallèles ou le guide-âne.

Exercice 4

11 personnes commandent un quart de tartes chacune.

Combien de tartes le cuisinier doit-il préparer ? Que lui restera-t-il ?

Exercice 5

$\frac{3}{4}$; $\frac{5}{3}$; $1+\frac{1}{2}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$; $\frac{5}{5}$; $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$; $\frac{72}{10}$; $2-\frac{1}{4}$

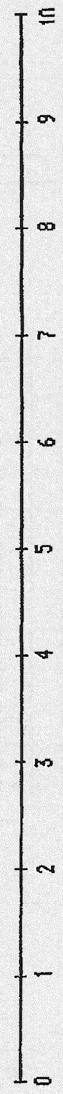
Entoure, en bleu, les écritures précédentes plus petites que 1 et, en vert, celles qui sont plus grandes que 1 et barre les autres.

TEST 5	Fiche élève n°3	$6^{ème}$

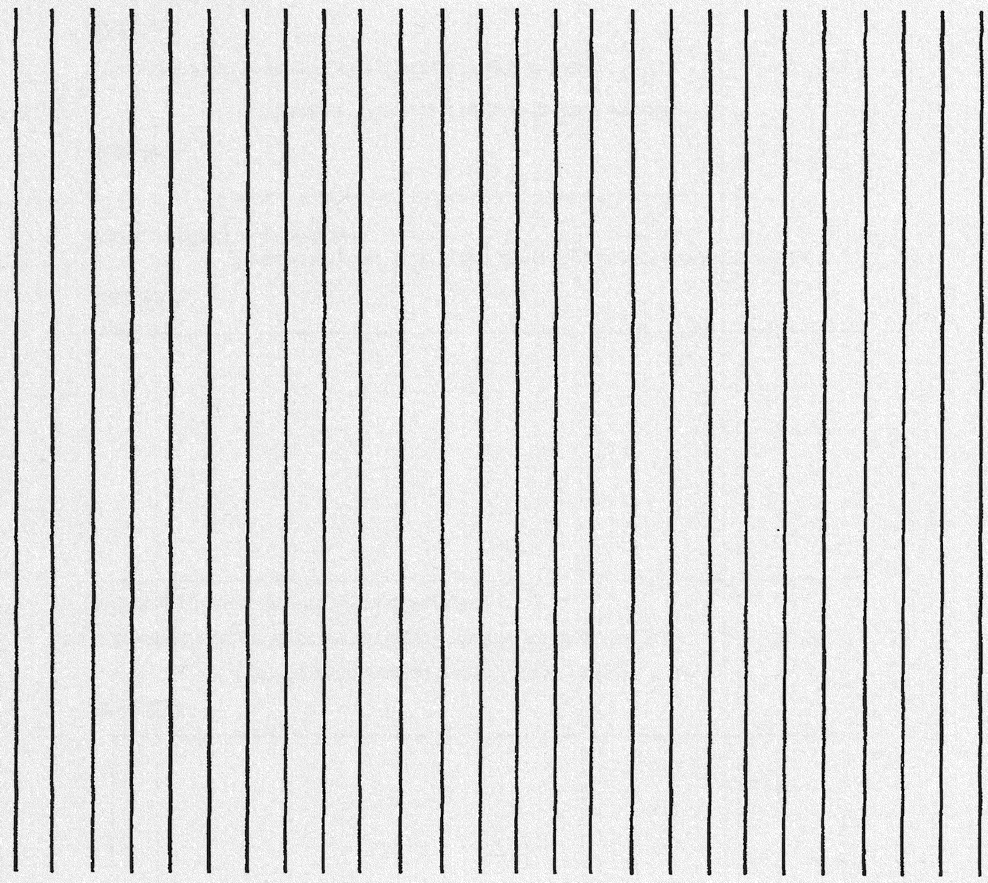
Exercice 1

Place le plus précisément sur la droite graduée les nombres :

$\frac{7}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{163}{40}$ $\frac{9}{2}$



Le réseau de droites parallèles



TEST 5 — PARTAGES GRADUATIONS ET MESURES

Ce test, passé dans 3 classes de $6^{ème}$ de collèges différents pour la fiche 1 et 6 classes de $6^{ème}$ de collèges différents, au début du mois d'octobre 1998, est une adaptation du test 4, soit une population de variant de 81 à 166 élèves. Le contenu proposait:

-> des situations de partages dans un contexte familier : baguette, pizza et tartes,
-> une situation de partage d'un segment avec un nouvel outil : réseau de droites parallèles,
-> des mesures de longueur avec une unité imposée,
-> des mesures d'aire avec une unité imposée,
-> des classements de nombres écrits sous forme fractionnaire d'écritures,
-> le placement de nombres sur une droite graduée, simplification de l'exercice 4 du test 4.

Les microcompétences proposées ont été, en principe acquise au cours du Cycle 3:

-> Savoir, qu'à partir d'une unité de longueur donnée, on peut mesurer n'importe quel segment donné en découpant l'unité.
-> Savoir que découper l'unité en 10 parties égales *est un choix*, et qu'il y en a d'autres.
-> Savoir, qu'à partir d'une unité d'aire donnée, on peut mesurer n'importe quelle surface donné en découpant l'unité.
-> Savoir qu'à certains points d'une droite graduée, on peut faire correspondre des nombres entiers.
-> Savoir placer sur une droite graduée, à origine et unité précisées, le point correspondant à :
un entier, un décimal non entier ou à une fraction.
-> Savoir encadrer une fraction par deux nombres décimaux.

Ce test se présente sous la forme de trois fiches. La fiche 1 comporte trois exercices, la fiche 2 comporte cinq exercices et la fiche 3 comporte un seul exercice. Pour la passation, aucun instrument n'est interdit. Les élèves répondent directement sur les fiches. L'exercice 1 de la fiche 1 nécessite du matériel distribué à chaque élève : une bande unité blanche et souple et trois bandes, à mesurer, souples de couleurs différentes.

RESULTATS

Ces résultats sont présentés, exercice par exercice, en détaillant les différentes questions ou les différents items, avec les effectifs et les pourcentages, dans les tableaux suivants toujours avec la convention suivante :

BR : bonne réponse **MR** : mauvaise réponse **NR** : pas de réponse

1- Données statistiques

FICHE 1 Exercice 1											
	Question 1: bandes à mesurer					Question 2 : segments à construire					
	rouge	orange	verte			[AB]	[GH]	[EF]	[IJ]		
BR	51	49	52	152	62,6%	53	44	39	41	177	54,6%
MR	26	27	23	76	31,3%	17	19	27	21	84	25,9%
NR	4	5	6	15	6,2%	11	18	15	19	63	19,4%

	FICHE 1 Exercice 2					FICHE 1 Exercice 3				
	surfaces construites					surfaces mesurées				
	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$			3U	2,5U	0,5U		
				total					total	
BR	43	40	31	114	46,9%	40	34	53	127	52,3%
MR	31	32	37	10	41,2%	34	30	14	78	32,1%
NR	7	9	13	29	11,9%	7	17	14	38	15,6%
	81	81	81			81	81	81		

FICHE 2								
	Exercice 1		Exercice 2		Exercice 3		Exercice 4	
	baguette		pizza		segment		tarte	
BR	76	46,9%	72	43,4%	0	0%	73	45,9%
MR	70	41,2%	72	43,4%	0	0%	84	50,7%
NR	20	11,9%	22	13,3%	0	0%	9	5,4%
	166		166				166	

FICHE 2 Exercice 5										
	1er nombre		2ème nombre		3ème nombre		4ème nombre		5ème nombre	
BR	65	47,1%	62	44,9%	64	46,4%	58	42%	49	35,5%
MR	67	48,6%	44	31,9%	45	32,6%	49	35,5%	50	26,2%
NR	6	4,3%	32	23,2%	29	21%	31	22,5%	39	28,3%
	138		138		138		138		138	
	6ème nombre		7ème nombre		8ème nombre		9ème nombre		total	
BR	50	36,3%	54	39,1%	67	48,6%	35	25,4%	504	40,5%
MR	62	44,9%	54	39,1%	40	29%	65	47,1%	476	38,3%
NR	26	18,8%	30	21,9%	31	22,4%	38	27,5%	262	21,2%
	138		138		138		138			

FICHE 3 Exercice 1										
	1er nombre		2ème nombre		3ème nombre		4ème nombre		total	
BR	25	17,2%	21	14,5%	20	13,8%	25	17,2%	91	15,8%
MR	89	61,4%	80	55,2%	48	33,1%	76	52,4%	293	50,5%
NR	31	21,4%	44	30,3%	77	53,1%	44	30,3%	196	33,7%
	145		166				166			

3- Analyse des résultats

Exercice 2 Fiche 1

Pour **la mesure des trois bandes**[16], la réussite dépasse les 60%. 6% des 81 élèves de 6ème n'ont pas su utiliser la bande unité pour effectuer les mesures. Par contre, la principale erreur est due à la non prise en compte de l'unité imposée. Les résultats sont donnés en cm et en mm et parfois par un encadrement de la longueur des bandes.

Les procédures utilisées par les élèves sont :

-> le report de la bande unité sur la bande à mesurer,

-> le pliage en 2 ou 4 de la bande unité pour mesurer la bande,

-> le pliage en 3 de la plus grande bande à mesurer,

-> l'utilisation de la droite graduée qui donne souvent des résultats en cm et en mm qui sont faux,

-> l'utilisation du compas pour reporter la bande unité ou diviser la bande unité. (2 élèves)

L'écriture des réponses est variable, cela peut être sous forme de texte, de nombre décimal ou de nombre fractionnaire.

Pour **la construction des quatre segments**, la réussite est voisine de 55%. Cependant près de 20% des 81 élèves de 6ème n'ont pas su utiliser la bande unité pour effectuer les constructions. Encore une fois, la principale erreur est due à la non prise en compte de l'unité imposée. Ces élèves ont dessiné des segments sans lien avec la bande unité.

Les procédures utilisées par les élèves sont les mêmes que pour les mesures; cette fois la règle :

$$\frac{1}{2}=2 \text{ ou encore } \frac{1}{3}=3$$

Les procédures utilisées par les élèves sont :

-> le partage des surfaces à mesurer, graduée permet de faire les constructions.

L'écriture des réponses est très souvent donnée avec le format des nombres indiqués. Certains élèves ont déjà remarqué et utilisé des égalités intéressantes :

$$\frac{3}{2}=3\times\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2} \qquad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1+\frac{3}{4}$$

D'autres élèves ont parfois donné des égalités fausses :

$$\frac{3}{2}=\frac{2}{3} \qquad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Exercice 2 Fiche 1

Pour **la construction des trois surfaces** sur le quadrillage, la réussite est voisine de 47%. Il y a cependant plus de 40% des 81 élèves qui ont fait une erreur. Elle est souvent due au mauvais comptage des carreaux de l'unité d'aire ou des surfaces à construire. Quelques élèves ont confondu des fractions, par exemple

$$\frac{3}{2}=\frac{2}{3} \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{3}=3$$

La procédure utilisée est le report et le découpage de l'unité d'aire. Cette unité d'aire était facile à diviser en 2, 3 et 4.

[16] la bande blanche est l'unité U (9,9cm) les 3 bandes de couleur ont respectivement pour longueurs 3 U (29,7 cm longueur du format A3) U/2 (4,95 cm) et 2U/3 (6,6 cm).

Exercice 3 Fiche 1

Pour **les trois surfaces à mesurer,** la réussite est voisine de 52%. Il y a cependant plus de 30% qui ont fait une erreur. Elle est due à la difficulté de diviser les surfaces à mesurer. Quelques élèves ont encore confondu des fractions, par exemple:

$$\frac{1}{2}=2 \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{3}=3$$

Les procédures utilisées par les élèves sont :

-> le partage des surfaces à mesurer,
-> la mesure "pensée" ou "imaginée" des surfaces à mesurer,

Parmi les erreurs rencontrées, nous trouvons la longueur des surfaces, la longueur et la largeur des surfaces, et l'aire exprimée en centimètres carrés.

Il y a eu quelques écritures différentes de la mesure des surfaces, par exemple :

$$\frac{1}{2}=0,5=\frac{5}{10} \qquad 2+\frac{1}{2}=2,5=\frac{5}{2} \qquad \frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8} \qquad 3=\frac{6}{2}$$

Exercice 1 Fiche 2

Le **partage des trois baguettes** a été réussi seulement à 46%. Nous pouvions espérer un meilleur résultat à cette question.

Les procédures utilisées par les élèves sont :

-> le partage de chaque baguette en 4 morceaux, c'est-à-dire $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, c'est le partage de la totalité

-> le partage de deux baguettes en 2 morceaux et le partage de l'autre baguette en 4 morceaux,

-> la prise des $\frac{3}{4}$ de deux baguettes et la somme des morceaux restants c'est-à-dire $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$.

-> la prise des $\frac{3}{4}$ des trois baguettes. le reste de chaque baguette donne la part de la 4ème personne, c'est-à-dire $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, c'est le partage de la totalité.

-> le calcul pensé ou posé de la division 3 : 4, c'est-à-dire $3:4=0,75=\frac{3}{4}$.

Deux erreurs fréquentes ont été constatées:

-> le partage des trois baguettes en deux parties égales, l'élève abandonne ensuite sa démarche.

-> l'oubli du dessin de la part de chaque personne, c'est plutôt une mauvaise lecture de la consigne.

Exercice 2 Fiche 2

Le **partage des sept pizzas** n'a pas été mieux réussi, seulement 43%. Il est vrai que les nombres proposés 7 et 3 sont moins faciles à exploiter.

Les procédures utilisées par les élèves sont :

-> le partage d'une pizza en trois morceaux et la distribution de deux pizzas à chaque personne, c'est-à-dire $2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$ ou encore $1+1+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$

-> le partage de chaque pizza en trois morceaux, c'est-à-dire $7\times\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$, c'est le partage de l'unité,

-> le partage d'une pizza en trois morceaux, le partage de deux pizzas en deux morceaux et la distribution d'une pizza à chaque personne, c'est-à-dire $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$,

Une erreur peu fréquente cette fois a été trouvée:

-> le partage des sept pizzas en deux parties égales, l'élève abandonne ensuite sa démarche.

Exercice 3 Fiche 2

C'est l'échec total. En effet les élèves ne savaient pas se servir du guide-âne distribué à chaque élève, c'est-à-dire le réseau de droites parallèles.

Exercice 4 Fiche 2

La **commande des tartes** a une réussite, 44%, semblable aux deux premiers exercices de cette fiche. La question posée impose l'écriture $11\times\frac{1}{4}$, elle a été rencontrée très rarement. Beaucoup de réponses ont été faites sans une référence à des dessins, nous pouvons imaginer qu'ils ont utilisé l'égalité $4\times\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1$ pour trouver la bonne réponse. Quelques élèves ont effectué la division de 11 par 3 et ont donné la bonne réponse.

Exercice 5 Fiche 2

Le classement de nombres écrits sous forme fractionnaire a été plus difficile car il y avait neuf nombres dans l'énoncé. Pour les résultats nous avons donc dénombré les bonnes réponses de chaque nombre. La réussite globale est de 40%.

Nous n'avons pas de trace des procédures utilisées par les élèves. Quelques erreurs ont été cependant rencontrées, par exemple:

$$1+\frac{1}{2}<1 \qquad 2-\frac{1}{4}<1 \qquad \frac{5}{3}<1 \qquad \frac{1}{4}+\frac{1}{2}>1$$

Exercice 1 Fiche 3

Cet exercice est une version simplifiée de l'exercice 4 du test 4. La réussite globale est un peu meilleure, 16% et un tiers des 145 élèves n'a pas répondu à cet exercice.

Nous faisons le même constat que l'an dernier. Cet exercice met en évidence, une nouvelle fois avec une nouvelle population, la non connaissance des écritures fractionnaires dans le cadre graduation. La majorité des élèves assimilent les écritures fractionnaires à des nombres décimaux. Ainsi avons-nous très fréquemment :

CONCLUSION

Ce test a abordé les fractions dans les trois cadres habituels: partages, mesures et graduations. En regroupant les résultats enregistrés dans ces trois cadres, il semblerait que les cadres mesures et partages favorisent la connaissance des fractions.

	cadre			
	partages	**mesures**	**graduations**	**Total**
BR	45,7%	54,1%	28,2%	42,7%
MR	44,2%	32,6%	44,4%	40,4%
NR	10,1%	13,3%	27,4%	16,9%

Il est vrai que ce constat a été fait au début de la classe de 6ème, il reste encore beaucoup de travail à faire avec les élèves dans ce domaine en 6ème et au cours de leur scolarité au collège.

II- LES IDEES DIRECTRICES

Une conception des apprentissages

Nous tenterons **d'expliciter dans cette partie les idées fortes** qui nous ont guidés, tout au long de ces deux années, dans la conception et la mise en oeuvre de nos activités dans les différentes classes. Afin que les élèves puissent effectivement bénéficier de notre travail, nous souhaitons que les utilisateurs potentiels de notre brochure respectent effectivement ces idées.

1- Les **activités proposées** dans chacun des cadres privilégiés retenus - partage et mesure - font **l'objet d'une progression** et ne sauraient être utilisées dans un ordre quelconque.
Les fiches dépendent les unes des autres et tiennent compte des compétences que les élèves ont acquises au cours des activités précédentes.
En particulier, l'introduction des rationnels est effectuée dans le cadre partage et les activités du cadre mesure nécessitent que cette introduction dans le cadre partage ait été effectivement réalisée.

2- Les tests que nous avons donnés aux élèves de nos **classes de sixième** nous ont montré que le **sens donné à la notation fractionnaire** était **souvent inexistant** et que les éventuelles activités proposées aux élèves de cycle 3 n'avaient pas permis, dans la très grande majorité, de construire la notion.
C'est pourquoi, plutôt que de concevoir **nos activités** comme une remédiation s'appuyant sur ce que nos élèves ont retenu du cycle précédent nous les avons conçues comme une **reconstruction de la notion** s'appuyant sur des **activités inédites**, non fréquentées par nos élèves.

Le problème ne se pose pas pour les élèves du cycle 3 car il s'agit alors de construire cette notion pour la première fois.

3- Le **matériel** proposé est **toujours indispensable** au bon déroulement de l'activité. Les professeurs ne pourront donc en aucun cas s'en passer. Nous sommes conscients qu'il est parfois important en quantité, c'est pour cela que, aussi souvent que possible, nous avons tenté de le simplifier.

4- Notre expérience professionnelle et notre conception de l'apprentissage des notions par les élèves nous ont conduits à **privilégier le travail par groupes de trois** au cours des activités d'acquisition de nouvelles compétences et de renforcement de celles-ci.
Nous souhaitons donc vivement que la classe puisse être organisée par groupes de trois élèves - éventuellement, du fait du mobilier scolaire ou pour gérer le reste de la division par trois du nombre d'élèves, par groupes de deux -
(Exemple : pour une classe de 28 élèves la meilleure structure pédagogique serait celle de 8 groupes de 3 et 2 groupes de 2.) Cependant :

- tout **travail par groupe** doit nécessairement être **précédé par un indispensable travail individuel** au cours duquel l'élève s'investit personnellement dans les tâches qui lui sont imposées par la situation.

- la **responsabilité de la confection des groupes** est toujours de la responsabilité de l'enseignant, sans que nous puissions prendre position sur l'hétérogénéité (souhaitable ou non), sur le brassage au cours des différentes séances ou même d'une même séance[17].

---

[17] Nous appelons **séance** une unité de temps scolaire (en général, 50 minutes environ) et **séquence** une unité de tâches proposées aux élèves qui permet d'atteindre un objectif d'apprentissage (une ou plusieurs séances).

5- Le **déroulement d'une séquence d'apprentissage,** d'une nouvelle "connaissance procédurale[18]" suppose absolument le respect de différentes phases .
En effet, acquérir une nouvelle compétence suppose que l'élève ne la possède pas au départ et il est donc normal que la situation, qui lui est soumise, lui résiste un certain temps.

Dans ce contexte, il est indispensable que nous sachions si l'élève a bien compris ce que nous lui demandons de réaliser : c'est le rôle de la phase d'appropriation.

- la **phase d'appropriation** : il s'agit pour l'élève de réaliser, sans aucun problème, le travail qui lui est demandé. Les tâches, qu'il a alors à réaliser, peuvent être faites en utilisant les compétences qu'il possède déjà.
De cette manière nous nous assurons que les consignes de travail ont été bien comprises.

- la **phase de recherche** : le travail qui lui est demandé reste identique à celui de la phase précédente, mais est maintenant plus difficile à réaliser car les tâches à effectuer supposent l'invention d'une nouvelle procédure (l'une des bonnes solutions au problème posé) à découvrir par les élèves.

- la **phase d'institutionnalisation** : une fois les connaissances découvertes par les élèves, l'enseignant doit clairement les pointer pour les mettre en évidence.
Elles doivent faire ***l'objet d'une trace écrite, référence indispensable,*** et le maître doit demander aux élèves de les retenir.

