IREM de ROUEN

Université de Rouen
Institut de Recherche
sur
l'Enseignement des Mathématiques

# *Graphes probabilistes et matrices stochastiques*

Catherine PHILIPPE

Christian VASSARD

IREM de ROUEN, Bâtiment de Mathématiques, Av. de Broglie, B.P. 138
76821 Mont-Saint-Aignan Tél. 02 35 14 61 41 Fax 02 35 14 00 49

Matrices...

stochastiques...

Des deux notions, la première est bien connue des enseignants du second degré qui ont souvent pratiqué durant leurs années d'étude l'algèbre linéaire et ses nombreuses applications...

La deuxième l'est beaucoup moins, voire pas du tout. Le mot *stochastique* lui-même fait savant[1] et impressionne : on croit tout savoir du *stochastique* si on le rattache au hasard, mais l'on se demande bien ce que les matrices viennent faire dans ce domaine.

Et pourtant les matrices stochastiques font partie des nouveaux programmes de terminale Es, spécialité mathématiques...

Nous pensons qu'on n'enseigne bien que ce que l'on connaît bien. Il nous paraîtrait aventureux de faire un cours sur les graphes probabilistes à des élèves de lycée sans aller regarder d'un peu plus près de quoi il retourne.

C'est l'objet, modeste, de notre brochure, qui s'est constituée peu à peu, en réponse aux diverses questions que ce nouvel enseignement a suscitées chez nous.

Nous vous la livrons aujourd'hui, en espérant qu'elle réponde à vos interrogations.

Nous n'avons pas voulu faire un cours théorique : il n'est ni facile ni profitable pour un professeur de digérer les pavés universitaires indigestes que l'on rencontre à foison sur le sujet.

Nous avons fait le choix de partir d'exemples précis, suscitant des interrogations... C'est quand les questions sont posées et les comportements précisés que nous démontrons les résultats.

Les rappels théoriques nécessaires sont faits au fur et à mesure : ils sont volontairement minimum pour faciliter la lecture. Dans le même esprit, les calculs ont souvent été allégés, notamment quand ils pouvaient être confiés à une TI-92. Nous pensons qu'en la matière les TICE ont leur rôle à jouer, et, en se déchargeant de calculs pénibles et inintéressants, on suit mieux la structure des raisonnements et la marche des idées : n'est-ce pas finalement le plus important de l'activité mathématique[2] ? Mais au delà des calculs, la TI-92 est aussi un outil puissant d'exploration mathématique et de conjecture.

Qu'il soit clairement dit que ce n'est pas un cours destiné à des élèves de lycée : notre brochure a été écrite pour des professeurs, éventuellement pour des étudiants qui voudraient approfondir ce sujet. Notre seul but est qu'elle vous soit utile comme à nous et qu'elle vous donne le (petit) recul mathématique dont on a besoin pour bien enseigner.

[1] Il vient du grec *stokhastês*, qui veut dire devin, lié au hasard.

[2] Ce qui n'empêche pas que les élèves doivent apprendre à calculer bien sûr !

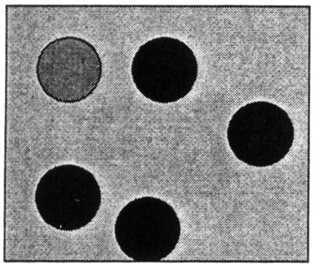
# Table des matières

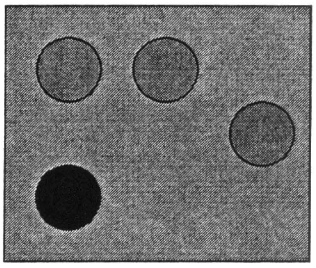
ÉTUDE DE QUELQUES SITUATIONS ........ 5
I. Premier exemple : les deux urnes (*extrait du manuel de Tes édité chez Bréal*) ........ 5
II. Deuxième exemple : Kévin et ses retards ........ 8
III. Troisième exemple : envoyer des photos depuis Saturne ........ 11
IV. Quatrième exemple : jet d'une pièce ........ 13
V. Conclusion ........ 15
ÉTUDE EXHAUSTIVE DES MATRICES ........ 17
STOCHASTIQUES D'ORDRE 2 ........ 17
I. La matrice stochastique d'ordre 2 en général ........ 17
II. Etude directe de la suite $(p_n)$ ........ 18
III. Étude des puissances successives de $M$ ........ 20
IV. Calcul de $M^n$ par la formule du binôme ........ 23
QUELQUES EXEMPLES DE MATRICES STOCHASTIQUES ........ 27
D'ORDRE 3 ........ 27
I. Deux cas où la matrice de transition est diagonalisable ........ 27
II. Une tentative d'explication d'un exemple de l'introduction : Kévin et ses retards ........ 37
III. Et si la matrice de transition n'est pas diagonalisable ? ........ 39
ÉTUDE GÉNÉRALE DES MATRICES STOCHASTIQUES ........ 45
I. Qu'est-ce qu'une matrice stochastique ? ........ 45
II. Étude directe de la matrice $M^n$ ........ 47
III. Valeurs propres d'une matrice stochastique ........ 49
IV. La puissance $n^e$ d'une matrice stochastique et la réduction des endomorphismes ........ 53
V. Étude d'un exemple ........ 64
UNE SITUATION COMPLEXE POUR FINIR ........ 69
I. Étude de la situation correspondant au protocole 1 ........ 69
II. Étude de la situation correspondant au protocole 2 ........ 70
III. Étude de la situation correspondant au protocole 3 ........ 71
IV. Étude de la situation correspondant au protocole 4 ........ 72
V. Étude d'une situation correspondant au protocole 5 ........ 73
VI. Complément ........ 80
ANNEXE 1 : RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES ........ 83
ANNEXE 2 : PUISSANCES DE MATRICE ........ 85

# ÉTUDE DE QUELQUES SITUATIONS

## I. Premier exemple : les deux urnes *(exercice extrait du manuel de Tes édité chez Bréal)*

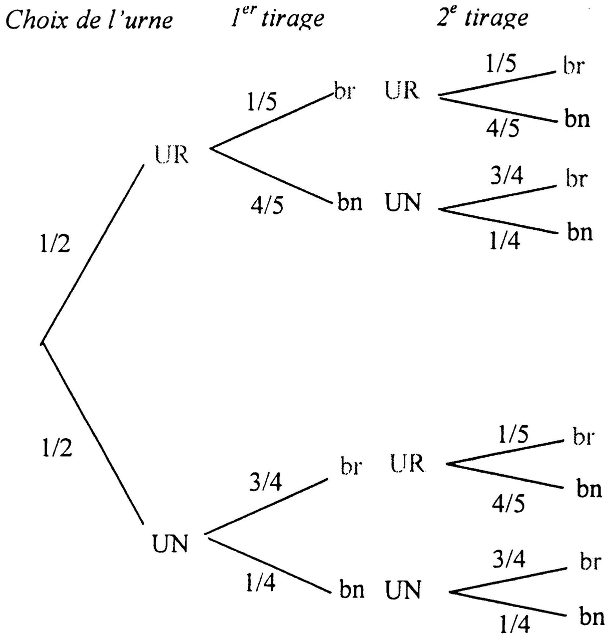
*On dispose d'une urne rouge contenant une boule rouge et quatre boules noires, ainsi que d'une urne noire contenant trois boules rouges et une boule noire. On effectue une suite de tirage d'une boule selon les règles suivantes :*
*(R1) le premier tirage a lieu dans l'une des deux urnes choisies au hasard ;*
*(R2) après chaque tirage dans une urne, la boule est remise dans la même urne ;*
*(R3) après chaque tirage, on tire dans l'urne qui a la couleur de la boule tirée.*


*Urne rouge*

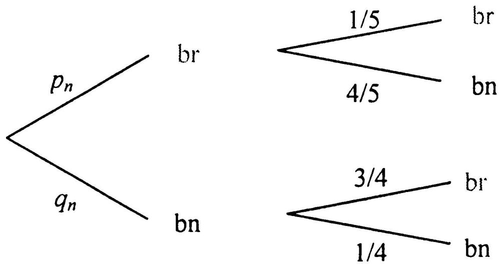

*Urne noire*

Comment peut-on modéliser cette situation ?

- La première idée, la plus naturelle chez un élève de terminale, est de réaliser un arbre de probabilité :




Appelons pour $n \geqslant 1$,
$p_n$ la probabilité que le $n^e$ tirage se fasse dans l'urne rouge et $q_n$ la probabilité qu'il se fasse dans l'urne noire (avec bien sûr $p_n + q_n = 1$...)
Visualisons sur l'arbre suivant le $(n+1)^e$ tirage en fonction du $n^e$.




D'après la formule des probabilités totales, on peut écrire, pour $n \geqslant 1$ :

$$p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{4}q_n \quad \text{et} \quad q_{n+1} = \frac{4}{5}p_n + \frac{1}{4}q_n.$$

Ajoutons que cette formule demeure vraie, d'après le premier arbre, en posant $p_0 = q_0 = 1/2$, puisque l'urne est choisie au départ au hasard.
Quelle est la nature de ces deux suites ?
En remplaçant $q_n$ par $1 - p_n$ dans la première égalité, on obtient :

$$p_{n+1} = -\frac{11}{20}p_n + \frac{3}{4}.$$

On reconnaît là une suite arithmético-géométrique, dont les moyens classiques d'étude sont au programme de spécialité en terminale Es.
Si cette suite converge, par passage à la limite dans l'égalité précédente, c'est nécessairement vers le nombre réel $l$ qui vérifie

$$l = -\frac{11}{20}l + \frac{3}{4} \text{ qui équivaut à } 20l = -11l + 15\text{, soit } l = \frac{15}{31}.$$

Soustrayons membre à membre les deux égalités :

$$p_{n+1} = -\frac{11}{20}p_n + \frac{3}{4}$$

$$l = -\frac{11}{20}l + \frac{3}{4}$$

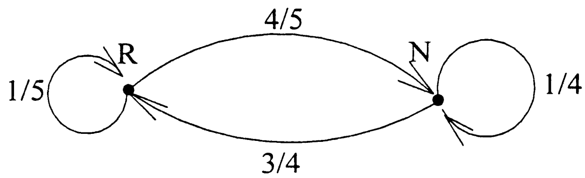
Il vient :

$$p_{n+1} - l = -\frac{11}{20}(p_n - l)$$

ce qui prouve que la suite $(u_n)$ définie pour $n$ entier naturel par $u_n = p_n - l = p_n - \frac{15}{31}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{11}{20}$. Elle converge donc vers 0 ; par conséquence, la suite $(p_n)$ converge bien vers $\frac{15}{31}$.

Comme $p_n + q_n = 1$, la suite $(q_n)$, elle, converge vers $\frac{16}{31}$.

- Mais on peut aussi modéliser une telle situation avec un graphe, dit *probabiliste*. Tout revient à étudier un *système* en évolution, pouvant prendre aléatoirement deux *états*, correspondant aux deux issues du tirage : la boule est rouge ou bien la boule est noire. Un sommet du graphe correspond à un état du système (R quand la boule tirée est rouge, N quand elle est noire) :




Un tel graphe est orienté, et pondéré. Ainsi, par exemple, le coefficient 3/4 pondérant l'arête du bas est la probabilité de tirer une boule rouge sachant qu'on vient de tirer une boule noire au tirage précédent (c'est donc la probabilité de tirer une boule rouge dans l'urne noire).
Remarquons aussi que ces probabilités *conditionnelles* n'évoluent pas au cours des tirages successifs, puisque la boule tirée est toujours remise dans l'urne dont elle provient.

Par définition, la matrice de transition de ce graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice dépend bien évidemment de l'ordre choisi pour écrire les sommets (ici on a choisi l'ordre R, N).
Comment cette matrice est-elle définie ? Il peut être intéressant de poser la question à des élèves, et de faire le lien avec la matrice d'adjacence d'un graphe : les 1 correspondant aux arêtes sont remplacés ici par les poids de ces mêmes arêtes.
Une telle matrice est par ailleurs dite *stochastique*, car la somme des nombres d'une même *ligne* est égale à 1.
Les deux égalités définissant par récurrence les suites $(p_n)$ et $(q_n)$ précédentes :

$$p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{4}q_n$$

$$q_{n+1} = \frac{4}{5}p_n + \frac{1}{4}q_n$$

se traduisent par l'égalité matricielle :

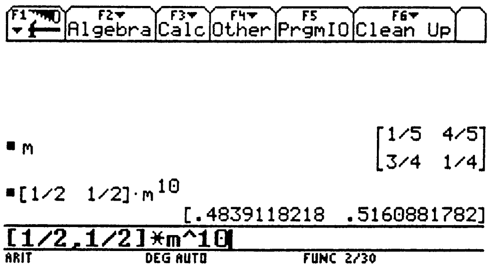
$$\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} M$$

De proche en proche, ou par récurrence, il est immédiat de déduire que :

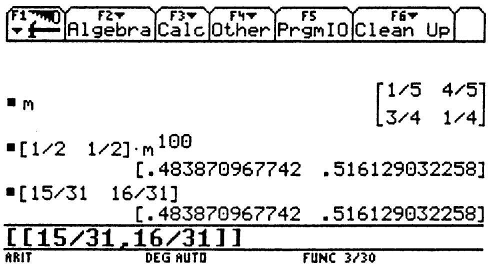
$$\begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & q_0 \end{pmatrix} M^n.$$

Le point de vue est différent, et plus synthétique : l'évolution du système à l'étape $n$, ou à l'infini, est maintenant conditionné par le calcul de la puissance $n^e$ de la matrice $M$, ou par la détermination de la limite de $M^n$ à l'infini.

De plus, on peut accéder au calcul de n'importe quelle valeur de $\begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$, avec une calculatrice gérant le calcul matriciel[3]. Par exemple, la probabilité que le 10$^e$ tirage donne une boule rouge est environ 0,48391 (celle que le tirage donne une boule noire est environ 0,51609).

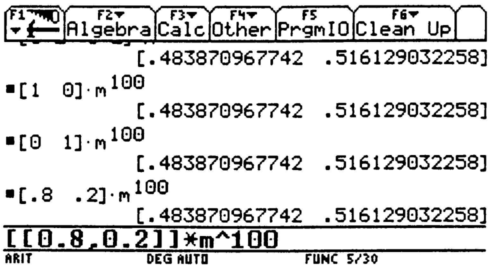



On peut aussi estimer la valeur limite 15/31 de $p_n$.




La formule est suffisamment souple pour qu' on puisse examiner ce qui se passerait si le premier tirage se faisait systématiquement dans l'urne rouge ($p_0 = 1$ ; $q_0 = 0$), ou dans l'urne noire ($p_0 = 0$ ; $q_0 = 1$), ou dans l'urne rouge avec une probabilité de 0,8 ($p_0 = 0,8$ ; $q_0 = 0,2$).

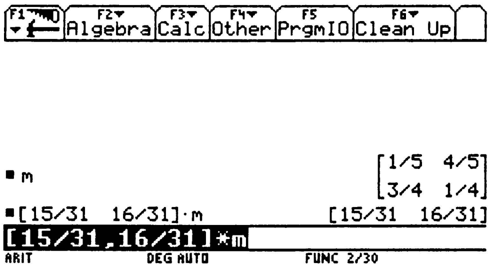
[3] Comme la TI-92, que nous avons utilisée ici pour nos exemples, mais aussi de nombreuses autres calculatrices (TI-82 ou Graph35 notamment)




Que constate-t-on à l'examen de ces différents résultats ?
De façon étonnante, il semble que le vecteur limite obtenu ne dépende pas des conditions initiales choisies ; il ne dépend donc que de la matrice $M$.
Rappelons que ces résultats, suggérés par la calculatrice, demandent bien évidemment à être démontrés rigoureusement[4].
Terminons enfin par un moyen simple d'obtenir le vecteur limite. Si le vecteur $\begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ a une limite $L$, ce que nous justifierons plus tard[5], par passage à la limite dans l'égalité $\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} M$ , ce vecteur limite $L$ vérifie nécessairement

$$L = L\,M.$$

Ses coordonnées sont donc simplement solution d'un système d'ordre 2.




## II. Deuxième exemple : Kévin et ses retards[6]

*Kévin n'arrive pas toujours à l'heure au lycée. Si son comportement peut paraître capricieux, il satisfait en fait le protocole suivant :*
*(P1) il n'est jamais en retard ou en avance deux jours consécutifs ;*
*(P2) s'il était en retard la veille, il sera en avance une fois sur deux ;*
*(P3) quand un jour il est en avance, le lendemain Kévin sera en retard une fois sur quatre ;*
*(P4) Kévin a la même probabilité d'être en retard, ponctuel ou en avance, quand la veille il était à l'heure.*
*Kévin était en avance le jour de la rentrée, que peut-on prévoir pour le troisième jour ?*

• La modélisation par un arbre de probabilité, si elle demeure possible, devient plus laborieuse, à cause du plus grand nombre d'issues possibles.

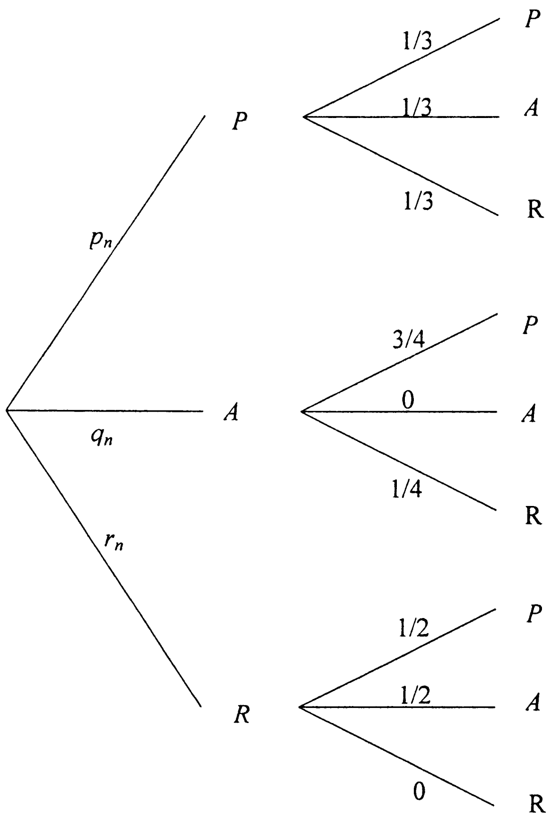
$P$ : « Kevin est ponctuel » ;
$A$ : « Kevin est en avance » ;
$R$ : « Kevin est en retard »

Appelons $p_n$ la probabilité que Kevin soit ponctuel au jour $n$, $q_n$ celle qu'il soit en avance au jour $n$, $r_n$ celle qu'il soit en retard le jour $n$.

---

[4] Ce que nous ferons dans la suite de la brochure.
[5] Ou ce que nous avons déjà justifié en étudiant la suite arithmético-géométrique associée à la situation.
[6] Cet exemple a été présenté par Gérard Grancher lors d'une conférence académique sur les graphes. Nous le remercions de nous autoriser à l'utiliser.

L'arbre est le suivant :




D'après la formule des probabilités totales, les suites $(p_n)$, $(q_n)$ et $(r_n)$ vérifient les relations de récurrence suivantes :

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{3}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n$$

$$q_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + 0 \times q_n + \frac{1}{2}r_n = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{2}r_n$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{4}q_n + 0 \times r_n = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{4}q_n$$

Par ailleurs, on a bien évidemment $p_n + q_n + r_n = 1$.
L'étude séparée de chacune de ces suites n'est pas aussi simple que dans l'exemple précédent[7] : ceci marque la limite de cette méthode.

• Reste le recours du calcul matriciel. Deux traductions équivalentes des égalités précédentes sont possibles :

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 3/4 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} & r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous privilégierons la seconde écriture, qui fait intervenir comme dans le premier exemple une matrice *stochastique*, dont la somme des lignes fait 1[8].

Comme précédemment, on peut écrire, pour tout entier naturel $n$ :

[7] Se ramenant à l'étude de deux suites arithmético-géométriques, comme on l'a vu.
[8] Et non pas la somme des colonnes.

$$\begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & q_0 & r_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}^n$$

où $p_0$, $q_0$ et $r_0$ décrivent le comportement initial de Kevin.

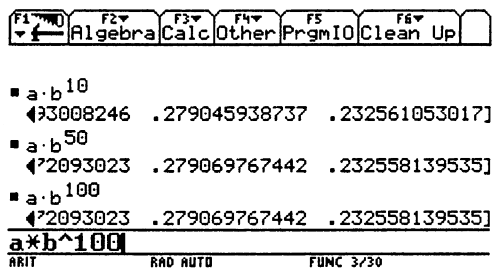
On retrouve l'importance de la matrice $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}^n$ .

Revenons au problème posé.
Si Kévin est en avance le jour de la rentrée, on a $p_0 = 0$, $q_0 = 1$ et $r_0 = 0$.
Au bout de trois jours, on en déduit que :

$$\begin{pmatrix} p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}^3$$

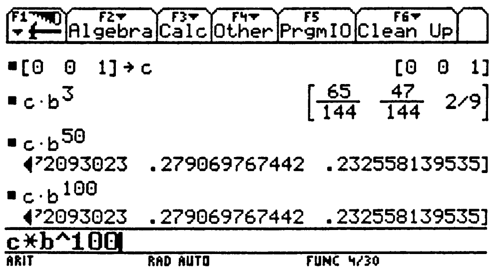
```
[A]*[B]^3
[[.53125 .25 .2...
Ans▸Frac
[[17/32 1/4 7/3...
```

et n'importe quelle calculatrice, gérant les matrices (ci-contre la TI-82), donne la réponse exacte $p_3 = 17/32$ ; $q_3 = 1/4$ ; $r_3 = 7/32$.
On peut aussi examiner avec une TI-92 ce qui se passe pour les grandes valeurs de $n$ :

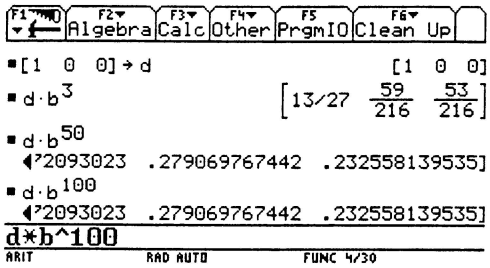



Il semble qu'au bout d'au bout d'un temps assez court Kévin soit en retard avec une probabilité de 0,23 environ.

Et si les conditions initiales de Kévin changent ?
Par exemple, s'il est en retard le jour de la rentrée, on aura $p_0 = 0$, $q_0 = 0$ et $r_0 = 1$. Les résultats obtenus sont sensiblement différents au bout de 3 jours. En revanche, ils se stabilisent implacablement vers les mêmes valeurs limites que précédemment pour 50 jours et 100 jours.

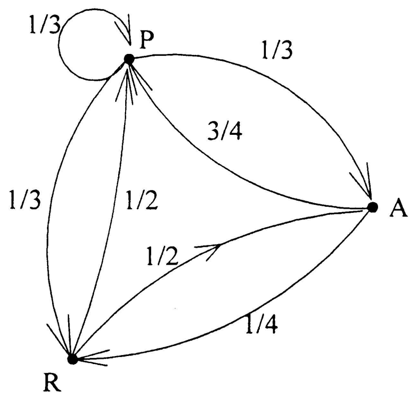



On laisse au lecteur le soin de commenter ce qui se passe quand Kévin choisit sagement d'être à l'heure dès le jour de la rentrée...




Quel que soit son comportement le jour de la rentrée, c'est-à-dire quelles que soient les conditions initiales du système étudié, Kévin est entraîné dans la même spirale... Un seul conseil pour régler son problème : qu'il change de protocole, en étant tous les jours à l'heure[9] !

- Le graphe probabiliste décrit les informations de ce protocole.




Il résume les informations régissant l'évolution d'un système à trois états (P, A et R).
En mettant les sommets dans l'ordre P, A, R, la matrice de transition de ce graphe est $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ : c'est justement celle que nous avons utilisée pour les calculs précédents.
À l'intersection de la $i^e$ ligne et de la $j^e$ colonne est écrite la probabilité conditionnelle[10] qui figure sur les arêtes du graphe reliant dans cet ordre le sommet numéro $i$ au sommet numéro $j$[11].

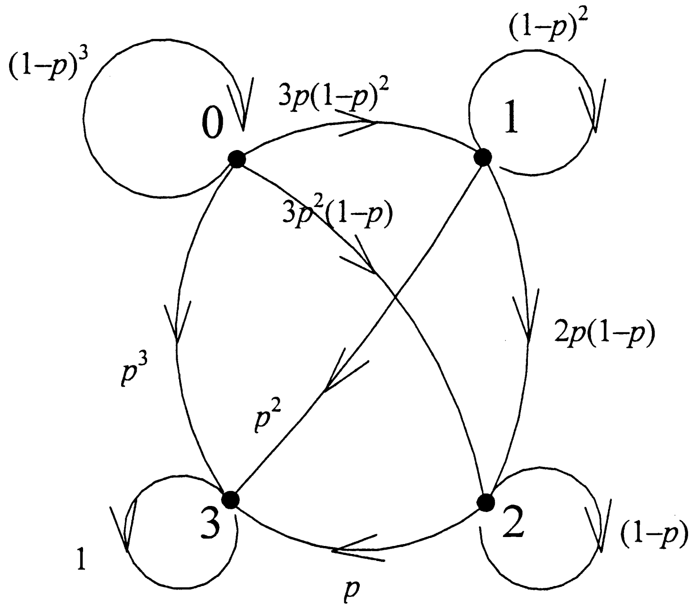
## III. Troisième exemple : envoyer des photos depuis Saturne[12]

*Une sonde en orbite autour de la planète Saturne est équipée de trois appareils photos haute résolution identiques fonctionnant indépendamment les uns des autres et ayant chacun la probabilité p de tomber en panne au cours d'une journée. Quand un appareil est en panne, il ne peut pas être réparé[13].*
*Un jour donné, les trois appareils photos fonctionnent correctement. Quelle est la probabilité que la sonde continue d'envoyer des photos 100 jours après, en supposant d'abord que p = 0,05 puis que p = 0,001 ?*

---

[9] Il est vrai que Kevin a un comportement qui l'apparente plus à une machine. Notamment, il ne tire aucune leçon de son expérience passée puisque les probabilités qui régissent sa conduite restent invariables avec le temps. Nous savons que ce n'est pas le cas avec de vrais élèves !
[10] Sachant que le système est dans l'état $i$, quelle est la probabilité qu'il passe dans l'état $j$ ?
[11] On retrouve ces mêmes probabilités conditionnelles sur l'arbre de probabilité (voir plus haut).
[12] Exemple totalement imaginaire, malgré l'actualité.
[13] La sonde étant située à des millions de kilomètres de notre bonne vieille Terre...

• L'arbre probabiliste décrivant l'évolution d'un tel système commence à devenir touffu et difficile à appréhender.
En revanche, la situation se décrit simplement avec notre nouvel outil.
Il suffit de considérer un système à quatre états, notés 0, 1, 2 ou 3 selon qu'il y a zéro, un, deux ou trois appareil photo en panne un jour donné.
L'évolution d'un tel système est aléatoire et peut être résumée par le graphe probabiliste ci-contre.




