ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES

COLLOQUE INTERNATIONAL
L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES DE LA PRIME ENFANCE À L'ÂGE ADULTE

Revue internationale de didactique des mathématiques

Rédacteurs en chef : ALAIN KUZNIAK & FRANÇOIS PLUVINAGE

IREM de Strasbourg
Université Louis Pasteur

Supplément au volume 11 **2006**

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
ISSN 0987 - 7576

Éditeur

IREM de Strasbourg
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
F - 67084 Strasbourg CEDEX
Tel. (33) 03 90 24 01 30
Fax (33) 03 90 24 01 65
Bibliothèque : (33) 03 90 24 01 61
http://irem.u-strasbg.fr
irem@math.u-strasbg.fr

Ce numéro des ANNALES est publié et diffusé avec le soutien de l'APMEP.

Sommaire

Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
Supplément au volume 11 – 2006

COLLOQUE INTERNATIONAL L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES DE LA PRIME ENFANCE À L'ÂGE ADULTE

Colloque international

L'apprentissage des mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte

organisé par le CREM[1], du 7 au 9 juillet 2005
à l'Université de Mons-Hainaut - Belgique

Avec le soutien
de la Communauté française Wallonie-Bruxelles

SYNTHÈSE DU COLLOQUE : L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES CONSIDÉRÉ COMME UN TOUT

Le titre du colloque était *L'apprentissage des mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte*. L'intention était claire. L'apprentissage des mathématiques est rarement étudié dans toute son extension, de l'enfance à l'âge adulte. Plusieurs raisons expliquent cela. Parmi celles-ci,

- chaque enseignant travaille avec des élèves d'un âge déterminé ;
- dans beaucoup de pays, les enseignants des écoles élémentaire et secondaire se préparent à leur métier dans des écoles différentes ;
- les psycho-pédagogues concentrent le plus souvent leurs recherches relatives à l'enseignement des mathématiques sur l'école élémentaire, et non sur l'école secondaire ;
- les didacticiens préfèrent souvent étudier des situations d'apprentissage précises plutôt que des questions liées à l'ensemble de la scolarité ;
- les mathématiciens sont absorbés par leurs propres recherches.

Toutefois, avoir une vue d'ensemble de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques est une nécessité pour les responsables de l'éducation. En outre, savoir comment les mathématiques sont apprises depuis l'enfance jusqu'à l'âge adulte aiderait chaque enseignant en particulier à comprendre les difficultés rencontrées par les élèves et à situer son action à une étape donnée de l'éducation.

Dans les annonces du colloque, les questions suivantes avaient été posées en vue d'orienter

[1]Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 5 rue Émile Vandervelde, 1400 Nivelles, Belgique.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, supplément vol. 11, p. 3 – 16.

et délimiter les discussions :

1. Dans quelle mesure les premiers apprentissages mathématiques réalisés à l'école primaire influencent-ils l'acquisition de concepts tout au long de la formation ?
2. Quels sont les rôles respectifs dans l'apprentissage des démarches procédurales et des concepts ?
3. Sur quelles bases, en fonction de quels critères agencer les matières en vue d'un apprentissage "naturel" des mathématiques ?
4. Quels sont les rôles respectifs de l'intuition et de la rigueur ?
5. Quels sont les rôles respectifs, dans l'apprentissage, des problèmes et de la structuration théorique ?
6. Quel est le rôle de la logique ?
7. Quelle part les tentatives faites dans le passé pour cerner l'enseignement des mathématiques en termes de matières et de méthodes réservaient-elles aux questions précédentes ?

Ci-après, sans revenir aux questions posées une par une, nous essayons de donner une vue d'ensemble des contributions au colloque, en nous efforçant de mettre en évidence les idées et points de vue relatifs à l'éducation mathématique considérée globalement.

Commençons par rendre compte des conférences plénières.