6- Au cours d'une séquence d'apprentissage, lors de la phase de recherche, les **différents groupes n'évoluent pas à la même vitesse**. Or nous sommes convaincus que l'institutionnalisation collective des connaissances ne peut se faire que lorsque tous les élèves ont franchi l'obstacle proposé.

C'est pour cela que nous avons parfois prévu, entre la phase de recherche et la phase d'institutionnalisation de certaines séquences d'apprentissage, des **activités supplémentaires** qui ne feront pas l'objet d'une mise en commun. Celles-ci, uniquement destinées aux plus rapides, devraient permettre à chacun d'évoluer à son propre rythme et en particulier aux groupes les plus lents de résoudre uniquement le problème initial proposé, avec l'aide éventuelle de l'enseignant.
7- Nous ne voudrions pas laisser l'impression aux professeurs chevronnés qui liront notre document que le rôle du maître est négligeable durant la phase de recherche telle qu'elle a été décrite. Ils auraient raison de ne pas nous croire.

C'est pourquoi, nous tenons à préciser que **l'enseignant doit fournir, à tout moment, aux élèves les aides qu'il juge indispensables** : en particulier, il doit aider le groupe d'élèves à bien s'organiser, leur rappeler leurs connaissances antérieures en faisant référence aux traces écrites et aux activités vécues....
L'encouragement affectif s'avère bien souvent fondamental.

---

[18] Une **connaissance procédurable** est à nos yeux une compétence que l'élève **peut acquérir**, avec l'aide de ses pairs, sans **l'apport de l'enseignement**. C'est l'activité et donc les tâches proposées au groupe d'élèves qui doivent les obliger à s'adapter pour découvrir la procédure souhaitée caractéristiques de l'apprentissage visé.
Remarque : si certaines connaissances, essentiellement procédurables, peuvent être découvertes par les élèves, d'autres, en particulier les **connaissances déclaratives**, font obligatoirement l'objet d'un **apport du maître**, sous la forme d'un **enseignement**.

En outre, si la difficulté demeure, le brassage[19] des groupes n'ayant pas trouvé la procédure recherchée, s'avère bien souvent le facteur déclenchant suffisant. La reconstitution des groupes initiaux permet alors à une ou des procédures efficaces de se répandre.

8- Malgré la recherche individuelle préalable, le travail de groupe ne permet pas de savoir si chacun des élèves s'est réellement investi dans le travail demandé.

C'est pour cela qu'il faut **prévoir une évaluation individuelle** qui permettra au maître et à l'élève de savoir si la procédure découverte par le groupe peut réellement être mise en œuvre par l'élève seul.

9- Une fois la **connaissance découverte et consignée dans un cahier**, il est **indispensable de l'entretenir et de l'automatiser** pour la rendre disponible pour des acquisitions de niveau supérieur.

C'est le rôle des exercices hors contexte qui sont parfois suggérés. L'entraînement systématique devrait permettre de réaliser les tâches proposées avec de plus en plus de dextérité et de rapidité sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours, pendant le recherche, à la trace écrite résultant de l'institutionnalisation antérieur.

[19] exemple de brassage : 3 groupes de 3 élèves forment 3 nouveaux groupes de 3 élèves (chaque élève est issu d'un groupe différent).

Une idée de progression

Progression sur les deux dernières années du cycle 3

Contenus	Compétences à acquérir	Commentaires
(sept/oct) Numération : entiers naturels (étude cas particulier numération égyptienne pour « revenir » à notre système de numération décimale)	Etre capable d'écrire /de décomposer (formes additives, multiplicatives) / de comparer / d'encadrer les entiers naturels	* en CM n<100 000 en CM2 on pourra aller jqa n>1000 000 000 en relation avec des cas « concrets » (distance astronomiques, populations, superficie de pays…)
	FRACTIONS ET DECIMAUX : CADRE PARTAGE : Etre capable d'utiliser des fractions usuelles (**demis, quarts, huitièmes, tiers, sixièmes**) dans des **situations de partages** : être capable de déterminer la valeur d'une part / de plusieurs parts / d'un « reste » après partage	* Utiliser des fractions inférieures et **supérieures à l'unité**
(nov/juin) Travail « en parallèle » : - technique opératoire division euclidienne - numération: des fractions usuelles aux fractions décimales/ nombres décimaux (écritures à virgules	Etre capable d'écrire de plusieurs façons différentes (formes additives, multiplicatives) une écriture fractionnaire au moyen des fractions usuelles	
	Etre capable de même d'utiliser les fractions décimales (**dixièmes /centièmes**) dans des situations de partages	* en CM2 introduction / utilisation des <u>centièmes</u> et des <u>millièmes</u>
	CADRE MESURE Etre capable d'utiliser les fractions usuelles puis les fractions décimales dans des **situations de mesures** segments, aires,)	*en CM2 : mesures d'aires **Après des situations dans le cadre mesures de longueurs : introduction du cadre graduation**
	CHANGEMENT D'ECRITURE Etre capable, hors contexte, d'écrire une fraction décimale sous la forme d'un « nombre à virgule », et vice-versa Etre capable de décomposer un nombre décimal : partie entières, partie décimale – elle même décomposée en dixièmes, centièmes -	**Les techniques opératoires ne sont pas prises en charge dans Le document : en CM1 : addition et soustraction de décimaux en CM2 : multiplication et division d'un décimal par un entier**
Travail « en parallèle » : - technique opératoire : addition/soustraction des nombres décimaux….	COMPARAISON Etre capable de comparer des nombres décimaux et de les situer par rapport aux entiers.	*en CM2 : encadrer des nombres décimaux par d'autres décimaux / intercaler un nombre entre 2 nombres décimaux.

Progression [20] sur l'année de sixième

Travaux numériques	Commentaires
Nombres entiers naturels	- Système de numération - Le chiffre des..., le nombre de... - Addition, soustraction, multiplication: techniques vocabulaire(somme, différence, produit, terme, facteur) - Ordre de grandeur - Des lettres pour désigner des nombres - Calculs de durée - Calcul mental: additionner 9, 11, 97, 102.... soustraire 9, 11, 95, 101....
Division euclidienne	- Multiple, diviseur - Critères de divisibilité - division euclidienne: sens technique - Ordre de grandeur d'un produit, d'un quotient - Calcul mental: le double, le triple... la moitié, le tiers, le quart...
Fractions, fractions décimales	**- Cadre partage** **- Cadre mesure** **- Cadre graduation** - Comparaison d'une fraction à un entier - Comparaison de fractions - Somme de fractions - Calculer une fraction de.... - Utiliser un pourcentage

20 Cette progression est identique à celle de la brochure « une année de sixième en mathématiques » IREM de Limoges 1998 – Elisabeth ALOZY et Martine GRIMAUD.

Nombres décimaux : écritures à virgule	- Numération décimale(distinguer partie entière et partie décimale) - Le chiffre des....., le nombre de.... - Différentes écritures d'un nombre décimal - Comparaison de nombres décimaux - Addition, soustraction - Lire l'abscisse d'un point d'une droite graduée - Placer sur une droite graduée un point connaissant son abscisse
Multiplication des décimaux	- multiplication comme produit de mesures et coefficient de proportionnalité - Technique de la multiplication des décimaux - Changement d'unités - Calcul mental: multiplier par 10, par 100, par 1000... multiplier par 0,1, par 0,01, par 0,001... - Calculer avec des produits comme 2x5, 4x25, 8x125...
Equations. Division	- Résolution d'équations ou de problèmes simples

Remarques :

Dès le début de l'année, le nombre décimal est en même temps utilisé dans les résolutions de problèmes simples (sens des opérations).

En parallèle, des travaux géométriques sont conduits.

III- LES ACTIVITES

Des introductions possibles des "fractions"

Différents aspects au rationnel $\frac{a}{b}$

→ le rationnel $\frac{a}{b}$ comme a $b^{\text{ièmes}}$:

Cette signification de $\frac{a}{b}$ est facilitée par la lecture orale en usage :

$\frac{2}{3}$ est habituellement lu 2 tiers, $\frac{7}{10}$ 7 dixièmes.

On privilégie alors les écritures

$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ (2 fois $\frac{1}{3}$) $\qquad \frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$.

$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{b}$ (a fois $\frac{1}{b}$) $\qquad \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$

→ le rationnel $\frac{a}{b}$ comme a divisé par b, comme le nombre b fois plus petit que a.

Cette lecture orale de $\frac{2}{3}$ comme 2 divisé par 3 est très peu utilisée.

Cette signification du rationnel privilège les écritures :

$2 : 3 = \frac{2}{3} \qquad \frac{2}{3} \times 3 = 2$

$a : b = \frac{a}{b} \qquad \frac{a}{b} \times b = a$

* le rationnel $\frac{a}{b}$ comme notation fonctionnelle ("composition d'opérateurs"):

$\frac{a}{b}$ est ainsi l'abréviation de la fonction multiplier par a sur b (également lue multiplier par a $b^{\text{ièmes}}$) fonction composée des deux fonctions mul_a et div_b

<u>Notations en usage :</u>

- soit f la fonction numérique : "prendre les $\frac{2}{3}$ de ..."

$f(t) = \frac{2}{3} \times t \qquad f(6) = \frac{2}{3} \times 6 = 4 \qquad f(5) = \frac{2}{3} \times 5 = \frac{10}{3}$

- soit g la fonction numérique : "prendre les $\frac{a}{b}$ de...."

$g(c) = \frac{a}{b} \times c \qquad \frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b}$

Le cadre graduation n'est pas retenu comme cadre d'introduction

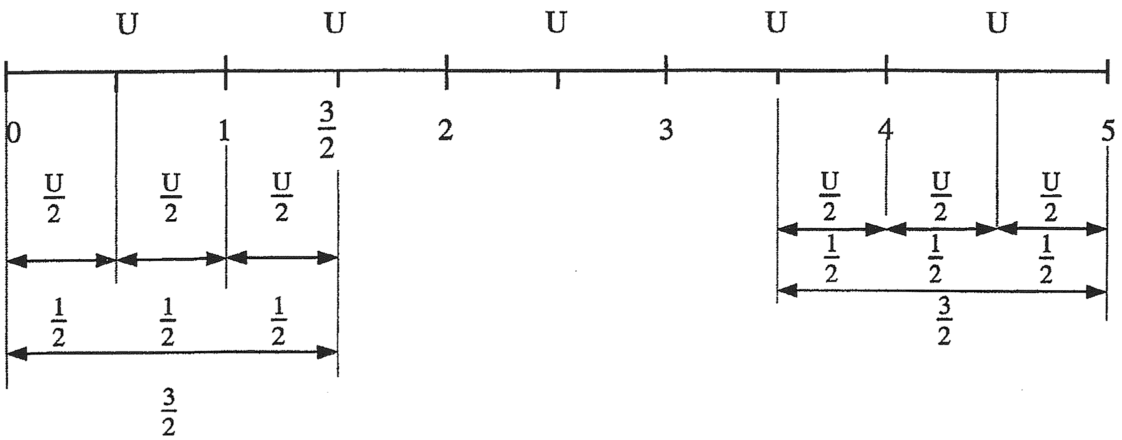
Les activités dans ce cadre **s'avèrent cependant indispensables** car elles permettent de traiter convenablement les problèmes d'intercalation (décimal entre deux entiers, décimal entre deux décimaux) et de rangement des décimaux.

Il est en général suffisamment pris en compte dans les manuels en usage dans les classes et fait l'objet d'activités spécifiques [22] sur ordinateurs souvent bien conçus.

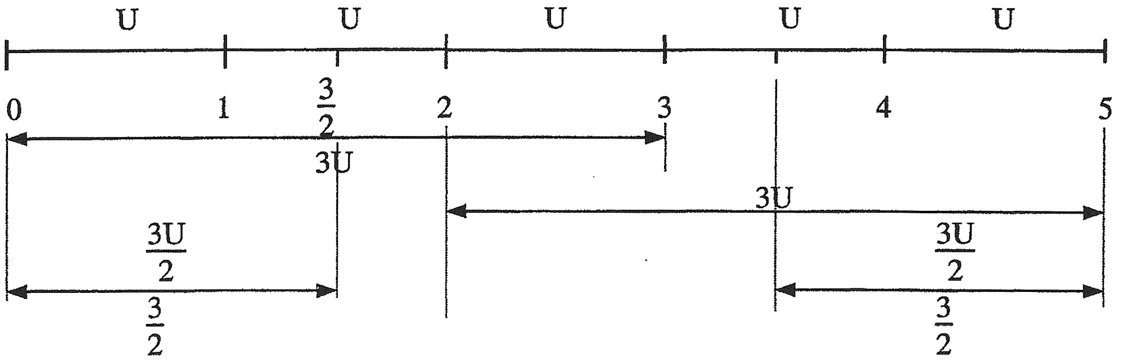
Dans la progression, ces activités trouvent place parmi celles proposées sur le partage de segments et sur les mesures de longueur.

Sur une graduation peuvent figurer **les nombres-repères** (abscisses des points) mais aussi les **nombres-mesures** (mesure des segments, distance entre des nombres)

* $\frac{3}{2}$ perçu comme $3 \times \frac{1}{2}$



* $\frac{3}{2}$ perçu comme 3 : 2



[22] exemples de logiciels :

A nous les décimaux de l'I.R.E.M. de Bordeaux (éditions Profil),
Oratio de R. Adjiage (éditions Pierron),
Gradseg sur le serveur de académie de Rennes : http://www.ac-rennes.fr/pedagogies/maths/gfcopub.htm

TEST 1	FICHE élève n°1	CM1

Exercice 1

Dans une boîte, il y a 250 billes. On fait des paquets de 50.
Combien de paquets va-t-on avoir ?

Exercice 2

Maman veut partager 36 bonbons entre ses 3 enfants.
Combien de bonbons aura chaque enfant ?

Exercice 3

2 enfants se partagent 3 pains au chocolat.
Quelle est la part de chacun ?

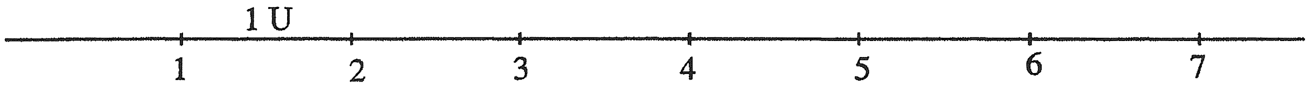
TEST 1	FICHE élève n°2	CM1

Exercice 1

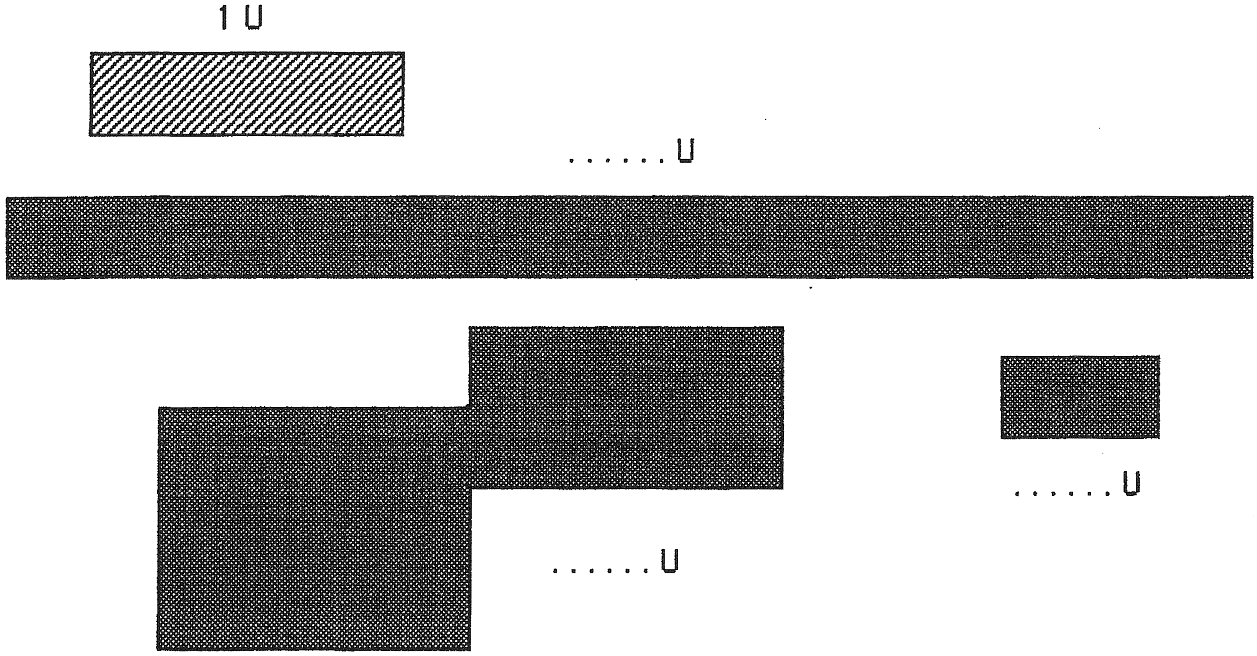
Complète les pointillés :

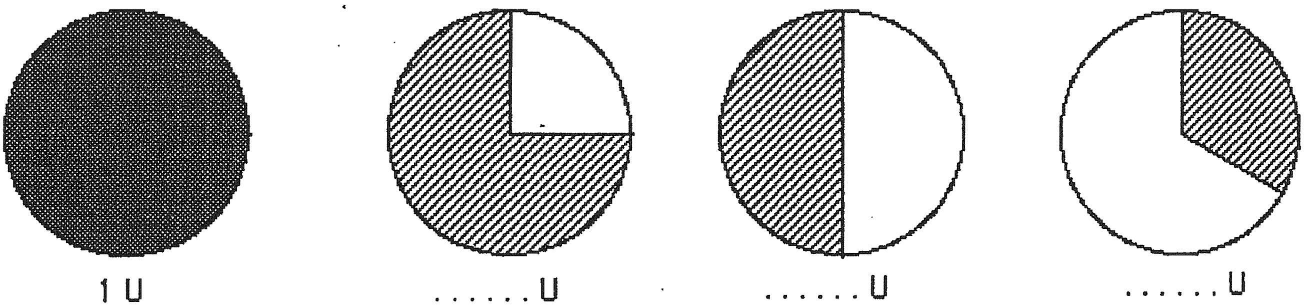
Construis un segment mesurant 5 U :

Complète les pointillés :



Exercice 2 Complète les pointillés :





TEST 2	FICHE élève	CM2

Prénom et nom : **Date :**

Calculer	Feuille de brouillon
750,38 + 32,065	
84,8 + 259,47	
0,14852 + 3965,3	
680,96 - 347,3	
36,2 - 19,52	
51,7 - 43,45	
12,7 x 4	
15 x 54,63	
271,36 x 100	
35,045 x 10	
153 : 10	
3,2 : 100	
100 : 2	
13 : 2	

TEST3	Fiche élève	CM2-6$^{\text{ème}}$

Ecriture des nombres :

Entoure la ou les réponses possibles et barre la ou les réponses fausses.

0023,040	023,04	23,4	23,04	23,40
0,308	00,38	0,3080	0,380	00,308
sept centièmes	7,00	$\frac{7}{100}$	$7\times\frac{1}{100}$	0,07
cent un millièmes	1,101	101,101	0,101	101,000
cent onze unités un centième	111,1	111,01	111,001	$111+\frac{1}{100}$
$\frac{25}{10}$	$25\times\frac{1}{100}$	2,5	0,25	$\frac{250}{100}$
$(7\times10)+(3\times1)+(5\times\frac{1}{10})$	$73+\frac{5}{10}$	$70+\frac{35}{100}$	73,5	$\frac{735}{100}$
1,7	$\frac{1}{10}\times17$	$\frac{17}{10}$	$10+\frac{7}{100}$	dix-sept centièmes
2,5	vingt unités et cinq dixièmes	25 : 10	$2+\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10}+\frac{5}{100}$
25 : 100	vingt-cinq centièmes	20,5	$2+\frac{5}{100}$	0,25
$\frac{31343}{1000}$	$31+\frac{34}{100}+\frac{3}{1000}$	3,1+0,343	$3+\frac{134}{100}+\frac{3}{1000}$	31,343
$8+\frac{35}{100}$	$\frac{3}{10}+\frac{5}{100}+8$	8,35	$8+\frac{3}{100}+\frac{5}{1000}$	$\frac{835}{100}$
Le nombre de centaines dans 23 405 est	4	23	234	34
Le nombre de dixièmes dans 35,47 est	3	354	4	7
Le chiffre des centaines dans 1320,65 est	13	5	2	3
cent trois dixièmes	$100+\frac{3}{10}$	100,3	$\frac{103}{10}$	$10+\frac{3}{10}$
cent et trois dixièmes	$100+\frac{3}{10}$	100,3	$\frac{103}{10}$	$10+\frac{3}{10}$

TEST 4 | **Fiche élève n°1** | **CM2 - 6ème**

Exercice 1

Voici un segment unité U.