En prenant l'ordre naturel des sommets, la matrice de transition est la matrice *stochastique* :

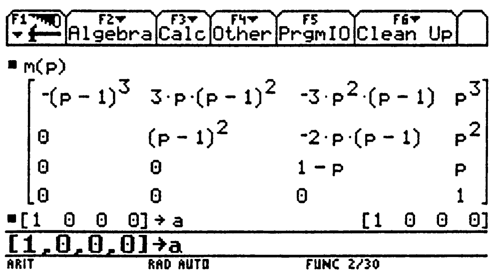
$$M = \begin{pmatrix} (1-p)^3 & 3p(1-p)^2 & 3p^2(1-p) & p^3 \\ 0 & (1-p)^2 & 2p(1-p) & p^2 \\ 0 & 0 & 1-p & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

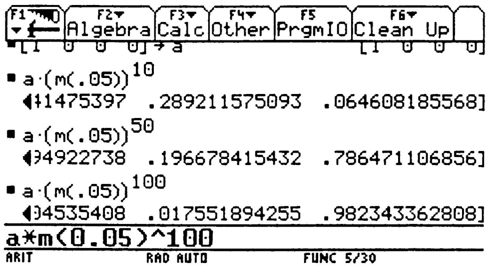
Notons :

$a_n$ la probabilité qu'il n'y ait aucun appareil photo en panne au bout de $n$ jours ;
$b_n$ la probabilité qu'il n'y ait qu'un seul appareil photo en panne au bout de $n$ jours ;
$c_n$ la probabilité qu'il y ait exactement deux appareils photos en panne au bout de $n$ jours ;
$d_n$ la probabilité que les trois appareils photos soient en panne au bout de $n$ jours.

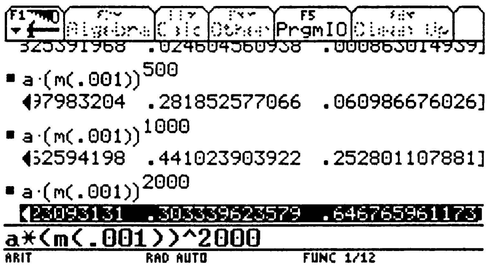
Au début de l'expérience, on a $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = d_0 = 0$, ce que l'on traduit en disant que l'état probabiliste initial du système est défini par le vecteur $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

La probabilité qu'a la sonde d'envoyer des photos au bout de $n$ jours est $1 - d_n$ : intéressons-nous donc à la suite $(d_n)$, d'abord dans le cas où $p = 0{,}05$, en effectuant les calculs matriciels habituels avec une TI-92.






Quelles conclusion peut-on en tirer ?
Au bout de 10 jours, $d_{10} \approx 0{,}065$ donc dans 6,5% des cas, les trois appareils photos seront en panne et nous ne recevrons plus aucune image de Saturne.
Au bout de 50 jours, les trois appareils photos seront en panne dans 78,6% des cas et au bout de 100 jours dans 98% des cas.
On peut présager d'ailleurs que la limite de la suite $(d_n)$ est 1 (au bout d'un temps suffisamment long, les trois appareils photos seront tous en panne !).
Dans le cas où $p = 0{,}001$, on obtient des résultats plus encourageants :




Les performances sont bien meilleures. Moralité : il vaut mieux avoir du bon matériel, mais on s'en doutait un peu !

## IV. Quatrième exemple : jet d'une pièce[14]

> *On lance une pièce de monnaie 100 fois de suite. On appellera séquence de longueur p une suite de p coups consécutifs égaux (soit p « pile » ou p « face » de suite).*
> *Quelle est la probabilité d'obtenir une séquence de longueur 6 au moins ?*

- La modélisation d'une telle situation, contrairement aux exemples précédents, est extrêmement délicate. L'utilisation d'un graphe probabiliste ne va pas de soi : dans cette expérience, quel *système* peut bien évoluer et dans quels *états* peut-il se trouver ?

On peut considérer que le système est tout simplement la liste des résultats successifs, qui évolue aléatoirement à chaque nouveau lancer de la pièce. Par exemple :

P
P, F
P, F, F
P, F, F, F
P, F, F, F, P
P, F, F, F, P, P
P, F, F, F, P, P, P
P, F, F, F, P, P, P, P
P, F, F, F, P, P, P, P, P
etc.
P, F, F, F, P, P, P, P, P, ..., F, P, P (avec 100 lettres P ou F)

[14] Exemple emprunté à notre collègue Nicole Vogel, dont on peut trouver le détail dans le numéro 451 du bulletin vert de l'APMEP (pages 168 à 172), ou sur son site http://perso.wanadoo.fr/nvogel/Dossiers/CentPF.htm.

Au cours de l'expérience, deux questions se posent :

après $n$ lancers, a-t-on obtenu une séquence de longueur 6 au moins ?

Sinon, le $(n + 1)^e$ lancer permettra-t-il d'obtenir une suite de 6 coups consécutifs en $n + 1$ lancers ?

ou peut-être en $n + 2$ lancers ? ou $n + 3$ lancers ? etc.

Ceci amène à considérer ce que l'on peut appeler les *états* suivants du système :

(6) La suite de $n$ lancers contient au moins une séquence de longueur 6.

(5) La suite de $n$ lancers ne contient pas de séquence de longueur 6 et finit par une séquence de longueur 5.

(4) La suite de $n$ lancers ne contient pas de séquence de longueur 6 et finit par une séquence de longueur 4.

(3) La suite de $n$ lancers ne contient pas de séquence de longueur 6 et finit par une séquence de longueur 3.

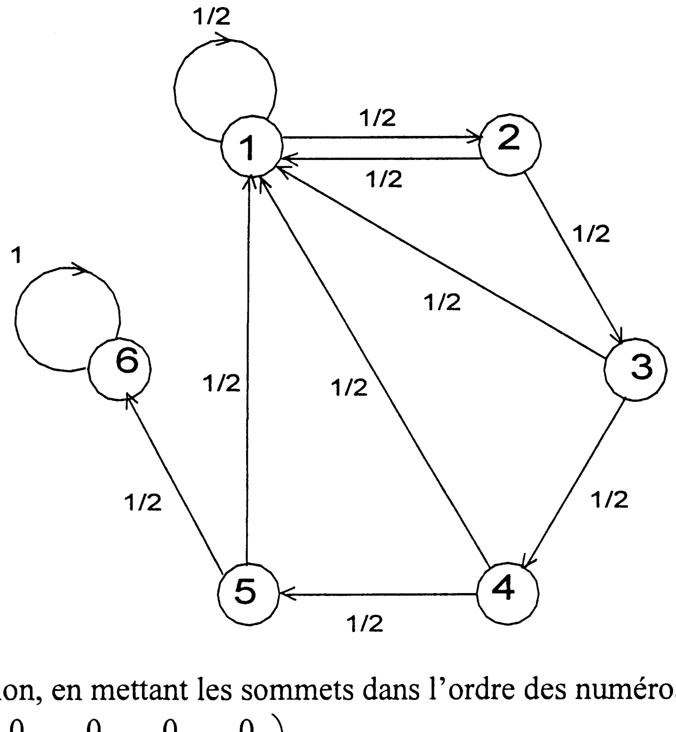
(2) La suite de $n$ lancers ne contient pas de séquence de longueur 6 et finit par une séquence de longueur 2.

(1) La suite de $n$ lancers ne contient pas de séquence de longueur 6 et finit par une séquence de longueur 1.

En reprenant la liste des lancers donnés précédemment, les états successifs obtenus sont :

(1) ; (1) ; (2) ; (3) ; (1) ; (2) ; (3) ; (4) ; (5) ;etc.

Le système évolue bien aléatoirement d'un état à un autre , avec des probabilités qui peuvent être calculées simplement. Toutes ces informations sont résumées par le graphe probabiliste suivant :



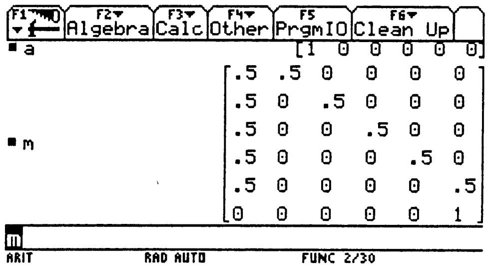

La matrice de transition, en mettant les sommets dans l'ordre des numéros, est :

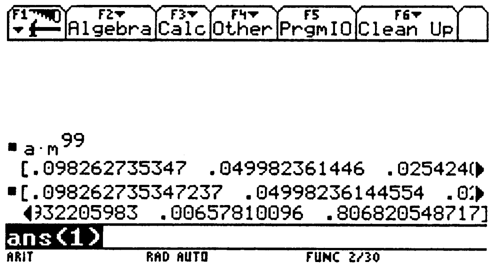
$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En appelant $a_n$ (resp. $b_n$, $c_n$, $d_n$, $e_n$ et $f_n$) la probabilité que le système se trouve dans l'état (1) (resp. (2), (3), (4), (5) et (6)) après $n$ lancers, le problème posé revient à déterminer $f_{100}$.
L'état initial est caractérisé par $a_1 = 1$, $b_1 = c_1 = d_1 = e_1 = f_1 = 0$.
Comme précédemment, on a :

$$\begin{pmatrix} a_{100} & b_{100} & c_{100} & d_{100} & e_{100} & f_{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{99}$$

Une calculatrice gérant le calcul matriciel donne alors :




La probabilité d'obtenir au moins une séquence de longueur 6 au cours des 100 lancers est donc de 0,8068, soit un peu plus de 80 %... Valeur étonnante, mais il suffit de réaliser quelques expériences[15] pour s'en convaincre. Le hasard a des comportements qu'un esprit humain n'oserait pas imaginer !

## V. Conclusion

La notion de *système*, qui, en *évoluant* aléatoirement de façon discrète[16], peut prendre différents *états*, est, comme on l'a vu, un outil efficace pour modéliser des situations probabilistes de natures très variées.

Nous avons rencontré trois façons de dire la même chose, mais avec une efficacité mathématique variable.

La façon la plus naturelle est l'*arbre de probabilité*, car il permet de décortiquer les situations étape après étape, y compris l'étape initiale. Méthode naturelle certes, mais inadaptée, on l'a vu, à l'étude de situations complexes.

L'approche par les *graphes probabilistes* permet de s'intéresser *globalement* à la façon dont le système évolue, d'un état à un autre : le graphe lui-même est en quelque sorte un résumé de tous les états et de toutes les évolutions possibles.
Sur l'arête orientée reliant l'état $i$ à l'état $j$, on fait figurer la probabilité conditionnelle que le système passe dans l'état $j$ sachant qu'il est dans l'état $i$, probabilité qui n'a aucune raison d'être égale à celle que le système passe dans l'état $i$ sachant qu'il est dans l'état $j$.
Plus généralement, un graphe *probabiliste* est un graphe *orienté* à $k$ sommets, pondéré par des nombres positifs tels que la somme des poids des arêtes sortant de chaque sommet vaut 1, poids qu'il est toujours loisible d'interpréter comme des probabilités conditionnelles.

---

[15] On peut s'en convaincre avec une simulation sur un tableur par exemple.
[16] C'est-à-dire que les changements d'état ne peuvent qu'intervenir à des instants donnés, non aléatoires et au plus en une infinité dénombrable.

Les probabilités qui pondèrent les arêtes d'un graphe probabiliste ne doivent pas changer au cours de l'évolution du système : elles restent strictement les mêmes au cours des différentes étapes. On peut dire que l'évolution se fait sans mémoire.
Ceci caractérise ce qu'en mathématiques on appelle une *chaîne de Markov* : on la rencontre quand on a affaire à un système qui peut prendre un nombre fini d'états et qui évolue par étapes successives d'un état à un autre. La probabilité qu'à une étape donnée le système soit dans un état ne dépend que de l'état précédent et ne varie pas au cours des étapes successives[17].

Avec les graphes probabilistes, on « hérite » des *matrices de transition*[18] : c'est la troisième approche que nous avons eue, et de loin la plus performante, car elle permet la mise en oeuvre de la puissance du calcul matriciel.
Comme nous l'avons vu, une telle matrice de transition est une matrice *stochastique* : tous ses coefficients sont positifs ou nuls, et leur somme sur chaque ligne donne 1.
Il est alors possible connaître les probabilités de chacun des états du système à n'importe quelle étape de son évolution, et de s'interroger sur l'évolution à l'infini de ce système. Sur des exemples, nous avons mis en évidence avec une calculatrice des propriétés qui semblent vraies : il reste bien sûr à les prouver dans le cas général.
Tout est conditionné par l'étude de la puissance $n^e$ d'une matrice stochastique, ou de sa limite quand $n$ tend vers l'infini. Le problème probabiliste devient alors un problème algébrique.

C'est sur ce dernier aspect que nous travaillerons dans cette brochure, en faisant une étude systématique des matrices stochastiques. Nous verrons d'abord que les matrices d'ordre 2 peuvent être traitées avec les moyens du bord dont dispose un lycéen ; ensuite les difficultés seront pointées sur quelques exemples à l'ordre 3 ; enfin, nous traiterons le cas général en nous appuyant sur les résultats mathématiques plus fins du calcul matriciel.

---

[17] On peut bien sûr donner une définition formelle plus rigoureuse d'une chaîne de Markov, en tant que suite de variables aléatoires $(X_n)$, chacune prenant pour valeurs les différents états possibles. Ce n'est pas notre but ici.

[18] Tout graphe possède une matrice de transition...

# ÉTUDE EXHAUSTIVE DES MATRICES STOCHASTIQUES D'ORDRE 2

## I. La matrice stochastique d'ordre 2 en général

• Une matrice stochastique d'ordre 2 est une matrice dont les coefficients sont positifs ou nuls et pour laquelle la somme des nombres figurant sur chaque ligne vaut 1. De ce fait, chaque coefficient appartient à l'intervalle [0 ; 1]
Ainsi les matrices suivantes sont stochastiques :

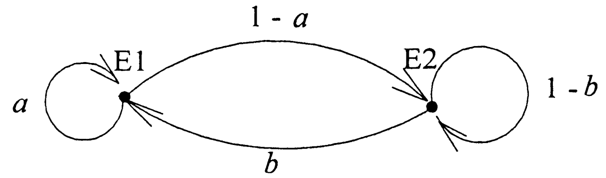
$$\begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 1/7 & 6/7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}95 & 0{,}05 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (c'est la matrice identité)}$$

tandis que celle-ci ne l'est pas :

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

En général, $M$ peut s'écrire sous la forme $M = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$, où $a$ et $b$ sont des réels de l'intervalle [0 ; 1].

• Une matrice stochastique d'ordre 2 peut toujours s'interpréter comme la matrice de transition d'un graphe probabiliste à deux états, $E_1$ et $E_2$ :




Les coefficients de cette matrice sont les probabilités conditionnelles de passage d'un état dans un autre, éventuellement identique.
Plus précisément :

$$a = p_{E_1}(E_1) \qquad 1-a = p_{E_1}(E_2)$$
$$b = p_{E_2}(E_1) \qquad 1-b = p_{E_2}(E_2)$$

On comprend pourquoi les nombres qui interviennent dans une matrice stochastique
d'une part, sont des nombres de l'intervalle [0 ; 1] : ils doivent pouvoir être interprétés comme des probabilités (conditionnelles) ;
d'autre part ont une somme égale à 1 sur chaque ligne : quand le système est dans l'état $E_1$, il ne peut évoluer que vers l'état $E_1$ ou bien vers l'état $E_2$.

• L'état probabiliste initial est donnée par le vecteur ligne $\begin{pmatrix} p_0 & q_0 \end{pmatrix}$ : le système est donc initialement dans l'état $E_1$ avec une probabilité $p_0$ ou dans l'état $E_2$ avec une probabilité $q_0 = 1 - p_0$.
De la même façon, $p_n$ désigne la probabilité que le système se trouve dans l'état $E_1$, et $q_n$ celle qu'il se trouve dans l'état $E_2$, à la $n^e$ étape de son évolution.
On a bien sûr $p_n + q_n = 1$, pour tout entier naturel $n$.

La formule des probabilités totales permet d'écrire pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ :

$$\begin{cases} p_n = ap_{n-1} + bq_{n-1} \\ q_n = (1-a)p_{n-1} + (1-b)q_{n-1} \end{cases}$$

Matriciellement, ces égalités peuvent être traduites par :

$$\begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix} \times M \text{ pour tout entier } n \geq 1,$$

que l'on étend par une récurrence immédiate à :

$$\begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & q_0 \end{pmatrix} \times M^n \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Ces remarques mettent en évidence les deux stratégies d'étude d'un tel système :

l'étude directe de la suite $(p_n)$[19] ;

le calcul de $M^n$, et de son éventuelle limite quand $n$ tend vers l'infini, en s'appuyant sur des résultats d'algèbre matricielle.

## II. Etude directe de la suite $(p_n)$

Dans le cas de matrices stochastiques d'ordre 2, cette étude ne pose aucun problème particulier et fait intervenir la notion de suite arithmético-géométrique, déjà rencontrée dans l'exemple de l'introduction.

*1) Nature de cette suite*

- On sait que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, on a :

$$\begin{cases} p_n = ap_{n-1} + bq_{n-1} \\ q_n = (1-a)p_{n-1} + (1-b)q_{n-1} \end{cases}$$

En se rappelant que $q_n = 1 - p_n$, il vient immédiatement $p_n = (a - b)p_{n-1} + b$.
On reconnaît là une suite *arithmético-géométrique*, qui peut être étudiée comme telle.

- Si elle converge, c'est nécessairement vers $p$ tel que :

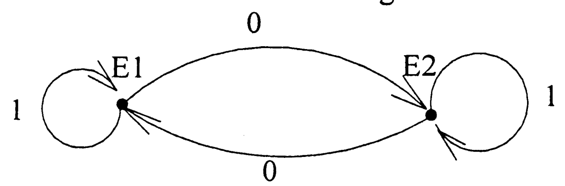
$p = (a - b)p + b$ soit c'est-à-dire $p(1 - a + b) = b$.

*2) Cas où $1 - a + b = 0$*

On a alors $b = -(1 - a)$, c'est-à-dire, puisque $b$ et $1 - a$ sont deux nombres réels positifs, $b = 0 = 1 - a$ d'où l'on tire $a = 1$ et $b = 0$. Les égalités précédentes deviennent :

$$\begin{cases} p_n = 1 \times p_{n-1} + 0 \times q_{n-1} = p_{n-1} \\ q_n = (1-1)p_{n-1} + (1-0)q_{n-1} = q_{n-1} \end{cases}$$

Les suites $(p_n)$ et $(q_n)$ sont constantes, égales chacune à leur valeur initiale : le système n'évolue pas[20]. Ces deux suites sont donc aussi convergentes.




*3) Cas où $1 - a + b \neq 0$*

La limite éventuelle de $(p_n)$ est $p = \dfrac{b}{1 - a + b}$.

Classiquement on se ramène d'abord à une suite géometrique en faisant la différence des deux égalités suivantes :

[19] Et donc de $(q_n)$ car pour tout $n$, $p_n + q_n = 1$.
[20] La matrice de transition du graphe est la matrice identité.

$$p_n = (a-b)p_{n-1} + b$$
$$p = (a-b)p + b$$

On obtient immédiatement: $p_n - p = (a-b)(p_{n-1} - p)$, ce qui prouve que la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = p_n - p$ est une suite géométrique de raison $a - b$ et de premier terme $p_0 - p$.

On a donc, pour tout entier naturel $n$, $v_n = v_0(a-b)^n = (p_0 - p)(a-b)^n$ d'où l'on tire

$$p_n = (p_0 - p)(a-b)^n + p$$
$$q_n = 1 - p - (p_0 - p)(a-b)^n$$

ce qui permet le calcul immédiat de n'importe quelle valeur de $p_n$ ou $q_n$ pour $n$ entier naturel.

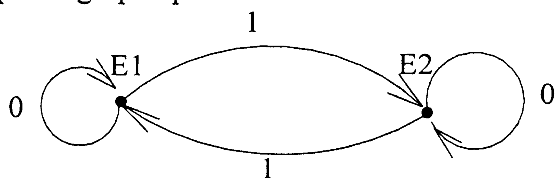
Pour l'étude à l'infini de ces suites, la raison de la suite géométrique $(v_n)$ doit être précisée... Remarquons au préalable que, $a$ et $b$ étant deux réels de l'intervalle [0 ; 1], on a :

$$-1 \leqslant a - b \leqslant 1.$$

Le cas $a - b = 1$ peut être écarté car $1 - a + b \neq 0$. Reste deux autres possibilités.

- **$a - b = -1$, c'est-à-dire $a = -(1 - b)$.**

On a alors $v_n = (-1)^n v_0$ : la suite $(v_n)$ change alternativement de signe.
Mais revenons plutôt à l'étude directe des suites $(p_n)$ et $(q_n)$ ? Comme $a = -(1 - b)$, $a$ et $1 - b$ étant deux nombres positifs, on a $a = 1 - b = 0$, d'où l'on tire $a = 0$ et $b = 1$.
La situation est résumée par le graphe probabiliste suivant :




On a donc, pour tout $n$ :

$$\begin{cases} p_n = 0 \times p_{n-1} + 1 \times q_{n-1} = q_{n-1} \\ q_n = (1-0)p_{n-1} + (1-1)q_{n-1} = p_{n-1} \end{cases}$$

De la même façon, pour tout $n$ :

$$\begin{cases} p_{n-1} = q_{n-2} \\ q_{n-1} = p_{n-2} \end{cases}$$

d'où l'on tire : $p_n = p_{n-2}$ et $q_n = q_{n-2}$.
Finalement, pour tout entier naturel $k$ :

$p_{2k} = p_0$ et $p_{2k+1} = p_1 = q_0$ ;
$q_{2k} = q_0$ et $q_{2k+1} = q_1 = p_0$.

Les deux sous-suites d'ordre pair et impair de $(p_n)$ sont convergentes mais la suite elle même ne l'est que, si à l'état initial, on a $p_0 = q_0 = \frac{1}{2}$. Dans ce cas elle est constante et converge vers $\frac{1}{2}$. Là encore le système n'évolue pas.

Si au contraire $p_0 \neq \frac{1}{2}$, l'état probabiliste est alternativement égal à $\begin{pmatrix} p_0 & q_0 \end{pmatrix}$ et à $\begin{pmatrix} q_0 & p_0 \end{pmatrix}$.

- **$-1 < a - b < 1$**

C'est le cas le plus fréquent. Ayant une raison strictement comprise entre $-1$ et 1, la suite géométrique $(v_n)$ converge vers 0, d'où l'on tire que la suite $(p_n)$ converge vers $p = \dfrac{b}{1-a+b}$.

La suite $(q_n)$ converge quant à elle vers $1-p = q = \dfrac{1-a}{1-a+b}$.

On a vu que, pour tout $n$, $p_n = (a-b)^n(p_0 - p) + p_0$ : ce nombre dépend de la probabilité de l'état initial $p_0$ ; en revanche la limite $p$ de la suite est indépendante de l'état initial[21].

## III. Étude des puissances successives de $M$

On repart de l'interprétation matricielle de l'évolution du système : on a écrit que pour tout entier naturel non nul $n$, $(p_n \quad q_n) = (p_{n-1} \quad q_{n-1}) \times M$ d'où l'on a déduit par récurrence que $(p_n \quad q_n) = (p_0 \quad q_0) \times M^n$.

L'enjeu du problème est de calculer cette fois $M^n$, en utilisant la réduction des matrices : nous allons chercher à diagonaliser $M$.

Nous noterons dans ce paragraphe $I$ la matrice identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

*1) Détermination du polynôme caractéristique de M*

On sait que le polynôme caractéristique[22] est :

$$\det(M - XI) = \begin{vmatrix} a-X & 1-a \\ b & 1-b-X \end{vmatrix} = (a-X)(1-b-X) - b(1-a)$$
$$= X^2 - (1-b+a)X + a - b = (X-1)(X+b-a)$$

*2) Valeurs propres et vecteurs propres*

Les racines du polynômes caractéristiques sont les valeurs propres de la matrice $M$ : ici 1 et $a-b$ (cette deuxième valeur propre étant comprise entre $-1$ et 1). Ces valeurs propres sont distinctes lorsque $a - b \neq 1$. Envisageons deux cas.

- ***a* – *b* = 1, c'est-à-dire (*a*, *b*) = (1, 0).**

La matrice de transition $M$ est la matrice identité et le système n'évolue pas. Le cas a déjà été étudié plus haut.

- **Nous supposerons désormais que *a* – *b* est différent de 1 c'est-à-dire (*a*, *b*) ≠ (1, 0).**

On a donc $-1 \leqslant a - b < 1$. Déterminons les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres.

Le vecteur $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1 si et seulement si $MV = V$ c'est-à-dire :

$$\begin{cases} ax + (1-a)y = x \\ bx + (1-b)y = y \end{cases}$$ qui équivaut, comme $a \neq 1$, à $x = y$.

Le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est donc la droite engendrée par $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

---

[21] Elle ne dépend que de la matrice de transition, c'est-à-dire des différentes probabilités conditionnelles de passage d'un état sachant qu'on est dans un autre.

[22] Voir en annexe les rappels sur la diagonalisation des matrices, et sur leur triangulation.

Le vecteur $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre $a - b$ si et seulement si $MV = (a - b)V$ c'est-à-dire :

$$\begin{cases} ax + (1-a)y = (a-b)x \\ bx + (1-b)y = (a-b)y \end{cases}$$ qui équivaut à $bx + (1 - a)y = 0$.

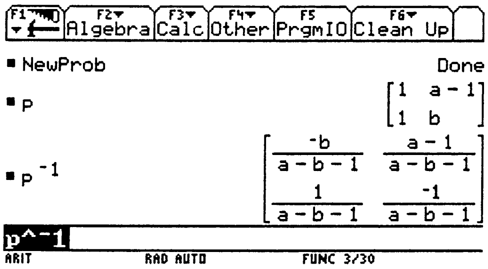
Le sous espace propre associé à la valeur propre $a - b$ est donc la droite engendrée par $w = \begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix}$.

*3) Diagonalisation de la matrice M*

Les résultats précédents montrent que la matrice $M$ est diagonalisable[23] et est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$.

En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, on a $D = P^{-1}MP$, d'où l'on tire $M = PDP^{-1}$.

Déterminons $P^{-1}$ avec une TI-92[24].




Rappelons que $a - b \neq 1$, ce qui garantit que $1 + b - a \neq 0$. On a donc :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{b}{1+b-a} & \dfrac{1-a}{1+b-a} \\ \dfrac{-1}{1+b-a} & \dfrac{1}{1+b-a} \end{pmatrix} = \frac{1}{1+b-a}\begin{pmatrix} b & 1-a \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

*4) Calcul de $M^n$*

On a : $M^n = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})...(PDP^{-1})}_{n \text{ fois}} = PD^nP^{-1}$.

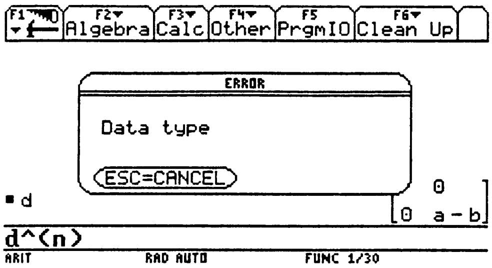
La matrice $D^n$ quand à elle vaut $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (a-b)^n \end{pmatrix}$, expression facile à calculer car $D$ est une matrice diagonale…

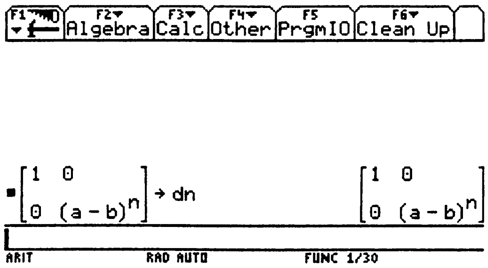
On peut donc calculer rapidement n'importe quelle puissance de la matrice $M$. Attention, la TI-92 ne permet pas le calcul de $D^n$ : elle ne connaît pas la nature de $n$, qu'elle suppose variable réelle. Comme on n'a pas besoin de la calculatrice pour ce calcul, ce n'est pas un gros problème...