1. Les conférences plénières

A. Schœnfeld a traité l'importante question de la résolution de problèmes. Cette question est très générale, car elle ne porte pas seulement sur l'enseignement des mathématiques, pas même seulement sur les mathématiques, mais sur toute activité où l'on rencontre quelque difficulté. Bien entendu, Schœnfeld s'occupe surtout de la résolution de problèmes par les élèves, mais il considère aussi les actions de l'enseignant.

Sa thèse principale est que le comportement de ceux qui résolvent des problèmes est *rationnel*. Mais il s'agit d'une rationalité qui est loin d'être toujours dictée par les termes intrinsèques du problème initialement posé. Les décisions successives prises par celui qui résout un problème peuvent être analysées a posteriori et rattachées à des causes objectives, identifiables. Celui qui résout le problème, de son côté, n'est pas toujours conscient des raisons effectives qui inspirent ses actions. Le défi est de "comprendre quels problèmes les gens essaient réellement de résoudre". Dans un contexte problématique donné,

– ils agissent conformément à leurs objectifs, leurs connaissances et leurs croyances ;

- ils se donnent des objectifs prioritaires ;
- et choisissent, conformément à ce qu'ils croient, les connaissances à utiliser ;
- dans le cours de l'action, ils changent de priorités pour leurs objectifs, selon leurs capacités métacognitives ;
- et ce processus est récurrent.

Ce schéma théorique est une *constante*, un modèle universel, servant de base pour expliquer les prises de décisions dans la résolution de problèmes. Il est applicable en particulier à l'apprentissage (et à l'enseignement) des mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte.

D. Tall par contre traite non pas d'une constante, mais d'une *évolution* : il étudie le développement de la pensée mathématique de l'enfance à l'âge adulte. Il distingue trois univers mentaux principaux en mathématiques, à savoir, dans ses propres termes :

> "Un *univers de concepts* lié aux objets, centré sur l'observation, la description, la définition et la déduction de propriétés, se développant depuis les expériences de pensée jusqu'aux preuves euclidiennes.
>
> Un *univers de symboles et de procepts* lié aux actions, qui comprime des schémas d'actions pour en faire des objets de pensée opérant de deux façons, en tant que processus et en tant que concepts (les procepts).
>
> Un *univers formel, axiomatique,* centré sur la construction de systèmes axiomatiques basés sur des définitions formelles et des preuves de nature ensembliste."

La progression, sommairement décrite comme "je vois, je calcule et je choisis un axiome", procède principalement par *compressions et connexions*, par la suppression d'anciens liens dans l'esprit (le cerveau) et la création de nouveaux liens, par déplacement de l'attention de l'action vers l'effet de l'action (diverses actions ayant le même effet). L'effet de la compression est la création de nouveaux objets de pensée, avec un rôle crucial, à chaque étape et pour chaque individu, pour les *déjà-là* (ce qui est donné à la naissance) et les *déjà-rencontrés*[2].
Une telle analyse est un instrument disponible aux enseignants non seulement pour interpréter les moyens de pensée de leurs élèves, mais aussi pour saisir l'orientation générale de l'acquisition des mathématiques d'un bout à l'autre.

Schœnfeld et Tall rendent compte chacun d'une certaine réalité intellectuelle, avec bien entendu des conséquences pratiques pour l'enseignement. E. Wittmann, pour sa part, considérant l'éducation mathématique comme une science de

[2]En anglais les *set-befores* et les *met-befores*.

développement[3], propose des principes généraux pour assurer un enseignement efficace, basé évidemment sur la connaissance que l'on a du milieu scolaire. Schœnfeld et Tall sont plus descriptifs que constructifs, Wittmann est plus constructif que descriptif.
Wittmann place au centre les patterns[4], tels qu'ils existent dans la science et la pratique mathématiques. Mais ce qui est en cause, ce sont les patterns construits et explorés par des étudiants actifs, pas des patterns simplement observés et décrits. Les patterns vus d'un point de vue dynamique induisent des *preuves opératives*, c'est-à-dire des preuves basées sur des actions reconnues comme reproductibles, et produisant les mêmes effets quand les mêmes circonstances se reproduisent.
Dans une telle perspective, la tâche principale du concepteur d'enseignement et de l'enseignant est de créer des *environnements d'étude substantiels.* Ceux-ci sont définis par Wittmann dans les termes suivants :