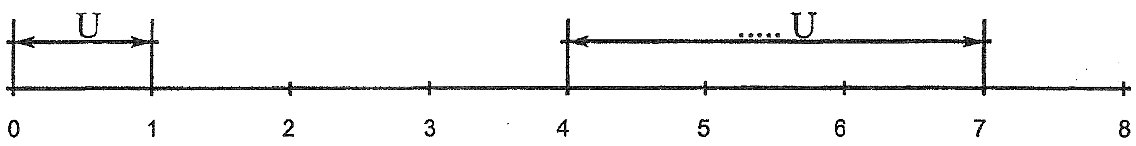
Détermine la longueur de ce segment en complétant les pointillés.

Exercice 2

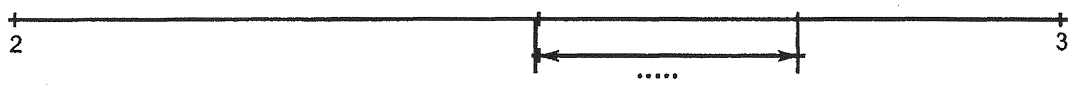
1- A quels nombres décimaux correspondent les deux flèches ?

2- Place sur le segment les nombres décimaux 1,7 et 1,41.

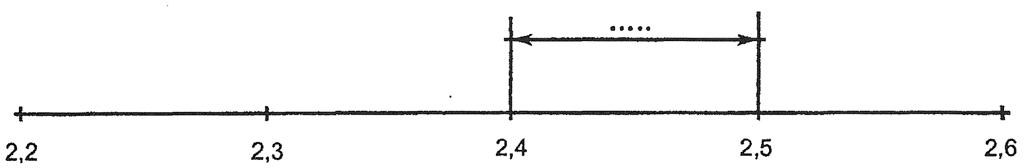
Exercice 3 Compléter les pointillés.



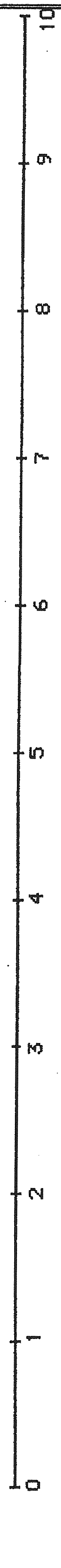
Exercice 4 Compléter les pointillés.



Exercice 5 Compléter les pointillés.



Exercice 6



1- Place le plus précisément sur la droite graduée les nombres :

$\frac{7}{4}$ $\frac{1}{3}$ 1,25 3,06 4,5 $\frac{163}{40}$ $\frac{9}{2}$

2- Donne les explications :

$\frac{7}{4}$

$\frac{1}{3}$

1,25

3,06

4,5

$\frac{163}{40}$

$\frac{9}{2}$

TEST 5 | **Fiche élève n° 1** | **6ème**

Exercice 1

1- Mesure, à l'aide de la bande unité blanche, la longueur de chaque bande de couleur. Ecrire ton nom et le résultat sur chaque bande.

2- Construis, au dos de la feuille à l'aide de la bande unité blanche, les segments suivants :

mesure du segment [AB]: $\frac{1}{4}$

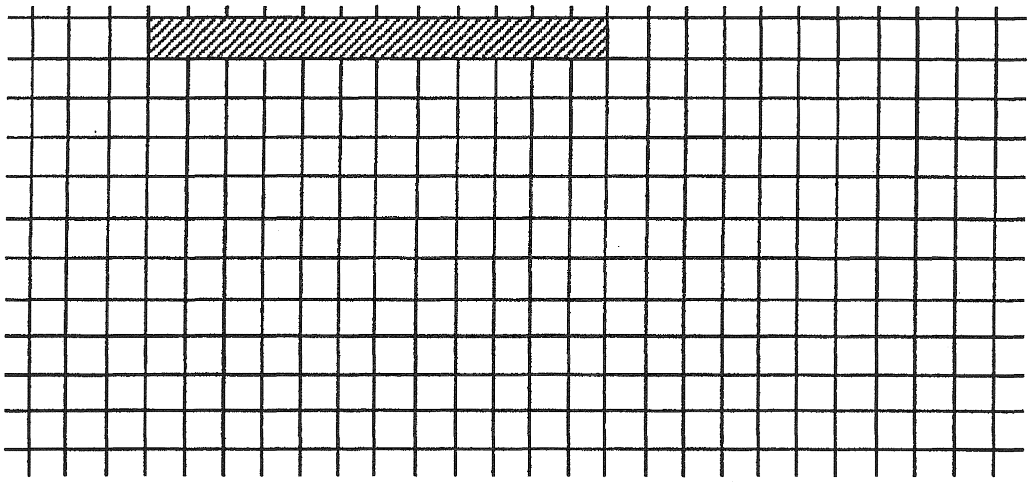
mesure du segment [EF]: $2+\frac{1}{2}$

mesure du segment [GH]: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

mesure du segment [IJ]: $\frac{3}{2}$

Exercice 2

Construis les surfaces suivantes en prenant comme unité d'aire, le rectangle hachuré.

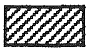


$\frac{3}{2}$

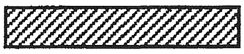
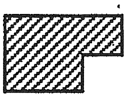
$\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$

Exercice 3

1- Mesure les surfaces suivantes en prenant comme unité d'aire, le rectangle hachuré. 

2- Indique, chaque fois que c'est possible, plusieurs écritures de la mesure des surfaces.

Surfaces	Mesure des surfaces
	
	
	

TEST 5 **Fiche élève n° 2** **6ème**

Exercice 1

Paul veut partager équitablement 3 baguettes de pain de même longueur entre 4 personnes. Dessine la part de chacun.

Exercice 2

Nathalie partage équitablement 7 pizzas entre ses 3 amies.

1- Représente chaque pizza par un disque et dessine la part de chacun.

2- Ecris chaque part de deux façons différentes.

Exercice 3

Partage le segment suivant en 5 parties égales en utilisant le réseau de droites parallèles ou guide-âne.

Exercice 4

11 personnes commandent un quart de tartes chacune.

Combien de tartes le cuisinier doit-il préparer ? Que lui restera-t-il ?

Exercice 5

$$\frac{3}{4} \;;\; \frac{5}{3} \;;\; 1+\frac{1}{2} \;;\; \frac{7}{10} \;;\; \frac{1}{2}+\frac{1}{4} \;;\; \frac{5}{5} \;;\; \frac{1}{2}+\frac{3}{4} \;;\; \frac{72}{10} \;;\; 2-\frac{1}{4}$$

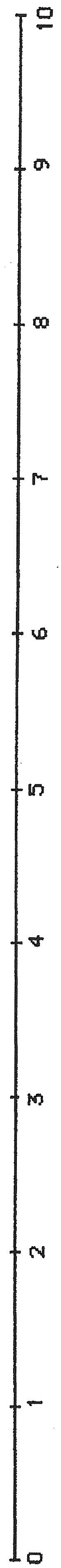
Entoure, en bleu, les écritures précédentes plus petites que 1 et, en vert, celles qui sont plus grandes que 1 et barre les autres.

TEST 5 — **Fiche élève n° 3** — **6ème**

Exercice 1

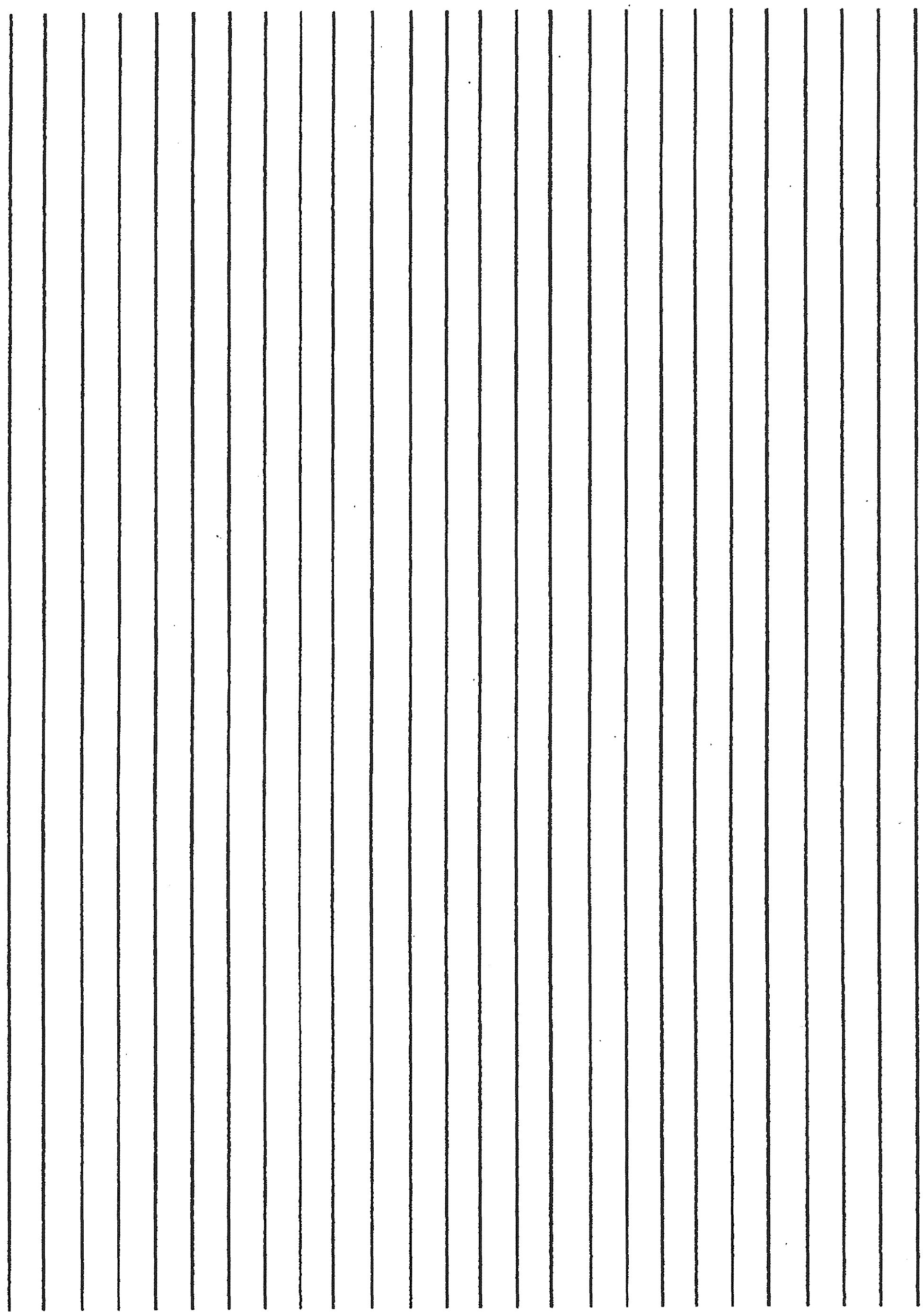
Place le plus précisément sur la droite graduée les nombres :

$\frac{7}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{163}{40}$ $\frac{9}{2}$



TEST 5 **Fiche élève n° 3** **6ème**

Le réseau de droites parallèles

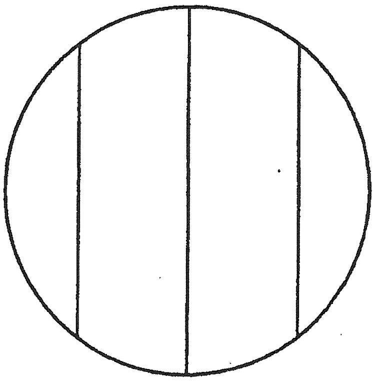


PARTAGES

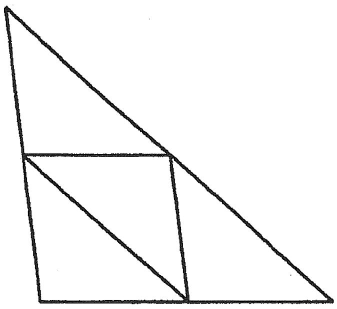
FICHE 1 Les partages équitables

Les surfaces suivantes ont été partagées.
Certains partages sont équitables (les parts sont égales) et d'autres pas.
Entoure la lettre qui correspond à un partage équitable (Aide : tu peux utiliser le papier calque)

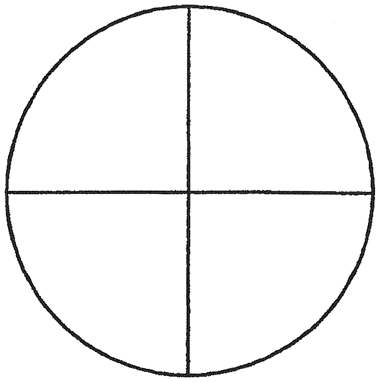
A



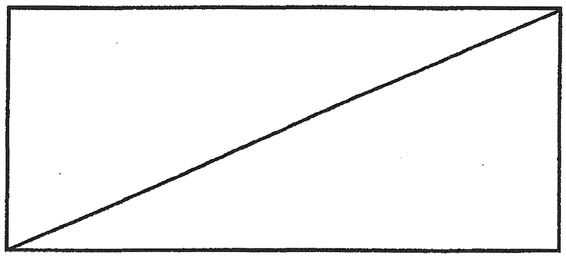
B



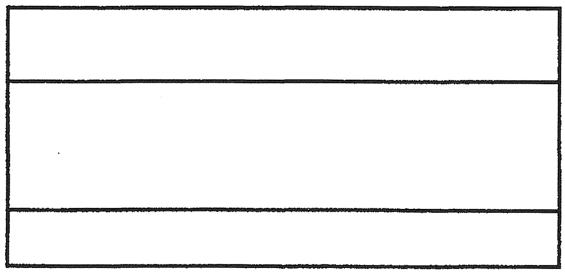
C



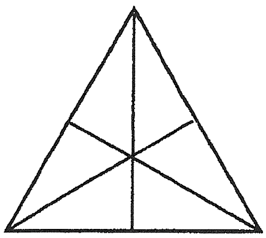
D



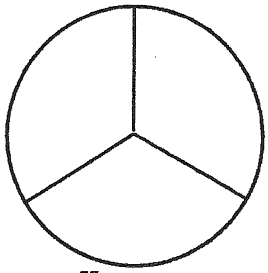
E



F



G



H

FICHE 2

Activité 1   Les tartelettes

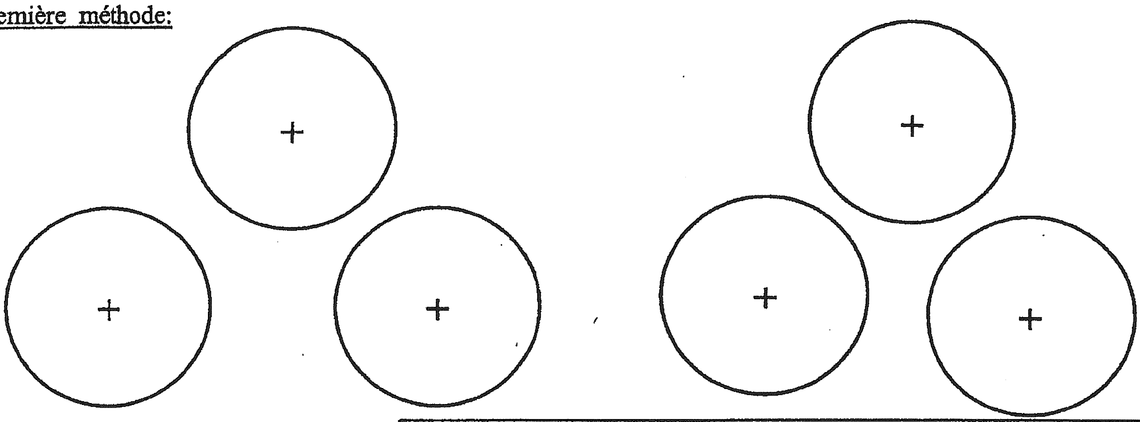
Six tartelettes de même taille sont à partager **équitablement** entre 4 enfants : Serge, Emilie, Patricia et Alain .

Quelle opération traduit ce partage ?

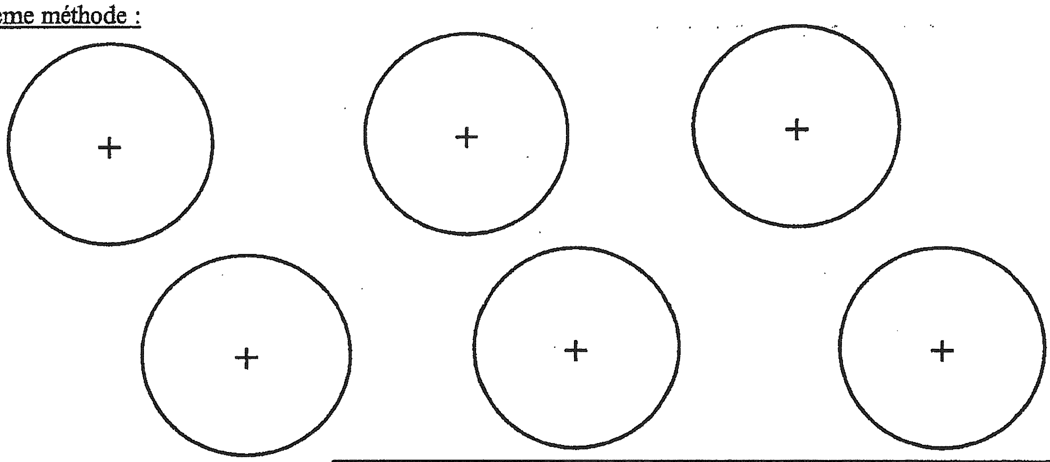
1) Trouve au moins 2 méthodes pour réaliser ce partage et colorie dans chaque cas la part de chacun.

2) Ecris, en utilisant des fractions, la part de chaque enfant.

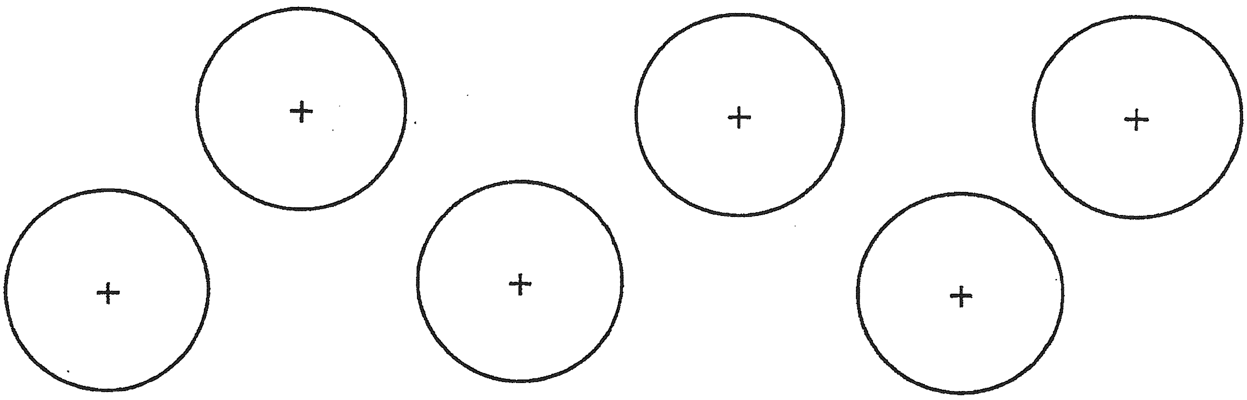
Première méthode:



Deuxième méthode :



Troisième méthode :

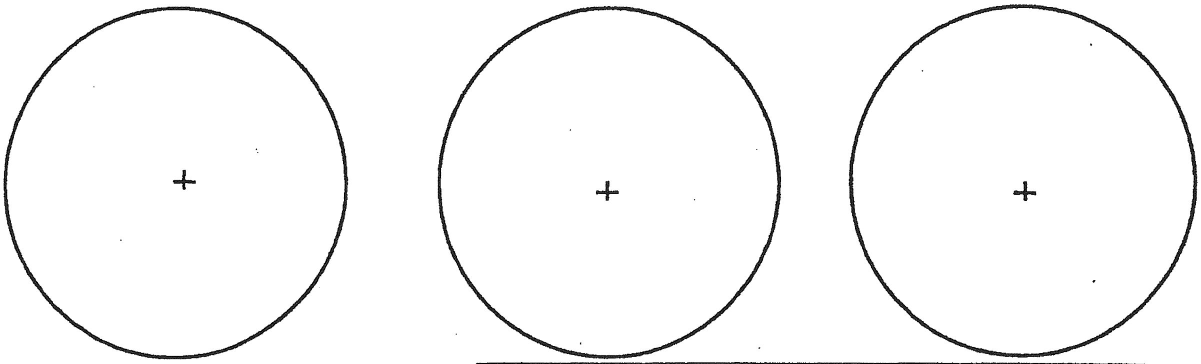


FICHE 2 (suite) **Les tartelettes**

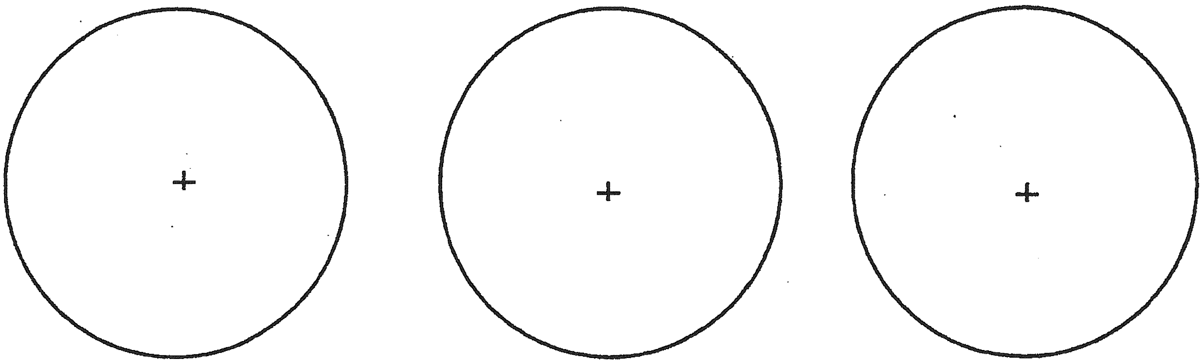
Activité 2

Refais le même travail avec 3 tartelettes à partager équitablement entre 4 personnes
Trouve deux méthodes différentes.