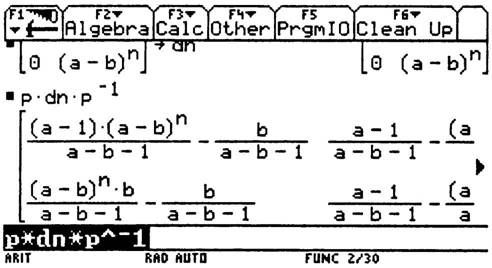
---

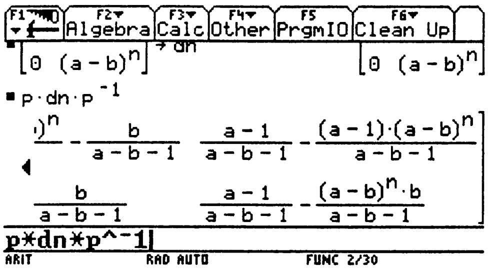
[23] Car les deux sous-espaces propres sont de dimension 1, comme l'ordre de multiplicité de chacune des valeurs propres. Plus simplement, $(v, w)$ constitue une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle l'expression de l'endomorphisme $u$ associé à $M$ est particulièrement simple !

[24] Les puristes préfèreront peut-être résoudre le système à la main... Libre à eux !










La calculatrice nous donne $M^n = \dfrac{1}{1+b-a}\begin{pmatrix} b-(a-1)(a-b)^n & 1-a+(a-1)(a-b)^n \\ b-b(a-b)^n & 1-a+b(a-b)^n \end{pmatrix}$.

Étudions maintenant le comportement de $M^n$ à l'infini.

- **Supposons dans un premier temps que $a - b$ est différent de $-1$, c'est-à-dire que l'on a : $-1 < a - b < 1$.**

En conséquence, la matrice $D^n$ a pour limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$ la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n = \lim\limits_{n\to+\infty} PD^nP^{-1} = P\left(\lim\limits_{n\to+\infty} D^n\right)P^{-1} = PJP^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{b}{1+b-a} & \dfrac{1-a}{1+b-a} \\ \dfrac{b}{1+b-a} & \dfrac{1-a}{1+b-a} \end{pmatrix}$.

Comme $\begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & q_0 \end{pmatrix} \times M^n$, on en déduit en faisant tendre $n$ vers $+\infty$ l'état probabiliste limite :

$$\lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & q_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{b}{1+b-a} & \dfrac{1-a}{1+b-a} \\ \dfrac{b}{1+b-a} & \dfrac{1-a}{1+b-a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b}{1+b-a} & \dfrac{1-a}{1+b-a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}$$

Remarquons que $p$ et $q$ peuvent aussi être considérés comme des probabilités, en ce sens que ces deux nombres appartiennent à l'intervalle [0 ; 1] et que $p + q = 1$.

On retrouve bien sûr le même état limite que dans le paragraphe précédent : un état limite qui ne dépend que de la matrice de transition et aucunement de l'état probabiliste initial du système[25].

Indiquons un moyen de trouver plus rapidement cet état limite : il est aussi stable en ce sens qu'il vérifie $\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}$.

La recherche de l'état stable, qui équivaut à la résolution d'un système, donnera donc en même temps l'état limite.

Par ailleurs, cet état limite correspond à la première ligne de la matrice $P^{-1}$.

[25] Comme nous l'avions déjà remarqué dans le chapitre d'introduction.

Est-ce un hasard ? Pas vraiment car, comme $\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}$, on a, en transposant, ${}^{t}M \times \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Autrement dit, $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^{t}M$ associé à la valeur propre 1 de ${}^{t}M$[26]. De l'égalité $M = PDP^{-1}$, on déduit par transposition ${}^{t}M = {}^{t}(P^{-1}) \times D \times {}^{t}P$.

${}^{t}(P^{-1})$ est la matrice de passage et son premier *vecteur colonne* est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 de ${}^{t}M$ : donc le premier *vecteur ligne* de $P^{-1}$ est donc bien $\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}$.

- **Il nous reste, pour être exhaustif, à examiner le cas où $a - b = -1$, c'est-à-dire $a = 0$ et $b = 1$.**

La matrice de transition est alors $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sans reprendre l'étude précédente, il est alors immédiat de constater que $M^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La suite $(M^n)$ n'est pas convergente ; le système passe alternativement de l'état probabiliste initial $\begin{pmatrix} p_0 & q_0 \end{pmatrix}$ à l'état probabiliste inversé $\begin{pmatrix} q_0 & p_0 \end{pmatrix}$.

## IV. Calcul de $M^n$ par la formule du binôme

Explicitons pour terminer une démarche, mentionnée dans le document d'accompagnement du programme de terminale Es, qui propose un calcul direct de $M^n$ par la formule du binôme.
On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ et l'on note $B$ sa base canonique.
On conserve les notations du paragraphe précédent, et on se place dans le cas où $-1 < a - b < 1$ c'est-à-dire le cas où la matrice de transition $M = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ n'est ni la matrice identité ni la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice $M$ est diagonalisable et a deux valeurs propres réelles distinctes 1 et $a - b$ associées respectivement aux vecteurs propres $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} a-1 \\ b \end{pmatrix}$.

L'espace $\mathbb{R}^2$ est somme directe des deux sous-espaces propres associés à chacune des valeurs propres : $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w$[27].
On adopte les notations suivantes :

> $f$ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ayant $M$ pour matrice dans la base $B$ ;
> $g$ est le projecteur de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}v$ parallèlement à $\mathbb{R}w$, dont la matrice dans la base $B$ est notée $G$ ;
> $h$ est le projecteur de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}w$ parallèlement à $\mathbb{R}v$, dont la matrice dans la base $B$ est notée $H$.

L'idée est d'exprimer $M$ en fonction de $G$ et $H$ puis de calculer $M^n$ par la formule du binôme.
Procédons par étapes.

---

[26] On rappelle qu'une matrice et sa transposée ont les mêmes valeurs propres.
[27] C'est précisément la raison pour laquelle la matrice $M$ est diagonalisable...

*1) Première propriété*

$f = g + (a-b)h.$

*Démonstration*

Soit $X$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ : il s'écrit dans la base $(v, w)$ sous la forme $xv + yw$.
Or $g(X) = xv$ et $h(X) = yw$, par définition des deux projecteurs $g$ et $h$.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} f(X) &= f(xv+yw) = xf(v) + yf(w) = xv + y(a-b)w \\ &= g(X) + (a-b)h(X) = (g+(a-b)h)(X) \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat annoncé. On a bien $f = g + (a-b)h$.

Il s'ensuit immédiatement que $M = G + (a-b)H$.
Que sont donc ces matrices $G$ et $H$ et que peut-on dire d'elles ?

*2) Deuxième propriété*

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ :
$G^n = G$ ;
$H^n = H$.
De plus, $G \times H = H \times G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

*Démonstration*

Ces résultats proviennent du fait que $g$ et $h$ sont des projecteurs. Avec les mêmes notations que dans la propriété précédente :

$gog(X) = gog(xv + yw) = g(xv) = xv = g(X)$ ; par récurrence $g^n = g$ ;
il en est de même pour $h$.

Par ailleurs

$goh(X) = goh(xv + yw) = g(yw) = 0$ et de même pour $hog$.

Les propriétés des matrices en découlent.

*3) Troisième propriété*

$$G = \begin{pmatrix} \dfrac{b}{1+b-a} & \dfrac{1-a}{1+b-a} \\ \dfrac{b}{1+b-a} & \dfrac{1-a}{1+b-a} \end{pmatrix} ; H = \begin{pmatrix} \dfrac{1-a}{1-a+b} & \dfrac{-(1-a)}{1-a+b} \\ \dfrac{-b}{1-a+b} & \dfrac{b}{1-a+b} \end{pmatrix}.$$

*Démonstration*

Soit $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

On sait que $v = i + j$ et $w = (a-1)i + bj$. Par suite :

$g(v) = v$ se traduit par $g(i) + g(j) = i + j$ ;
$g(w) = 0$ se traduit par $(a-1)g(i) + bg(j) = 0$.

En résolvant le système (qui a pour déterminant $b - a + 1 \neq 0$ par hypothèse), on en déduit que $g(i) = \dfrac{b}{1+b-a}(i+j)$ et $g(j) = \dfrac{1-a}{1-a+b}(i+j)$.

Si bien que $G = \begin{pmatrix} \frac{b}{1+b-a} & \frac{1-a}{1+b-a} \\ \frac{b}{1+b-a} & \frac{1-a}{1+b-a} \end{pmatrix}$.

De la même façon :

$h(v) = 0$ se traduit par $h(i) + h(j) = 0$

$h(w) = w$ se traduit par $(a-1)h(i) + bh(j) = (a-1)i + bj$

D'où $h(i) = \frac{1-a}{1-a+b}i - \frac{b}{1-a+b}j$ et $h(j) = -\frac{1-a}{1-a+b}i + \frac{b}{1-a+b}j$.

Donc $H = \begin{pmatrix} \frac{1-a}{1-a+b} & \frac{-(1-a)}{1-a+b} \\ \frac{-b}{1-a+b} & \frac{b}{1-a+b} \end{pmatrix}$.

*4) Conclusion : calcul de $M^n$*

Sachant que $M = G + (a-b)H$, on peut mener le calcul de $M^n$ par la formule du binôme, applicable car $GH = HG$. Les termes diagonaux s'annulent et l'on arrive à :

$$M^n = \left(G + (a-b)H\right)^n = G^n + (a-b)^n H^n = G + (a-b)^n H.$$

On retrouve donc le calcul de $M^n$ et il vient sans l'ombre d'une difficulté que $\lim\limits_{n \to +\infty} M^n = G$.

Ceci termine l'étude des matrices stochastiques d'ordre 2 : remarquons que l'ensemble des résultats pressentis dans l'introduction a été prouvé.

# QUELQUES EXEMPLES DE MATRICES STOCHASTIQUES D'ORDRE 3

Poursuivons notre investigation avec le cas des matrices stochastiques d'ordre 3, qu'il est possible d'aborder mais dans des situations simples selon les termes du programme de terminale Es.
L'étude générale est par contre beaucoup plus délicate, contrairement à ce qui se passe pour l'ordre 2.
Proposons-nous sur quelques exemples de percevoir les difficultés que l'on rencontre et de conjecturer quelques résultats.

## I. Deux cas où la matrice de transition est diagonalisable

*1) Une première matrice stochastique, cas classique*

Proposons-nous d'étudier le système probabiliste défini par la matrice de transition :

$$M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$M$ est bien une matrice stochastique d'ordre 3, dont les termes sont tous strictement positifs.

- Comment interpréter la matrice $M$ ?

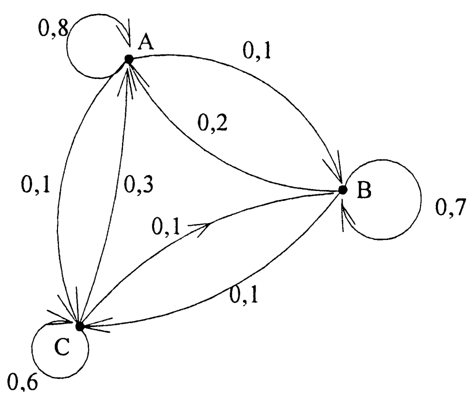
Peu importe l'habillage concret d'un tel exemple : nous savons que nous avons affaire à un processus aléatoire susceptible de se trouver dans l'un des trois états que nous noterons A, B, ou C. La matrice de transition résume les informations suivantes, avec des probabilités qui ne dépendent pas de $n$ :

si le processus est dans l'état A à l'étape $n$ alors il sera à l'étape $n + 1$ :
dans l'état A avec une probabilité égale à 0,8 ;
dans l'état B avec une probabilité égale à 0,1 ;
dans l'état C avec une probabilité égale à 0,1.

s'il est dans l'état B à l'étape $n$ alors il sera à l'étape $n + 1$
dans l'état A avec une probabilité égale à 0,2 ;
dans l'état B avec une probabilité égale à 0,7 ;
dans l'état C avec une probabilité égale à 0,1.

s'il est dans l'état C à l'étape $n$ alors il sera à l'étape $n + 1$
dans l'état A avec une probabilité égale à 0,3 ;
dans l'état B avec une probabilité égale à 0,1 ;
dans l'état C avec une probabilité égale à 0,6.

On peut aussi traduire ces informations à l'aide d'un graphe orienté et pondéré.



- **Approche par les suites**

Si on note $a_n$, $b_n$, $c_n$ les probabilités que le système se trouve respectivement dans les états A, B, ou C à l'étape $n$, on a évidemment les relations :

$$\begin{cases} a_n + b_n + c_n = 1 \\ a_n = 0,8a_{n-1} + 0,2b_{n-1} + 0,3c_{n-1} \\ b_n = 0,1a_{n-1} + 0,7b_{n-1} + 0,1c_{n-1} \\ c_n = 0,1a_{n-1} + 0,1b_{n-1} + 0,6c_{n-1} \end{cases}$$

Tentons d'étudier directement les suites $(a_n)$, $(b_n)$ et $(c_n)$ en faisant apparaître des relations de récurrence.

La troisième équation donne :

$$0,1c_{n-1} = b_n - 0,1a_{n-1} - 0,7b_{n-1} \qquad (1)$$

que l'on peut reporter dans la deuxième équation pour obtenir :

$$\begin{aligned} a_n &= 0,8a_{n-1} + 0,2b_{n-1} + 3b_n - 0,3a_{n-1} - 2,1b_{n-1} \\ &= 0,5a_{n-1} - 1,9b_{n-1} + 3b_n \end{aligned}$$

D'où l'on tire finalement $a_n - 3b_n = 0,5a_{n-1} - 1,9b_{n-1}$. (2)

En remplaçant (1) dans la quatrième équation, on arrive à :

$$\begin{aligned} c_n &= 0,1a_{n-1} + 0,1b_{n-1} + 6b_n - 0,6a_{n-1} - 4,2b_{n-1} \\ &= -0,5a_{n-1} - 4,1b_{n-1} + 6b_n \end{aligned}$$

Tenant compte de la première équation, on arrive enfin à :

$$a_n + 7b_n = 0,5a_{n-1} + 4,1b_{n-1} + 1 \qquad (3)$$

Il reste enfin à rapprocher (2) et (3), pour obtenir finalement :

$$a_n = 0,5a_{n-1} - 0,1b_{n-1} + 0,3$$

$$b_n = 0,6b_{n-1} + 0,1$$

Et pour mémoire, on sait que

$$c_n = 1 - a_n - b_n.$$

*Coup de chance*[28] : la suite $(b_n)$ est une suite arithmético-géométrique.

Si elle converge, c'est nécessairement vers le réel $b$ vérifiant $b = 0,6b + 0,1$ et donc égal à 0,25.

De la même façon, si la suite $(a_n)$ converge, c'est nécessairement vers le réel $a$ vérifiant $a = 0,5a - 0,1 \times 0,25 + 0,3$ et donc égal à 0,55.

Enfin si la suite $(c_n)$ converge, c'est nécessairement vers le réel $c$ vérifiant $c = 1 - a - b$ et donc égal à 0,2.

Réciproquement, montrons la convergence de ces trois suites.

Commençons par la suite $(b_n)$, en utilisant la technique habituelle :

$$b_n - b = 0,6(b_{n-1} - b)$$

La suite $(b_n - b)$ est donc une suite géométrique de raison 0,6 : elle converge vers 0, d'où l'on tire que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0,25$.

Remarquons aussi que $b_n - b = 0,6^n(b_0 - b)$, ce qui permet le calcul de $b_n$ très facilement.

Considérons maintenant la suite $(a_n - a)$. Nous avons remarqué que $a$ vérifie l'égalité $a = 0,5a - 0,1b + 0,3$. Par soustraction avec l'égalité définissant $a_n$, on obtient :

$$a_n - a = 0,5(a_{n-1} - a) - 0,1(b_{n-1} - b)$$

---

[28] Dont il est clair qu'il n'a aucune raison de se produire en général !

Tentons d'exprimer $a_n$ en fonction de $n$ en écrivant les égalités du type de la précédente pour toutes les valeurs depuis $n$ jusqu'à 1 :

$$a_n - a = 0,5(a_{n-1} - a) - 0,1(b_{n-1} - b)$$
$$a_{n-1} - a = 0,5(a_{n-2} - a) - 0,1(b_{n-2} - b)$$
$$a_{n-2} - a = 0,5(a_{n-3} - a) - 0,1(b_{n-3} - b)$$
$$\dots$$
$$a_1 - a = 0,5(a_0 - a) - 0,1(b_0 - b)$$

Il vient alors:

$$\begin{aligned} a_n - a &= 0,5^n\left(a_0 - a\right) - 0,1\left(b_0 - b\right)\left(0,6^{n-1} + 0,5\times 0,6^{n-2} + 0,5^2\times 0,6^{n-3} + \dots + 0,5^{n-1}\right) \\ &= 0,5^n\left(a_0 - a\right) - 0,1\left(b_0 - b\right)\times 0,6^{n-1}\left(1 + \left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \dots + \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right) \\ &= 0,5^n\left(a_0 - a\right) - 0,1\left(b_0 - b\right)\times 0,6^{n-1}\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}} \\ &= 0,5^n\left(a_0 - a\right) - \left(b_0 - b\right)\times 0,6^n\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) \end{aligned}$$

On en déduit une expression de $a_n$ en fonction de $n$ d'une part et d'autre part que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a_n - a\right) = 0$, ce qui prouve bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a = 0,55$.

Reste la suite $(c_n)$ pour laquelle la conclusion est maintenant immédiate car $c_n = 1 - a_n - b_n$. On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - a_n - b_n\right) = 1 - 0,55 - 0,25 = 0,2 = c\,.$$

et le calcul de n'importe quel $c_n$ est possible puisqu'on peut calculer $a_n$ et $b_n$.

Mission accomplie pour l'étude de ces trois suites, en ayant à l'esprit le caractère miraculeux du calcul : si l'une des suites n'est pas arithmético-géométrique, on est dans l'impasse !

- **Approche matricielle**

L'approche matricielle est plus prometteuse, car au lieu de gérer les suites une par une, on globalise avec une matrice.

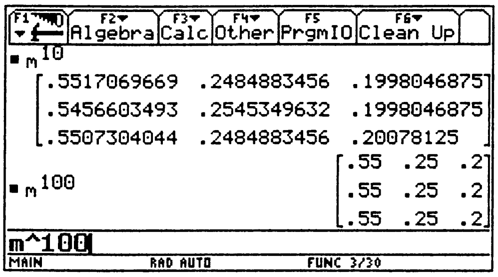
Les formules de récurrence définissant ces trois suites se traduisent par l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$$

dont on déduit $\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}^n$.

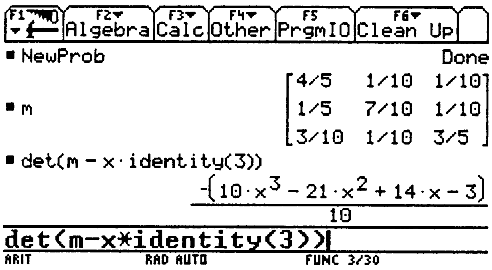
Pour retrouver les limites des suites $(a_n)$, $(b_n)$ et $(c_n)$, la difficulté est de calculer $M^n$ et sa limite.

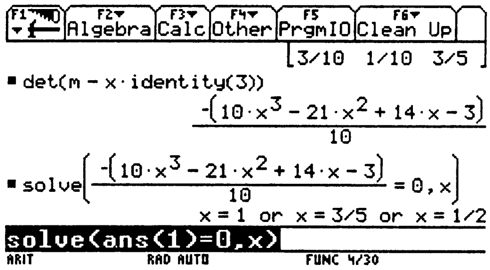
Examinons ce qui se passe avec une calculatrice en faisant quelques calculs de puissances de $M$ avec un exposant suffisamment grand.




Il semble[29] que la matrice $M^n$ ait pour limite la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$ où $a$ , $b$ , $c$ sont les limites obtenues précédemment.

Tout le problème est d'expliciter $M^n$. Comme précédemment, on doit passer par une réduction de la matrice $M$. Son polynôme caractéristique est $P(x) = -x^3 + 2{,}1x^2 - 1{,}4x + 0{,}3$, comme le montre les écrans suivants :



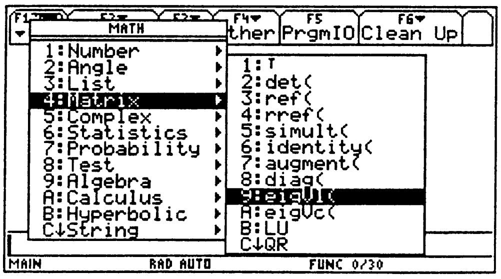

Poursuivons avec la TI-92[30]. La matrice $M$ possède trois valeurs propres réelles distinctes :

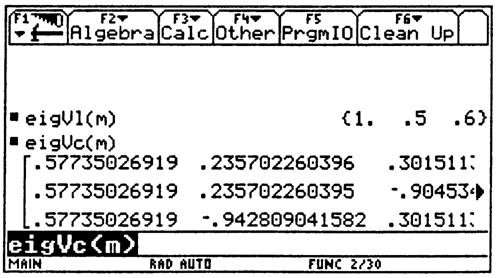
1 associée au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

0,5 associée au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$,

0,6 associée au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Signalons qu'une calculatrice TI-92 plus peut donner *directement* les valeurs propres (instruction *eigVl*), mais aussi la matrice des vecteurs propres unitaires associés (*EigVc*)[31].




---

[29] À ce stade, ce n'est bien sûr qu'une conjecture...

[30] La résolution à la main est facilitée si l'on remarque que 1 est racine du polynôme caractéristique.

[31] On peut reconstituer au coup d'oeil des vecteurs propres non unitaires à coordonnées entières simples, comme ici.

La calculatrice ne donne pas les valeurs exactes des coordonnées des vecteurs propres...
Si l'on est courageux, on doit faire le calcul à la main !

La matrice $M$ est encore ici diagonalisable et on peut écrire $M = P \times D \times P^{-1}$ où $D$ est la matrice diagonale constituée des valeurs propres, $P$ la matrice constituée des vecteurs propres associés et $P^{-1}$ son inverse[32] :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 \end{pmatrix} ; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} ; P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{20} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{-1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $M^n = P \times D^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5^n & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{11}{20} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{-1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

Puis $\lim\limits_{n \to +\infty} M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{11}{20} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{-1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{20} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{11}{20} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{11}{20} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{11}{20} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{11}{20} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{11}{20} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{20} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

On retrouve, plus naturellement, évidemment sous forme rationnelle, les valeurs précédemment obtenues... Cette fois-ci, la méthode a bien fonctionné car on a pu diagonaliser la matrice $M$.

*2) Une deuxième matrice stochastique, ou un passage par l'ensemble des nombres complexes*

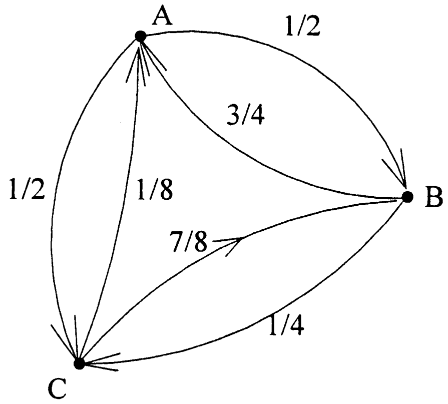
Étudions maintenant le système probabiliste défini par la matrice de transition :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}75 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}125 & 0{,}875 & 0 \end{pmatrix}$$

$N$ est bien une matrice stochastique d'ordre 3, mais dont les termes ne sont pas tous *strictement* positifs.

[32] Que l'on obtient *aussi* avec la TI-92 si l'on veut s'épargner les calculs... mais ce n'est pas obligatoire.

- Nous n'insisterons pas sur l'interprétation probabiliste de cette matrice, qui est la matrice de transition du graphe suivant :




- **Approche par les suites**

De la même façon que dans l'exemple précédent, l'évolution du système se traduit par

$$\begin{cases} a_n + b_n + c_n = 1 \\ a_n = \dfrac{3}{4}b_{n-1} + \dfrac{1}{8}c_{n-1} \\ b_n = \dfrac{1}{2}a_{n-1} + \dfrac{7}{8}c_{n-1} \\ c_n = \dfrac{1}{8}a_{n-1} + \dfrac{7}{8}b_{n-1} \end{cases}$$

Ici encore, il est facile de voir que si les suites $(a_n)$, $(b_n)$, $(c_n)$ convergent, ce ne peut être que vers les limites $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}$ et $\frac{4}{15}$ (la résolution d'un système le montre simplement...).

Par contre, la vérification de la convergence ne peut plus se faire aussi simplement que dans l'exemple précédent, où on a eu la chance de voir apparaître une suite arithmético-géométrique. En reprenant les calculs, que nous ne détaillons pas ici, vous pourrez constater que ce n'est plus le cas ici... Nous abandonnons donc cette méthode pour cet exemple.

- **Suites et ... matrices**

La collaboration des deux est très fructueuse. Nous avons comme d'habitude :

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \end{pmatrix} N^n$$

et plutôt que d'étudier individuellement chacune des suites $(a_n)$, $(b_n)$ et $(c_n)$, nous allons essayer de voir comment évoluent les différents coefficients de $M^n$...
Un tableur est particulièrement bien adapté[33].

Que remarque-t-on ? C'est particulièrement instructif ! Il est manifeste que $M^n$ semble se rapprocher de la matrice $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/5 & 4/15 \\ 1/3 & 2/5 & 4/15 \\ 1/3 & 2/5 & 4/15 \end{pmatrix}$, dont les trois lignes sont identiques[34].

Observons plus précisément ce qui se passe : c'est un peu comme si chaque colonne « s'amenuisait », le maximum de la colonne décroissant, le minimum de la colonne croissant,

---

[33] Mais il n'y a pas de fonction puissance dans Excel. On procède par multiplications successives, ce qui permet de récupérer $N^2$, puis $N^4$, etc. La fonction est PRODUITMAT. Attention à bien sélectionner l'*ensemble* des cellules recevant le résultat, et à faire CONT MAJ ENTREE.

[34] Voir $P^{64}$ qui donne un résultat très parlant. Le 4/15 est obtenu en remarquant que 0,2666666 ≈ 1/5+2/30.

et la différence des deux se rapprochant de 0. On comprend pourquoi la limite de $M^n$ présente trois lignes identiques.

| | | | | **Maximum en rouge**<br>*Minimum en gras italique* | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0,5 | 0,5 | ***0*** | | 0,5 |
| P | 0,75 | 0 | 0,25 | 0,75 | ***0*** | |
| | 0,125 | 0,875 | 0 | | 0,875 | ***0*** |
| | 0,4375 | 0,4375 | 0,125 | | | ***0,125*** |
| P^2 | 0,03125 | 0,59375 | 0,375 | ***0,03125*** | 0,59375 | 0,375 |
| | 0,65625 | 0,0625 | 0,28125 | 0,65625 | ***0,0625*** | |
| | 0,28710938 | 0,45898438 | 0,25390625 | | 0,458984375 | |
| P^4 | 0,27832031 | 0,38964844 | 0,33203125 | ***0,278320313*** | | 0,33203125 |
| | 0,47363281 | 0,34179688 | 0,18457031 | 0,473632813 | ***0,341796875*** | ***0,18457031*** |
| | 0,3304348 | 0,39740562 | 0,27215958 | | | ***0,27215958*** |
| P^8 | 0,34561634 | 0,39305782 | 0,26132584 | 0,345616341 | ***0,393057823*** | 0,261325836 |
| | 0,31853199 | 0,41365623 | 0,26781178 | ***0,31853199*** | 0,413656235 | |
| | 0,33322857 | 0,40010054 | 0,26667089 | ***0,333228566*** | 0,400100543 | |
| P^16 | 0,33329151 | 0,39994339 | 0,2667651 | | ***0,399943391*** | 0,266765097 |
| | 0,33352703 | 0,39995923 | 0,26651374 | 0,333527026 | | ***0,26651374*** |
| | 0,33333334 | 0,39999998 | 0,26666668 | | ***0,399999984*** | |
| P^32 | 0,33333336 | 0,39999999 | 0,26666665 | 0,333333359 | | ***0,26666665*** |
| | 0,33333329 | 0,40000003 | 0,26666669 | ***0,333333285*** | 0,400000028 | 0,266666687 |
| | 0,33333333 | 0,4 | 0,26666667 | | | |
| P^64 | 0,33333333 | 0,4 | 0,26666667 | | | |
| | 0,33333333 | 0,4 | 0,26666667 | | | |

Nous n'avons ici rien démontré, tout au plus constaté, conjecturé. Mais ces remarques suggèrent une méthode que nous mettrons en oeuvre dans le cas général au chapitre suivant[35].