> "Un tel environnement représente des objectifs, contenus et principes centraux pour l'enseignement des mathématiques à un certain niveau.
>
> Il est en relation avec des contenus, procédures et processus mathématiques significatifs situés au-delà de ce niveau, et est une source riche d'activités mathématiques.
>
> Il est flexible et peut être adapté aux conditions particulières prévalant dans la classe.
>
> Il intègre les aspects mathématique, psychologique et pédagogique de l'enseignement des mathématiques, et constitue de ce fait un champ prometteur pour la recherche empirique."

De tels environnements substantiels s'appuient souvent sur l'utilisation de ce que Wittmann appelle des *représentations d'objets mathématiques* : par exemple des jetons, des polygones en carton, des graphiques simples, *etc*. Ces matériaux se situent entre les concepts mathématiques abstraits et les objets quotidiens, ceux-ci étant souvent surchargés de connotations concrètes sans relation avec les mathématiques en cause.
Il insiste aussi sur les capacités de base, qui doivent être entra"nées de façon ordonnée et progressive, en relation avec l'expérimentation des patterns.
Enfin, Wittmann insiste sur la conception de *trajectoires d'apprentissage*[5], une classe donnée de patterns, des plus simples aux plus élaborés, étant revisitée plusieurs fois et conduisant à des contenus mathématiques toujours nouveaux et plus généraux. Il parle à cet égard d'une approche globale de l'éducation mathématique depuis l'enfance jusqu'à l'âge adulte.

Schœnfeld, Tall et Wittmann ont considéré l'apprentissage des mathématiques en général, en illustrant leurs propos d'exemples tirés de divers domaines des

---

[3]A design science.

4Nous préférons ne pas traduire ce mot.

[5]Learning trajectories.

mathématiques scolaires. N. Rouche pour sa part attire l'attention sur le développement de chaque théorie mathématique en particulier. Il traite en détail de la structure linéaire.
Réalisant l'impossibilité d'apprendre une structure mathématique abstraite à partir de la prime enfance, il considère la nécessité pour les concepts et propriétés mathématiques de se développer à partir de la pensée commune. Sur le chemin de la structure linéaire, on trouve les avatars successifs des notions de rapport et de proportionnalité :

- le rapport, exprimé par un nombre naturel, entre deux grandeurs de la même espèce (non encore mesurées) ;
- la proportionnalité entre deux grandeurs d'espèces différentes ;
- la notion de mesure en tant que proportionnalité entre grandeurs et nombres avec, pour arriver à des mesures de plus en plus précises, les approfondissements successifs de la notion de nombre, depuis les naturels jusqu'aux réels positifs ;
- la proportionnalité entre deux grandeurs mesurées, et ensuite entre deux nombres réels abstraits ;
- la mutation de la proportionnalité due à l'irruption des quantités négatives ;
- et enfin la "proportionnalité" entre grandeurs dirigées et vecteurs, le coefficient de proportionnalité devenant la matrice d'une transformation linéaire.

C'est là un exemple de *théorie génétique*. Une telle théorie est une construction rationnelle consistant en

> "une suite de notions, de théories locales, de structures, partant de l'expérience commune et s'acheminant vers les mathématiques constituées. Essentiellement, ces notions sont de généralité croissante, chacune étant pertinente dans un contexte plus large que la précédente. Passer de l'une à la suivante est fortement motivé par des questions, des lacunes observées, des obstacles ou le besoin d'une compréhension nouvelle. Chaque nouvelle étape théorique apparaît comme une réponse adaptée, efficace, aux difficultés rencontrées, aux nouveaux contextes pris en compte. Elle s'enracine dans ce qui précède et qui est sa source principale sur les plans du sens et de l'intuition."

Une telle description nous paraît justifier le besoin de théories génétiques.