Premiere méthode:



Deuxième méthode :



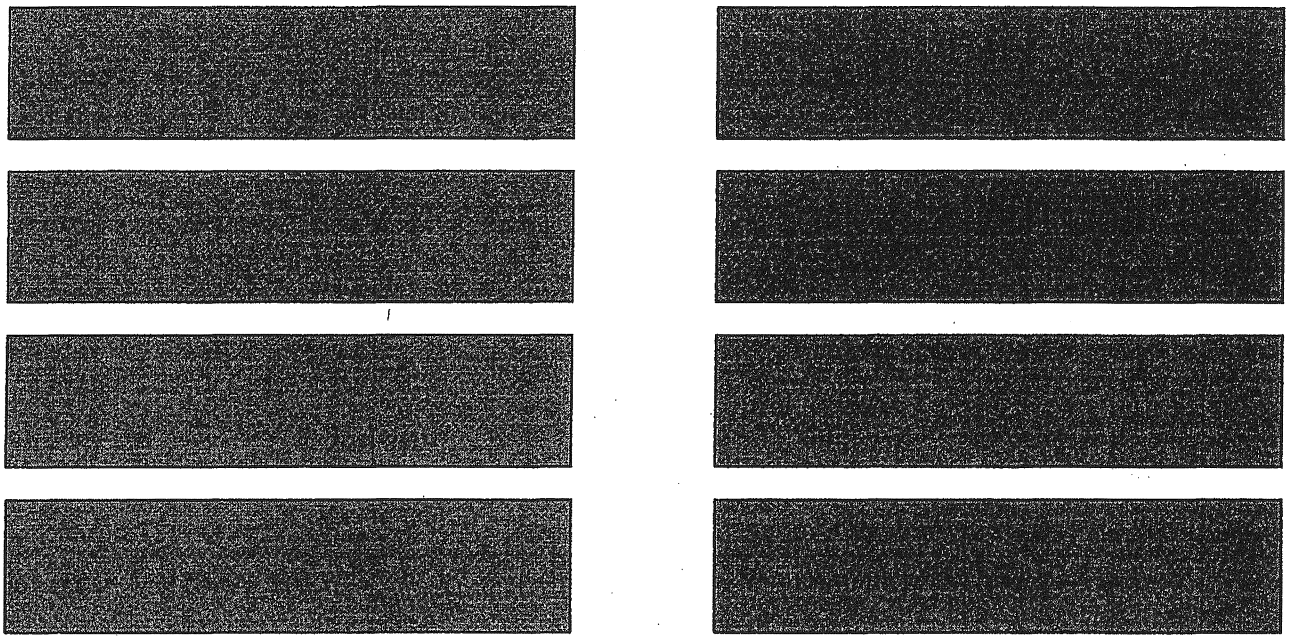
FICHE 3

Les barres de chocolat

Activité 1

Huit barres de chocolat identiques sont à partager équitablement entre 5 enfants : Jessica, Lucille, Elodie, Linda et Céline. Chaque barre est représentée ci-dessous par un rectangle.

1- Dessine ci-dessous un partage équitable.



2- Dessine la part de Jessica.

3- Traduis ce partage par une opération.

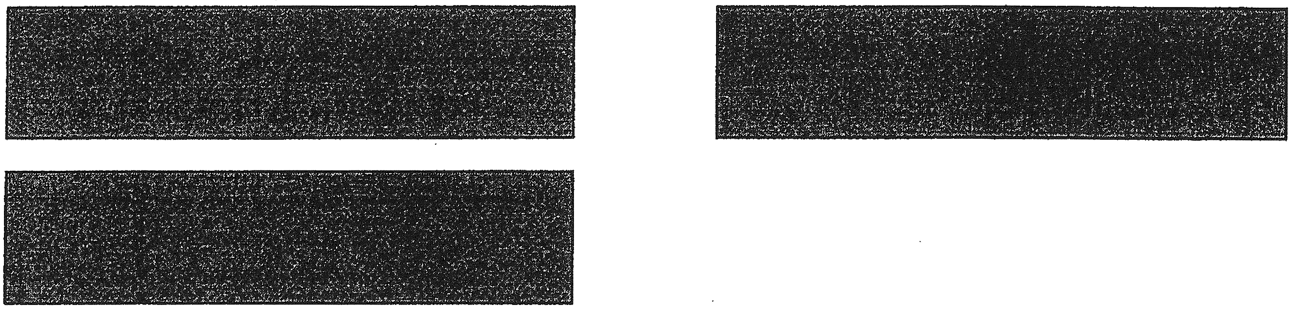
4- Ecris, en utilisant des fractions, la part de Jessica.

FICHE 3 (suite)

Activité 2

Trois barres de chocolat sont à partager entre 5 enfants : Jessica, Lucille, Aurélien, Fabien et Nadia. Chaque barre est représentée ci-dessous par un rectangle.

1- Dessine ci-dessous un partage équitable.



2- Dessine la part de Fabien.

3- Traduis ce partage par une opération

4- Ecris, en utilisant des fractions, la part de Fabien.

Activité 3

Donne une écriture fractionnaire de la part de chacun

Dix enfants se partagent équitablement 15 barres de chocolats.

réponse :

213 barres de chocolat partagées entre 10 personnes

réponse :

347 barres de chocolat partagées entre 100 personnes

réponse :

3 barres de chocolat entre 10 personnes

réponse :

FICHE 4 Encore des barres de chocolat

Activité 1

Quatre personnes se sont partagé des barres de chocolat.

Le nombre $1 + \frac{1}{2}$ est la part de chacune.

a, Dessine la part de chaque personne.
b, Combien de barres ont-elles achetées?
c, Donne d'autres écritures de la part de chacune.

Activité 2

Deux personnes se sont partagé des barres de chocolat.

Le nombre $\frac{5}{2}$ est la part de chacune.

a, Combien de barres ont-elles achetées?
b, Donne d'autres écritures de la part de chacune.

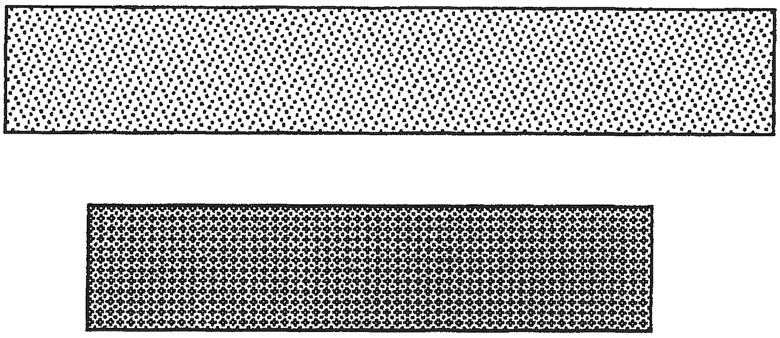
Activité 3

Invente une situation correspondant au nombre $\frac{5}{7}$

FICHE 5 La machine à partager des bandes et de segments

Activité 1

Ces deux rectangles sont des représentations de deux bandes de couleur.



1- Par **pliage**, partage chaque bande en deux parties égales puis en 4 parties égales.

2- Essaie de partager chaque bande en 7 parties égales.

3- Reprends les bandes que tu as partagées en 4 et essaie de trouver le fonctionnement du **guide-âne**, appelé aussi **réseau de droites parallèles** ou encore **machine à partager**.

4- A l'aide du **guide-âne**, partage chacune des deux bandes en 7 parties égales.

5- Exprime, à l'aide d'une fraction, la part obtenue.

Activité 2

Partage les deux segments ci-dessous en trois parties égales, en cinq parties égales et enfin en dix parties égales.

trois parties égales

cinq parties égales

dix parties égales

FICHE 6

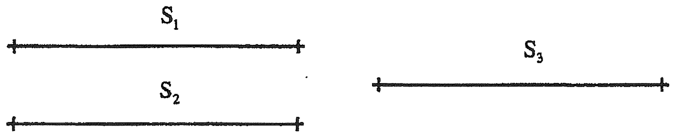
Différentes méthodes

Pour ces deux activités, tu peux utiliser ton compas et le guide-âne.

Activité 1

Voici trois segments de même longueur. Il s'agit de partager la longueur obtenue par ces trois segments en cinq parties égales et de la représenter par un segment.

Elodie et Damien ont proposé deux méthodes :



1[ère] méthode (Elodie)

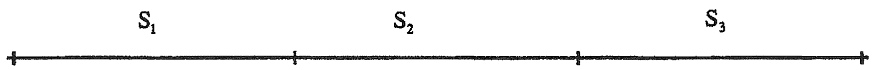
1- Je travaille directement à partir des trois segments dessinés ci-dessus.
2- Je partage la longueur de chacun de ces trois segments en cinq parties égales.
3- Je dessine, sur la demi-droite ci-dessous, un segment d'extrémité A ayant la longueur du segment recherché.

A

Donne la longueur de ce segment à l'aide d'un écriture fractionnaire.

2[ème] méthode (Damien)

1- Je dispose les trois segments bout à bout.



2- Je partage la longueur obtenue par ces trois segments en cinq parties égales.
3- Je dessine, sur la demi-droite ci-dessous, un segment d'extrémité A ayant la longueur du segment recherché.

A

Donne la longueur de ce segment à l'aide d'une écriture fractionnaire.

Qui a raison ?

Activité 2

Voici un segment **de longueur L** pour travailler encore.

Il s'agit de partager en dix la longueur obtenue par six fois la longueur L.
Dessine un segment correspondant à ce partage et désigne le par une écriture fractionnaire.

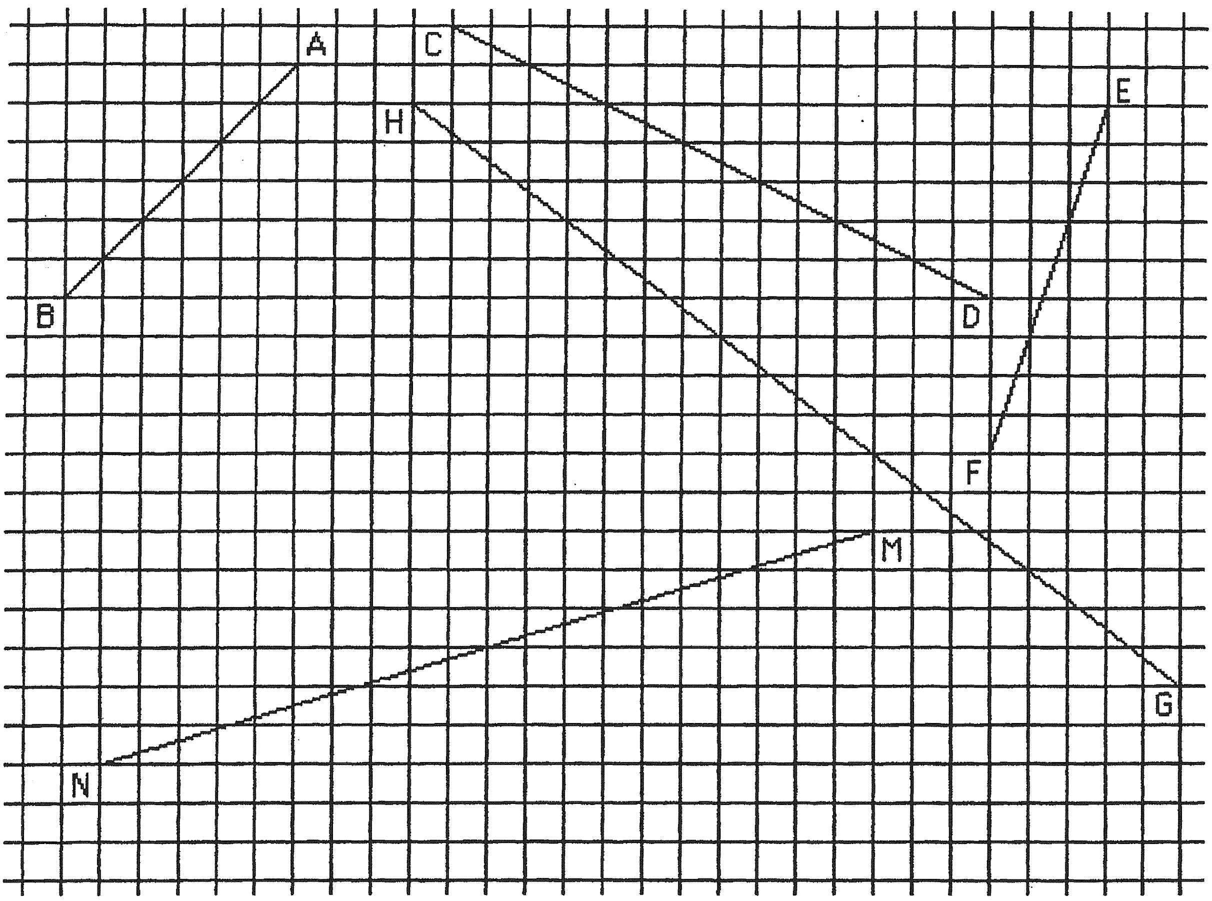
FICHE 7

Le quadrillage

Activité 1

1- Utilise le quadrillage pour partager les segments en parties égales.

-> segment [AB] en 6 parties égales.
-> segment [CD] en 7 parties égales.
-> segment [EF] en 3 parties égales.
> segment [GH] en 5 parties égales.
> segment [MN] en 10 parties égales.



2- En utilisant des fractions, compléter le tableau suivant.

Segment	[AB]	[CD]	[EF]	[GH]	[MN]
Part					

Activité 2

3- Dessine des segments, sur le quadrillage, faciles à partager en 2, 9 et 13 parties égales.

FICHE 8

Activité 1 — Ont-elles la même part?

Trouve parmi les phrases suivantes celles qui correspondent à un même partage. Explique.

a - 8 personnes se partagent 12 tablettes de chocolat b - 100 personnes se partagent 40 tablettes de chocolat c - 23 tablettes de chocolat sont partagées entre 10 personnes d- 50 personnes se partagent 35 tablettes de chocolat e - 100 personnes se partagent 230 tablettes de chocolat	f- 10 tablettes de chocolat sont partagées entre 25 personnes g - 3 tablettes de chocolat sont partagées entre 2 personnes H - 2 tablettes de chocolat sont partagées entre 5 personnes i - 4 personnes se partagent 6 tablettes de chocolat j - 7 tablettes de chocolat sont partagées entre 10 personnes

Activité 2 — Différents types de partages équitables.

Remplis le tableau suivant:

Situation	Part de chacun	Reste
24 pizzas entre 5		
22 billes entre 5		
3 litres entre 4		
352 piéces d'or entre 10		
21 mètres de ruban entre 4		
4 tabourets entre 3		

FICHE 8 (suite)

Activité 3 De grands repas

1) Combien de quiches entières doit-on fabriquer pour le repas de 52 personnes sachant que chacune en mangera une demie? En restera-t-il?

2) 224 personnes mangent un quart de pizza chacune. Combien de pizzas entières faut-il? En restera-t-il?

3) Combien de tartes entières faut-il pour servir $\frac{1}{6}$ à chacune des 104 personnes?

En restera-t-il?

FICHE 9 Des nombres égaux

Activité 1 Des nombres égaux et des étiquettes.

Colorie d'une même couleur les étiquettes de nombres égaux.

$\frac{5}{20}$	$1+\frac{1}{3}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{4}{3}$	$\frac{11}{5}$	$5\times\frac{1}{20}$	$\frac{22}{10}$	$2+\frac{1}{5}$
$2+\frac{2}{10}$	$4\times\frac{1}{3}$	$\frac{20}{5}$	$\frac{3}{4}$	4

Activité 2 Un tableau et des fractions.

Complète le tableau. La première ligne est un exemple.

$\frac{11}{4}$	onze quarts	$2+\frac{3}{4}$	$11\times\frac{1}{4}$
	quatre tiers	$1+\frac{1}{3}$	
$\frac{3}{2}$			$3\times\frac{1}{2}$
		$2+\frac{1}{4}$	
	sept cinquièmes		
$\frac{12}{10}$			
		$21+\frac{3}{100}$	
	trois septièmes		
$\frac{9}{10}$			
			$23\times\frac{1}{100}$

FICHE 1

Quelle bande ont-ils?

Consignes de travail

Groupe A	Groupe B
1) Je mesure la bande L avec des réglettes-unités.	1) Je mesure la bande L avec des bandes-unités rouges.
2) Je rédige mon message.	2) Je rédige mon message.
3) Je compare mon message avec ceux des autres élèves de mon groupe.	3) Je compare mon message avec ceux des autres élèves de mon groupe.
4) Nous nous mettons d'accord et nous écrivons un message collectif.	4) Nous nous mettons d'accord et nous écrivons un message collectif.
5) Nous transmettons notre message au groupe B.	5) Nous transmettons notre message au groupe A.
6) Le groupe B nous transmet son message.	6) Le groupe A nous transmet son message.
7) Nous donnons nos réglettes-unités au groupe B et nous allons chercher des bandes-unités rouges.	7) Nous rangeons les bandes-unités rouges dans la boîte. Le groupe A nous donne ses réglettes-unités.
8) Chaque élève de mon groupe essaie de trouver la bande qui correspond au message reçu, avec des bandes-unités rouges.	8) Chaque élève de mon groupe essaie de trouver la bande qui correspond au message reçu, avec des réglettes-unités.
9) Avec le groupe B, nous vérifions et nous comparons les bandes et les messages.	9) Avec le groupe A, nous vérifions et nous comparons les bandes et les messages.

FICHE 1 (suite)

Quelle bande ont-ils?

FICHE INDIVIDUELLE	**FICHE COLLECTIVE**
Prénom : Ecris un message qui indique la longueur de la bande.	Prénoms : - - - Ecrivez le message du groupe.
Message :	Message :

FICHE 2

MESURES de Bandes

Prénom :

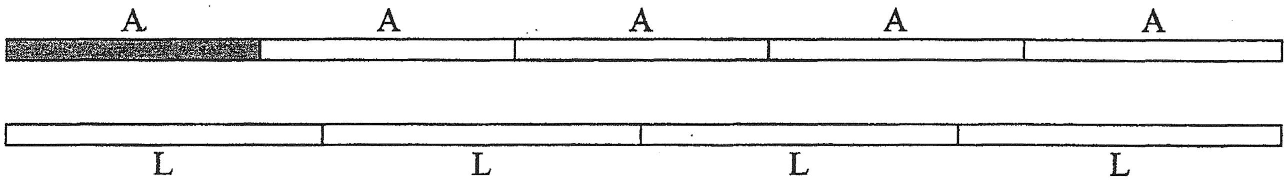
Je mesure la bande ☐	
1) J'utilise la réglette-unité. Je dessine : Je trouve : ☐ = ...	**2) J'utilise la bande-unité.** Je dessine : Je trouve : ☐ = ...
Je peux donc écrire : .... = ...	

FICHE 3 **Je m'exerce**

Activité 1

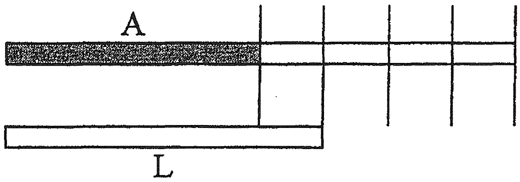
Deux enfants, Julie et Arnaud, ont mesuré la bande L à l'aide d'une autre bande A.
Trouve des écritures correspondant à leurs schémas et donne la longueur de L en utilisant la bande A.

Voici la méthode de Julie :



Ecritures : .... L = ...

Voici la méthode d'Arnaud :

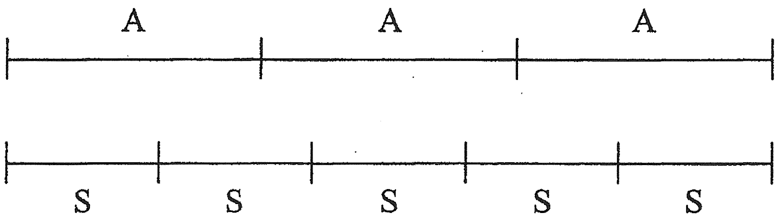


Ecritures : .... L = ...