Revenons au problème de la détermination de l'état limite... On peut affirmer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix}a_n & b_n & c_n\end{pmatrix} = \lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix}a_0 & b_0 & c_0\end{pmatrix}N^n = \begin{pmatrix}a_0 & b_0 & c_0\end{pmatrix}\lim_{n\to+\infty}N^n$$

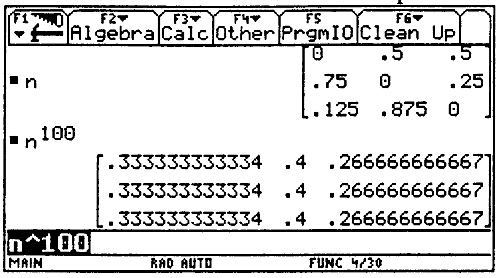
$$= \begin{pmatrix}a_0 & b_0 & c_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/3 & 2/5 & 4/15\\ 1/3 & 2/5 & 4/15\\ 1/3 & 2/5 & 4/15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3 & 2/5 & 4/15\end{pmatrix}$$

- **Les matrices toutes seules... et l'algèbre linéaire**

Revenons à une vision strictement matricielle, en faisant intervenir cette fois des résultats d'algèbre linéaire.

[35] Nous donnerons la démonstration parce que le résultat est troublant et éclaire la compréhension de l'évolution des puissances d'une matrice stochastique. Ceci étant, nous privilégierons dans cette brochure l'utilisation d'outils puissants, le calcul matriciel et la réduction des matrices.

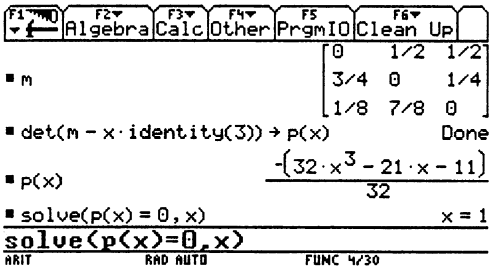
On repart de la relation $(a_n \quad b_n \quad c_n) = (a_0 \quad b_0 \quad c_0) N^n$ : tout le problème est de *calculer* $N^n$ et son éventuelle limite en l'infini.
Que dit la calculatrice ? On retrouve bien sûr les résultats que le tableur a mis en évidence.

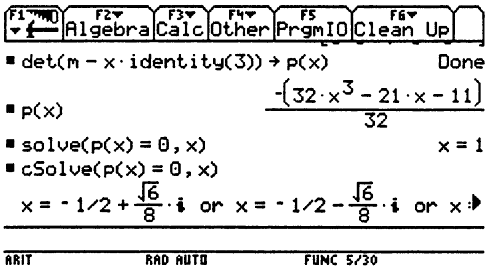



La matrice $N^n$ semble avoir pour limite $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/5 & 4/15 \\ 1/3 & 2/5 & 4/15 \\ 1/3 & 2/5 & 4/15 \end{pmatrix}$.

Justifions-le, d'abord par la détermination des valeurs propres et des vecteurs propres.

$N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} & 0 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $-X^3 + \frac{21}{32}X + \frac{11}{32}$.




Mais cette fois, ce dernier polynôme ne possède qu'une seule racine *réelle* 1… Qu'à cela ne tienne : résolvons dans $\mathbb{C}$ pour obtenir deux racines complexes conjuguées $z' = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{8}i$ et $z'' = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{8}i$.

*Contrepartie :* pour déterminer les vecteurs propres associés à chacune de ces valeurs propres, nous sommes amenés à travailler $\mathbb{C}^3$, considéré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et non plus dans $\mathbb{R}^3$…

La recherche des vecteurs propres est fastidieuse, mais on y arrive avec patience : nous nous contenterons ici de donner les résultats[36].

Le sous espace propre associé à 1 est toujours la droite engendrée par le vecteur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

[36] Ici, la TI-92 fait défaut : les fonction *eigVl* et *eigVc* ne renvoient rien quand le résultat n'est pas réel…

Le sous espace propre (considéré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel) associé à la valeur propre complexe $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{8}i$ est la droite engendrée par le vecteur $v' = \begin{pmatrix} -4+6i\sqrt{6} \\ -16-5i\sqrt{6} \\ 29 \end{pmatrix}$.

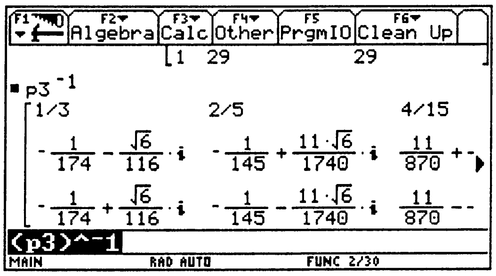
Enfin le sous espace propre (considéré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel) associé à la valeur propre complexe $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{8}i$ est la droite engendrée par le vecteur $v'' = \begin{pmatrix} -4-6i\sqrt{6} \\ -16+5i\sqrt{6} \\ 29 \end{pmatrix}$.

Nous sommes de nouveau dans le cas où la matrice est diagonalisable, mais il faut travailler dans $\mathbb{C}$. On a donc :

$N = P \times D \times P^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{8}i & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{8}i \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -4+6i\sqrt{6} & -4-6i\sqrt{6} \\ 1 & -16-5i\sqrt{6} & -16+5i\sqrt{6} \\ 1 & 29 & 29 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} \text{ qui est}$$

donnée par la calculatrice.




Comme précédemment, on a $N^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

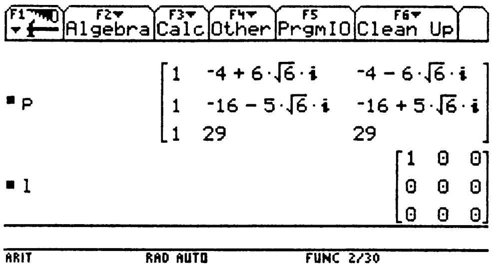
Le calcul de $D^n$ ne pose aucun problème avec une matrice diagonale :

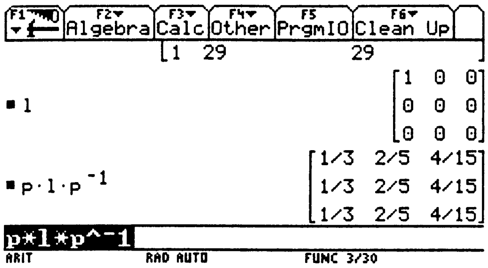
$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{8}i\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{8}i\right)^n \end{pmatrix}$$

Remarquons que $N^n$ est nécessairement une matrice à coefficient réels, malgré le passage par $\mathbb{C}$ : comment pourrait-il en être autrement quand c'est déjà le cas de $N$ ?

Étudions maintenant la limite à l'infini de $N^n$.

Comme les deux valeurs propres complexes autres que 1 de $N$ ont un module strictement inférieur à 1, la matrice $D^n$ admet encore ici pour limite la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L$.




On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} N^n = PLP^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/5 & 4/15 \\ 1/3 & 2/5 & 4/15 \\ 1/3 & 2/5 & 4/15 \end{pmatrix}$$

Cette matrice limite est en fait la matrice dont les trois lignes sont identiques, et curieusement, encore une fois comme dans le cas des matrices stochastiques d'ordre 2, identiques au premier vecteur ligne de $P^{-1}$.

On peut expliquer par un simple calcul matriciel le phénomène observé. Regardons ce qui se passe d'un peu plus près dans le produit matriciel $PLP^{-1}$.

Tout d'abord, quel est l'effet du produit de $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ par la matrice $P^{-1}$ ?

Il est facile de voir que l'on obtient comme résultat une matrice dont la première ligne est identique à la première ligne $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ de $P^{-1}$ et dont les autres lignes sont nulles.

Quel est l'effet du produit d'une matrice dont la première colonne est constitué de 1 (comme $P$ ) par une matrice du type $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ?

On obtient la matrice dont les trois lignes sont identiques à la ligne $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$

Le résultat n'est donc pas surprenant.

Si l'état initial du système correspond à $\begin{pmatrix} p_0 & q_0 & r_0 \end{pmatrix}$, avec bien sûr $p_0 + q_0 + r_0 = 1$, le système évoluera à l'infini vers l'état limite $l$ défini par :

$$\begin{pmatrix} p_0 & q_0 & r_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/5 & 4/15 \\ 1/3 & 2/5 & 4/15 \\ 1/3 & 2/5 & 4/15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/5 & 4/15 \end{pmatrix} = l,$$

état qui ne dépend pas des conditions initiales du système, mais juste de la matrice de transition.

Montrons que cet état limite vérifie, comme à l'ordre 2, $lN = N$, ce qui donnera un moyen simple[37] de le déterminer. On peut le constater directement car on connaît $l$ ; montrons pourquoi cela fonctionne de façon générale.

Les colonnes de la matrice $P$ sont les vecteurs propres $v$ , $v'$ , $v''$ associés aux valeurs propres 1, $z'$ et $z''$. Par conséquent :

le vecteur colonne $v$ constitué de 1 vérifie $Nv = v$,

le vecteur colonne $v'$ vérifie $Nv' = z'v'$,

[37] Une résolution de système…

le vecteur colonne $v''$ vérifie $Nv'' = z''v''$.

La matrice $P^{-1}$ est constituée de trois lignes, la première est précisément $l$, les autres $l'$ et $l''$ qui vérifient[38] :

$lv = 1$ ; $lv' = 0$ ; $lv'' = 0$ ; $l'v = 0$ ; $l'v' = 1$ ; $l'v'' = 0$ ; $l''v = 0$ ; $l''v' = 0$ ; $l''v'' = 1$

Par conséquent, on a :

$lNv = lv = 1 = a + b + c$ ;

$lNv' = lz'v' = z'lv' = 0 = lv'$ $\qquad (z' \in \mathbb{C})$

$lNv'' = lz''v'' = z''lv'' = 0 = lv''$.

*Bilan :* $lN$ et $l$ coïncident sur les vecteurs propres donc $lN=l$

La première ligne de $P^{-1}$ est donc un vecteur ligne stochastique qui correspond ici à un état stable du système.

*3) Conclusion provisoire*

Ces deux exemples montrent la pertinence et la puissance du calcul matriciel, permettant un traitement global de la situation.

Nous avons dégagé deux stratégies, toutes les deux basées sur le calcul de $M^n$.

La première stratégie consiste à étudier la limite de $M^n$ en faisant intervenir les suites.

La seconde s'appuie sur la réduction des endomorphismes.

Lorsque la matrice de transition est diagonalisable, on peut poursuivre les calculs sans problème particulier, quitte à se placer dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. L'état limite est par ailleurs un vecteur ligne stochastique stable c'est-à-dire solution du système $lM = l$.

Quelques questions demeurent posées :

1 est-il toujours valeur propre d'une matrice stochastique ?

Les valeurs propres autres que 1 ont-elles toujours un module strictement inférieur à 1 ? *(c'est ce qui a permis la convergence dans le deuxième exemple)*

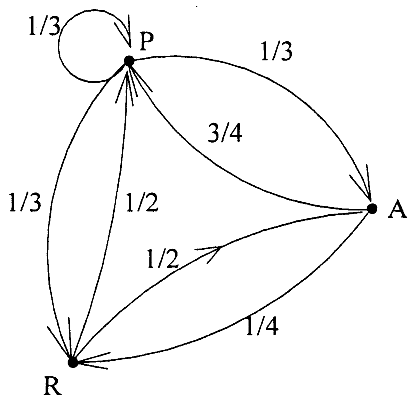
Que se passe-t-il dans le cas où la matrice n'est pas diagonalisable ?

Y-a-t-il plusieurs vecteurs stochastiques stables ?

## II. Une tentative d'explication d'un exemple de l'introduction : Kévin et ses retards

Les remarques et réflexions précédentes nous donnent suffisamment d'éléments pour résoudre rigoureusement le problème de Kévin et de ses retards.

Rappelons le graphe probabiliste résumant la situation de Kévin, vue dans l'introduction.




La matrice de transition du graphe est $M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

[38] Car $PP^{-1} = I_3$, matrice identité à l'ordre 3.

- **Cette matrice est-elle diagonalisable ?**

Les valeurs propres[39] sont 1, $z' = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{12}i$ et $z'' = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{12}i$, ce qui nous oblige encore de passer par $\mathbb{C}$. Une fois de plus, on remarque que 1 est valeur propre et que les deux autres, complexes, ont un module strictement inférieur à 1.

$M$ est diagonalisable : elle est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z' & 0 \\ 0 & 0 & z'' \end{pmatrix}$.

Comme d'habitude, on a $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

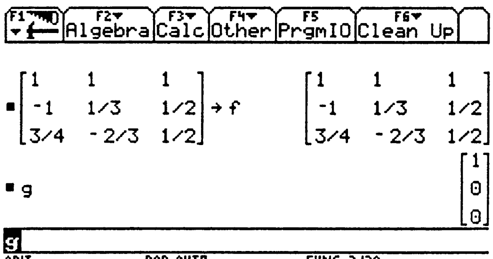
Donc la suite des puissances de $M$ converge et on peut écrire :

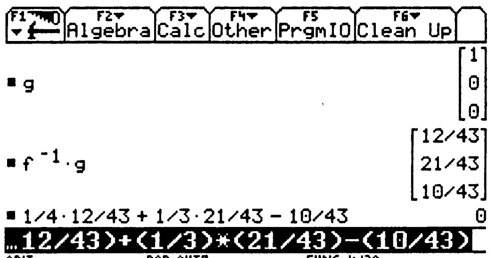
$$\lim_{n \to +\infty} M^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

où les réels $a$, $b$, et $c$ forment un vecteur ligne $l$ stochastique, qui correspond à l'état limite du système. C'est, on l'a vu, la première ligne de matrice $P^{-1}$, mais nous utiliserons l'autre caractérisation que nous avons rencontré pour le déterminer, à savoir qu'il vérifie $lM = l$.
Nous devons donc résoudre le système :.

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ \frac{1}{3}b+\frac{1}{2}c=a \\ \frac{3}{4}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{2}c=b \\ \frac{1}{4}a+\frac{1}{3}b=c \end{cases} \text{ équivalant à } \begin{cases} a+b+c=1 \\ -a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{2}c=0 \\ \frac{3}{4}a-\frac{2}{3}b+\frac{1}{2}c=0 \\ \frac{1}{4}a+\frac{1}{3}b-c=0 \end{cases}$$

La résolution par la calculatrice des trois premières équations donne :



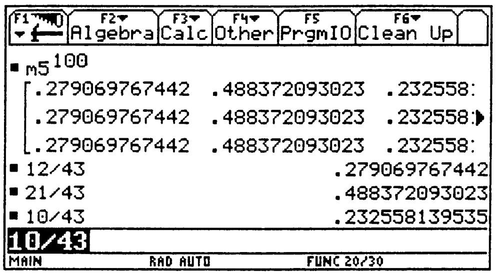




La dernière équation est elle aussi vérifiée avec ces valeurs.

La solution est $a = \frac{12}{43}$ ; $b = \frac{21}{43}$ ; $c = \frac{10}{43}$ : il n'y a donc qu'un seul vecteur stochastique stable, $\begin{pmatrix} 12/43 & 21/43 & 10/43 \end{pmatrix}$ qui correspond à l'état limite du système.

Ce que nous confirme la calculatrice, en calculant $M^n$ pour une grande valeur de $n$ :

[39] Obtenues par la TI-92.

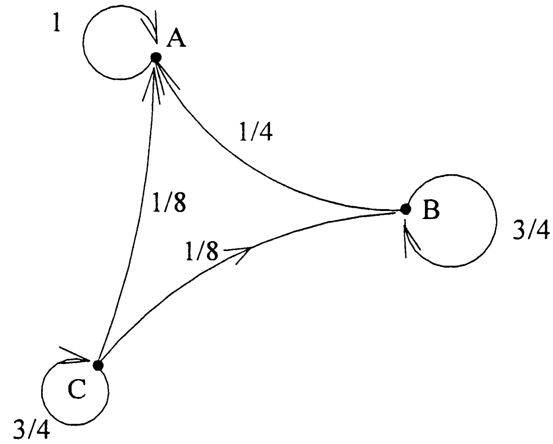



## III. Et si la matrice de transition n'est pas diagonalisable ?

- C'est un cas que nous n'avons pas abordé mais on peut penser, qu'à l'ordre 3, il est loin d'être rare.

Considérons par exemple le graphe probabiliste suivant dont la matrice de transition est :

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$




Le polynôme caractéristique de la matrice est $(1-X)(\frac{3}{4}-X)^2$. La matrice $M$ possède comme valeurs propres, 1 d'ordre 1 et 3/4[40] d'ordre 2.

Le sous-espace propre associé à 1 est la droite engendrée par le vecteur colonne $v=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Le sous-espace propre associé à $\frac{3}{4}$ est la droite engendrée par le vecteur colonne $w=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

La matrice $M$ n'est donc pas diagonalisable, car la valeur propre 3/4, d'ordre 2, n'est pas associée à un sous-espace propre de dimension 2 : on ne peut donc pas construire de base de $\mathbb{R}^3$ uniquement avec des vecteurs propres.

---

[40] Dont la valeur absolue est une fois de plus strictement inférieure à 1.

• À défaut d'être diagonalisable, nous savons que la matrice $M$ peut *toujours* s'écrire sous forme triangulaire supérieure : plus précisément, nous allons déterminer sa *réduite de Jordan*... C'est à partir de cette forme que nous tenterons de calculer $M^n$.

Comment procède-t-on ?
Plaçons nous dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, dont la base canonique est notée $B$, et considérons l'endomorphisme $u$ dont la matrice est $M$ dans la base $B$.
$M$ n'est pas diagonalisable car la somme (directe) des sous-espaces propres associés aux deux valeurs propres ne fait pas $\mathbb{R}^3$ tout entier :

$$\ker(u-I)\oplus\ker\left(u-\frac{3}{4}I\right)\subset\mathbb{R}^3 \quad (\textit{inclusion stricte})$$

Il faut donc « agrandir » ces sous-espaces propres : on conserve $E = \ker(u-I)$ et on travaille avec $E' = \ker\left(u-\frac{3}{4}I\right)^2$ (*car 3/4 est une valeur propre* ***d'ordre 2***).

Remarquons d'ores et déjà que $\ker\left(u-\frac{3}{4}I\right)\subset\ker\left(u-\frac{3}{4}I\right)^2$ : la vérification est immédiate[41].

conformément à ce que l'on a dit, on a bien « agrandi » $\ker\left(u-\frac{3}{4}I\right)$.

Il se trouve que cette fois la somme directe de $E$ et de $E'$ redonne bien $\mathbb{R}^3$ tout entier.

$$\ker(u-I)\oplus\ker\left(u-\frac{3}{4}I\right)^2=\mathbb{R}^3.$$

Plus précisément, appelons $F$ un supplémentaire de $\ker\left(u-\frac{3}{4}I\right)$ dans $E'$.

On peut alors écrire :

$$\ker\left(u-\frac{3}{4}I\right)\oplus F=\ker\left(u-\frac{3}{4}I\right)^2$$

Finalement, on peut écrire : $\mathbb{R}^3 = \ker(u-I)\oplus\ker\left(u-\frac{3}{4}I\right)^2=\ker(u-I)\oplus\ker\left(u-\frac{3}{4}I\right)\oplus F$.

C'est cette décomposition qui va nous fournir la base cherchée.
Déterminons analytiquement chacun des trois sous-espaces vectoriels de cette somme directe.
Les deux premiers sont connus car ce sont les sous-espaces propres, le premier engendré par le vecteur $v=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, le second engendré par le vecteur $w=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Précision $F$ supplémentaire dans $E'$ de $\ker\left(u-\frac{3}{4}I\right)$ en raisonnant matriciellement :

[41] conformément à ce que l'on a dit, on a bien « agrandi » $\ker\left(u-\frac{3}{4}I\right)$.

$$M-\frac{3}{4}I=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0 & 0\\ \frac{1}{4} & 0 & 0\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0\end{pmatrix}, \text{ donc } \left(M-\frac{3}{4}I\right)^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{16} & 0 & 0\\ \frac{1}{16} & 0 & 0\\ \frac{1}{16} & 0 & 0\end{pmatrix}$$

De cette écriture, on déduit que $E'$ est le sous espace vectoriel d'équation $x = 0$[42].

Prenons comme supplémentaire $F$ de $\ker\left(u-\frac{3}{4}I\right)$ dans $E'$ est la droite engendrée par le vecteur $t=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Remarquons que $\left(u-\frac{3}{4}I\right)(t)=\begin{pmatrix}0\\0\\1/8\end{pmatrix}=\frac{1}{8}w$.

Choisissons alors comme base de $\mathbb{R}^3$ la famille $(v, w, t)$. Quelle est la matrice de $u$ dans cette nouvelle base ?

Déterminons donc les images par $u$ de chacun des vecteurs de cette base :

$u(v) = v$ car $v$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 ;

$u(w) = \frac{3}{4}w$ car $w$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\frac{3}{4}$

$u(t)=\left(u-\frac{3}{4}I+\frac{3}{4}I\right)(t)=\left(u-\frac{3}{4}I\right)(t)+\frac{3}{4}t=\frac{1}{8}w+\frac{3}{4}t.$

Si bien que la matrice de $u$ dans cette base $(v, w, t)$ est la matrice *triangulaire* :

$$T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8}\\ 0 & 0 & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

On peut améliorer encore un peu cette écriture pour parvenir à ce que l'on appelle la réduite de Jordan de $M$ : l'idée est de remplacer le 1/8 par 1.

Il suffit de choisir comme base $\left(v, \frac{1}{8}w, t\right)$. Il est alors immédiat que :

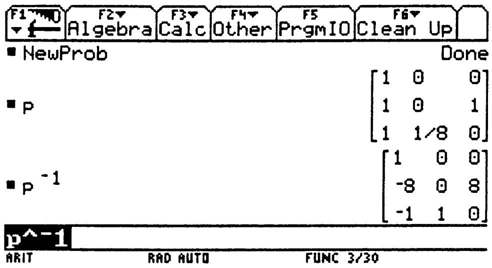
$u(v)=v$ ; $u\left(\frac{1}{8}w\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{8}w\right)$ ; $u(t)=\frac{1}{8}w+\frac{3}{4}t$

si bien que la matrice de $u$ dans cette nouvelle base est $J=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{4} & 1\\ 0 & 0 & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$.

Les formules de changement de base donnent :

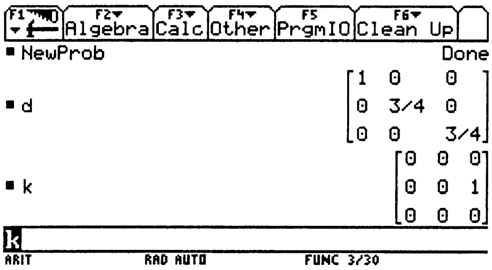
[42] On retrouve que $E'$ contient $\ker\left(u-\frac{3}{4}I\right)$, c'est-à-dire le sous-espace propre associé à la valeur propre 3/4.

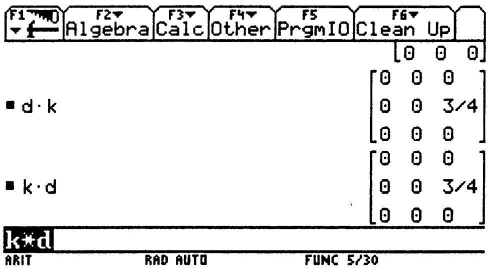
$$M = PJP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 8 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$




On peut en déduire : $M^n = PJ^nP^{-1}$. Mais une difficulté apparaît : comment calculer $J^n$ avec une matrice qui n'est plus diagonale mais triangulaire supérieure ?

Il suffit de remarquer que $J = D + K$ où $D$ est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et $K$ est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.




Comme $DK = KD$, on on peut utiliser la formule du binôme. On a donc :

$$J^n = (D + K)^n = D^n + nD^{n-1} \times K$$

Seuls deux termes sont non nuls, car $K^2 = 0$ et donc toutes les puissances de $K$ sont nulles sauf $K$ elle même. Finalement :

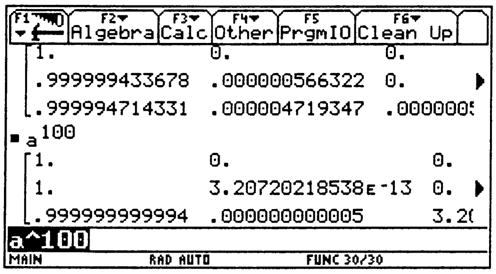
$$J^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{4}\right)^n & n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \\ 0 & 0 & \left(\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

Les conclusions précédentes vont demeurer.
Le calcul de $M^n$ est possible par $M^n = PJ^nP^{-1}$.

Par ailleurs, la matrice $J^n$ possède pour limite la matrice $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} M^n = PLP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Les trois lignes de la matrice limite sont identiques à la première ligne de $P^{-1}$ et correspondent encore à l'état stable du système.
L'état limite du système est donc donné par la distribution (1, 0, 0). Au bout d'un très grand nombres d'étapes le système sera presque sûrement dans l'état A, quel que soit son état initial.
A l'écran de la calculatrice, les puissances 50 et 100 de la matrice de transition.




*Nouvelle conclusion provisoire*
Même si la matrice de transition $M$ n'est pas diagonalisable, les calculs peuvent se poursuivre en utilisant la réduite de Jordan de $M$ : cette dernière méthode est toujours utilisable, quitte à travailler dans $\mathbb{C}$.
Même dans ce cas, la suite des puissances de $M$ peut converger.
D'autre part, on retrouve des conjectures précédentes :

1 est valeur propre de $M$,
les autres valeurs propres ont un module strictement inférieur à 1[43],
il y a convergence vers une matrice ayant ces trois lignes identiques au vecteur ligne stochastique $l$ qui vérifie $lM = M$.

[43] On peut trouver en fait des valeurs propres, autres que 1, et de module égal à 1 : on en rencontrera des exemples plus tard.

# ÉTUDE GÉNÉRALE DES MATRICES STOCHASTIQUES

## I. Qu'est-ce qu'une matrice stochastique ?

*1) Définition générale d'une matrice stochastique*

- La définition formelle est la suivante.

**Matrice stochastique**

On appelle *matrice stochastique* d'ordre $q$ toute matrice carrée $M = \left(m_{ij}\right)_{\substack{i=1,\dots,q \\ j=1,\dots,q}}$ telle que :

pour tous $i$ et $j$, $m_{ij}$ appartient à $[0 ; 1]$ ;

pour tout $i$, $\sum_j m_{ij} = 1$.

La somme de tous les nombres situés sur une même ligne doit faire 1.

**Vecteur stochastique**

On appelle *vecteur stochastique* un vecteur dont toutes les coordonnées sont positives ou nulles et dont la somme fait 1.

- Une matrice stochastique $M$ peut être considérée comme la matrice de transition d'un graphe probabiliste à $q$ sommets, ces $q$ sommets étant les $q$ états dans lesquels un système est susceptible de se trouver à une quelconque étape de son évolution. Le coefficient $m_{ij}$ représente alors la probabilité que le système évolue vers l'état $j$, sachant qu'il est dans l'état $i$.