Venons-en maintenant à M. Artigue, qui a introduit et commenté trois domaines de recherche distincts.
Premièrement, elle montre les raisons de s'intéresser aux flexibilités des apprentissages, parlant

> "d'une vision plus équilibrée des rapports ente ce que l'on pourrait appeler une conceptualisation verticale, par abstraction, généralisation et insertion dans des structures, et

une conceptualisation horizontale par connexions entre contextes, domaines, formes de représentation sémiotiques."

Comme exemple, elle cite la distinction, due à Sierpinska s'exprimant sur l'algèbre linéaire, entre les points de vue *géométrique-synthétique* (des droites, des plans, des variétés, …), *arithmétique-analytique* (des équations, des matrices, …) et *analytique-structurel* (des axiomes et du raisonnement formel).
Ensuite, Artigue explique la transition difficile entre le lycée et l'université, en insistant moins sur les difficultés individuelles des étudiants que sur ce qu'elle appelle des *micro-ruptures* entre les deux institutions : la nécessité (à l'université) d'étudier plus vite, des tâches plus variées, davantage d'autonomie (moins d'indications pour aider les étudiants dans les exercices), *etc*. C'est là un point de vue anthropologique inspiré par Chevallard, l'insistance étant déplacée de l'individu vers l'organisation et les habitudes institutionnelles.
Enfin, elle explique l'intérêt qu'il y a à explorer l'enseignement des mathématiques aux ingénieurs, aux économistes et aux autres utilisateurs de mathématiques. Dans de tels contextes d'enseignement, le schéma qui va des structures vers les applications (aujourd'hui s'appuyant sur des logiciels) semble inapproprié en comparaison avec celui qui, à l'opposé, utilise les logiciels pour motiver l'étude des structures. Dans le même contexte, la modélisation des situations réelles devrait être considérée comme une démarche essentielle, et non comme un moyen d'illustrer un morceau de mathématique pure.
Alors que les exemples d'Artigue sont presque tous pris au niveau universitaire, les questions qu'elle soulève sont pertinentes et sont matières à réflexion à tous les niveaux scolaires.

Considérons maintenant la conférence plénière d'A. Sierpinska. La question principale qu'elle a traitée est la suivante : comment se fait-il que toute réforme soit immédiatement critiquée et conduise quasiment d'emblée à une nouvelle réforme ? Sa conférence a présenté :

- l'élaboration de lignes conductrices traversant les contenus mathématiques,
- la sélection des matières,
- l'idée d'étudier pour comprendre, en négligeant les procédures,
- l'apprentissage par résolution de problèmes,
- le développement d'une pensée autonome,
- la création d'instruments d'évaluation,
- les moyens d'entretenir la motivation des élèves,
- et les usages pertinents de la technologie.

Enfin, Sierpinska suggère que des recherches didactiques appropriées, orientées clairement vers la réalité, évitant les pièges idéologiques, pourraient aider à réconcilier le désirable avec le possible. Un exemple parmi d'autres : de telles recherches pourraient valider un concept tel que celui de *connaissance générative* (dé à A. Morf), avec une loi affirmant que des connaissances génératives ont un pouvoir multiplicatif, tandis que les connaissances non génératives sont d'ordinaire simplement accumulées.
Ainsi, pour l'essentiel, Sierpinska nous a donné un sain avertissement concernant l'enseignement à tous les niveaux. Les auteurs de la présente synthèse supposent qu'elle reconnaîtrait avec eux la difficulté, dans certains cas, de discerner idéologie et science. Toute question dans le domaine complexe de l'éducation mathématique ne peut pas recevoir une réponse certaine, et une opinion soigneusement argumentée est plus sûre qu'une simple opinion.

Mentionnons enfin la conférence plénière de J-P. Kahane intitulée *Petits problèmes venus d'ailleurs*. Elle a illustré le fait que la réflexion mathématique trouve à s'alimenter dans des situations très diverses, comme par exemple l'évaluation des limites du saut à la perche ou l'étude des groupements des pingouins sur la banquise. Cet exposé n'est pas repris dans le présent volume.