Activité 2

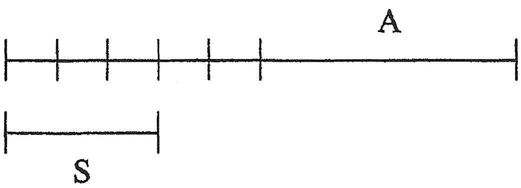
Cette fois, Julie et Arnaud ont mesuré un segment S à l'aide du segment A.
Trouve des écritures correspondant à leurs schémas et donne la longueur de S.

Méthode de Julie :



Ecritures : .... S = ...

Méthode d'Arnaud :



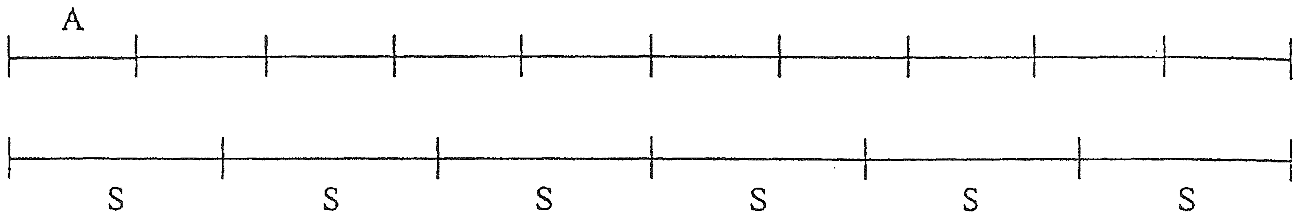
Ecritures : .... S = ...

FICHE 3 (suite) **Je m'exerce**

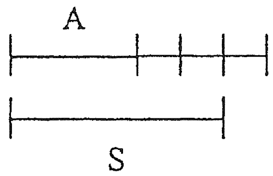
Activité 3

Julie et Arnaud ont mesuré d'autres segments à l'aide du segment A.
Donne directement leur mesure.

....

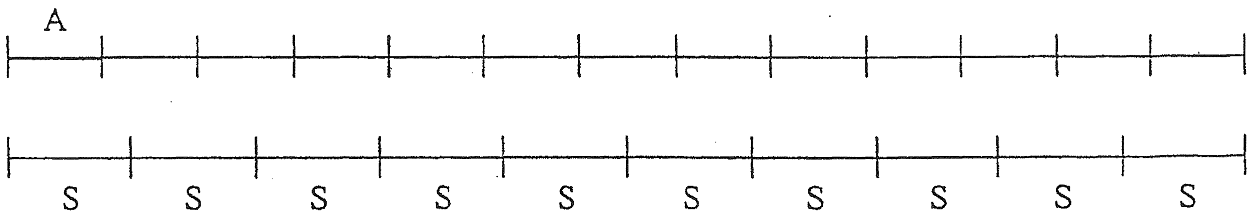


S mesure ....

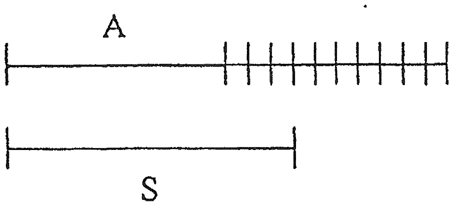


S mesure .... et donc ....=.........

Activité 4



S = ...



S mesure .... et donc ....=.........

FICHE 3 (suite) — **Je m'exerce**

Activité 5

Associe le schéma et l'écriture qui lui correspond.

Schéma n°1

Schéma n°2

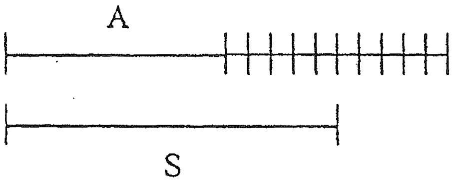
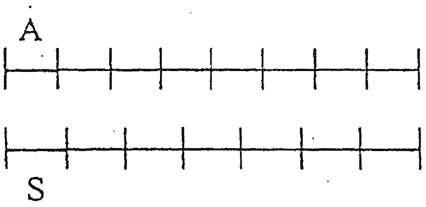


Schéma n°3



L'unité est A
S mesure :

Ecriture n°1

$1 + \frac{1}{7}$

Ecriture n°2

$\frac{3}{4}$

Ecriture n°3

$\frac{15}{10}$

Le schéma n°1 correspond à l'écriture n° …….

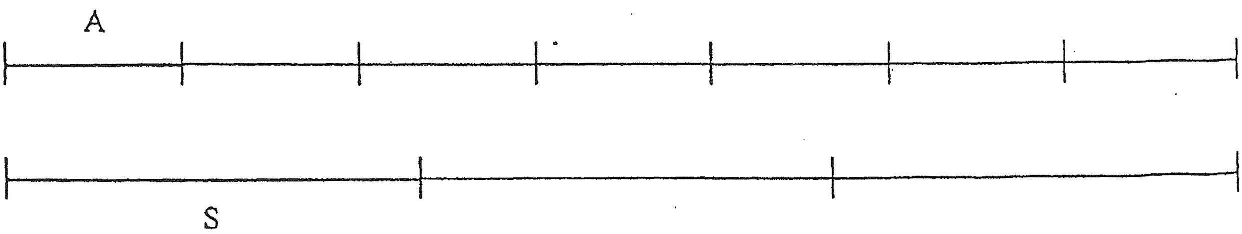
Le schéma n°2 correspond à l'écriture n° …….

Le schéma n°3 correspond à l'écriture n° …….

Activité 6

Entoure les écritures de la mesure du segment S qui correspondent au schéma.

$\frac{3}{7}$ $\quad 2 + \frac{1}{3}$ $\quad 1 + \frac{1}{3}$ $\quad \frac{7}{3}$ $\quad 1 + \frac{1}{7}$ $\quad 2 + \frac{1}{7}$ $\quad 1 + 1 + \frac{1}{3}$



FICHE INDIVIDUELLE (ACTIVITE 1)

Nom :

Surface	JOE	ZIG	BOB		
mesure de l'aire avec l'unité U					

FICHE INDIVIDUELLE (ACTIVITE 2)

Nom :

Surface	TOM	JIM	LEO	LUC	ZOE
mesure de l'aire avec l'unité U					

FICHE COLLECTIVE (ACTIVITE 1)

Nom :

Surface	JOE	ZIG	BOB		
mesure de l'aire avec l'unité U					

FICHE COLLECTIVE (ACTIVITE 2)

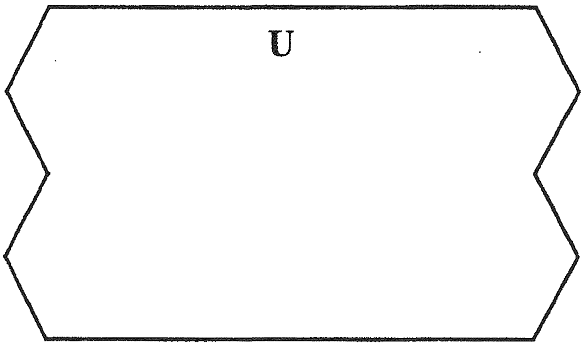
Nom :

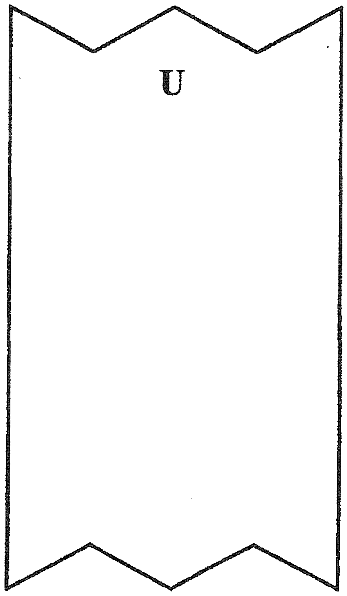
Surface	TOM	JIM	LEO	LUC	ZOE
mesure de l'aire avec l'unité U					

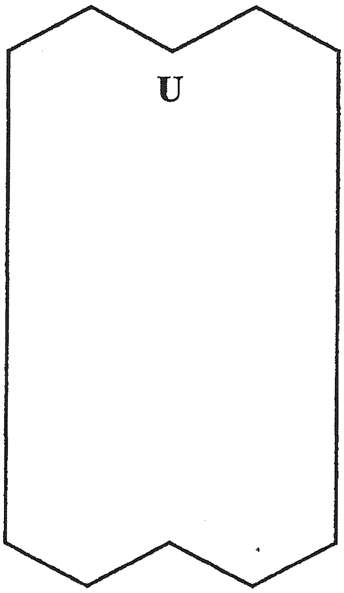
MESURES d'Aires

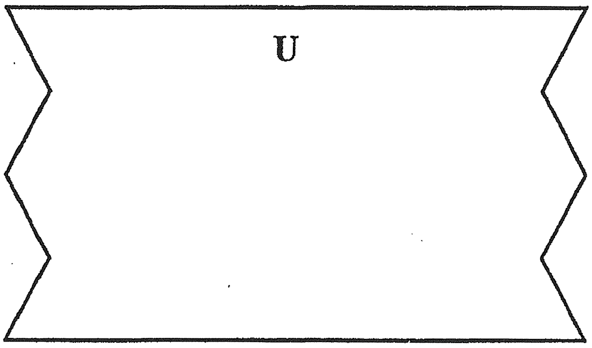
FICHE 1

Voici quelques **unités U** à découper pour répondre aux questions suivantes.



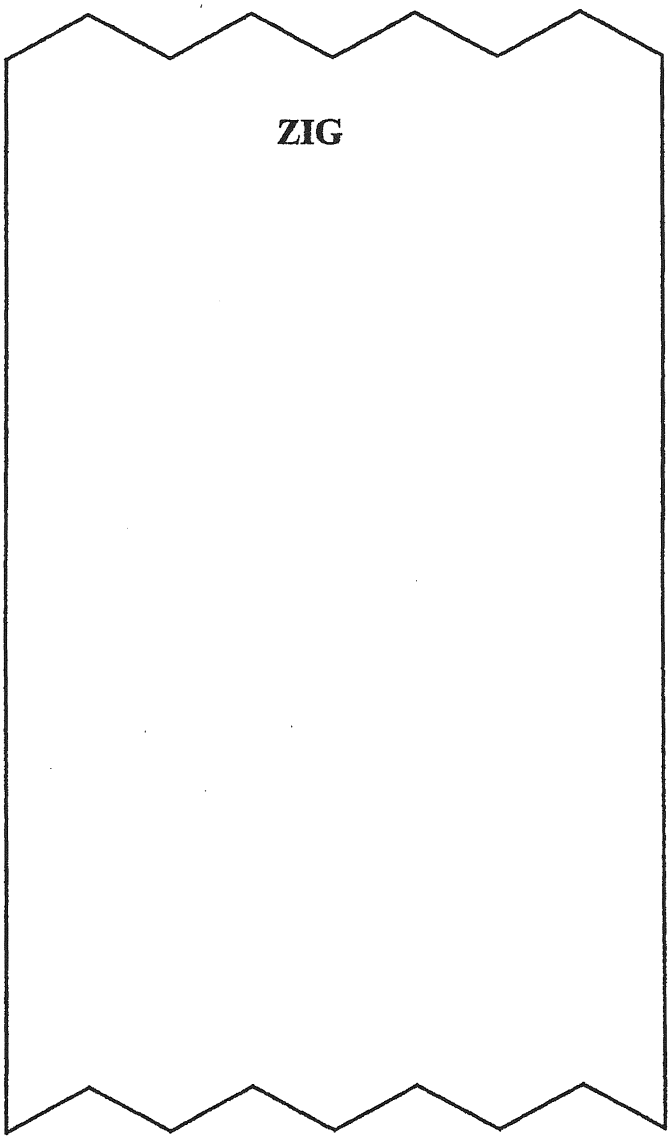






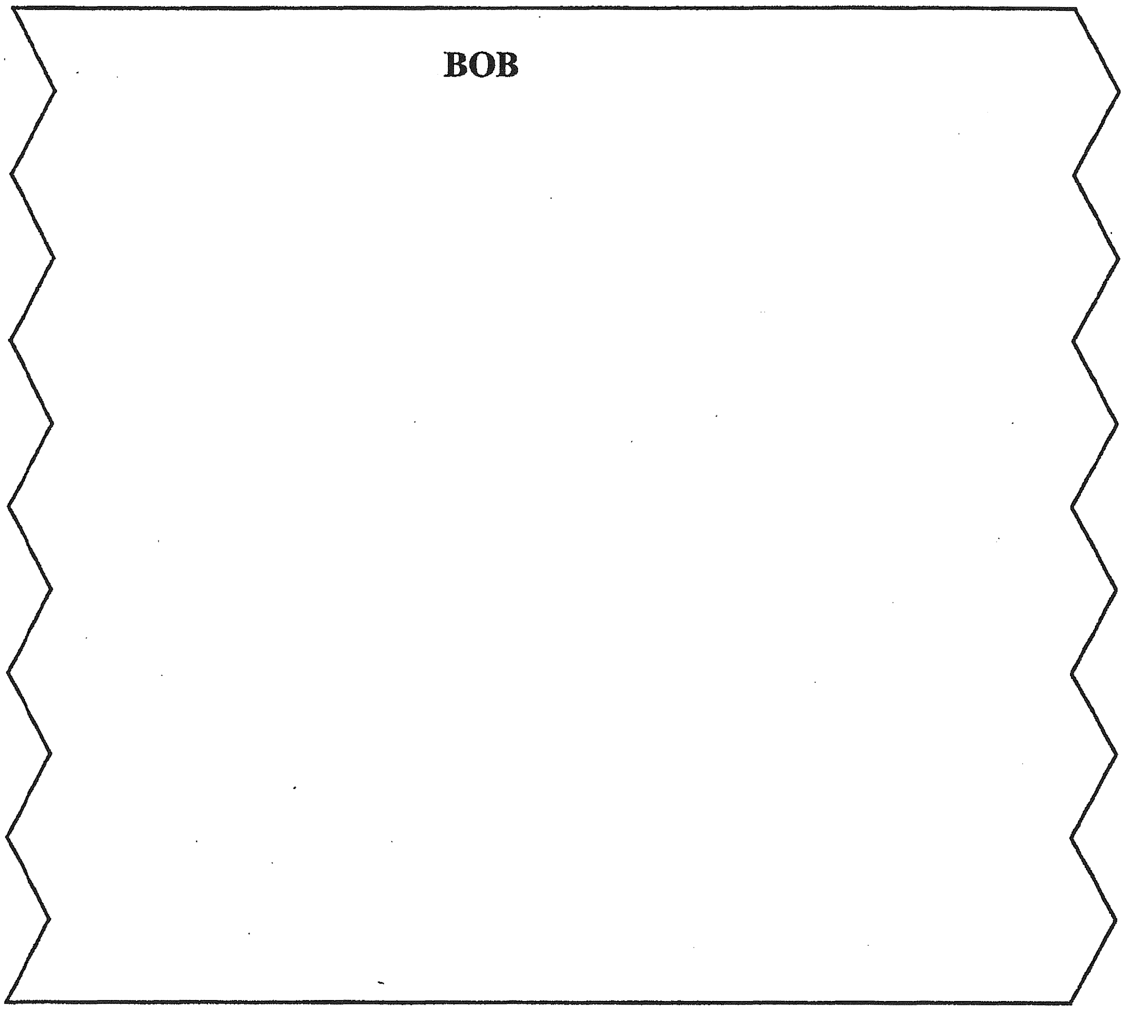
FICHE 3

Activité 1 (suite)



FICHE 4

Activité 1 (suite)

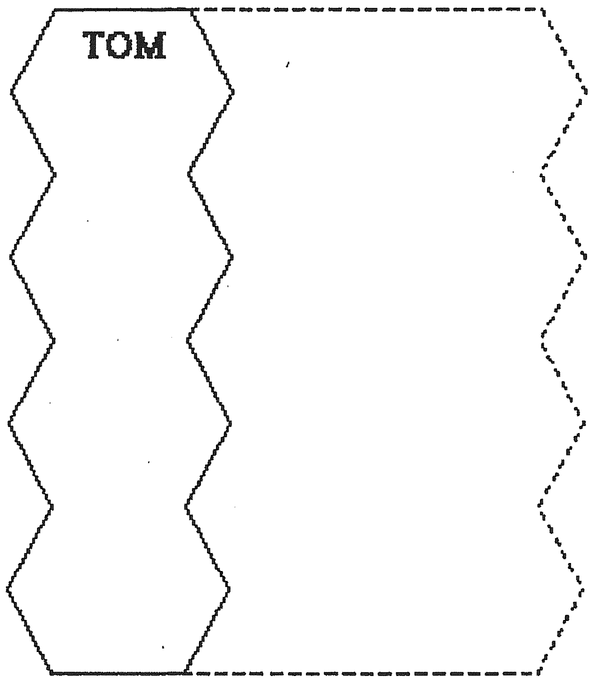


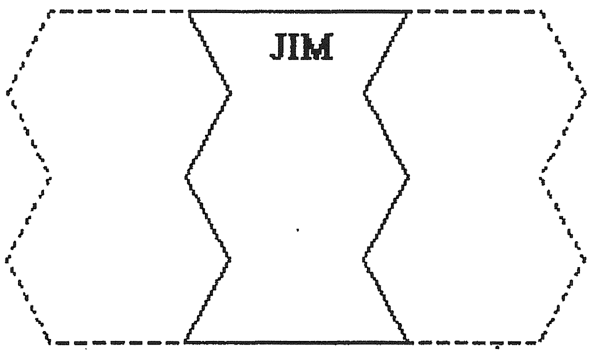
FICHE 6

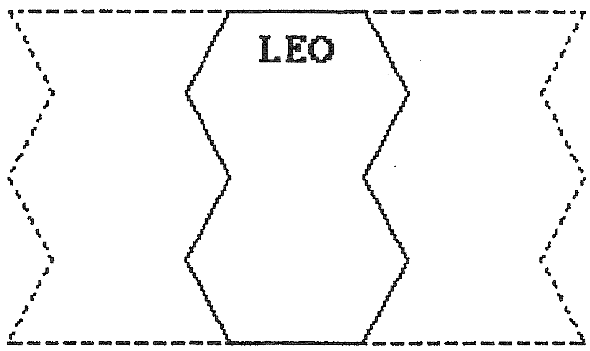
Activité 2

Première étape

Utilise **l'unité U** ou une figure dont tu auras déjà mesuré l'aire pour mesurer l'aire de chacune des figures proposées.