On note $p_{nk}$ la probabilité que le système se trouve dans l'état $E_k$ à l'étape $n$. Le vecteur $\begin{pmatrix} p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nq} \end{pmatrix}$ est alors un vecteur stochastique.

Comme on l'a déjà vu précédemment, on a :

$$\begin{pmatrix} p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{01} & p_{02} & p_{03} & \cdots & p_{0q} \end{pmatrix} \times M^n$$

où $\begin{pmatrix} p_{01} & p_{02} & p_{03} & \cdots & p_{0q} \end{pmatrix}$ est le vecteur stochastique correspondant à l'étape initiale.

Pour calculer la probabilité que le système se trouve dans un état donné à l'étape $n$, on doit pouvoir estimer $M^n$, et sa limite pour voir comment évolue le système à l'infini.

- **Vecteur stochastique stable**

Si à partir d'une certaine étape $n$, on a :

$$\begin{pmatrix} p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nq} \end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix} p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nq} \end{pmatrix}$$

alors le système reste dans le même état probabiliste à n'importe quelle étape ultérieure. Le système a atteint une sorte d'équilibre et n'évolue plus.

**Définition**

Un vecteur stochastique $P$ est dit *stable* s'il vérifie $P \times M = P$.

Si on transpose l'égalité précédente, on obtient ${}^tM \times {}^tP = {}^tP$. Autrement dit, dire qu'un vecteur (ligne) est stable pour $M$ équivaut à dire que le vecteur (colonne) transposé est vecteur propre associé à la valeur propre 1 de la transposée de $M$.

*2) Quelques propriétés des matrices stochastiques*

Établissons d'abord une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit stochastique.

**Propriété**

> Soit $\Lambda$ une matrice colonne non nulle dont tous les éléments sont identiques et $M$ une matrice dont les coefficients sont positifs ou nuls.
> Alors la matrice carrée $M$ est stochastique si et seulement si elle vérifie $M\Lambda = \Lambda$.

*Démonstration*

Posons $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ \dots \\ \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \neq 0$.

Si la matrice $M = (m_{ij})$ est stochastique, alors il est immédiat que $M\Lambda = \Lambda$, car la somme des éléments situés sur chaque ligne de $M$ est égale à 1.
Inversement si on a $M\Lambda = \Lambda$, alors on peut écrire quel que soit $i$ :

$$m_{i1}\lambda + m_{i2}\lambda + \dots + m_{iq}\lambda = \lambda .$$

En simplifiant par $\lambda$ non nul par hypothèse, on obtient $m_{i1} + m_{i2} + \dots + m_{iq} = 1$, ce qui prouve que la somme des nombres de la $i^e$ ligne fait 1.

On peut alors démontrer le théorème qui suit, établissant quelques propriétés fondamentales des matrices stochastiques.

**Théorème**

> Le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.
> Toute puissance d'une matrice stochastique est stochastique.
> Si une matrice stochastique est inversible, son inverse est aussi stochastique si et seulement si tous ses éléments sont positifs.
> Enfin toute limite d'une suite de matrices stochastiques est stochastique.

*Démonstration*

Appelons $\Lambda$ une matrice colonne à $q$ éléments, non nulle, et dont tous les éléments sont identiques.

- Soit $A$ et $B$ deux matrices stochastiques d'ordre $q$. Il est clair que la matrice $AB$ a tous ses termes positifs ou nuls. Par ailleurs :

$$AB\Lambda = A(B\Lambda) = A\Lambda = \Lambda$$

et ceci prouve que le produit $AB$ est lui aussi stochastique[44].

- On en déduit aisément par récurrence que toute puissance d'une matrice stochastique l'est aussi.

- Soit $M$ une matrice stochastique inversible. Alors $M\Lambda = \Lambda$, d'où l'on tire que $\Lambda = M^{-1}\Lambda$. Ceci prouve que $M^{-1}$ est stochastique si et seulement si ses coefficients sont tous positifs ?

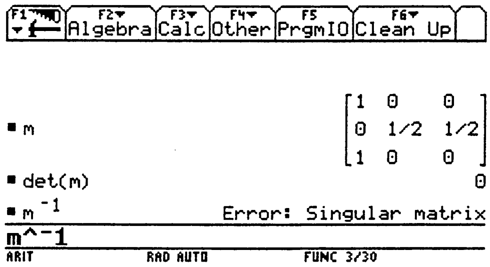
- Soit $(M_n)$ une suite de matrices stochastiques pour toute valeur de $n$ et convergeant vers une matrice $M$. Remarquons que les coefficients de $M$ sont nécessairement positifs, comme ceux de $M_n$.
Alors pour tout entier $n$, on a $M_n\Lambda = \Lambda$. Par passage à la limite dans l'égalité précédente, il vient $M\Lambda = \Lambda$, ce qui prouve bien que $M$ est aussi stochastique.

Revenons sur le problèmes des matrices stochastiques inversibles : elles ne le sont pas toutes comme le prouve l'exemple suivant.

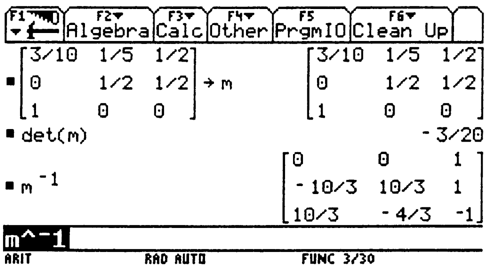
---

[44] Signalons que la démonstration directe par le produit matriciel est immédiate.

Considérons la matrice stochastique $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Elle n'est pas inversible, comme le montre l'écran suivant[45] :




De même, l'inverse d'une matrice stochastique *inversible* n'est pas forcément stochastique car elle a éventuellement de coefficients strictement négatifs[46].




## II. Étude directe de la matrice $M^n$

*La lecture de ce paragraphe n'est pas indispensable à ce qui suit et peut être omise en première lecture. La difficulté apparente de lecture tient plus aux notations forcément lourdes qu'au contenu mathématique sous-jacent.*

Nous démontrons dans ce paragraphe les conjectures que nous avons faites sur les coefficients de $M^n$ lors du deuxième exemple du chapitre précédent. Les démonstrations[47] qui suivent sont basées sur la définition d'une matrice stochastique, à savoir que la somme sur chaque ligne fait 1.

Nous utiliserons les notations suivantes :

$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1q} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{q1} & m_{q2} & \dots & m_{qq} \end{pmatrix}$ est donc une matrice stochastique d'ordre $q$ ;

$m$ est le plus petit des éléments de $M$ ;

$M^n = \begin{pmatrix} m_{11}^{(n)} & m_{12}^{(n)} & \dots & m_{1q}^{(n)} \\ m_{21}^{(n)} & m_{22}^{(n)} & \dots & m_{2q}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{q1}^{(n)} & m_{q2}^{(n)} & \dots & m_{qq}^{(n)} \end{pmatrix}$ est sa puissance $n^e$ ;

pour une colonne $j$, on pose :

$$a_j^{(n)} = \operatorname*{Inf}_{1 \le i \le q} m_{ij}^{(n)} \text{ et } A_j^{(n)} = \operatorname*{Sup}_{1 \le i \le q} m_{ij}^{(n)}.$$

---

[45] Ou mieux, un calcul du déterminant par bloc montre que det $M = 0$.

[46] Mais la somme des coefficients sur une même ligne donne bien 1...

[47] Même si l'écriture paraît lourde, les principes sont simples... C'est le prix à payer pour avoir une démonstration générale

Autrement dit $a_j^{(n)}$ est le plus petit nombre de la *colonne j* de $M^n$ et $A_j^{(n)}$ le plus grand.

- Une remarque préalable sur le nombre $m$ : il est en général positif ou nul. Nous le supposerons dans toute la suite **strictement positif**[48].

Par ailleurs, quel que soit l'entier $i$ compris entre 1 et $q$, on a $m \leq m_{i1}, m \leq m_{i2}, ..., m \leq m_{iq}$, ce qui prouve par addition de ces inégalités que $qm \leq m_{i1} + m_{i2} + ... + m_{iq} = 1$ donc que $m \leq \frac{1}{q}$.

- Revenons à l'exemple étudié au chapitre 3 : nous avions remarqué que la suite $\left(a_j^{(n)}\right)$ est croissante, tandis que $\left(A_j^{(n)}\right)$ est décroissante. La démonstration de ces résultats est immédiate.

**La suite $\left(a_j^{(n)}\right)_n$ est monotone croissante.**

En effet, on a $M^{n+1} = MM^n$ et on sait que $a_j^{(n+1)}$ est un des $m_{ij}^{(n+1)}$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} a_j^{(n+1)} = m_{ij}^{(n+1)} &= m_{i1}m_{1j}^{(n)} + m_{i2}m_{2j}^{(n)} + ... + m_{iq}m_{qj}^{(n)} \\ &\geq m_{i1}a_j^{(n)} + m_{i2}a_j^{(n)} + ... + m_{iq}a_j^{(n)} \\ &\geq \left(m_{i1} + m_{i2} + ... + m_{iq}\right)a_j^{(n)} = a_j^{(n)} \end{aligned}$$

**La suite $\left(A_j^{(n)}\right)_n$ est monotone décroissante.**

La démonstration est analogue.

$$\begin{aligned} A_j^{(n+1)} = m_{ij}^{(n+1)} &= m_{i1}m_{1j}^{(n)} + m_{i2}m_{2j}^{(n)} + ... + m_{iq}m_{qj}^{(n)} \\ &\leq m_{i1}A_j^{(n)} + m_{i2}A_j^{(n)} + ... + m_{iq}A_j^{(n)} \\ &\leq \left(m_{i1} + m_{i2} + ... + m_{iq}\right)A_j^{(n)} = A_j^{(n)} \end{aligned}$$

- Dans une première étape de la démonstration, nous majorons $A_j^{(n)} - a_j^{(n)}$ où $j$ est un entier quelconque entre 1 et $q$.

$$\begin{aligned} A_j^{(n)} - a_j^{(n)} &= \mathrm{Sup}\left(m_{1j}^{(n)} - a_j^{(n)}, m_{2j}^{(n)} - a_j^{(n)}, ..., m_{qj}^{(n)} - a_j^{(n)}\right) \\ &\leq \left(m_{1j}^{(n)} - a_j^{(n)}\right) + \left(m_{2j}^{(n)} - a_j^{(n)}\right) + ... + \left(m_{qj}^{(n)} - a_j^{(n)}\right) \\ &\leq \frac{m_{i1}}{m}\left(m_{1j}^{(n)} - a_j^{(n)}\right) + \frac{m_{i2}}{m}\left(m_{2j}^{(n)} - a_j^{(n)}\right) + ... + \frac{m_{iq}}{m}\left(m_{qj}^{(n)} - a_j^{(n)}\right) \\ &\leq \frac{1}{m}\left(\left(m_{i1}m_{1j}^{(n)} + m_{i2}m_{2j}^{(n)} + ... + m_{iq}m_{qj}^{(n)}\right) - a_j^{(n)}\right) = \frac{1}{m}\left(m_{ij}^{(n+1)} - a_j^{(n)}\right) \end{aligned}$$

Ces inégalités se justifient par le fait que tous les $m_{ij}^{(n)} - a_j^{(n)}$ sont positifs et que les quotients $m_{i1}/m$, ..., $m_{iq}/m$ sont tous plus grands que 1, par définition de $m$.

On arrive à l'inégalité, valable pour tout $j$ :

$$A_j^{(n)} - a_j^{(n)} \leq \frac{1}{m}\left(m_{ij}^{(n+1)} - a_j^{(n)}\right)$$

Comme $a_j^{(n+1)}$ est l'un des $m_{ij}^{(n+1)}$, on peut écrire : $(0 \leq) A_j^{(n)} - a_j^{(n)} \leq \frac{1}{m}\left(a_j^{(n+1)} - a_j^{(n)}\right)$ (1)

[48] Donc ce qui suit ne s'appliquera pas à des matrices stochastiques contenant des 0.

- En procédant de façon très proche, on peut aussi écrire, pour $j$ quelconque :

$$\begin{aligned}A_j^{(n)} - a_j^{(n)} &= \operatorname{Sup}\left(A_j^{(n)} - m_{1j}^{(n)}, A_j^{(n)} - m_{2j}^{(n)}, \dots, A_j^{(n)} - m_{qj}^{(n)}\right)\\ &\leq \left(A_j^{(n)} - m_{1j}^{(n)}\right) + \left(A_j^{(n)} - m_{2j}^{(n)}\right) + \dots + \left(A_j^{(n)} - m_{qj}^{(n)}\right)\\ &\leq \frac{m_{i1}}{m}\left(A_j^{(n)} - m_{1j}^{(n)}\right) + \frac{m_{i2}}{m}\left(A_j^{(n)} - m_{2j}^{(n)}\right) + \dots + \frac{m_{iq}}{m}\left(A_j^{(n)} - m_{qj}^{(n)}\right)\\ &\leq \frac{1}{m}\left(A_j^{(n)} - \left(m_{i1}m_{1j}^{(n)} + m_{i2}m_{2j}^{(n)} + \dots + m_{iq}m_{qj}^{(n)}\right)\right) = \frac{1}{m}\left(A_j^{(n)} - m_{ij}^{(n+1)}\right)\end{aligned}$$

D'où l'on déduit de la même façon $(0 \leq) A_j^{(n)} - a_j^{(n)} \leq \frac{1}{m}\left(A_j^{(n)} - A_j^{(n+1)}\right)$. (2)

- Nous avons par ailleurs :

$$\begin{aligned}A_j^{(n+1)} - a_j^{(n+1)} &= \left(A_j^{(n+1)} - A_j^{(n)}\right) + \left(A_j^{(n)} - a_j^{(n)}\right) + \left(a_j^{n} - a_j^{(n+1)}\right)\\ &\leq -m\left(A_j^{(n)} - a_j^{(n)}\right) + \left(A_j^{(n)} - a_j^{(n)}\right) - m\left(A_j^{(n)} - a_j^{(n)}\right)\\ &\leq (1-2m)\left(A_j^{(n)} - a_j^{(n)}\right)\end{aligned}$$

De proche en proche, ou par récurrence, on démontre que

$$A_j^{(n)} - a_j^{(n)} \leq (1-2m)^{n-1}\left(A_j^{(1)} - a_j^{(1)}\right)$$

Comme $1 - 2m$ appartient à l'intervalle $[0 ; 1[$ (car $0 < m \leqslant \frac{1}{q} \leqslant \frac{1}{2}$), on peut conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(A_j^{(n)} - a_j^{(n)}\right) = 0$$

ce qui prouve que les deux suites $\left(a_j^{(n)}\right)$ et $\left(A_j^{(n)}\right)$ sont adjacentes pour tout $j$.

Elles ont donc la même limite :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(a_j^{(n)}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(A_j^{(n)}\right) = l_j$$

Comme pour tout $i$, $a_j^{(n)} \leq m_{ij}^{(n)} \leq A_j^{(n)}$, il en est de même de n'importe quel $m_{ij}^{(n)}$ de la colonne $j$.

On peut en conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} M^n = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_q\\ l_1 & l_2 & \dots & l_q\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ l_1 & l_2 & \dots & l_q\end{pmatrix}$$

Ce point de vue, que nous avons jugé important de vous présenter dans cette brochure, ne sera pour autant pas développé plus en détail. La réduction des endomorphismes va nous donner un outil beaucoup plus puissant pour l'étude des matrices stochastiques.

## III. Valeurs propres d'une matrice stochastique

Nous avons souligné l'importance de la réduction d'une matrice stochastique $M$ pour calculer sa puissance $n^e$ et déterminer sa limite. Cette réduction passe forcément par la détermination de ses valeurs propres et sur les exemples étudiés précédemment, nous avons constaté un certain nombre de propriétés, que nous prouvons ici.

*1) Les valeurs propres d'une matrice stochastique en général*

**Théorème 1**

1) 1 est une valeur propre associée au vecteur propre $V=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$.

2) $M$ a $q$ valeurs propres complexes distinctes ou non toutes de module *inférieur ou égal* à 1.

*Démonstration*

1) $MV=V$ car $\sum_j m_{ij}=1$, donc 1 est forcément valeur propre associée à $V$.

2) Soit λ une valeur propre de $M$. Considérons un vecteur propre $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_q\end{pmatrix}$ associé à $\lambda$ et soit $k$ l'indice tel que $|x_k|=\mathrm{Max}(|x_i|)$.

On peut écrire $MX=\lambda X$.

En écrivant ce qui se passe pour la $k^e$ ligne, on peut écrire :

$$\lambda x_k=\sum_j m_{kj}x_j$$

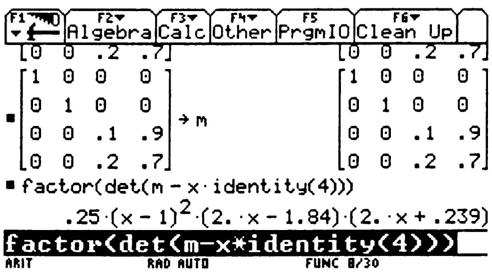
Comme $k$ est un indice correspondant à la plus grande valeur des $x_i$, on a nécessairement :

$$|\lambda||x_k|=|\lambda x_k|=\left|\sum_j m_{kj}x_j\right|\le\sum_j|m_{kj}||x_j|\le\sum_j|m_{kj}||x_k|=\left(\sum_j m_{kj}\right)|x_k|=|x_k|.$$

Comme $X$ n'est pas le vecteur nul[49], $|x_k|\neq 0$ et ceci prouve que nécessairement $|\lambda|\le 1$.

Le réel 1 est donc toujours valeur propre d'une matrice stochastique et toute autre valeur propre dans $\mathbb{C}$ a un module inférieur *ou égal* à 1.

Remarquons que 1 peut être une valeur propre avec une multiplicité quelconque[50], ici d'ordre 2 par exemple (la matrice $m$ est une matrice stochastique par bloc)

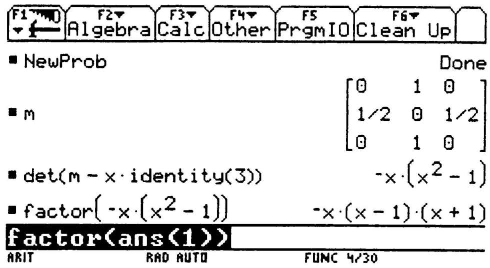


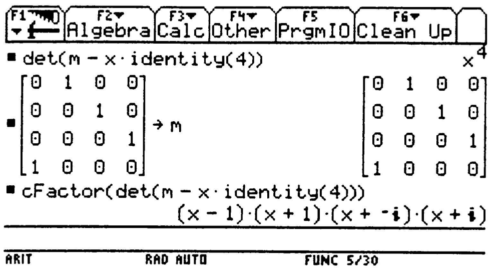

Remarquons que l'on peut trouver une matrice stochastique ayant une valeur propre différente de 1 mais de module égal à 1 (–1 pour la matrice de l'écran de gauche ci-après, –1, $i$ et $-i$ pour celle de droite).

---

[49] C'est un vecteur propre...

[50] La matrice identité est intéressante, mais plus triviale.




*2) Cas où tous les coefficients sont non nuls*

Dans ce cas, nous avons un résultat beaucoup plus fort, nous permettant de préciser le théorème 1.

**Théorème 2**

Si tous les termes de la matrice stochastique $M$ sont non nuls, alors si $\lambda$ est une valeur propre complexe de $M$ autre que 1, son module est *strictement inférieur* à 1.

*Démonstration*

$M$ est donc une matrice stochastique dont tous les termes sont strictement positifs.
Soit donc $\lambda$ une valeur propre autre que 1, éventuellement complexe.
Reprenons les notations du théorème précédent et le raisonnement là où on l'avait laissé :

$$|\lambda||x_k| = |\lambda x_k| = \left|\sum_{j=1}^{j=q} m_{kj}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{j=q} m_{kj}|x_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{j=q} m_{kj}\right)|x_k| = |x_k| \qquad (1)$$

- Supposons que $|\lambda| = 1$. On a alors $|\lambda||x_k| = |x_k|$ et toutes les inégalités précédentes, dont les deux termes extrêmes sont les mêmes, sont en fait des égalités. En particulier :

$$\sum_{j=1}^{j=q} m_{kj}|x_j| = \left(\sum_{j=1}^{j=q} m_{kj}\right)|x_k|$$

et donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{j=q} m_{kj}\left(|x_j| - |x_k|\right) = 0$.

Or dans cette somme, *tous les termes* sont négatifs ou nuls puisque $|x_k| = \text{Max}(|x_j|)$. Finalement la somme étant nulle on en déduit que chaque terme est nul, et **comme les nombres $m_{ij}$ sont tous non nuls**, on obtient :

pour tout $j$ entier compris entre 1 et $q$, $|x_j| = |x_k|$.

**Toutes les composantes du vecteur propre $X$ ont même module.**

- D'autre part, si on avait l'égalité $|\lambda||x_k| = |x_k|$, d'après les inégalités (1)[51], on aurait aussi :

$$\left|\sum_{j=1}^{j=q} m_{kj}x_j\right| = \sum_{j=1}^{j=q} m_{kj}|x_j| = \sum_{j=1}^{j=q}|m_{kj}x_j|$$

Donc le module de la somme de $q$ nombres complexes est égal à la somme des modules de ces nombres complexes.
Or deux nombres complexes $z$ et $z'$ vérifient $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si ils ont même argument et ce résultat s'étend par récurrence à une somme de $q$ nombres complexes.

On en déduit ici que tous les complexes $m_{kj}x_j$ ont le même argument, et **comme les nombres $m_{kj}$ sont strictement positifs**, que **tous les nombres complexes $x_j$ ont le même argument.**

[51] Qui sont devenues des égalités...

- Récapitulons : si $|\lambda| = 1$, on obtient que toutes les composantes du vecteur propre $X$ ont même module et même argument. Elles sont donc égales et $X$ est colinéaire au vecteur propre $V$ associé à la valeur propre 1, ce qui est exclus puisque on a supposé au départ que $\lambda$ est différent de 1.

On a donc $|\lambda||x_k| < |x_k|$ et comme $X$ est non nul, $|x_k| \neq 0$ d'où l'on déduit que la valeur propre $\lambda$ a un module strictement inférieur à 1.

Enfin une dernière précision dans le cas où les termes de la matrice stochastique sont strictement positifs.

**Théorème 3**

> Si tous les termes de la matrice stochastique sont non nuls, alors 1 est une valeur propre *simple* de $M$.

*Démonstration*

Il suffit de démontrer que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 a pour dimension 1. Gardons les mêmes notations que précédemment et soit $X$ un vecteur propre associé à la valeur propre 1. On a donc $MX = X$ et en écrivant les égalités obtenues pour la coordonnée d'indice $k$ :

$$|x_k| = \left|\sum_{j=1}^{j=q} m_{kj} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{j=q} |m_{kj} x_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{j=q} m_{kj}\right)|x_k| = |x_k|$$

On en déduit que toutes les inégalités écrites sont en fait des égalités, et en suivant le même raisonnement qu'au théorème précédent, que toutes les composantes $x_j$ de $X$ sont égales.

Le vecteur propre $X$ est donc colinéaire à $V$ et le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1, ce qui assure que 1 est une valeur propre *simple* de $M$.

Le cas des matrices stochastiques à *coefficients strictement positifs* conduit à des résultats relativement simple :

1 est toujours valeur propre simple ;

les autres valeurs propres éventuellement complexes ont un module strictement inférieur à 1.

*3) Complément sur les matrices stochastiques avec des coefficients nuls*[52]

**Théorème 4**

> Soit $M$ une matrice stochastique dont on ne suppose plus les termes non nuls. Si $\lambda$ est une valeur propre de *$M$ de module 1*, alors c'est une racine de l'unité.

*Démonstration*

Soit donc $\lambda$ une valeur propre de module 1 de $M$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_q \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à cette valeur propre

Comme précédemment on considère $\max(|x_j|)$ et on introduit l'ensemble $E$ constitué des composantes de $X$ dont le module vaut $\max(|x_j|)$ :

$$E = \{x_i \; ; |x_i| = \max(|x_i|)\}$$

[52] Dont la lecture n'est pas indispensable à la compréhension de la suite.

$E$ est évidemment non vide et contient au plus $q$ valeurs. Chacune de ces valeurs est non nulle.

Soit $x_k$ est l'une d'elles ; on a $\lambda x_k = \sum_{j=1}^{j=q} m_{kj} x_j$ . (1)

Montrons que $\lambda x_k$ appartient aussi à $E$.

Il est déjà clair que $|\lambda x_k| = |\lambda||x_k| = |x_k| = \max(|x_j|)$. Il reste à prouver que $\lambda x_k$ est effectivement une des composantes de $X$.

Pour cela, supprimons de la somme écrite en (1) tous les termes pour lesquels $m_{kj}$ est nul. En introduisant l'ensemble $J_k$ des indices pour lesquels $m_{kj}$ est non nul, on peut écrire :

$$\lambda x_k = \sum_{j \in J_k} m_{kj} x_j .$$

Par suite, $|\lambda x_k| = |x_k| = \left| \sum_{j \in J_k} m_{kj} x_j \right| \leq \sum_{j \in J_k} m_{kj} |x_j| \leq \sum_{j \in J_k} m_{kj} |x_k| = |x_k|$.

Toutes ces inégalités sont donc en fait des égalités. On en déduit[53] donc, parce que tous les $m_{kj}$ pour $j$ appartenant à $J_k$ sont non nuls, que toutes les composantes $x_j$ pour $j$ appartenant à $J_k$ sont égales à l'une d'entre elles, que l'on notera simplement $x$ : $x$ est donc l'un des $x_j$ pour $j$ appartenant à $J_k$. Donc pour tous les $j$ de $J_k$, $x_j = x$

$$\lambda x_k = \sum_{j \in J_k} m_{kj} x_j = \left( \sum_{j \in J_k} m_{kj} \right) x = \left( \sum_{j=1}^{j=q} m_{kj} \right) x = x .$$

Ceci prouve que $\lambda x_k$ est donc une composante de $X$, donc que $\lambda x_k$ est un élément de $E$.

De proche en proche, on peut en déduire que $\lambda (\lambda x_k) = \lambda^2 x_k$ est dans $E$, ainsi que $\lambda^n x_k$ pour tout entier naturel $n$.

$E$ étant un ensemble fini, il existe un entier $r$ tel que $\lambda^r x_k = x_k$ . Comme $x_k$ est non nul, on en déduit que $\lambda^r = 1$, ce qui prouve que $\lambda$ est une racine $r^e$ de l'unité.

**Remarque :** précédemment, les valeurs propres de module 1, et différentes de 1, que nous avons obtenues étaient $-1$, $i$, $-i$, qui sont bien des racines de l'unité.

## IV. La puissance $n^e$ d'une matrice stochastique et la réduction des endomorphismes

### *1) Réduite de Jordan d'une matrice*

$M$ est une matrice stochastique qui possède $q$ valeurs propres complexes, distinctes ou non, associées à des vecteurs propres éventuellement à coordonnées complexes.

Si la matrice $M$ est diagonalisable, on a vu que le calcul de sa puissance $n^e$ ne posait aucun problème. Mais ce n'est pas forcément le cas...

À défaut d'être diagonalisable, si son polynôme caractéristique est scindé[54], on sait par contre que toute matrice est semblable à une matrice dite de Jordan de la forme :

[53] On utilise le principe d'une démonstration déjà faite.

[54] Et il l'est toujours dans $\mathbb{C}$.

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & d_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & d_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{q-1} & d_{q-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_q \end{pmatrix}$$

où les $\lambda_i$ sont les valeurs propres de $M$ et les $d_i$ sont égaux à 1 ou 0.
Le terme général $t_{ij}$ de $T$ vérifie :

$$t_{ii} = \lambda_i,\ t_{ii+1} = d_i \text{ et } t_{ij} = 0 \text{ pour } j \neq i \text{ ou } i+1.$$

Plus précisément, il existe une matrice inversible $P$ telle que $M = PTP^{-1}$. Comme on l'a vu précédemment, on peut alors écrire :

$$M^n = PT^nP^{-1}$$

Tout le problème comme pour la diagonalisation est d'effectuer le calcul de $T^n$, où $T$ est une matrice triangulaire de Jordan et éventuellement à déterminer sa limite en l'infini.