2. Les communications et ateliers

Passons maintenant en revue les communications et ateliers du colloque. Beaucoup d'entre eux avaient trait à une matière mathématique particulière, telle par exemple que la proportionnalité, la géométrie, l'analyse ou la logique. D'autres évoquaient des points de vue généraux sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Commençons par ces dernières.

2.1. Trois façons d'envisager les concepts

F. Hitt théorise et illustre la différence entre un concept saisi par une définition dans les strictes limites d'une théorie, et le même concept donnant lieu à des représentations mentales variées. En s'appuyant sur l'exemple de la limite, il défend l'intérêt des articulations entre les diverses représentations, comme moyens d'une compréhension profonde.
J. Soto-Andrade explique le rôle intéressant joué en mathématiques par les métaphores, les analogies et les comparaisons. Ses exemples concernent l'utilisation des masses pour représenter les distributions de probabilités, des métaphores diverses pour les mouvements stochastiques et la balance pour expliquer les équations. Il témoigne de plusieurs expériences d'enseignement soutenues par l'idée de prendre un appui explicite sur des métaphores.
Renvoyant à un contexte historique très large, K. Volkert confronte deux types d'attitudes scientifiques : le premier consiste à étudier le "normal", en essayant

d'éliminer les exceptions, qui apparaissent souvent comme des “monstres”.

Ces trois contributions évoquent de diverses façons ce qu'Artigue (voir ci-dessus) appelle les points de vue horizontal et vertical sur les concepts. De telles considérations sont pertinentes et sont matière à réflexion à tous les niveaux de l'éducation.

2.2. L'histoire et les arts

M. Ballieu et M-F. Guissard défendent le recours à l'histoire – y compris en retournant aux textes originaux – et aux arts visuels dans l'enseignement des mathématiques, particulièrement en vue de motiver les élèves en difficulté et de leur restituer le plaisir d'apprendre. Ils développent deux exemples : les équations du deuxième degré, telles que les résolvait al-Hwarizmi, et le groupe des frises en art décoratif. Ce deuxième exemple commence, à un niveau élémentaire, par la création de diverses frises, suivie par une classification correspondant aux propriétés de symétrie et une élaboration des sept groupes de frises.

En s'appuyant sur le célèbre théorème d'APOLLONIUS comme exemple essentiel, F. Bšttcher illustre aussi l'intérêt de lire en classe des textes originaux. Elle montre qu'en suivant l'approche synthétique euclidienne de Viète, on découvre, par l'analyse du problème, comment construire et vérifier une solution. La figure fournit une solution, représentative des autres, et prévoir dans ce cadre le nombre de solutions est difficile. En suivant la méthode analytique de Descartes, on se centre sur l'analyse, la synthèse pouvant être quasiment ignorée, et la recherche du nombre de solutions devient assez facile. La figure ne joue plus alors qu'un rôle d'illustration.

Nous aurions pu classer la contribution de Boettcher avec celles consacrées à la géométrie, puisque son unique exemple est géométrique. Toutefois, Ballieu-Guissard et Boettcher pris ensemble nous rappellent que l'histoire et les arts visuels ont une relation naturelle et profonde avec les mathématiques, ce qui peut être exploité à tous les niveaux de l'école.

Venons-en maintenant à ces communications et ateliers qui ont pris pour sujet une matière mathématique particulière.

2.3. La proportionnalité

F. Jaquet analyse les réponses d'un grand nombre d'élèves à diverses questions relatives à des situations linéaires et non linéaires. Il observe l'apparition fréquente de l'illusion de linéarité, avec peu de variations d'un pays à l'autre, mais des différences significatives selon les âges des élèves, de la fin de l'école primaire jusqu'à la fin du collège. En bref, les étudiants les plus âgés recourent plus souvent à des procédures plus formelles. Certaines variables didactiques relatives aux