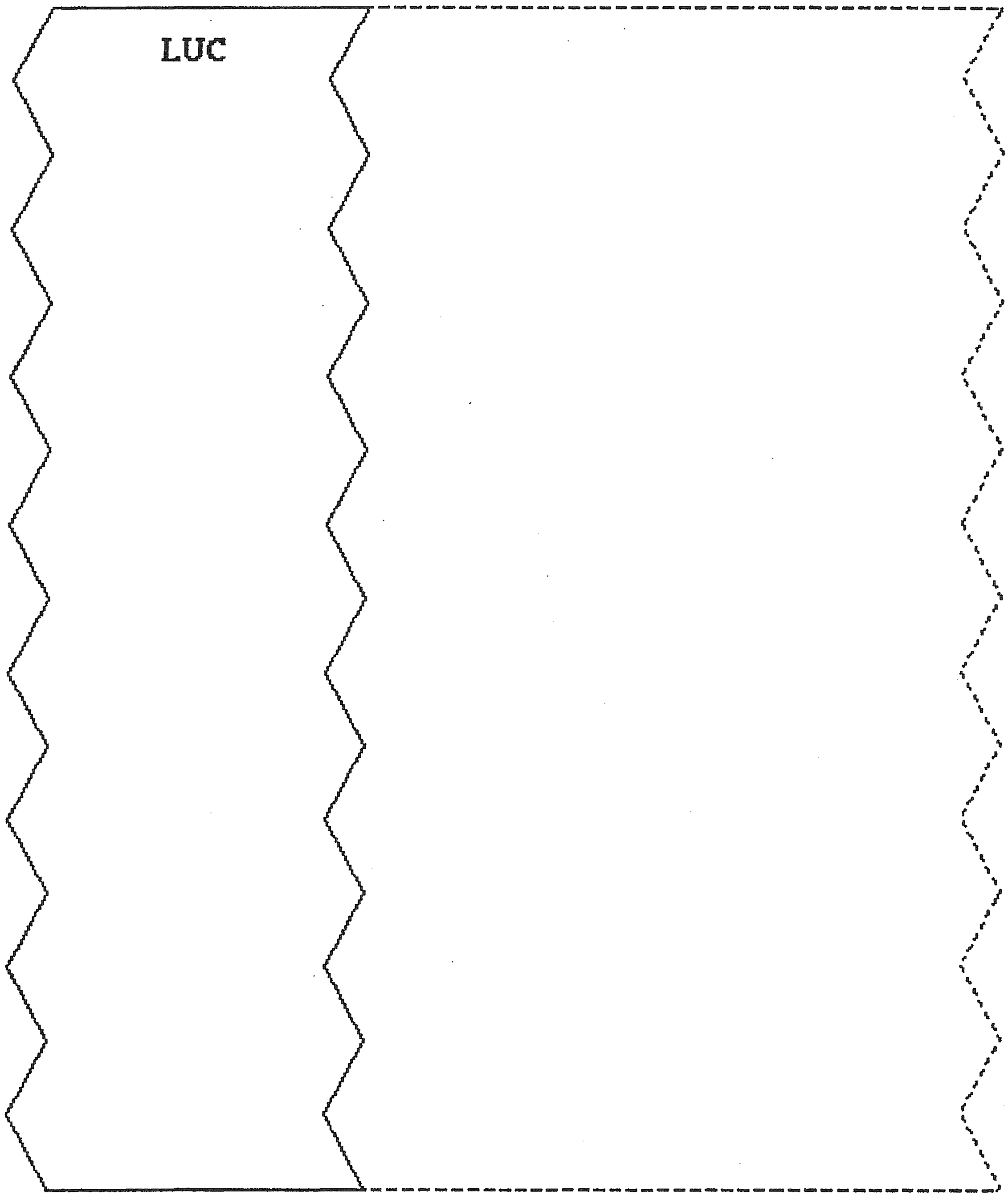






FICHE 7

Activité 2 (suite)



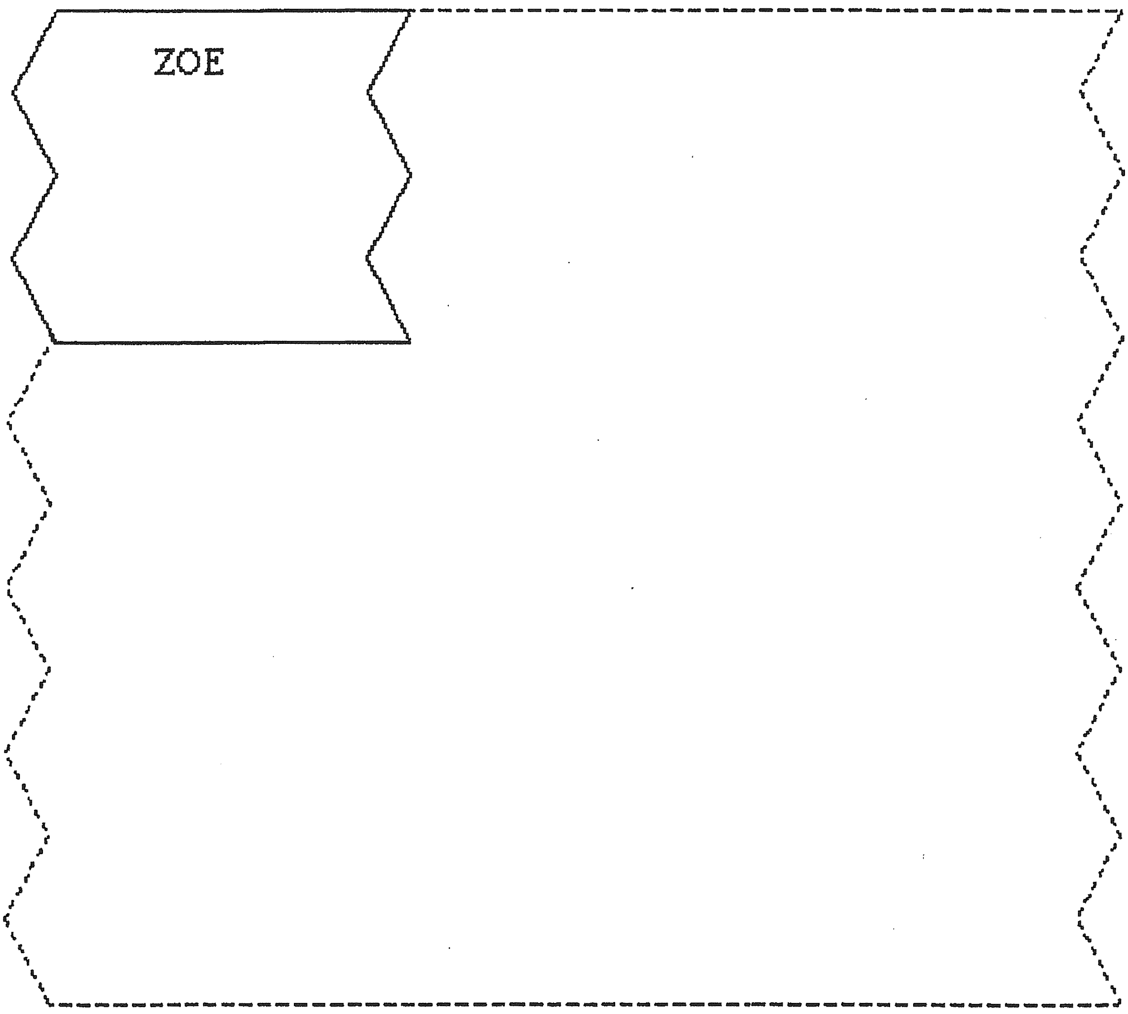
FICHE 8

Activité 2 (suite)

deuxième étape

1- Trouve plusieurs méthodes pour mesurer l'aire de ZOE.

2- Indique tes résultats dans le tableau ci-dessous.

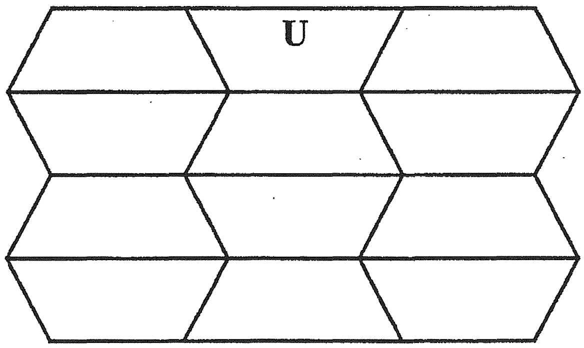


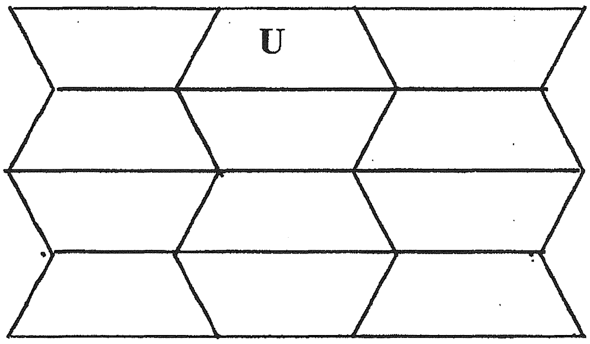
Méthode	1	2	3		
Ecriture					

FICHE 9

Activité 2 (suite)

Voici **deux unités U** fractionnées à découper pour **vérifier vos réponses** aux questions précédentes.



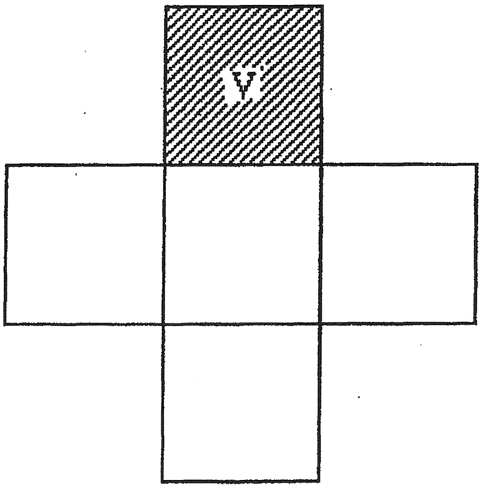


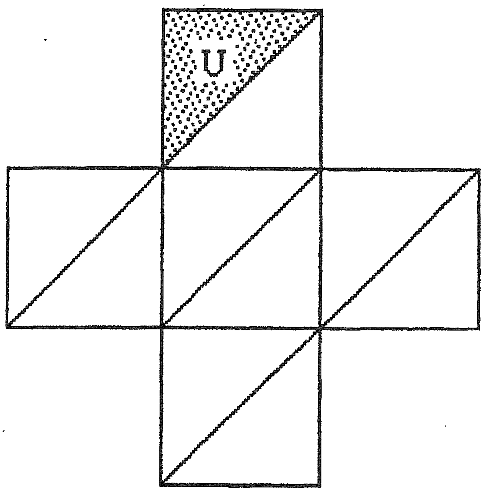
FICHE 10

Activité 3 : LES CROIX

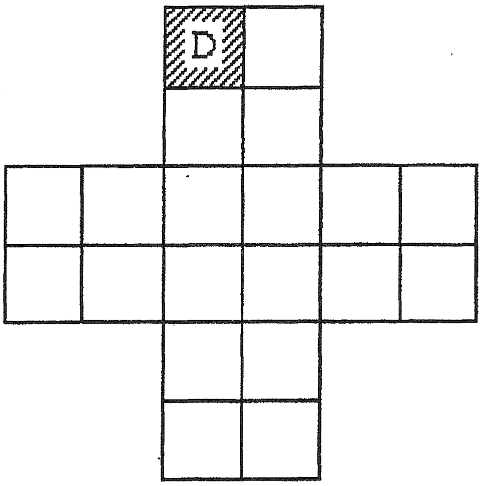
Dans chaque situation, trouver, en utilisant l'unité hachurée, l'aire de la surface pointée.

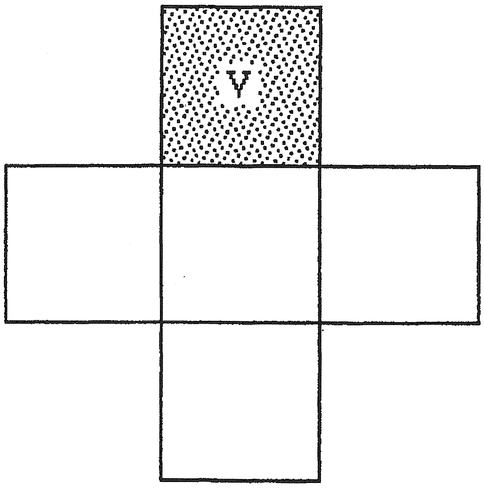
Situation 1



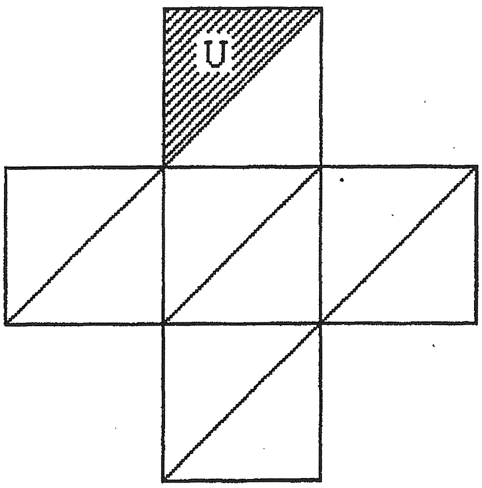


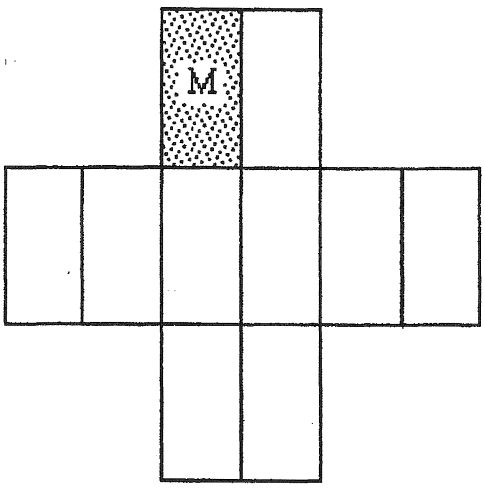
Situation 2





Situation 3



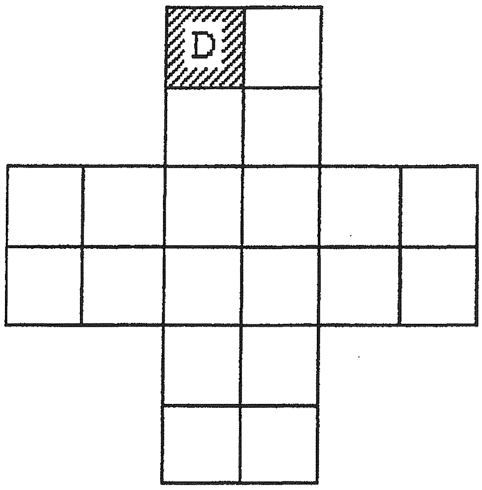


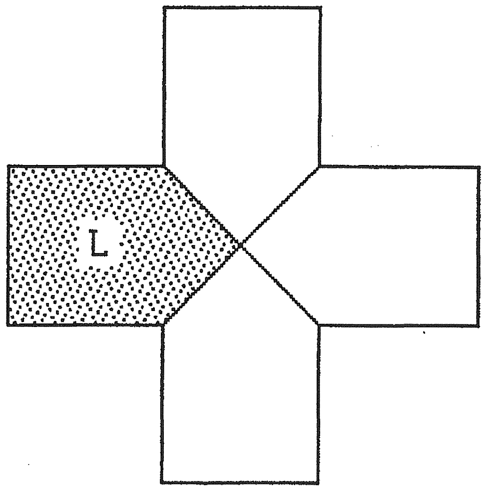
FICHE 11

Activité 3 : (suite)

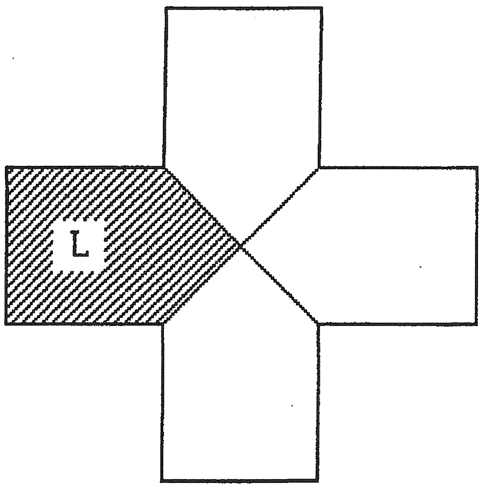
Dans chaque situation, trouver, en utilisant l'unité hachurée, l'aire de la surface pointée.

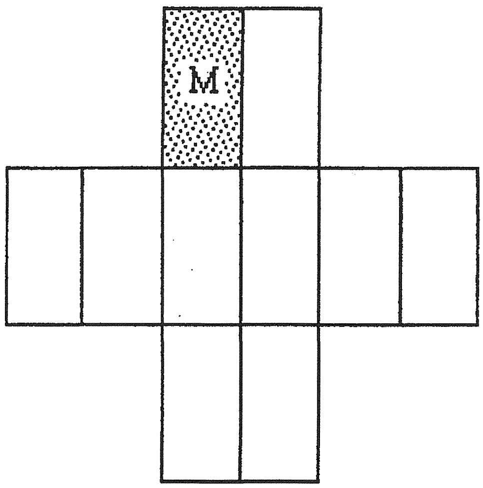
Situation 1



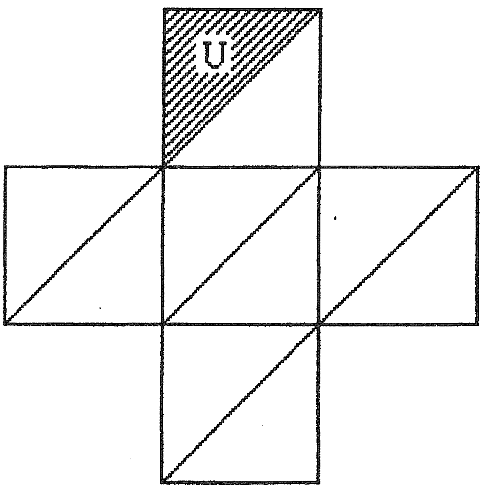


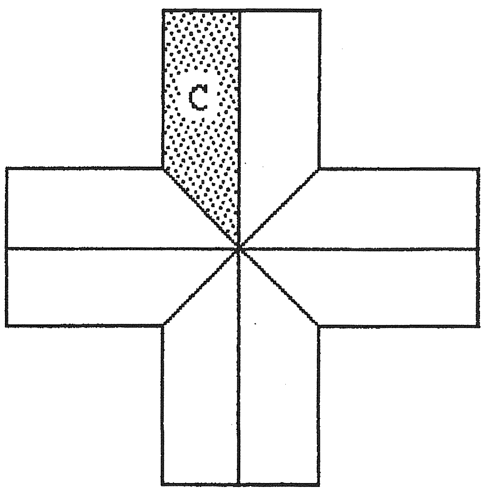
Situation 2





Situation 3



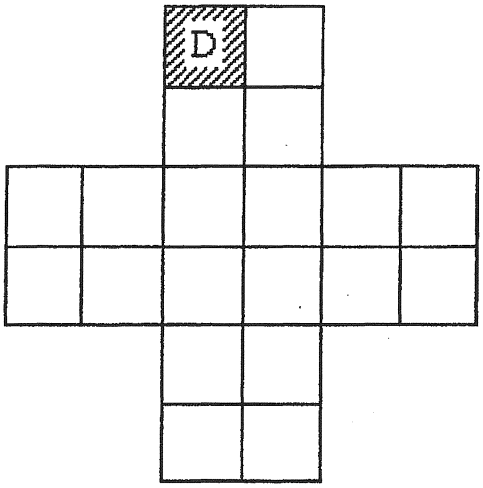


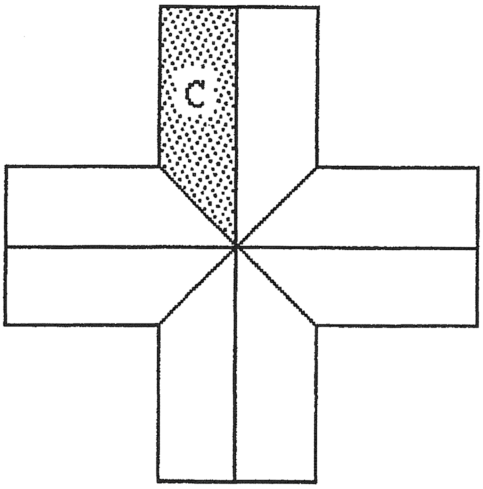
FICHE 12

Activité 3 : (suite)

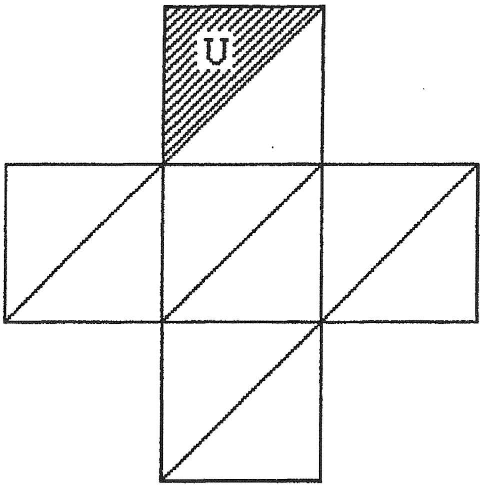
Dans chaque situation, trouver, en utilisant l'unité hachurée, l'aire de la surface pointée.