*2) Calcul de $T^n$ :*

- **Exploration de quelques exemples avec une TI-92**

Avant d'aller plus loin, regardons ce qui se passe sur quelques exemples en faisant travailler l'excellente TI 92.

Calculons les puissances successives de la matrice suivante $E = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix}$.

On obtient réponses suivantes :

$$E^2 = \begin{pmatrix} x^2 & x+y & 1 & 0 \\ 0 & y^2 & y+z & 0 \\ 0 & 0 & z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w^2 \end{pmatrix} ; E^3 = \begin{pmatrix} x^3 & x^2+xy+y^2 & x+y+z & 0 \\ 0 & y^3 & y^2+yz+z^2 & 0 \\ 0 & 0 & z^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w^3 \end{pmatrix} ;$$

$$E^4 = \begin{pmatrix} x^4 & x^3+x^2y+xy^2+y^3 & x^2+xy+xz+y^2+yz+z^2 & 0 \\ 0 & y^4 & y^3+y^2z+yz^2+z^3 & 0 \\ 0 & 0 & z^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w^4 \end{pmatrix}$$

Si on choisit $F = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix}$, on obtient :

$$F^2 = \begin{pmatrix} x^2 & x+y & 1 & 0 \\ 0 & y^2 & y+z & 1 \\ 0 & 0 & z^2 & w+z \\ 0 & 0 & 0 & w^2 \end{pmatrix}, F^3 = \begin{pmatrix} x^3 & x^2+xy+y^2 & x+y+z & 1 \\ 0 & y^3 & y^2+yz+z^2 & w+y+z \\ 0 & 0 & z^3 & w^2+wz+z^2 \\ 0 & 0 & 0 & w^3 \end{pmatrix}$$

$$F^4 = \begin{pmatrix} x^4 & x^3+x^2y+xy^2+y^3 & x^2+xy+xz+y^2+yz+z^2 & w+x+y+z \\ 0 & y^4 & y^3+y^2z+yz^2+z^3 & w^2+wy+wz+y^2+yz+z^2 \\ 0 & 0 & z^4 & w^3+w^2z+wz^2+z^3 \\ 0 & 0 & 0 & w^4 \end{pmatrix}$$

Une certaine régularité est mise en évidence : les puissances sur la diagonale principale mais aussi les polynômes homogène au-dessus de la diagonale...

- **Carré et cube d'une matrice de Jordan générale**

Essayons de généraliser ces résultats à une matrice de Jordan quelconque $T$.

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & d_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & d_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{q-1} & d_{q-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_q \end{pmatrix}$$

Quel sont le carré et le cube de cette matrice ?

Calculons le terme général $t'_{ij}$ de la matrice $T^2$.

$T^2$ est une matrice triangulaire supérieure, comme produit de deux matrices elles-mêmes triangulaires supérieures. On a donc $t'_{ij} = 0$ si $i > \mathrm{j}$.

Par ailleurs, $t''_{ii} = \lambda_i^2$.

$$t'_{ii+1} = \sum_{k=1}^{q} t_{ik}t_{ki+1} = t_{ii}t_{ii+1} + t_{ii+1}t_{i+1i+1} = \lambda_i d_i + \lambda_{i+1}d_i = \left(\lambda_i + \lambda_{i+1}\right)d_i.$$

$$t'_{ii+2} = \sum_{k=1}^{q} t_{ik}t_{ki+2} = t_{ii+1}t_{i+1i+2} = d_i d_{i+1}.$$

$$t'_{ii+3} = \sum_{k=1}^{q} t_{ik}t_{ki+3} = 0.$$

$T^2$ est une matrice où trois « diagonales » sont occupées par des nombres autres que 0, alors que dans $T$, il n'y en avait que deux.

$$T^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & (\lambda_1+\lambda_2)d_1 & d_1d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & (\lambda_2+\lambda_3)d_2 & d_2d_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 & (\lambda_3+\lambda_4)d_4 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_q^2 \end{pmatrix}$$

Poursuivons en déterminant le terme général $(t''_{ij})$ de la matrice $T^3$.

$T^3$ étant une matrice triangulaire supérieure, on a $t''_{ij} = 0$ si $i > \mathrm{j}$.

Par ailleurs, $t''_{ii} = \lambda_i^3$.

$$t''_{ii+1} = \sum_{k=1}^{q} t'_{ik}\,t_{ki+1} = t'_{ii}\,t_{ii+1} + t'_{ii+1}\,t_{i+1i+1} = \lambda_i^2 d_i + \left(\lambda_i + \lambda_{i+1}\right)d_i\lambda_{i+1} = d_i\left(\lambda_i^2 + \lambda_i\lambda_{i+1} + \lambda_{i+1}^2\right).$$

$$t''_{ii+2} = \sum_{k=1}^{q} t'_{ik}\,t_{ki+2} = t'_{ii+1}\,t_{i+1i+2} + t'_{ii+2}\,t_{i+2i+2} = \left(\lambda_i + \lambda_{i+1}\right)d_i d_{i+1} + d_i d_{i+1}\lambda_{i+2}$$
$$= d_i d_{i+1}\left(\lambda_i + \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2}\right).$$

$$t''_{ii+3} = \sum_{k=1}^{q} t'_{ik}\, t_{ki+3} = t'_{ii+2}\, t_{i+2i+3} = d_i d_{i+1} d_{i+2}.$$

$$t''_{ii+4} = \sum_{k=1}^{q} t'_{ik}\, t_{ki+4} = 0.$$

$T^3$ est une matrice où quatre « diagonales » sont occupées par des nombres autres que 0.

$$T^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & \left(\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2\right)d_1 & d_1d_2\left(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\right) & d_1d_2d_3 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & \left(\lambda_2^2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3^2\right)d_2 & d_2d_3\left(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4\right) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^3 & \left(\lambda_3^2+\lambda_3\lambda_4+\lambda_4^2\right)d_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_q^3 \end{pmatrix}$$

- **Généralisation : puissance $n^e$ de matrice de Jordan**

Qu'en est-il de la matrice $T^n$ ? Au vu des résultats précédents, on peut conjecturer qu'elle s'écrit :

$$T^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & d_1H_{n-1}\left(\lambda_1,\lambda_2\right) & d_1d_2H_{n-2}\left(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\right) & d_1d_2d_3H_{n-3}\left(\lambda_1,..,\lambda_4\right) & \dots & d_1...d_{q-1}H_{n-q+1}\left(\lambda_1,...,\lambda_q\right) \\ 0 & \lambda_2^n & d_2H_{n-1}\left(\lambda_2,\lambda_3\right) & d_2d_3H_{n-2}\left(\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\right) & \dots & d_2...d_{q-1}H_{n-q+2}\left(\lambda_2,...,\lambda_q\right) \\ 0 & 0 & \lambda_3^n & d_3H_{n-1}\left(\lambda_3,\lambda_4\right) & \dots & d_3...d_{q-1}H_{n-q+3}\left(\lambda_3,...,\lambda_q\right) \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^n & \dots & d_4...d_{q-1}H_{n-q+4}\left(\lambda_4,...,\lambda_q\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_q^n \end{pmatrix}$$

Plus précisément, le terme général $t^{(n)}{}_{ij}$ de la matrice $T^n$ est défini de la façon suivante :

$t^{(n)}{}_{ij} = 0$ si $i > j$.

$t^{(n)}{}_{ii} = \lambda_i^n$.

$t^{(n)}{}_{ii+1} = d_i\left(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_i^k\lambda_{i+1}^{n-1-k}\right) = d_iH_{n-1}(\lambda_i,\lambda_{i+1})$ où $H_{n-1}$ est un polynôme homogène de degré $n-1$ en $\lambda_i$ et $\lambda_{i+1}$.

$t^{(n)}{}_{ii+2} = d_id_{i+1}\left(\sum\lambda_i^k\lambda_{i+1}^l\lambda_{i+2}^{n-2-k-l}\right) = d_id_{i+1}H_{n-2}(\lambda_i,\lambda_{i+1},\lambda_{i+2})$ où $H_{n-1}$ est un polynôme homogène de degré $n-1$ en $\lambda_i$, $\lambda_{i+1}$ et $\lambda_{i+2}$.

...

$t^{(n)}{}_{iq} = d_id_{i+1}...d_{q-1}H_{n-q+i}(\lambda_i,\lambda_{i+1},\lambda_{i+2},...,\lambda_q)$ où $H_{n-q+i}$ est un polynôme homogène de degré $n-q+i$ en $\lambda_i$, $\lambda_{i+1}$, ..., $\lambda_q$.

*Démonstration*

Ce résultat peut être démontré par récurrence, sachant qu'il a déjà été prouvé pour $n = 2$ ou 3. Soit $k$ un entier naturel arbitraire et supposons le résultat prouvé pour n'importe quel entier $n \leqslant k$. Évaluons le terme général de $T^{k+1}$, noté comme d'habitude $t_{ij}^{(k+1)}$

Si $i > j$ on a évidemment $t_{ij}^{(k+1)} = 0$ puisque $T$ est triangulaire supérieure.

$t_{ii}^{(k+1)} = \lambda_i^{k+1}$

$$
\begin{aligned}
t_{ii+1}^{(k+1)} &= \sum_l t_{il}^{(k)} t_{li+1} \\
&= t_{ii}^{(k)} t_{ii+1} + t_{ii+1}^{(k)} t_{i+1i+1} \\
&= \lambda_i^k d_i + d_i H_{k-1}(\lambda_i, \lambda_{i+1}) \lambda_{i+1} \\
&= d_i \left(\lambda_i^k + H_{k-1}(\lambda_i, \lambda_{i+1}) \lambda_{i+1}\right) \\
&= d_i H_k(\lambda_i, \lambda_{i+1})
\end{aligned}
$$

Si $j > i$

$$
\begin{aligned}
t_{ij}^{(k+1)} &= \sum_l t_{il}^{(k)} t_{lj} \\
&= t_{ij-1}^{(k)} t_{j-1j} + t_{ij}^{(k)} t_{jj} \\
&= d_i d_{i+1} \ldots d_{j-2} H_{k-j+1+i}(\lambda_i, \ldots, \lambda_{j-1}) d_{j-1} + d_i d_{i+1} \ldots d_{j-1} H_{k-j+i}(\lambda_i, \ldots, \lambda_j) \lambda_j \\
&= d_i d_{i+1} \ldots d_{j-2} d_{j-1} \left(H_{k-j+1+i}(\lambda_i, \ldots, \lambda_{j-1}) + H_{k-j+i}(\lambda_i, \ldots, \lambda_j) \lambda_j\right) \\
&= d_i d_{i+1} \ldots d_{j-2} d_{j-1} H_{k-j+i+1}(\lambda_i, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_j)
\end{aligned}
$$

Le résultat est donc vérifié pour $k + 1$ ; il est donc vrai pour tout $n$ appartenant à $\mathbb{N}$.

*3) Étude de la convergence de la puissance $n^e$ d'une matrice stochastique*

- **Limite de $T^n$**

L'expression que l'on vient d'obtenir permet de prouver presque immédiatement le théorème suivant.

**Théorème 5**

Si $\lambda_1 = 1$ est valeur propre *simple* de $M$ et si les autres valeurs propres complexes ont un module *strictement inférieur* à 1[55], alors :

$$
\lim_{n \to +\infty} T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = J .
$$

*Démonstration*

D'après le théorème de Jordan, si $\lambda_1 = 1$ est valeur propre simple de $M$, alors $d_1 = 0$ et la première ligne de $T^n$ est $(1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)$.

La valeur propre $\lambda_1$ n'apparaît plus dans les lignes suivantes de $T^n$ et comme les autres valeurs propres ont un module strictement inférieur à 1, on en déduit que :

pour tout $i > 1$ et pour tout $j > i$, $\lim\limits_{n \to +\infty} H_{n-j+i}(\lambda_i, \ldots, \lambda_j) = 0$

(les $H_k$ sont des polynômes homogènes de degré $k$)

Donc toutes les lignes de $T^n$ autres que la première ont pour limite $(0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)$

On a donc bien $\lim\limits_{n \to +\infty} T^n = J$ .

[55] C'est le cas si la matrice stochastique a ses coefficients tous strictement positifs.

- **Limite de $M^n$**

**Théorème 6**

Si la matrice stochastique $M$ admet 1 pour valeur propre simple et si toutes ses autres valeurs propres complexes sont de module strictement inférieur à 1, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} M^n = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_q \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_q \end{pmatrix} = L$$

où $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_q \end{pmatrix}$ est le vecteur stochastique stable c'est à dire qui vérifie $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_q \end{pmatrix} \times M = M$ avec $l_1 + l_2 + \ldots + l_q = 1$ et pour tout $i$, $l_i \in [0\,;\,1]$.

*Démonstration*

Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^q$ ayant $M$ pour matrice dans la base canonique $B = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_q \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}^q$.

Soit $B' = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_q \end{pmatrix}$ la base de $\mathbb{C}^q$ dans laquelle $u$ a pour matrice la matrice de Jordan $T$.

On sait que $M = PTP^{-1}$ où $P$ est la matrice de passage de $B$ dans $B'$ c'est-à-dire la matrice dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées dans la base canonique $\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_q \end{pmatrix}$ des vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q$.

Par conséquent, $M^n = PT^nP^{-1}$.

Le théorème 5 permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n = PJP^{-1}$. Essayons de préciser l'allure de cette matrice limite en décomposant le calcul.

Puisque 1 est valeur propre simple, on peut supposer $\lambda_1 = 1$, et on peut prendre $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

La première colonne de la matrice $P$ est alors constituée de 1.

Les $q - 1$ dernières lignes de $J$ étant constituées de 0, on en déduit que les $q - 1$ dernières lignes de $JP^{-1}$ sont aussi constituées de 0.

Puisque la première ligne de $J$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, la première ligne de $JP^{-1}$ est égale à la première ligne de $P^{-1}$. Appelons la $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_q \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$PJP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & p_{12} & \cdots & p_{1q} \\ 1 & p_{22} & \cdots & p_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & p_{q2} & \cdots & p_{qq} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_q \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_q \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_q \end{pmatrix}$$

Ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_q \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_q \end{pmatrix}$.

Cette dernière matrice est bien stochastique car limite de matrices stochastiques. Le vecteur $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_q \end{pmatrix}$ représente l'état limite du système, et ce quelles que soient les probabilités initiales car :

$$\lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix} p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nq} \end{pmatrix} = \lim_{n\to+\infty}\left(\begin{pmatrix} p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0q} \end{pmatrix} M^n\right)$$

$$= \begin{pmatrix} p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0q} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_q \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_q \end{pmatrix}$$

Reste à prouver que le vecteur $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_q \end{pmatrix}$ est bien le vecteur stochastique stable.

Si l'on veut faire vite, il suffit de passer à la limite dans l'égalité :

$$\begin{pmatrix} p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-11} & p_{n-12} & p_{n-13} & \cdots & p_{n-1q} \end{pmatrix} \times M.$$

Sinon on y parvient simplement par le calcul[56] :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_q \end{pmatrix} M &= \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_q \end{pmatrix} PTP^{-1} \\ &= \left(\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_q \end{pmatrix} P\right) TP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} TP^{-1} && (1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} P^{-1} && (2) \\ &= \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_q \end{pmatrix} && (3) \end{aligned}$$

Les différentes justifications sont données ci-après :

(1) $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_q \end{pmatrix}$ est la première ligne de $P^{-1}$ et $P^{-1}P = I$ ;

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} T$ donne la première ligne de $T$ donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ ;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ donne la première ligne de $P^{-1}$ donc.... $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_q \end{pmatrix}$

Et la boucle est bouclée...

Nous avons prouvé que $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_q \end{pmatrix}$ est un vecteur stochastique ; montrons que c'est bien le seul. Nous pouvons donner deux démonstrations de ce résultat, la première peut sembler éprouvante[57] parce qu'elle repose uniquement sur des calculs matriciels, la seconde, plus rapide, utilise le fait qu'une matrice et sa transposée ont exactement les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité.

- *Première démonstration*

Vérifions que tout vecteur ligne $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_q \end{pmatrix}$ stable par $M$, c'est-à-dire qui vérifie $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_q \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_q \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_q \end{pmatrix}$.

---

[56] Et il n'est pas inintéressant de voir comme les choses s'articulent...

[57] Elle ne l'est pas !

Soit donc un tel vecteur $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_q \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_q \end{pmatrix} PTP^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_q \end{pmatrix}$$

D'où $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_q \end{pmatrix} PT = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_q \end{pmatrix} P$.

Notons $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_q \end{pmatrix}$ le vecteur $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_q \end{pmatrix} P$.

On a donc $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_q \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_q \end{pmatrix}$, ce qui se traduit par la système :

$$\begin{cases} y_1 = y_1 \\ \lambda_2 y_2 = y_2 \\ d_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = y_3 \\ d_3 y_3 + \lambda_4 y_4 = y_4 \\ \vdots \\ d_{q-2} y_{q-2} + \lambda_{q-1} y_{q-1} = y_{q-1} \\ d_{q-1} y_{q-1} + \lambda_q y_q = y_q \end{cases} \quad \text{car la matrice } T \text{ est égale à } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & d_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{q-1} & d_{q-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_q \end{pmatrix}.$$

Aucune des valeurs propres complexes $\lambda_i$, pour $i > 1$ n'est égale à 1 ; on en déduit donc que ce système a pour solution tout vecteur du type $\begin{pmatrix} y & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. L'ensemble des solutions est donc de dimension 1.

Il s'ensuit que :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_{q-1} & l_q \\ p'_{21} & p'_{22} & \cdots & p'_{2q-1} & p'_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p'_{q-11} & p'_{q-12} & \cdots & p'_{q-1q-1} & p'_{q-1q} \\ p'_{q1} & p'_{q2} & \cdots & p'_{qq-1} & p'_{qq} \end{pmatrix}$$

$$= y \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_q \end{pmatrix}$$

Ainsi l'ensemble des vecteurs stables pour $M$ est de dimension 1.

- *Deuxième démonstration*

Soit donc un vecteur ligne $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_q \end{pmatrix}$ stochastique et stable par $M$, c'est à dire qui vérifie $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_q \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_q \end{pmatrix}$.

En transposant, on peut écrire ${}^tM \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_q \end{pmatrix}$, ce qui signifie que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_q \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 de ${}^tM$. Il en est de même de $\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdots \\ l_q \end{pmatrix}$. Or les valeurs propres de ${}^tM$

sont les mêmes que celles de $M$, avec les mêmes ordres de multiplicité[58]. 1 est donc aussi valeur propre d'ordre 1 de ${}^tM$. Il existe donc une constante $k$ telle que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_q \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kl_1 \\ kl_2 \\ \dots \\ kl_q \end{pmatrix}$.

On sait que

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_q &= 1 \\ &= kl_1 + kl_2 + \dots + kl_q \\ &= k\left(l_1 + l_2 + \dots + l_q\right) \\ &= k \times 1 \\ &= k \end{aligned}$$

ce qui prouve que $k = 1$ et que les deux vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_q \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_q \end{pmatrix}$ sont égaux.

L'état limite est donc bien *le* vecteur stochastique stable de la matrice.

*4) Conclusion*

Si la matrice $M$ stochastique admet 1 pour valeur propre simple, et si toutes les autres valeurs propres complexes sont de module strictement inférieur à 1[59], sa puissance $n^e$ a pour limite une matrice stochastique de rang 1, où toutes les lignes sont égales à $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_q \end{pmatrix}$.

Qui plus est ce vecteur ligne $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_q \end{pmatrix}$ est le *seul* vecteur stochastique stable par $M$ ou, ce qui revient au même $\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_q \end{pmatrix}$ est le seul vecteur propre stochastique de ${}^tM$ associé à la valeur propre 1. La façon la plus rapide d'obtenir l'état stochastique limite consiste à résoudre le système $XM = X$, $X$ étant un vecteur stochastique.

*5) Calcul explicite sur un exemple de $T^n$*

- Nous ne décrirons cette méthode que sur un exemple particulier, sachant qu'elle est généralisable à une matrice de Jordan quelconque.

[58] En fait, une matrice et sa transposée ont les mêmes valeurs propres.

[59] C'est le cas si tous les coefficients de $M$ sont strictement positifs.

Soit à calculer par exemple la puissance $n^e$ de $T = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$.

Remarquons la structure de cette matrice : elle est constituée de trois sous-matrices, $M_1$, $M_2$ et $M_3$[60]; chacune du type $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Par ailleurs, $M^n = \begin{pmatrix} M_1^n & 0 & 0 \\ 0 & M_2^n & 0 \\ 0 & 0 & M_3^n \end{pmatrix}$.

- Il reste donc à savoir calculer la puissance $n^e$ d'une matrice du type

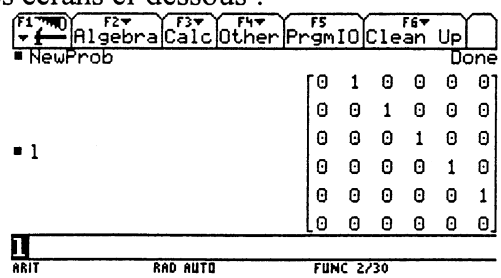
$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

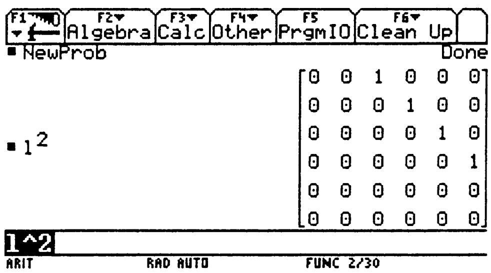
En posant $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$ et $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, on a alors $T = D + \Lambda$.

Quelques remarques concernant ces deux matrices...

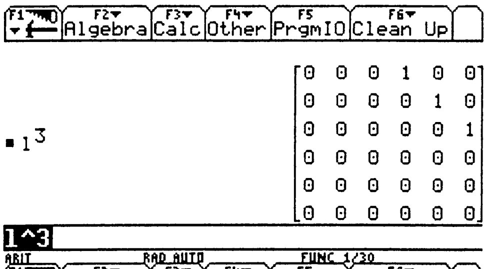
On sait que $\Lambda$ est une matrice nilpotente : plus précisément, si les deux matrices $D$ et $\Lambda$ sont d'ordre $r$, on a $\Lambda^r = 0$.

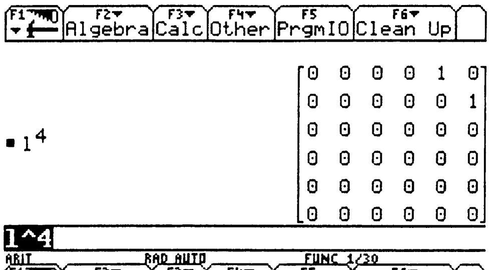
À chaque puissance, la ligne diagonale de 1 remonte d'un cran, comme on peut le constater[61] sur les écrans ci-dessous :

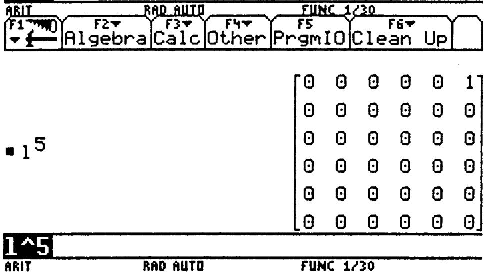


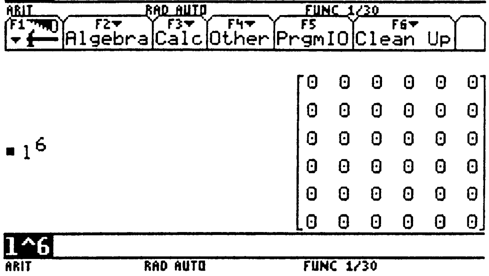




[60] Chacune est entourée d'un trait sur le dessin.
[61] Mais nous ne démontrerons pas ce résultat.




Enfin, on a $D\Lambda = \Lambda D = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Tout ceci pour s'assurer que l'on peut appliquer la formule du binôme, avec en prime des termes qui seront nuls...

$$J^n = (D+\Lambda)^n = D^n + C_n^1 D^{n-1}\Lambda + C_n^2 D^{n-2}\Lambda^2 + \ldots + C_n^{r-1} D^{n-r+1}\Lambda^{r-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & C_n^2\lambda^{n-2} & \cdots & C_n^{r-1}\lambda^{n-r+1} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \cdots & C_n^{r-2}\lambda^{n-r+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^n \end{pmatrix}$$

- Revenons au calcul de $T^n$ égal à :

$$T^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & n(1/2)^{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1/2)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1/5)^n & n(1/5)^{n-1} & C_n^2(1/5)^{n-2} & C_n^3(1/5)^{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1/5)^n & n(1/5)^{n-1} & C_n^2(1/5)^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1/5)^n & n(1/5)^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1/5)^n \end{pmatrix}$$

On comprend sur cet exemple pourquoi $\lim\limits_{n\to+\infty} T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

## V. Étude d'un exemple

Recherchons la limite de la puissance $n^e$ de la matrice stochastique $C$ suivante

$$C = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,5 & 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 & 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Nous sommes dans les conditions d'application du théorème général car les coefficients de cette matrice stochastique sont tous strictement positifs.

- L'état limite est déterminé par la recherche du seul vecteur stochastique stable. Cela revient en posant $X = \begin{pmatrix} x & y & z & t & u \end{pmatrix}$ à résoudre le système :

$$\begin{cases} 0,1x + 0,2y + 0,5z + 0,1t + 0,1u = x \\ 0,2x + 0,1y + 0,1z + 0,4t + 0,3u = y \\ 0,3x + 0,4y + 0,2z + 0,1t + 0,1u = z \\ 0,2x + 0,2y + 0,1z + 0,3t + 0,4u = t \\ 0,2x + 0,1y + 0,1z + 0,1t + 0,1u = u \\ x + y + z + t + u = 1 \end{cases}$$

La dernière équation traduit le fait que l'on recherche un vecteur stochastique.
Le système équivaut à :

$$\begin{cases} -9x + 2y + 5z + t + u = 0 \\ 2x - 9y + z + 4t + 3u = 0 \\ 3x + 4y - 8z + t + u = 0 \\ 2x + 2y + z - 7t + 4u = 0 \\ 2x + y + z + t - 9u = 0 \\ x + y + z + t + u = 1 \end{cases}$$

C'est un système de 6 équations à 5 inconnues, dont on sait d'avance qu'il a une solution unique, précisément le vecteur stochastique limite que l'on cherche.