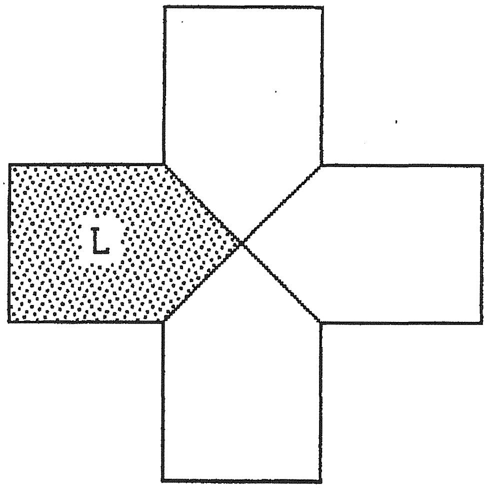
Situation 1



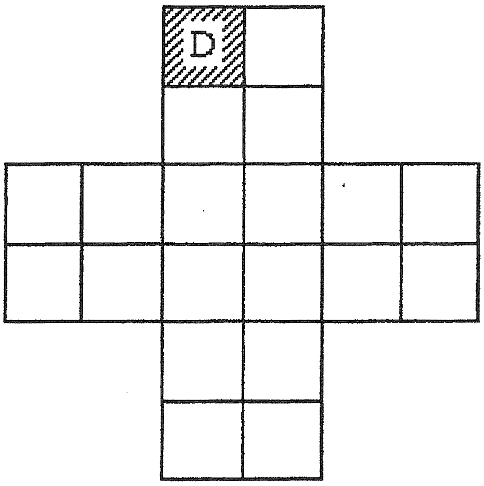


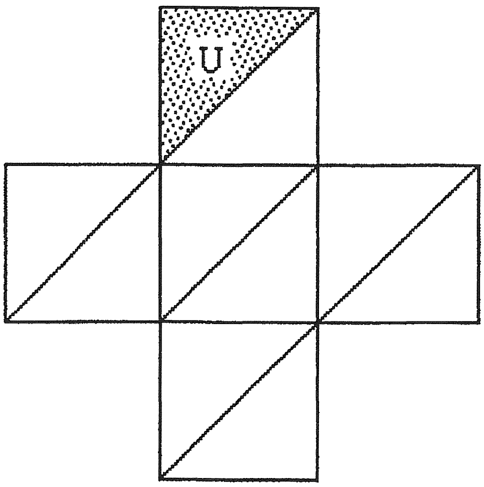
Situation 2





Situation 3



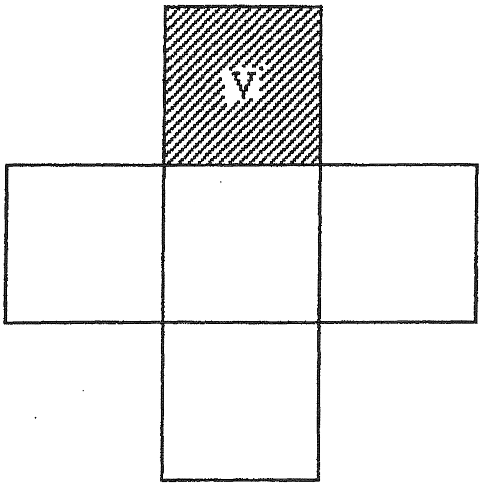


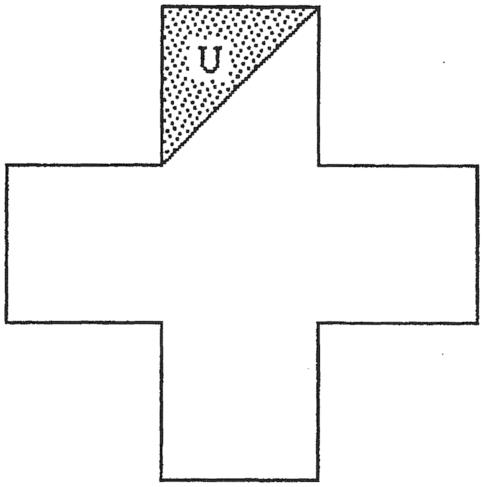
FICHE 13

Activité 3 : (suite)

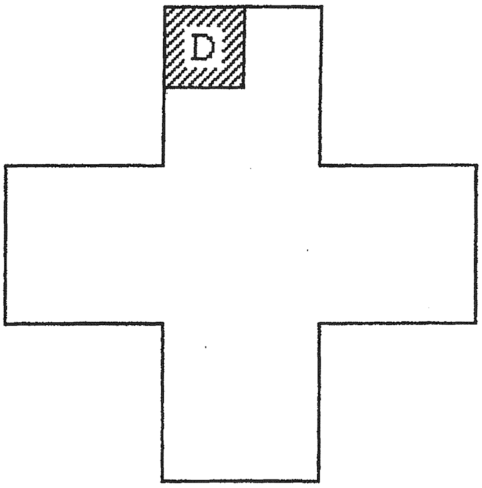
Dans chaque situation, trouver, en utilisant l'unité hachurée, l'aire de la surface pointée.

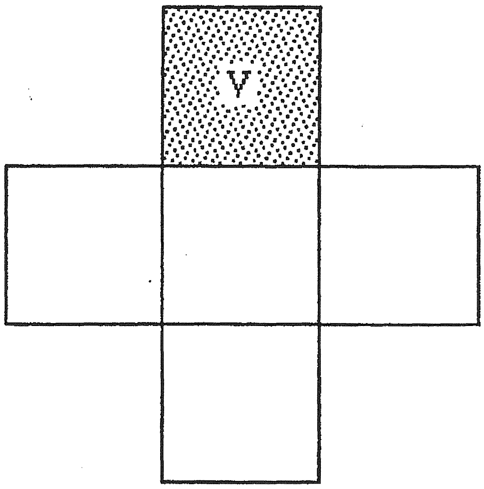
Situation 1



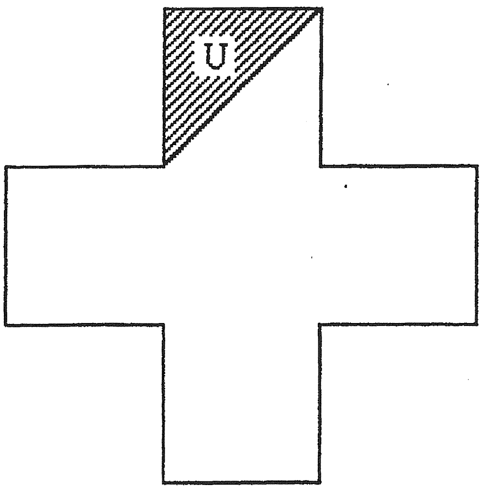


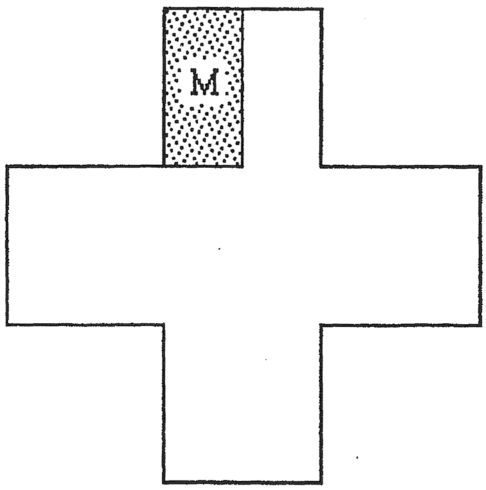
Situation 2





Situation 3



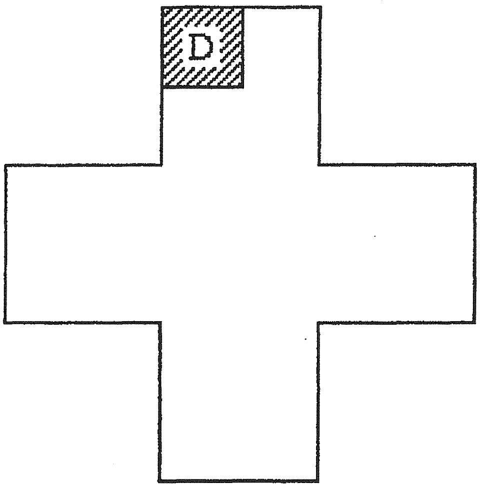


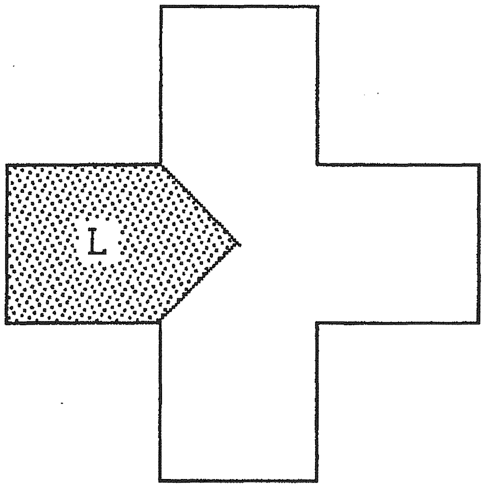
FICHE 14

Activité 3 : (suite)

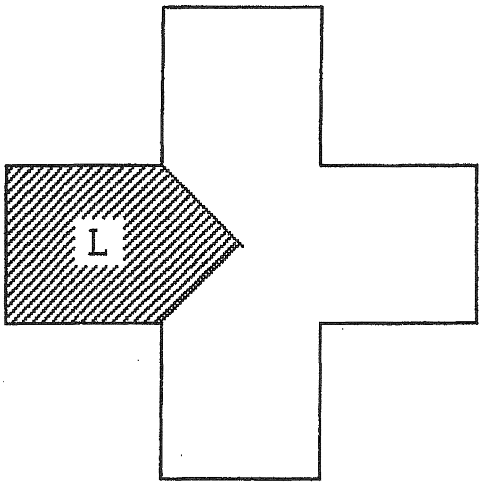
Dans chaque situation, trouver, en utilisant l'unité hachurée, l'aire de la surface pointée.

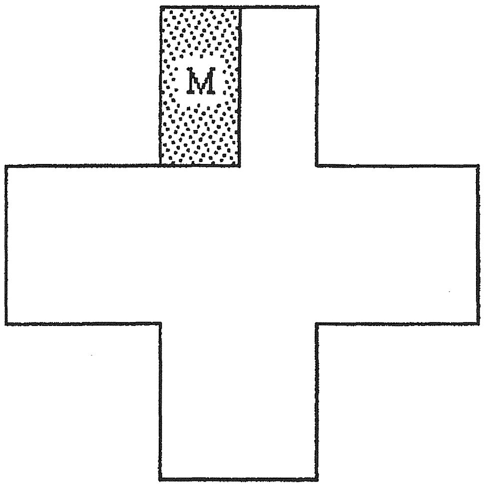
Situation 1



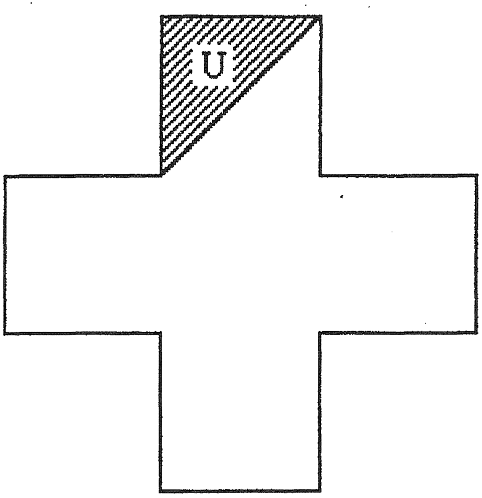


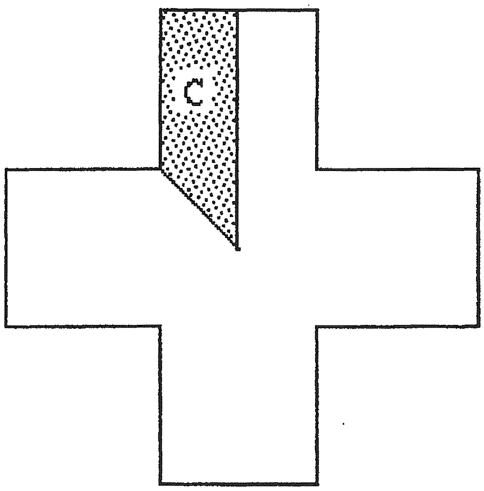
Situation 2





Situation 3



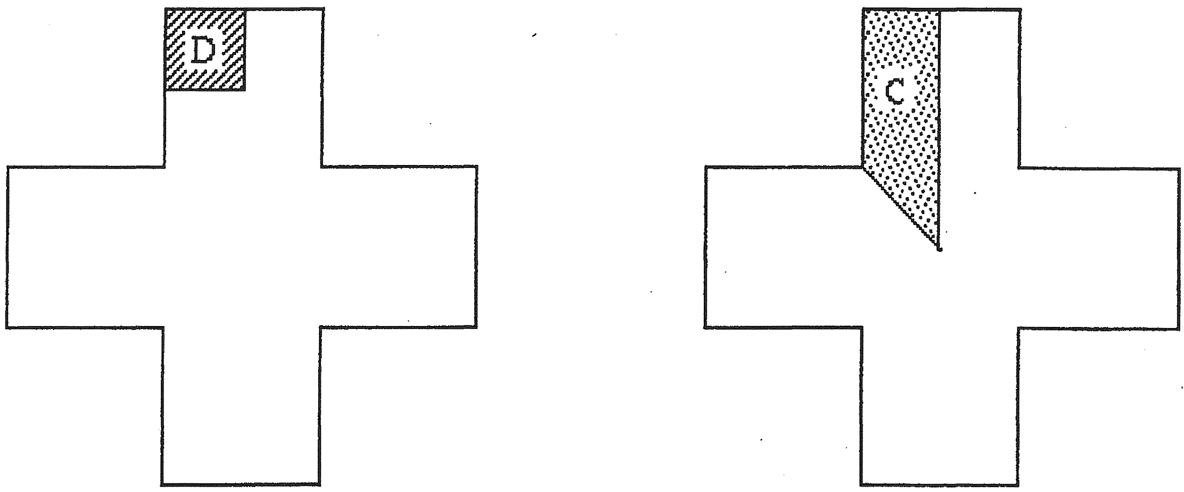


FICHE 15

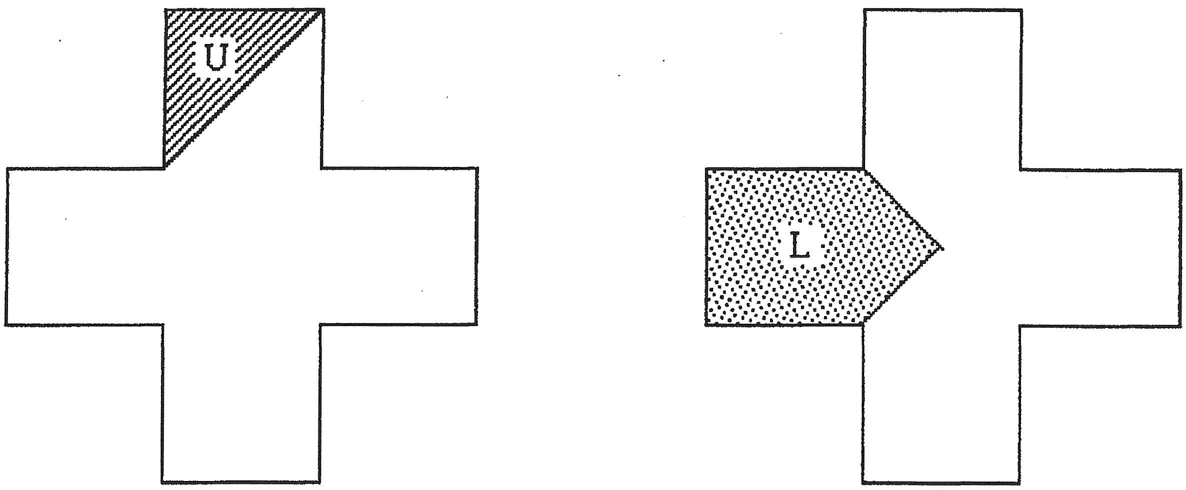
Activité 3 : (suite)

Dans chaque situation, trouver, en utilisant l'unité hachurée, l'aire de la surface pointée.

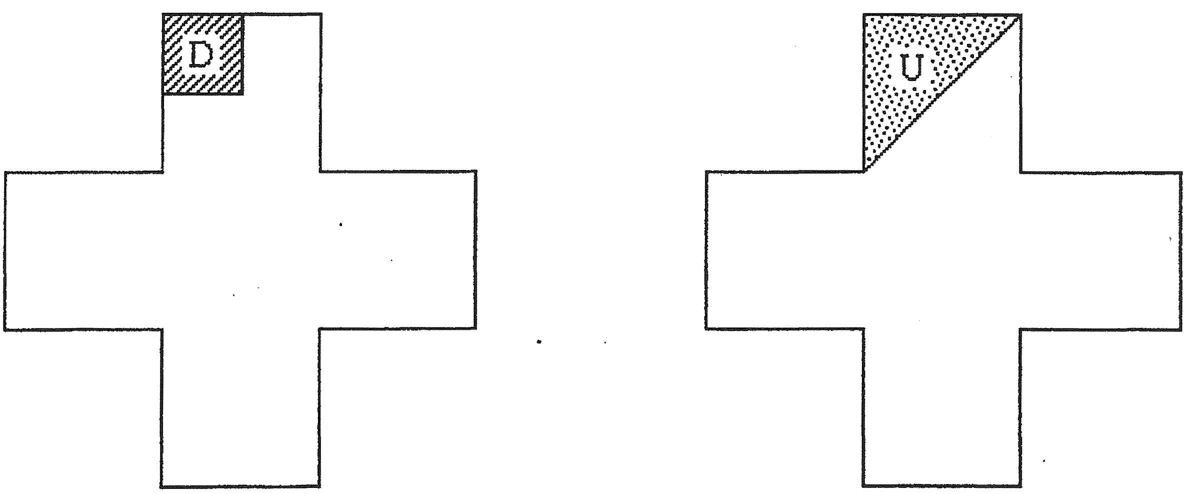
Situation 1



Situation 2



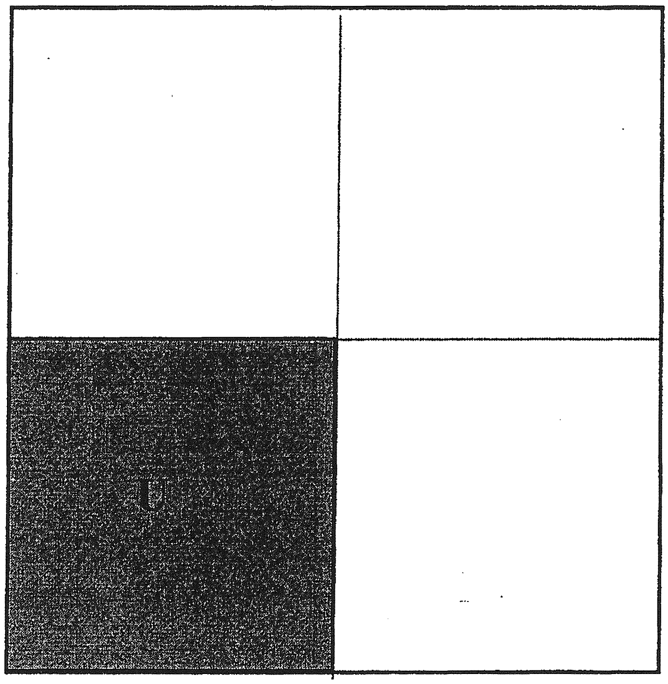
Situation 3

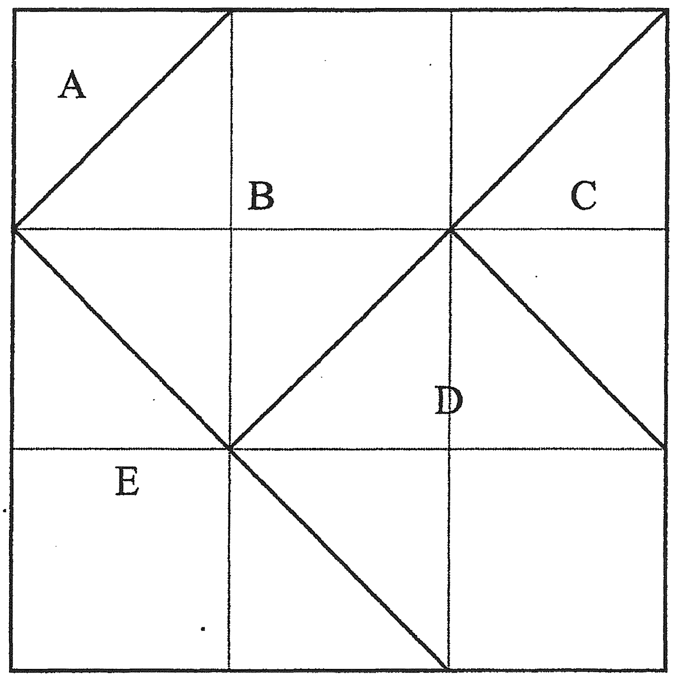


FICHE 16

Activité 4 : LE PUZZLE

Pour chacune des 5 surfaces A, B, C, D et E trouver, en utilisant l'unité U, leur l'aire.





A =

B =

C =

E =

D =

PASSAGE A L'ÉCRITURE Á VIRGULE

FICHE 1

Activité 1

Voici un tableau de numération : placez-y les nombres suivants :
2560 ; 108 ; 324 , puis ensuite mettez-vous d'accord pour expliquer par écrit comment vous avez utilisé le tableau.

milliers	centaines	dizaines	unités

Placez le nombre 10345 dans le tableau (éventuellement modifié), continuez en plaçant d'autres nombres de votre choix

Activité 2

Placez le nombre $\frac{37}{10}$ dans le tableau

milliers	centaines	Dizaines	unités

Placez le nombre $\frac{273}{100}$

FICHE 1

Activité 1 — Des rectangles de périmètre 14

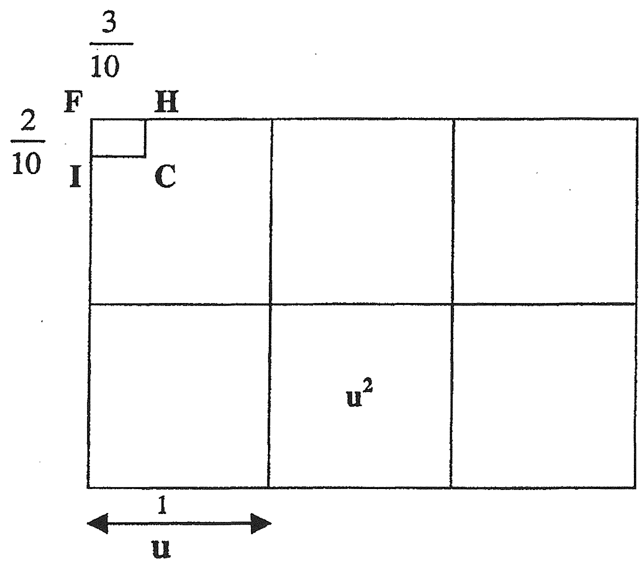
a) Construire tous les rectangles de dimensions entières dont le périmètre est égal à 14 cm (les désigner par des grandes lettres)

b) calculer leurs aires en cm²

FICHE 3

Activité 2 (suite 1)

Donne l'aire de FHCI en fonction de u^2



Aides :

- tu dois te rappeler les significations de $\frac{2}{10}$ comme 2 divisé en 10 et de $\frac{3}{10}$ comme 3 divisé en 10
- à partir du rectangle FHCI tu peux tracer un nouveau quadrillage....
- ...