Le système 5 × 5, constitué des 5 dernières lignes, possède une solution unique que peut d'ailleurs nous fournir, avec une excellente précision, une simple TI-83[62]. Ce système est le suivant :

[62] Une TI-82 ferait aussi l'affaire...

$$\begin{cases} 2x-9y+z+4t+3u=0 \\ 3x+4y-8z+t+u=0 \\ 2x+2y+z-7t+4u=0 \\ 2x+y+z+t-9u=0 \\ x+y+z+t+u=1 \end{cases}$$

qui équivaut à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = B$ en posant $A = \begin{pmatrix} 2 & -9 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & -8 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -7 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Que vaut le déterminant du système ? Une TI-83 renvoie 12061 :

```
[[2 -9 1  4  3 ...
 [3 4  -8 1  1 ...
 [2 2  1  -7 4 ...
 [2 1  1  1  -9...
 [1 1  1  1  1 ...
det [A]
                12061
```

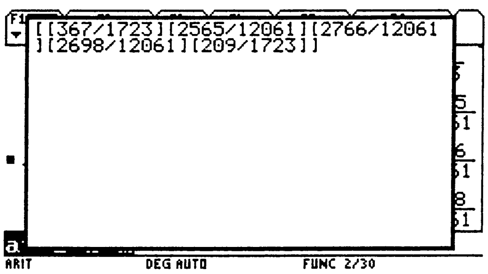
ce qui prouve que la matrice $A$ est inversible.
La solution de ce système est précisément $A^{-1}B$, solution donnée par notre calculatrice :

```
[A]⁻¹*[B]
 [[.2130005804]
  [.2126689329]
  [.2293342177]
  [.2236962109]
  [.121300058 ]]
```

On peut même tenter d'avoir des valeurs fractionnaires, ce que doivent être les solutions du système... Mais on ne parvient qu'à en récupérer deux !

```
[A]⁻¹*[B]▸Frac
 [[367/1723    ]
  [.2126689329]
  [.2293342177]
  [.2236962109]
  [209/1723    ]]
```

Pour avoir une réponse exacte, l'huile de coude, ou un bon outil de calcul formel s'impose !
La TI-92 renvoie :

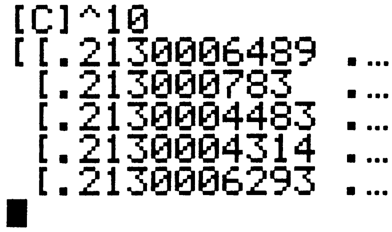


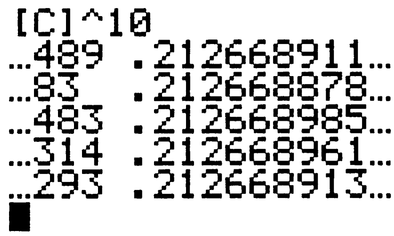
L'état limite de ce système est donc caractérisé par le vecteur stochastique :

$$\begin{pmatrix} 367/1723 & 2565/12061 & 2766/12061 & 2698/12061 & 209/1723 \end{pmatrix}$$

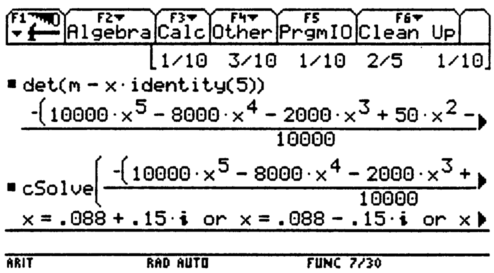
- On sait que la limite de $C^n$ est une matrice stochastique dont toutes les lignes sont identiques au vecteur stochastique ci-dessus. Ce que l'on peut chercher à mettre en évidence avec le calcul de quelques puissances de $C$.

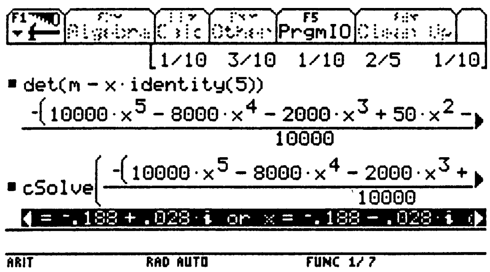
Par exemple avec $C^{10}$ dont on voit ci-dessous la première colonne, puis la deuxième. On retrouve les valeurs attendues, avec déjà 6 décimales exactes ! Pourtant la puissance10, ce n'est pas encore $+\infty$ ...




On peut penser que la convergence dans ce cas est assez rapide, notamment parce que les valeurs propres autres que 1 de cette matrice sont toutes proches de 0.




- Enfin, signalons qu'un tableur, par ses moyens de calcul matriciel, est un bon outil pour ce type de problème.

D'abord pour la résolution du système : le calcul de $A^{-1}B$ peut être effectué d'une part avec la fonction INVERSEMAT d'autre part avec la fonction PRODUITMAT. Attention les cellules destinées à recevoir le résultat doivent au préalable avoir été sélectionnées et on valide la commande en appuyant sur CONT MAJ ENTREE.

| Matrice A | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | -9 | 1 | 4 | 3 |
| 3 | 4 | -8 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | -7 | 4 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | -9 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| Matrice B |
|---|
| 0 |
| 0 |
| 0 |
| 0 |
| 1 |

| A^-1*B |
|---|
| 0,213000580383053 |
| 0,212668932924302 |
| 0,229334217726557 |
| 0,223696210927784 |
| 0,121300058038305 |

Enfin pour le calcul des puissances de $C$, mais il n'y a pas de fonction spécifique ! On s'en sort par des multiplication successives.

**Puissances successives de C, la matrice stochastique**

**C^2**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0,24 | 0,21 | 0,21 | 0,23 | 0,11 |
| 0,27 | 0,2 | 0,21 | 0,2 | 0,12 |
| 0,19 | 0,2 | 0,25 | 0,21 | 0,15 |
| 0,18 | 0,22 | 0,25 | 0,24 | 0,11 |
| 0,17 | 0,25 | 0,22 | 0,25 | 0,11 |

**C^4**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0,2143 | 0,2125 | 0,2287 | 0,224 | 0,1205 |
| 0,2151 | 0,2127 | 0,2276 | 0,2242 | 0,1204 |
| 0,2104 | 0,2136 | 0,2299 | 0,2241 | 0,122 |
| 0,212 | 0,2121 | 0,2307 | 0,223 | 0,1222 |
| 0,2138 | 0,2122 | 0,2299 | 0,2228 | 0,1213 |

**C^8**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0,21300262 | 0,21266832 | 0,22933329 | 0,22369677 | 0,121299 |
| 0,21300666 | 0,2126671 | 0,22933203 | 0,22369662 | 0,12129759 |
| 0,21299784 | 0,21266937 | 0,22933552 | 0,22369521 | 0,12130206 |
| 0,21299595 | 0,21267033 | 0,22933617 | 0,22369585 | 0,1213017 |
| 0,21300006 | 0,21266982 | 0,22933362 | 0,22369707 | 0,12129943 |

**C^16**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0,213000580383991 | 0,212668932923612 | 0,229334217726521 | 0,223696210928491 | 0,121300058037385 |
| 0,213000580389695 | 0,212668932921361 | 0,229334217724351 | 0,223696210930355 | 0,121300058034239 |
| 0,213000580380145 | 0,212668932926127 | 0,229334217726688 | 0,223696210927208 | 0,121300058039832 |
| 0,213000580377569 | 0,212668932926385 | 0,229334217728652 | 0,223696210925353 | 0,121300058042041 |
| 0,213000580385372 | 0,212668932923376 | 0,229334217726373 | 0,223696210927605 | 0,121300058037275 |

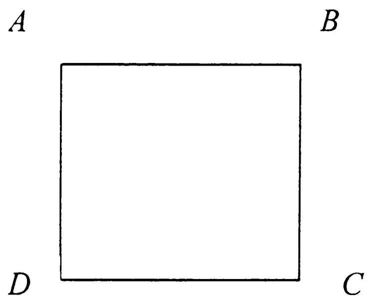
**C^32**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0,213000580383053 | 0,212668932924302 | 0,229334217726557 | 0,223696210927784 | 0,121300058038305 |
| 0,213000580383053 | 0,212668932924302 | 0,229334217726557 | 0,223696210927784 | 0,121300058038305 |
| 0,213000580383053 | 0,212668932924302 | 0,229334217726557 | 0,223696210927784 | 0,121300058038305 |
| 0,213000580383053 | 0,212668932924302 | 0,229334217726557 | 0,223696210927784 | 0,121300058038305 |
| 0,213000580383053 | 0,212668932924302 | 0,229334217726557 | 0,223696210927784 | 0,121300058038305 |

# UNE SITUATION COMPLEXE POUR FINIR

*Cette situation s'inspire d'un problème de l'ESSEC posé en 1993.*

On suppose qu'un point lumineux peut occuper les quatre sommets d'un carré $ABCD$. À l'instant $t$ il occupe l'un des quatre sommets, et à l'instant $t + 1$, il se déplace vers un sommet du carré selon un protocole[63].




Les notations seront les suivantes dans tout le chapitre :

$V_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n & d_n \end{pmatrix}$ est le vecteur stochastique donnant la probabilité à l'étape $n$, où $a_n$, $b_n$, $c_n$, et $d_n$ représentent les probabilités qu'à cette étape, le point lumineux occupe le sommet $A$, $B$, $C$, ou $D$ ;

$V_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \end{pmatrix}$ est le vecteur stochastique donnant la probabilité de l'état initial.

$M$ est la matrice de transition du graphe décrivant le protocole considéré, matrice supposée écrite en prenant l'ordre alphabétique des sommets du carré.

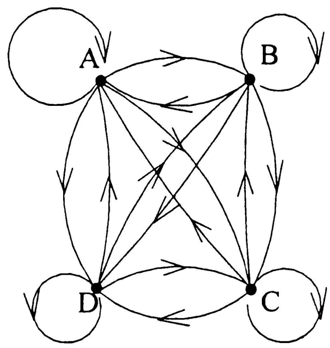
On a bien sûr $V_n = V_0 \times M^n$.

## I. Étude de la situation correspondant au protocole 1

Le premier protocole que nous nous proposons d'étudier est le suivant :

entre les instants $t$ et $t + 1$ le point lumineux soit reste en place, soit se déplace vers un des trois autres sommets, avec les mêmes probabilités.

Le graphe est le suivant, où toutes les arêtes sont pondérées par 1/4.

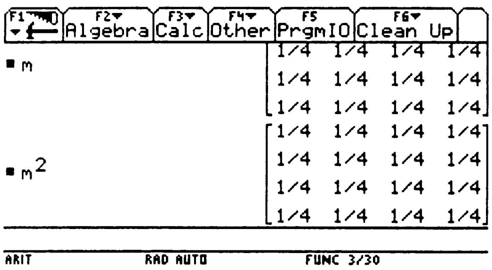


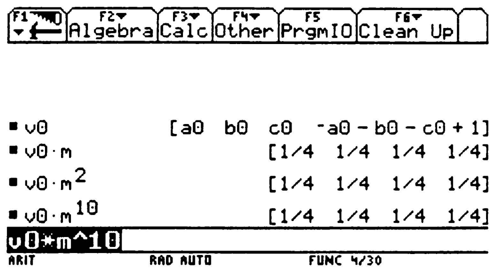

La matrice de transition $M$ du graphe probabiliste est la matrice stochastique suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

[63] Cinq protocoles différents seront étudiés dans les paragraphes qui suivent.

Tous ses coefficients sont non nuls : on sait donc que $V_0 \times M^n$ a pour limite l'unique vecteur stochastique stable par $M$ c'est à dire $\begin{pmatrix}1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\end{pmatrix}$. Plus précisément ici, pour tout $n$ entier naturel non nul, on a $M^n = M$ : il suffit de l'écrire... Le système est stable !
Quelle que soit la position de départ du point lumineux, chaque sommet du carré a la même chance d'être éclairé...ce qui est plutôt cohérent avec l'intuition, et ce que confirme la calculatrice.
Remarquons ici que $M$ est symétrique : les vecteurs (lignes) stables par $M$ sont exactement les vecteurs propres (colonnes) de $M$.

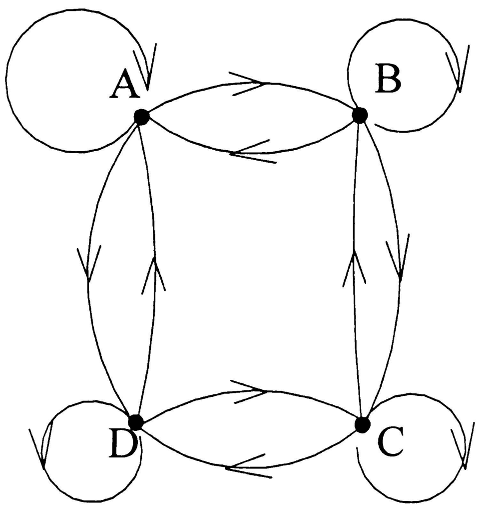



## II. Étude de la situation correspondant au protocole 2

Le second protocole est le suivant :

> entre les instants $t$ et $t + 1$ le point lumineux soit reste en place, soit se déplace vers un des deux autres sommets situés sur la même arête du carré, avec les mêmes probabilités. Le graphe est le suivant, où toutes les arêtes sont pondérées cette fois par 1/3.

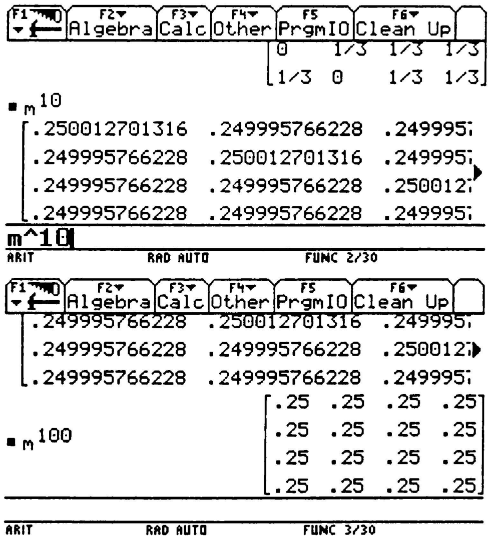



La matrice de transition $M$ du graphe probabiliste est donc

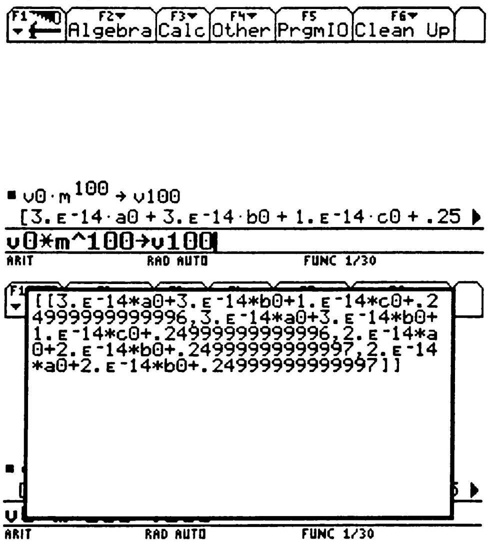
$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Attention, certains coefficients sont nuls : les résultats précédents ne s'appliquent donc plus. Reprenons donc en détail les étapes de la démarche.
Tout d'abord, déterminons les valeurs propres de cette matrice $M$. Le polynôme caractéristique de $M$ est $\left(\frac{1}{3} - X\right)^2 \left(-\frac{1}{3} - X\right)(1 - X)$ ; les valeurs propres sont donc 1 (simple),

$-\frac{1}{3}$ (simple) et $\frac{1}{3}$ (double). Finalement, contrairement à notre impression de départ, le théorème s'applique[64] : $V_0 \times M^n$ a pour limite l'unique vecteur stochastique stable par $M$ c'est à dire $\begin{pmatrix}1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\end{pmatrix}$ encore une fois. On a donc la même conclusion que dans l'exemple précédent.




Le calcul de $V_0 \times M^{100}$ peut se faire avec une TI-92 : on observe encore la convergence vers l'état stable $\begin{pmatrix}1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\end{pmatrix}$.



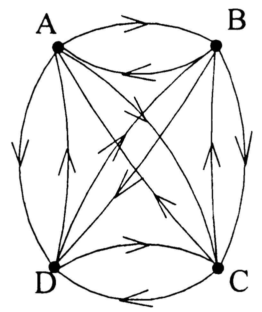

### III. Étude de la situation correspondant au protocole 3

On utilise le protocole suivant :

> entre les instants $t$ et $t+1$, le point lumineux se déplace, soit sur la diagonale du carré pour atteindre le sommet diamétralement opposé, avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$, soit sur chacune des arêtes contigües, avec les mêmes probabilités.

Le graphe est le suivant : chaque arête diagonale est pondérée par 1/2, tandis que les autres arêtes sont pondérées par 1/4.

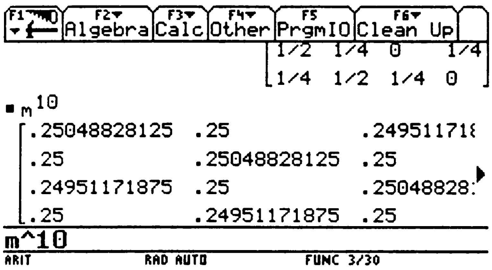
[64] Car 1 est valeur propre simple et les autres valeurs propres ont un module strictement inférieur à 1. Pourtant certains des coefficients de cette matrice sont nuls...

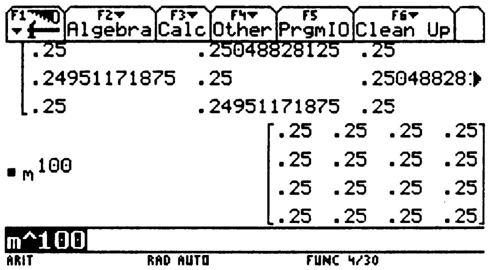



La matrice de transition $M$ du graphe probabiliste est donc :

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est $X(X-1)\left(X+\dfrac{1}{2}\right)^2$ ; une fois de plus, ses valeurs propres respectent les conditions du théorème qui montre que $V_0 \times M^n$ a pour limite l'unique vecteur stochastique stable par $M$ c'est à dire $(1/4 \quad 1/4 \quad 1/4 \quad 1/4)$ encore une fois. On a donc la même conclusion que dans l'exemple précédent, ce que l'on peut vérifier avec une calculatrice.



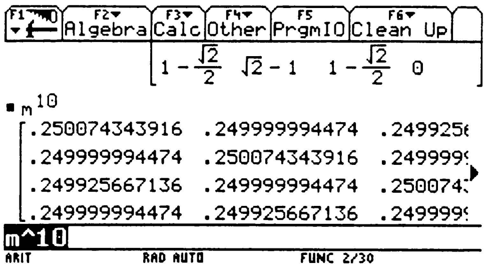

## IV. Étude de la situation correspondant au protocole 4

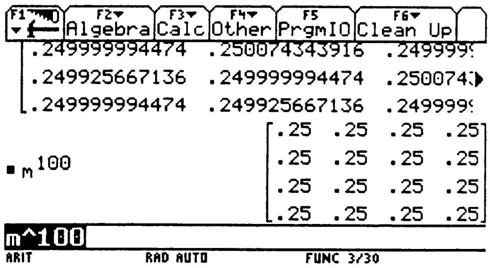
Le protocole est très voisin du précédent, à ceci près que l'on suppose que les probabilités conditionnelles de changement de sommet sont proportionnelles à la longueur du trajet parcouru par le point pour effectuer le déplacement.

La matrice de transition $M$ du graphe probabiliste est donc :

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1-\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}-1 & 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1-\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1-\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-1 & 1-\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1-\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}-1 & 1-\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est égal à $X^4 + (8\sqrt{2} - 12)X^2 + (28 - 20\sqrt{2})X - 17 + 12\sqrt{2}$ et il se factorise sous la forme $(X - 1)(X^3 + X^2 + (8\sqrt{2} - 11)X + 17 - 12\sqrt{2})$ puis, enfin, en produits de facteurs du premier degré $(X - 1)(X - 1 + \sqrt{2})^2(X + 3 - 2\sqrt{2})$ ; le théorème s'applique encore : $V_0 \times M^n$ a pour limite l'unique vecteur stochastique stable par $M$ c'est à dire $\begin{pmatrix}1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\end{pmatrix}$. On a donc la même conclusion que dans l'exemple précédent.

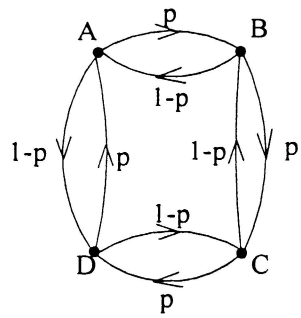



## V. Étude d'une situation correspondant au protocole 5

Le protocole est le suivant :

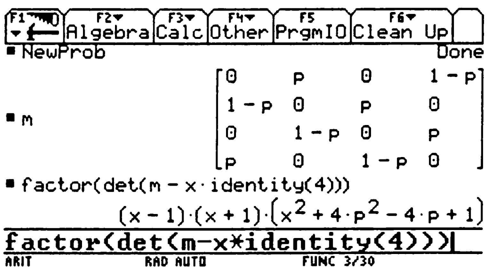
> entre les instants $t$ et $t + 1$, le point se déplace sur une des deux arêtes contiguës, avec la probabilité $p$ si le déplacement se fait dans le sens des aiguilles d'une montre et $1 - p$ sinon.




La matrice de transition du graphe est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ p & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

$M$ a pour polynôme caractéristique $(X - 1)(X + 1)(X^2 + (2p - 1)^2)$ ; les quatre valeurs propres complexes sont 1, $-1$, $(2p - 1)i$ et $-(2p - 1)i$ ; le théorème ne s'applique plus : 1 est bien valeur propre simple mais une des valeurs propres $(-1)$ a un module égal à 1[65] !




Peut-on conclure cependant ? Il s'agit toujours de trouver la limite de la suite $(M^n)$...
Commençons par examiner quelques cas particuliers.

[65] Et non plus strictement inférieur...

- **Premier cas particulier : p = $\frac{1}{2}$**

La matrice de transition est alors :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ et } M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix};$$

ainsi, par récurrence, on a pour tout entier $n$, $M^{2n} = M^2$ et $M^{2n+1} = M$.
D'où l'on tire que :

$$V_{2n} = V_0 \times M^2 \text{ et } V_{2n+1} = V_0 \times M$$

On en déduit :

$$\begin{cases} a_{2n} = c_{2n} = \frac{1}{2}(a_0 + c_0) \\ b_{2n} = d_{2n} = \frac{1}{2}(b_0 + d_0) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a_{2n+1} = \frac{1}{2}(b_0 + d_0) \\ b_{2n} = \frac{1}{2}(a_0 + c_0) \end{cases}$$

La suite $(V_n)$ ne converge que si et seulement si $a_0 + c_0 = b_0 + d_0$.
Précisons cette condition. On doit donc avoir :

$$\begin{cases} a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = 1 \\ a_0 + c_0 = b_0 + d_0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a_0 + c_0 = 1 - b_0 - d_0 \\ a_0 + c_0 = b_0 + d_0 \end{cases} \text{ d'où l'on tire } b_0 + d_0 = \frac{1}{2}.$$

En conclusion, la suite $(V_n)$ converge si et seulement si seulement si $a_0 + c_0 = b_0 + d_0 = \frac{1}{2}$;

elle converge alors vers le vecteur stochastique $\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$.
En revanche, si par exemple à l'instant initial le point lumineux est en A, le vecteur initial sera

$$V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et la suite $(V_n)$ ne convergera pas.
On aura $\lim\limits_{n \to +\infty} V_{2n} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

- **Deuxième cas particulier : $p = \frac{1}{4}$**

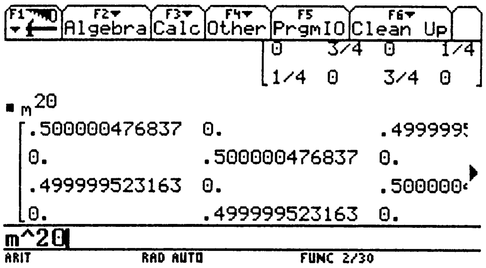
La matrice de transition[66] est cette fois $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}$.

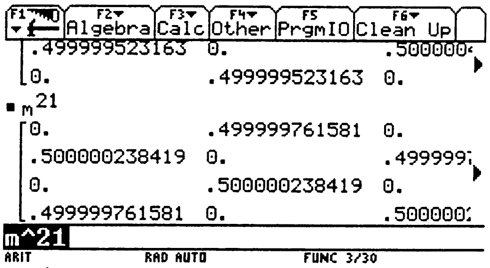
Déterminons les premières puissances de $M$.
On obtient :

[66] Elle n'est plus cette fois symétrique.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3/8 & 0 & 5/8 & 0 \\ 0 & 3/8 & 0 & 5/8 \\ 5/8 & 0 & 3/8 & 0 \\ 0 & 5/8 & 0 & 3/8 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 9/16 & 0 & 7/16 \\ 7/16 & 0 & 9/16 & 0 \\ 0 & 7/16 & 0 & 9/16 \\ 9/16 & 0 & 7/16 & 0 \end{pmatrix}$$

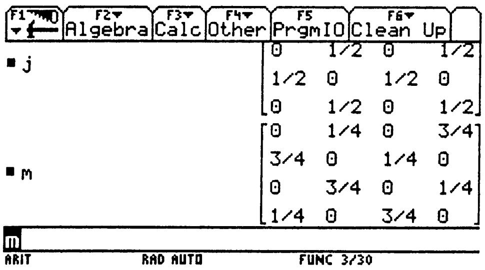
La calculatrice donne :

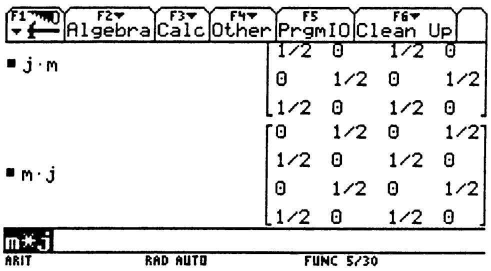



Il semble que la suite ($M^{2n}$) ait pour limite la matrice $J = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ déjà rencontrée et que la suite ($M^{2n+1}$) ait pour limite la matrice :

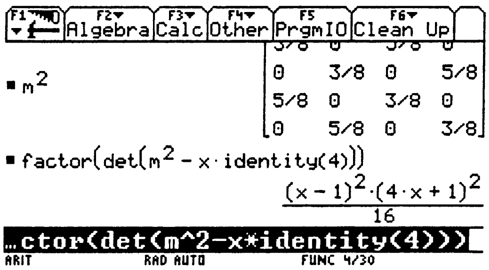
$$J' = JM = MJ = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$




Comme $M^{2n} = \left(M^2\right)^n$ étudions la matrice $M^2$ :

son polynôme caractéristique est $(1-X)^2\left(\dfrac{1}{4}+X\right)^2$ donc 1 et $-1/4$ sont deux valeurs propres d'ordre 2 ;



le sous espace propre $E$ associé à la valeur propre 1 est de dimension 2 et est dirigé par $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ tandis que le sous espace propre $F$ associé à la valeur propre $-\frac{1}{4}$ est de dimension 2 et est dirigé par $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Mais, un grand mais, on ne se trouve pas avec $M^2$ dans les conditions d'application du théorème : c'est bien une matrice stochastique, mais 1 est valeur propre double ! Il faut donc trouver un autre moyen pour déterminer la limite de $M^{2n}$...

Ceci étant, revenons aux considérations du début, il se trouve que $M^2$ est diagonalisable en choisissant une base de $\mathbb{R}^4$ constituée avec ses vecteurs propres. On peut écrire :

$$M^2 = PDP^{-1} \text{ en posant } D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1/4&0\\0&0&0&-1/4\end{pmatrix} \text{ et } P=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$$

Comme d'habitude, on en déduit que :

$$M^{2n} = PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&(-1/4)^n&0\\0&0&0&(-1/4)^n\end{pmatrix}P^{-1}$$

Tous calculs faits[67], on arrive à :

$$M^{2n}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)&0&\frac{1}{2}\left(1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)&0\\0&\frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)&0&\frac{1}{2}\left(1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)\\\frac{1}{2}\left(1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)&0&\frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)&0\\0&\frac{1}{2}\left(1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)&0&\frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)\end{pmatrix}$$

Il est alors clair que $\lim\limits_{n\to+\infty} M^{2n} = J$ et le résultat est prouvé !

Du même coup, $\lim\limits_{n\to+\infty} M^{2n+1} = M\lim\limits_{n\to+\infty} M^{2n} = MJ = J'$.

[67] Malheureusement non pris en charge par notre chère TI-92, à cause des $(-1)^n$, car *a priori*, la calculatrice suppose que $n$ est une variable *réelle* et bloque dans les calculs...