Ecris ici tes recherches :

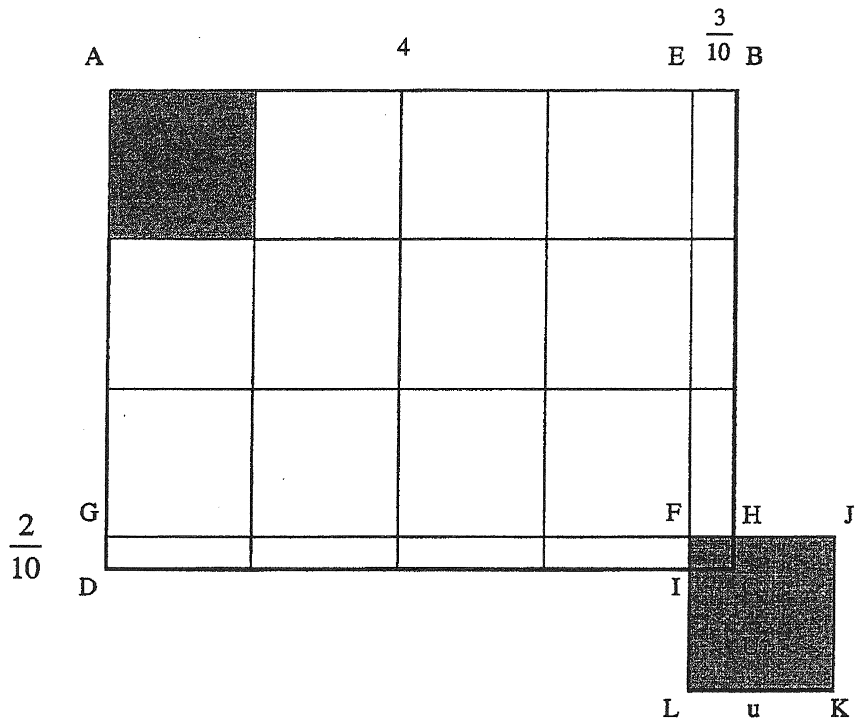
L'aire de FHCI est :

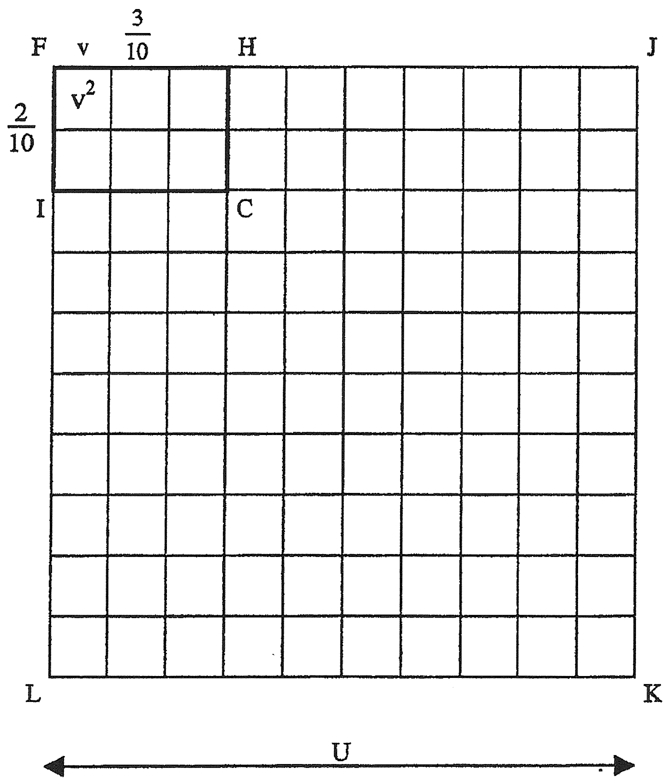
Tu peux maintenant revenir à la fiche 2 pour compléter ton tableau et calculer l'aire du rectangle ABCD

FICHE 4

Activité 2 (suite 2)

Donne l'aire de FHCI en fonction de $\mathbf{u}^2$





J'ai agrandi le rectangle FJKL pour que tu puisses plus facilement calculer l'aire de FHCI.

Ecris ici tes recherches :

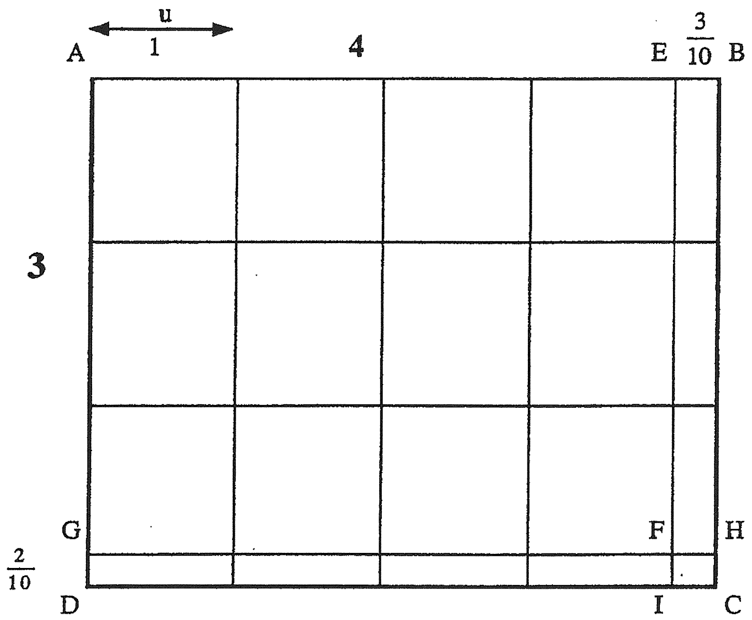
L'aire de FHIC est :

Tu peux maintenant revenir à la fiche 2 pour compléter ton tableau ou vérifier ton résultat et calculer l'aire du rectangle ABC

FICHE 2

<u>Activité 2</u> Un rectangle de périmètre 15

a) calcule le périmètre de ABCD :



b) calcul de l'aire de ABCD :

*** donne un encadrement de l'aire du rectangle ABCD :**

< aire ABCD <

*** remplis le tableau pour calculer l'aire du rectangle ABCD (le produit 4,3 x 3,2):**

(le grand rectangle a été séparé en plusieurs petits pour faciliter tes recherches.)

	Nom du rectangle	Mesure de l'aire Sous forme fractionnaire	Mesure de l'aire sous forme décimale
4 x 3			
4 x 0,2			
3 x 0,3			
0,3 x 0,2			

A l'aide des résultats peux-tu maintenant trouver l'aire du rectangle ABCD ?

4,3 x 3,2 =

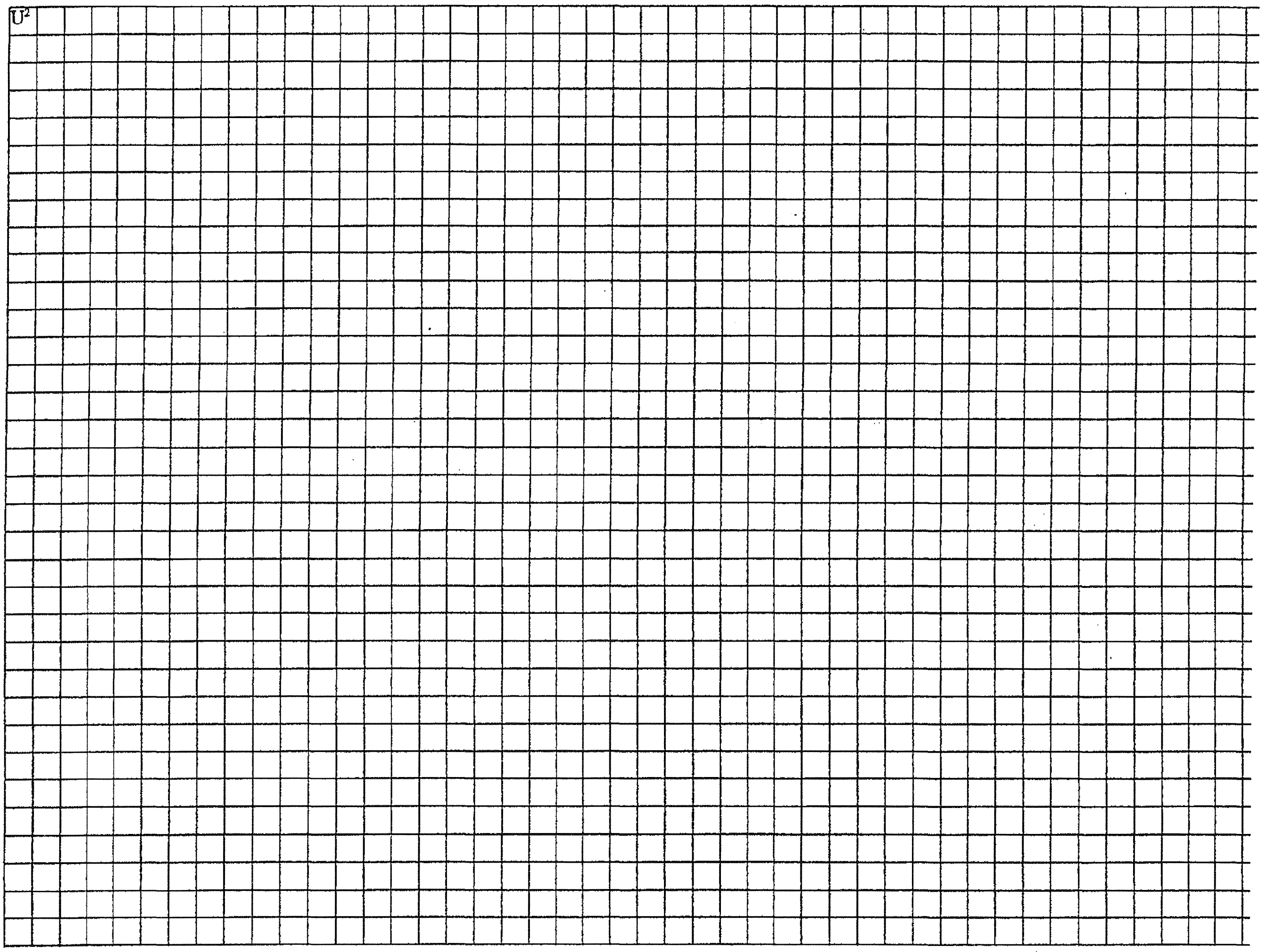
ANNEXE N°1 **MICROCOMPÉTENCES** **Cycle 3- 6ème**

FICHE 5

Activité 3 **Encore des rectangles de périmètre 15**

1) Trouver de nouveaux rectangles ayant 15 pour périmètre

2) Calculer l'aire d'un rectangle parmi les rectangles proposés (se mettre d'accord sur un calcul)



résultat :

3) Calculer l'aire du carré 3,75 x 3,75.

Aides : 3,75 $= \frac{375}{100}$ c'est 375 : 100 ou $3 + \frac{75}{100}$ ou $3 + \frac{3}{4}$

c est le petit carré de côtés 3,75 u tu peux le construire puis imaginer le grand carré C de côtés 375 u ...
Combien de petits carrés c y a-t-il dans le grand carré C?

$\frac{375}{100} \times \frac{375}{100} =$ ______	3,75 x 3,75 =

FICHE 6 Des prix à calculer

Activité 1 : *Découvrir trois méthodes de calcul*

Le kilogramme de pommes coûte 9,80 F. Anthony achète 3,4 kg de pommes.
Pour calculer le prix payé, les camarades d'Anthony proposent trois démarches différentes :

Pierre avec les Fractions	*Eric avec la Proportionnalité*		*Nicolas avec la Numération*
	quantité	prix	
$9{,}80 = \frac{980}{100} = \frac{98}{10}$	1	9,80	$9{,}80 = 9 + 0{,}8 = 9 + \frac{8}{10}$
$3{,}4 = \frac{34}{10}$	3 4 0,4	29,40 39,20 3,92	$3{,}4 = 3 + 0{,}4 = 3 + \frac{4}{10}$
$9{,}80 \times 3{,}4 = \frac{98}{10} \times \frac{34}{10}$	3,4	33,32	
$9{,}80 \times 3{,}4 = \frac{3332}{100}$			
$9{,}80 \times 3{,}4 = 33{,}32$			

Pour effectuer le calcul, Nicolas dispose son produit ainsi et ses calculs sont terminés ci-dessous :

×	3	$\frac{4}{10}$
9	27	$\frac{36}{10}$
$\frac{8}{10}$	$\frac{24}{10}$	$\frac{32}{100}$

$$9{,}80 \times 3{,}4 = 27 + \frac{36}{10} + \frac{24}{10} + \frac{32}{100}$$
$$9{,}80 \times 3{,}4 = 27 + \frac{60}{10} + \frac{32}{100}$$
$$9{,}80 \times 3{,}4 = 27 + 6 + 0{,}32$$
$$9{,}80 \times 3{,}4 = 33{,}32$$

Tu dois comprendre les méthodes des 3 camarades, tu devras venir au tableau pour les expliquer.

Activité 2 : *Utiliser les trois méthodes de calcul*
Réponds aux trois questions en utilisant chaque fois une méthode différente.

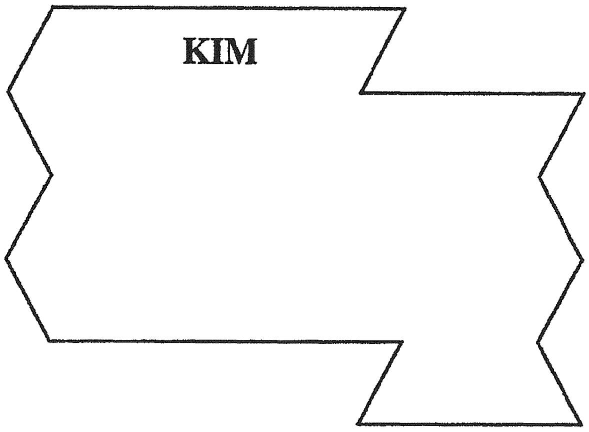
1- Le litre d'essence sans plomb coûte 7,38 F. Le papa fait un plein de 34,19 l.
Calculer le prix payé par le papa de Jacques.

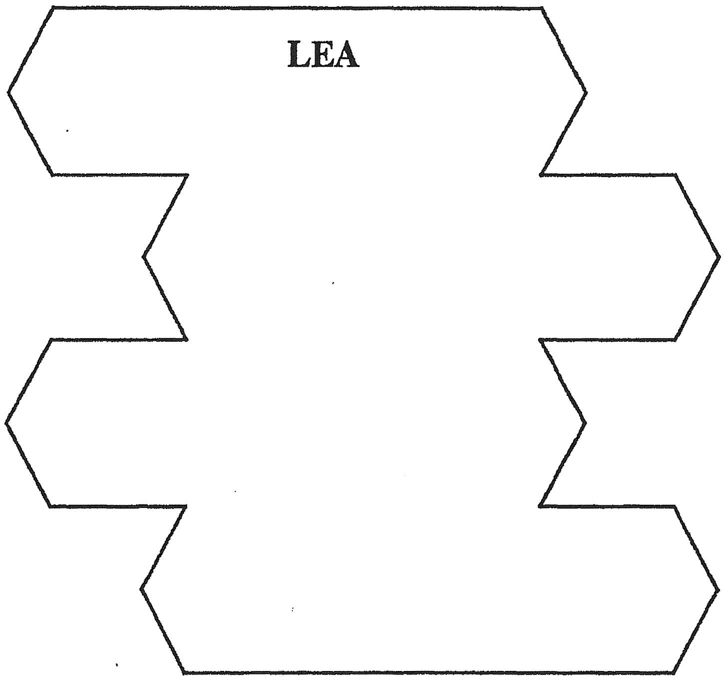
2- Le kilogramme de rôti de porc coûte 39,65 F. La maman d'Arthur achète 5,4 kg de rôti de porc.
Calculer le prix payé par la maman d'Arthur.

3- Le mètre de câble-télévision coûte 4,30 F. Le père de Benoît achète 28,9 m de câble-télévision.
Calculer le prix payé par le père de Benoît.

FICHE 5

Activité 1 (suite)

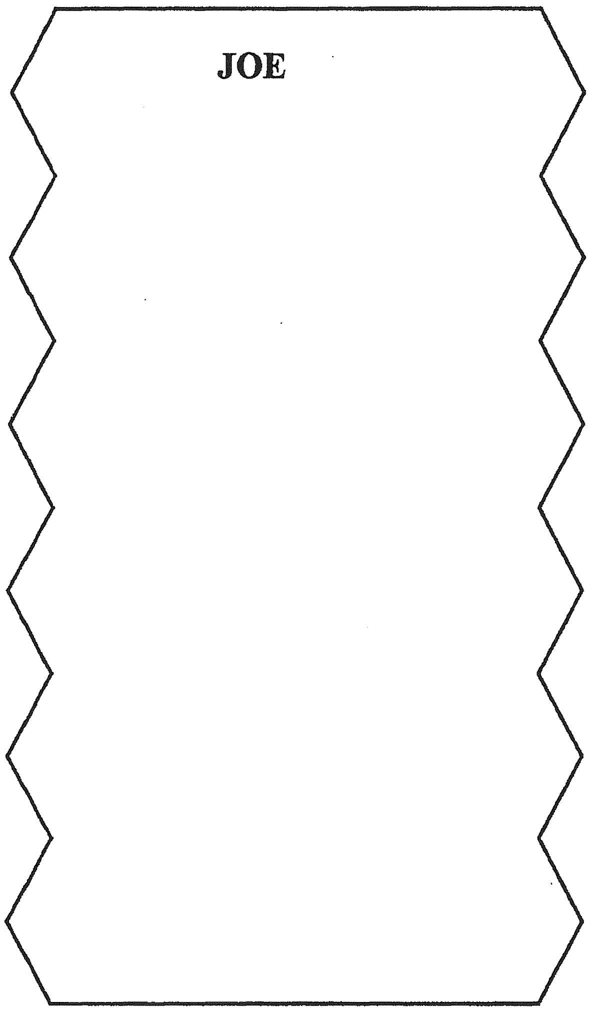




FICHE 2

Activité 1

Utilise **l'unité U** ou une figure dont tu auras déjà mesuré l'aire pour mesurer l'aire de chacune des figures proposées.



FICHE DUBLIREM

TITRE : DE L'ÉCRITURE FRACTIONNAIRE À LA MULTIPLICATION DES DÉCIMAUX

AUTEURS : BELLAIN C. - BOUYAUX T. DENMAT M. N. - GIORGIUTTI I. - KHLIFIL. L - LE POCHE G. - LE POCHE A. - LOHYN M. - MÉTAYER M. - TÉTARD P.

DATE : 1ÈRE ÉDITION : JUIN 2002
2E ÉDITION : NOVEMBRE 2010

NIVEAU : CYCLE 3 - COLLÈGE

MOTS-CLÉS :

Spécialité :
- Fractions, Fractions décimales, Nombres décimaux,
- Multiplication des décimaux,
- Partage,
- Mesures : longueur, aire, fractionnement, commensuration.

Autres :
- Liaison cycle 3-6e
- Tests,
- Apprentissage
- Formation des maîtres.

RÉSUMÉ :

Cette brochure présente une étude assez fouillée des difficultés rencontrées par des élèves du cycle 3 et de sixième concernant la compréhension des écritures fractionnaires et des décimaux, puis présente une introduction peu courante des fractions, expérimentée en classe de CM1, CM2 et sixième, destinée à pallier les difficultés des élèves.

Elle privilégie le cadre des partages puis celui des mesures par commensuration pour aboutir à une construction du sens de la multiplication des décimaux destinée aux élèves de sixième.

FORMAT	**NOMBRE DE PAGES**	**PRIX**	**TIRAGE**
21 X 29,7	183 (plus 55 fiches)	8 EUROS	50

ISBN 2-85728-061-0