*Autre méthode*[68]

Relativement à la base canonique,

le projecteur sur $E$ parallèlement à $F$ a pour matrice $J = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ ;

le projecteur sur $F$ parallèlement à $E$ a pour matrice $K = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Si bien que $M^2 = J - \frac{1}{4}K.$

Nous utiliserons la formule du binôme, après avoir remarqué que :

$J$ et $K$ sont des matrices de projecteurs donc $J^2 = J = J^k$ , $K^2 = K = K^k$ pour tout entier $k$ ;

$J \times K = K \times J = 0.$

On peut écrire :

$$M^{2n} = \left(M^2\right)^n = \left(J - \frac{1}{4}K\right)^n = J^n + \left(-\frac{1}{4}\right)^n K^n = J + \left(-\frac{1}{4}\right)^n K$$

On conclut alors comme précédemment.

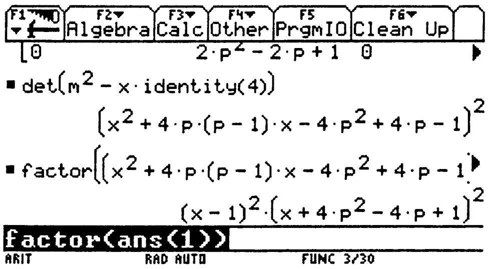
- **Cas général : $0 < p < 1$**

On procède de façon analogue :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ p & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2p(1-p) & 0 & p^2+(1-p)^2 & 0 \\ 0 & 2p(1-p) & 0 & p^2+(1-p)^2 \\ p^2+(1-p)^2 & 0 & 2p(1-p) & 0 \\ 0 & p^2+(1-p)^2 & 0 & 2p(1-p) \end{pmatrix}$$

On pourrait reprendre la même méthode que précédemment, d'autant que les valeurs propres se déterminent facilement :




1 et $-(2p-1)^2$ sont des valeurs propres d'ordre 2...

[68] Les calculs ne sont pas développés !

Déterminons les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres, sans trop détailler les calculs...

le sous espace propre $E$ associé à la valeur propre 1 est de dimension 2 et est dirigé par les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ comme dans le cas particulier déjà traité ;

le sous espace propre $F$ associé à la valeur propre $-(2p-1)^2$ est de dimension 2 et est encore dirigé par les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

La matrice $M^2$ est donc une fois de plus diagonalisable... En choisissant une base de $\mathbb{R}^4$ constituée avec ses vecteurs propres, on peut écrire :

$$M^2 = PDP^{-1} \text{ en posant } D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -(2p-1)^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -(2p-1)^2\end{pmatrix} \text{ et } P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

La matrice de passage n'a pas changé !
On en déduit que :

$$M^{2n} = PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -(2p-1)^{2n} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -(2p-1)^{2n}\end{pmatrix}P^{-1}$$

Le calcul donne finalement...

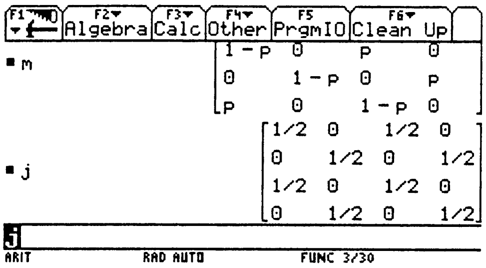
$$M^{2n}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(1-(2p-1)^{2n}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(1+(2p-1)^{2n}\right) & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\left(1-(2p-1)^{2n}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(1+(2p-1)^{2n}\right)\\ \frac{1}{2}\left(1+(2p-1)^{2n}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(1-(2p-1)^{2n}\right) & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\left(1-(2p-1)^{2n}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(1-(2p-1)^{2n}\right)\end{pmatrix}$$

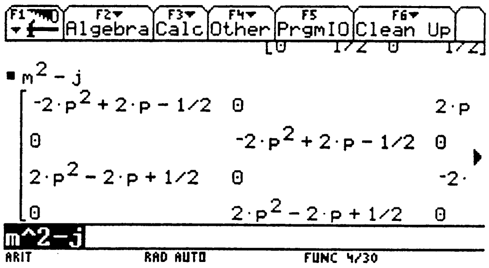
Nous sommes en mesure de conclure : si $p \in ]0 ; 1[$, alors $2p - 1 \in ]-1 ; 1[$. En tout état de cause, $\lim\limits_{n\to+\infty}(2p-1)^{2n}=0$ ce qui permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty}M^{2n}=J$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty}M^{2n+1}=M\lim\limits_{n\to+\infty}M^{2n}=MJ=J'$ comme précédemment.

*Autre méthode*

Les calculs précédents, s'ils permettent d'arriver à coup sûr au résultat, sont cependant fastidieux à mener. On peut chercher à utiliser une autre méthode, analogue à celle que nous avons utilisée dans le cas où $p = 1/4$.

On veut écrire $M^2$ sous la forme : $J$ + autre chose, pour pouvoir utiliser la formule du binôme. À quoi est égal $M^2 - J$ ?




Or, on peut écrire :

$$-2p^2+2p-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\left(4p^2-4p+1\right)=-\frac{1}{2}(2p-1)^2$$

$$2p^2-2p+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(4p^2-4p+1\right)=\frac{1}{2}(2p-1)^2$$

si bien que $M^2 - J = -(2p-1)^2 \times K$.

On en déduit comme précédemment que $M^{2n} = J + (-(2p-1)^2)^n \times K$.

Comme $-1 < -(2p-1)^2 \leqslant 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-(2p-1)^2\right)^n = 0$ et l'on conclut de la même façon.

**Conclusion**

Avec ce protocole, on obtient pour $p \in\ ]0\ ;\ 1[$ les mêmes conclusions que pour $p = 1/4$ ou $p = 1/2$ : la suite $(M^n)$ ne converge pas, contrairement aux deux sous-suites de rang pair et impair.

Si l'état initial vérifie $a_0 + c_0 = b_0 + d_0 = \dfrac{1}{2}$, alors l'état probabiliste décrit par la suite $(V_n)$ se stabilise vers la valeur limite $\begin{pmatrix}1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\end{pmatrix}$. Sinon, la suite $(V_n)$ n'a pas de limite ; en revanche :

$$\lim_{n\to+\infty} V_{2n} = \begin{pmatrix}a_0 & b_0 & c_0 & d_0\end{pmatrix} J = \begin{pmatrix}\dfrac{a_0+c_0}{2} & \dfrac{b_0+d_0}{2} & \dfrac{a_0+c_0}{2} & \dfrac{b_0+d_0}{2}\end{pmatrix}$$

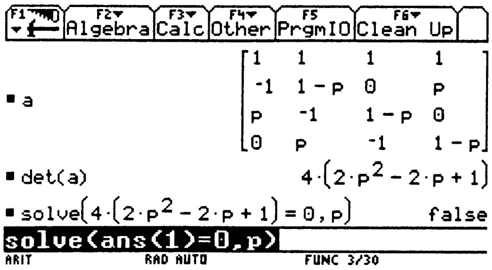
$$\lim_{n\to+\infty} V_{2n+1} = \begin{pmatrix}\dfrac{b_0+d_0}{2} & \dfrac{a_0+c_0}{2} & \dfrac{b_0+d_0}{2} & \dfrac{a_0+c_0}{2}\end{pmatrix}$$

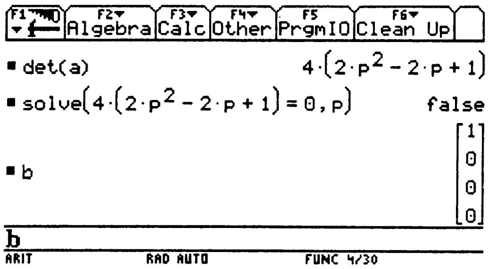
Remarquons enfin que $M$ possède un seul état stochastique stable représenté par le vecteur $\begin{pmatrix}1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\end{pmatrix}$.

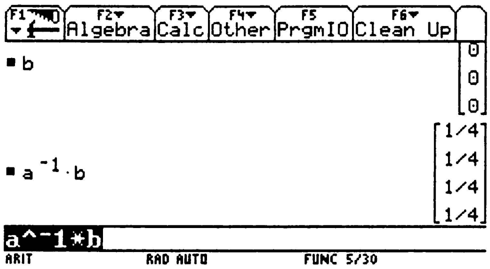
Il suffit de résoudre le système suivant, d'inconnue $(x, y, z, t)$ :

$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ (1-p)y+pt=x \\ px+(1-p)z=y \\ py+(1-p)t=z \\ (1-p)x+pz=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=1 \\ -x+(1-p)y+pt=0 \\ px-y+(1-p)z=0 \\ py-z+(1-p)t=0 \\ (1-p)x+pz-t=0 \end{cases}$$

La résolution d'un tel système, quelque peu rébarbative, peut être menée matriciellement sur une TI-92 :




## VI. Complément

On suppose que le point lumineux se déplace selon le *protocole 1*. On s'intéresse à la probabilité $p_n$ qu'entre les instants 0 et $n$ on observe au moins une fois le phénomène suivant : le point lumineux reste en $A$ pendant 5 instants consécutifs.

Ce problème est à rattacher évidemment à un des exemples introductifs inspiré par Nicole Vogel.

Au $n^e$ instant ($n \geqslant 1$), on est dans l'un des 6 états :

$E_0$ : aucune suite de 5 allumages en $A$ au cours des $n$ instants, et le dernier allumage n'est pas en $A$.

$E_1$ : aucune suite de 5 allumages en $A$ au cours des $n$ instants, le dernier allumage est en $A$, mais pas l'avant dernier

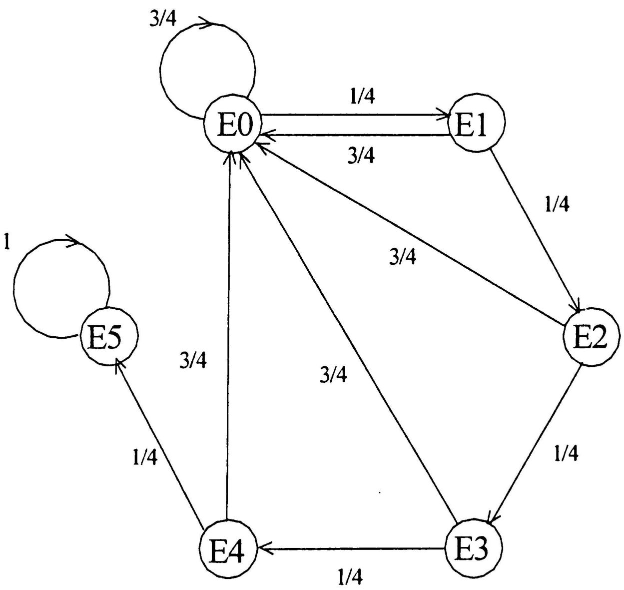
$E_2$ : aucune suite de 5 allumages en $A$ au cours des $n$ instants, les deux derniers allumages sont en $A$, mais pas celui d'avant

$E_3$ : aucune suite de 5 allumages en $A$ au cours des $n$ instants, les trois derniers allumages sont en $A$, mais pas celui d'avant

$E_4$ : aucune suite de 5 allumages en $A$ au cours des $n$ instants, les quatre derniers allumages sont en $A$, mais pas celui d'avant

$E_5$ : il y a au moins une suite de 5 allumages en $A$ au cours des $n$ instants

Le graphe probabiliste à six sommets ci-dessous décrit l'évolution du système :

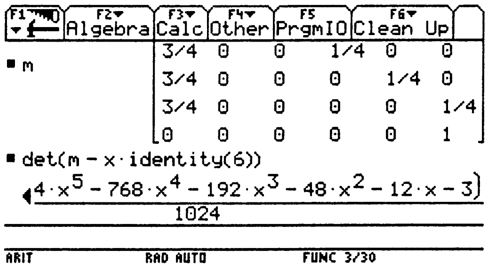


Sa matrice de transition est la matrice

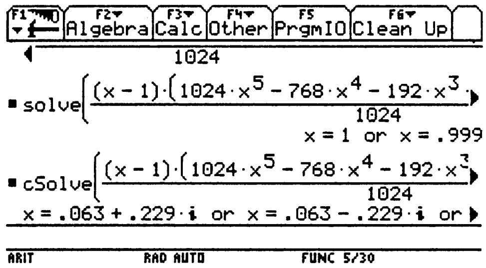
$$M=\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

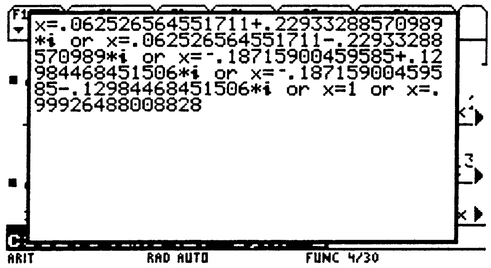
Le polynôme caractéristique de $M$ est :

$$P(X)=(1-X)\left(-X^5+\frac{3}{4}X^4+\frac{3}{4^2}X^3+\frac{3}{4^3}X^2+\frac{3}{4^4}X+\frac{3}{4^5}\right).$$




Quelles sont les valeurs propres, c'est-à-dire les racines du polynôme caractéristique ? Notre petite TI-92 donne :



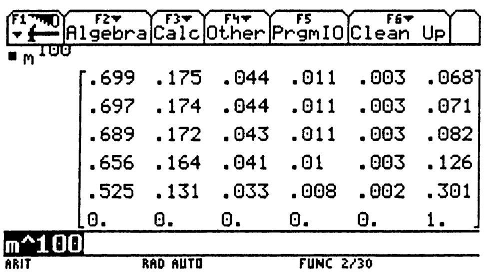



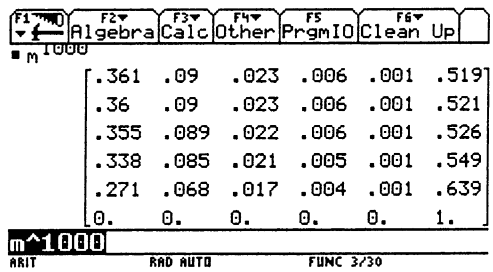

soit deux valeurs propres réelles, 1 et une autre très proche de 1[69], ainsi que 4 valeurs propres complexes toutes de module strictement inférieur à 1.

Le théorème s'applique donc : la suite ($M^n$) converge vers la matrice dont les lignes sont égales à l'unique vecteur stochastique stable par $M$ qui est $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Le vecteur $V_n = \begin{pmatrix}x_n & y_n & z_n & t_n & u_n & p_n\end{pmatrix}$ décrivant l'état probabiliste du système a donc pour limite $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

La probabilité de voir s'allumer 5 fois de suite au cours des $n$ premiers instants le point en $A$ tend vers 1 quand $n$ tend vers $+\infty$, et ceci quelle que soit l'allumage initial. Cependant la convergence est très lente comme le montre les écrans suivants :




C'est lié à la présence d'une valeur propre très proche de 1 : en effet, la suite géométrique de raison 0,999 qui va apparaître dans les calculs de $M^n$ converge assez lentement.

[69] En précisant, c'est une valeur propre comprise entre 0,9992 et 0,9993.

# ANNEXE 1 : RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

$u$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}^q$ ; on appelle $M$ sa matrice dans la base canonique.

**Valeurs propres, vecteurs propres**

- On dit que $\lambda$ est une *valeur propre* de l'endomorphisme $u$ (ou de la matrice $M$) s'il existe un vecteur $x$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$.
- On dit que $x$ est un *vecteur propre* associé à la valeur propre $\lambda$.

**Polynôme caractéristique**

- Le *polynôme caractéristique* de $u$, ou de $M$, est :

$$P(X) = \det(u - X\,\mathrm{id}) = \det(M - XI).$$

Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres de $u$.

- Quand on travaille dans $\mathbb{C}$, $P(X)$ est toujours scindé et $u$ possède $q$ valeurs propres complexes distinctes ou non.

$P(X)$ peut s'écrire :

$$P(X) = (X-\lambda_1)^{\alpha_1}(X-\lambda_2)^{\alpha_2}\ldots(X-\lambda_p)^{\alpha_p} \text{ avec } \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p = q$$

On dit alors que $\lambda_i$ est une valeur propre d'ordre $\alpha_i$.

**Sous-espace propres**

- $E_i = \ker\,(u - \lambda_i Id)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_i$.
- La dimension du sous-espace propre $E_i$ vérifie : $\dim E_i \leqslant \alpha_i$.
- Les sous-espaces propres $E_i$ forment une *somme directe*, ... **mais** cette somme ne donne pas toujours l'espace $\mathbb{C}^q$ tout entier.

Si c'est le cas, l'endomorphisme $u$, et donc sa matrice $M$ est *diagonalisable* car il existe une base de l'espace formé de vecteurs propres.
Sinon il faudra trouver une somme directe donnant $\mathbb{C}^q$ en « agrandissant » les sous-espaces propres.

**Polynôme minimal**

- Le polynôme caractéristique s'annule en $u$ : $P(u) = 0$. C'est le théorème de Cayley-Hamilton.
- L'ensemble des polynômes $Q$ de $\mathbb{C}[X]$ tels que $Q(u) = 0$ est un idéal non réduit à $\{0\}$ de l'anneau $\mathbb{C}[X]$ : il est engendré par un polynôme $m$ non nul, appelé polynôme minimal de $u$.
- Le polynôme minimal $m$ divise le polynôme caractéristique $P$ et a les mêmes racines que $P$.

En conséquence, $m(X) = (X-\lambda_1)^{r_1}(X-\lambda_2)^{r_2}\ldots(X-\lambda_p)^{r_p}$ avec $1 \leqslant r_i \leqslant \alpha_i$.

**Sous-espaces spectraux**

- Le sous-espace vectoriel

$$N_i = \ker\left((u-\lambda_i Id)^{r_i}\right) = \ker\left((u-\lambda_i Id)^{r_i+1}\right) = \ldots = \ker\left((u-\lambda_i Id)^{\alpha_i}\right)$$

est le *sous espace spectral* associé à la valeur propre $\lambda_i$.

- Le sous-espace propre $E_i$ associé à la valeur propre $\lambda_i$ est contenu dans le sous-espace spectral $N_i$ associé à la même valeurs propre.

- Le sous-espace spectral $N_i$ a pour dimension $\alpha_i$.

- L'espace tout entier $\mathbb{C}^q$ est la somme directe des sous-espaces spectraux $N_i$.

Les sous-espaces spectraux sont bien les « agrandissements », que nous suggérions plus haut, des sous-espaces propres.

- Si $\lambda_i$ est une valeur propre simple de $u$ , alors $\alpha_i = r_i = 1$ et $E_i = N_i$ est une droite vectorielle.

**Restriction de *u* aux sous-espaces spectraux**

- On appelle $u_i$ la restriction de $u$ à $N_i$ : $u_i$ est un endomorphisme de $N_i$.

- $v_i = u_i - \lambda_i Id_{N_i}$ est aussi un endomorphisme de $N_i$. Il est de plus nilpotent d'indice $r_i$, c'est-à-dire que $v_i^{ri} = 0$ tandis que $v_i^{ri-1} \neq 0$.

On a donc de façon équivalente $u_i = v_i + \lambda_i Id_{N_i}$

## ANNEXE 2 : PUISSANCES DE MATRICE

Les notations précédentes sont conservées.
Pour $n$ appartenant à $\mathbb{N}$, $u^n$ désigne l'endomorphisme $u^n = u \circ u \circ ... \circ u$.

**Écriture de $u^n$, puis de $M^n$, dans le cas général**

- Si le vecteur $x$ appartient à $\mathbb{C}^q$, il s'écrit de façon unique sous la forme

$$x = x_1 + x_2 + ... + x_p$$

avec $x_i$ appartenant au sous-espace spectral $N_i$.

$$u^n(x) = u^n(x_1 + x_2 + ... + x_p) = \sum_{i=1}^{i=p} u^n(x_i) = \sum_{i=1}^{i=p} u_i^n(x_i) = \sum_{i=1}^{i=p} (v_i + \lambda_i Id)^n (x_i).$$

- *Expression de $u_i^n$*

Que vaut $u_i^n = (v_i + \lambda_i Id)^n$ ?

Comme les endomorphismes $v_i$ et $\lambda_i$ Id commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$u_i^n = (v_i + \lambda_i \mathrm{Id})^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} v_i^k \lambda_i^{n-k} = \sum_{k=0}^{k=r_i-1} \binom{n}{k} v_i^k \lambda_i^{n-k}$$

*(dès que $n$ dépasse $r_i - 1$ du fait de la nilpotence de $v_i$)*

Si $\lambda_i$ est non nulle et si $n$ dépasse $r_i - 1$ on a :

$$u_i^n = \sum_{k=0}^{k=r_i-1} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} v_i^k \lambda_i^{n-k}$$

$$= \lambda_i^n \sum_{k=0}^{k=r_i-1} \frac{v_i^k}{k!\lambda_i^k} \left(a_{k,0} + a_{k,1}n + ... + a_{k,k-1}n^{k-1} + n^k\right)$$

$$= \lambda_i^n \sum_{k=0}^{k=r_i-1} w_{i,k} n^k$$

où les $w_{i,k}$ sont des endomorphismes de $N_i$, s'écrivant comme combinaison linéaire des endomorphismes $v_i^k$.

Si la valeur propre $\lambda_i$ est non nulle et simple, alors $r_i = 1$ et $v_i$ est l'endomorphisme nul et $u_i^n = \lambda_i^n Id_{N_i}$.

Si on suppose que toutes les valeurs propres de $u$ sont non nulles et si on note $p_i$ le projecteur sur $N_i$ parallèlement à la somme directe des $N_k$ pour $k$ différent de $i$, on peut donc en revenant à $u^n$ écrire, en supposant $n$ suffisamment grand et en utilisant ce qui précède :

$$u^n = \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i^n \sum_{k=0}^{k=r_i-1} n^k \left(w_{i,k} \circ p_i\right)$$

où les $w_{i,k} \circ p_i$ sont des endomorphismes de $\mathbb{C}^q$.

- *Expression de $u^n$*

Si on suppose que 0 est une des valeurs propres de $u$, l'écriture précédente demeure valable, à ceci près que la première somme est constituée de $p - 1$ termes au lieu de $p$.

La relation ci-dessus se traduit naturellement sous forme matricielle :

$$M^n = \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i^n \sum_{k=0}^{k=r_i-1} n^k A_{i,k} \quad \text{pour } n \text{ suffisamment grand,}$$

où les $A_{i,k}$ sont des matrices qui ne dépendent pas de $n$ ; elles sont au nombre de $r = r_1 + r_2 + ... + r_p$ ; et au nombre de $r_1 + ... + r_{p-1}$ si on suppose que $0 = \lambda_p$

**Cas d'une matrice stochastique vérifiant les conditions du théorème 6**

On suppose à présent que $M$ est une matrice stochastique ayant $\lambda_1 = 1$ comme valeur propre simple et dont les autres valeurs propres $\lambda_2$, ...., $\lambda_p$ ont un module strictement inférieur à 1.

Les sous espaces spectraux $N_1$ , $N_2$ ,..., $N_p$ sont de dimension respective 1, $\alpha_2$,..., $\alpha_p$.

On obtient une base $B'$ de $\mathbb{C}^q$ en réunissant les bases de ces sous-espaces spectraux.

L'endomorphisme $u$ qui a pour matrice $M$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^q$ a pour base $M'$ dans la base $B'$ et on a la relation habituelle : $M = PM'P^{-1}$ où $P$ désigne la matrice de passage de la base canonique vers $B'$.

On en déduit que $M^n = PM'^nP^{-1}$.

Or :

$$u^n = p_1 + \sum_{i=2}^{i=p} \lambda_i^n \sum_{k=0}^{k=r_i-1} n^k w_{i,k} \circ p_i$$

Traduisons sous forme matricielle cette relation en utilisant la base spectrale $B'$ :

$$M'^n = A_1 + \sum_{i=2}^{i=p} \lambda_i^n \sum_{k=0}^{k=r_i-1} n^k W_{i,k} \times A_i$$

avec $A_1$ constituée de 0 partout sauf à la première ligne première colonne où il y a 1.

$W_{i,k} \times A_i = A_{i,k}$ est une matrice d'ordre $q$ qui ne dépend pas de $n$.

On munit l'ensemble des matrices carrées d'ordre $q$ de la norme définie par

$$\|M\| = \sup |m_{i,j}|.$$

On a donc $0 \leqslant \|M'^n - A_1\| \leqslant \sum_{i=2}^{i=p} \sum_{k=0}^{k=r_i-1} |\lambda_i|^n \|A_{i,k}\| n^k$

Soit $a = \text{Sup } \|A_{i,k}\|$ ; on peut écrire $0 \leqslant \|M'^n - A_1\| \leqslant a \sum_{i=2}^{i=p} \sum_{k=0}^{k=r_i-1} |\lambda_i|^n n^k$.

Or chacun des termes $|\lambda_i|^n n^k$ de la somme finie qui majore $\|M'^n - A_1\|$ a pour limite 0 quand $n$ tend vers $+\infty$ puisque chacune des valeurs propre a un module strictement inférieur à 1; par encadrement on en déduit donc que $\lim_{n \to +\infty} \|M'^n - A_1\| = 0$.

et donc $M'^n$ tend vers $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Il s'en suit que $M^n$ a pour limite $P \times A_1 \times P^{-1} = M_0$.

$M_0$ est stochastique, comme $M$ et comme $M^n$, de rang 1 comme $A_1$.

Toutes ses lignes sont donc proportionnelles, mais comme la somme de leurs termes vaut 1, elles doivent être égales.

$M_0$ s'écrit donc nécessairement sous la forme $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_q \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_q \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_q \end{pmatrix}$

**Réf :** **R 134**

**Titre :** **Graphes probabilistes et matrices stochastiques**

**Auteurs :** Catherine Philippe - Christian Vassard

**Public visé :** Enseignants de lycée, étudiants préparant les concours de recrutement

## Résumé :

Nous pensons qu'on n'enseigne *bien* que ce que l'on connaît *bien*. Il nous paraîtrait aventureux de faire un cours sur les graphes probabilistes à des élèves de lycée sans aller regarder d'un peu plus près de quoi il retourne.

C'est l'objet, modeste, de notre brochure, qui s'est constituée peu à peu, en réponse aux diverses questions que ce nouvel enseignement a suscitées chez nous.

Nous n'avons pas voulu faire un cours théorique : il n'est ni facile ni profitable pour un professeur de digérer les pavés universitaires indigestes que l'on rencontre à foison sur le sujet.

Nous avons fait le choix de partir d'exemples précis, suscitant des interrogations... C'est quand les questions sont posées et les comportements précisés que nous démontrons les résultats.

Les chapitres sont les suivants :

Étude de quelques situations ;
Étude exhaustives des matrices stochastiques d'ordre 2 ;
Quelques exemples de matrices stochastiques d'ordre 3 ;
Étude générale des matrices stochastiques ;
Une situation pour finir.

**Mots clés :** graphe probabiliste, matrice stochastique, TI-92, exemples, valeurs propres, diagonalisation, réduite de Jordan, puissance $n^e$ de matrice

**Date :** Septembre 2004

**Nombre de pages** : 86

**Prix :** 8 €

**N° ISBN :** **2-86239-089-5**

**Publication :** **IREM, Université de Haute-Normandie**
**Bâtiment de Mathématiques**
**Avenue de Broglie**
**76821 Mont-Saint-Aignan Cedex**

***************************************************************************************

**Bon de commande** à retourner à

IREM de ROUEN
Bâtiment de mathématiques
Avenue de Broglie
BP 138
76821 Mont-Saint-Aignan Cedex

M, Mme ....................................................
Adresse : ....................................................
....................................................
....................................................

Quantité : ..............

Prix à payer : nombre d'exemplaires.....× 8 € + frais de port : 2.40€ + 0.80€ par livre supplémentaire

Date : ................................ Signature :

Chèque libellé à l'ordre de l'Agent comptable de l'Université de ROUEN.