questions posées sont : la mention explicite – ou non – du coefficient de proportionnalité, la taille des nombres en cause et la régularité ou l'irrégularité dans la présentation des données.
P.-F. Burgermeister et D. Coray observent les réactions d'élèves d'environ 12 à 13 ans à certaines questions consistant en la recherche d'une quatrième proportionnelle, ou qui semblent se rapporter à une telle recherche. Les deux erreurs principales sont l'usage erroné du modèle additif et l'illusion de linéarité. Les auteurs étudient les différents types de contrôles et de vérifications que les élèves utilisent quand ils doutent de leur choix d'une méthode de résolution. Ils défendent non seulement l'étude de telles introspections créatives par les élèves, mais soulèvent aussi la question de savoir comment promouvoir ces introspections de manière appropriée.
Ces deux contributions sont relatives à des élèves d'âges comparables, mais elles peuvent bien entendu être mises en relation avec la vue longitudinale de la structure linéaire développée par Rouche.

2.4. La géométrie

C. Houdement et A. Kuzniak relèvent et analysent les malentendus qui apparaissent souvent du fait que divers interlocuteurs (principalement un enseignant et ses élèves) peuvent, face à un problème, recourir à des paradigmes différents. Un paradigme est défini et décrit en termes de croyances et, en particulier en géométrie, en termes d'intuitions, de mesures, de raisonnements et d'axiomes. Le résultat est que les partenaires dans la classe agissent souvent dans des *espaces de travail* différents. Cette contribution de Houdement et KUZNIAK peut être mise en relation avec l'analyse de la résolution de problèmes par Schœnfeld. Celui-ci observe l'apparition de désaccords semblables entre les univers mentaux de l'enseignant et des élèves.
Bien qu'il ne traite pas de géométrie à proprement parler, mentionnons toutefois ici la contribution d'Erdogan, à cause de la relation qu'elle entretient avec celle de Houdement et Kuzniak. En examinant des questions posées par des élèves en difficulté sur certains forums d'Internet, Erdogan illustre et théorise les malentendus entre les élèves et l'enseignant dus au manque de clarté du contrat didactique.
P. Marchand traite du développement d'images mentales de diverses sortes (statiques, cinétiques, transformationnelles) concernant les objets de l'espace et les actions dans l'espace. Elle s'interroge sur les moyens de promouvoir de telles images. Celles-ci sont contrastées avec les connaissances géométriques discursives des mêmes objets et actions. Une idée centrale est de demander aux élèves de penser à une situation spatiale, de concevoir une construction ou d'imaginer un mouvement en l'absence des objets à manipuler. L'inspiration principale de cette étude vient d'une confrontation entre l'enseignement des mathématiques d'une

part, et celui de la gymnastique et des sports de l'autre.

La notion de symétrie est familière aux enfants dans son acception commune (par ex. la symétrie du corps humain ou celle d'un papillon). M. Roelens montre qu'elle peut être reconnue au début de l'école secondaire dans son sens généralisé, associé avec toutes les transformations isométriques. De plus, les élèves d'environ 15 ans sont capables de créer des objets symétriques de diverses sortes et, en ce faisant, de se familiariser avec certains groupes de symétries. À la fin de l'école secondaire, ils peuvent comparer différents objets quant à leurs symétries et leur *degré* de symétrie, ce qui leur apporte, à un niveau pré-formel, une introduction aux notions de groupe et de sous-groupe. La contribution de Roelens s'accorde pleinement avec la partie de la communication de Ballieu et Guissard consacrée aux frises (voir ci-dessus).

Ch. Bouckaert décrit en détail le curriculum développé par M. Demal pour l'enseignement de la géométrie depuis 5 ans jusqu'à au moins 14 ans. Les idées centrales inspirant cette entreprise sont celles de l'étude des invariants des figures et solides dans des transformations (tout d'abord réalisées via des mouvements), une insistance sur la logique et les retours fréquents vers les notions déjà vues, en suivant le principe de l'enseignement en spirale. Ce principe concerne les objets géométriques, les transformations, la logique et l'approche scientifique.

F. Buekenhout présente un modèle théorique simple et efficace pour expliquer et analyser l'orientation des figures et des solides, renvoyant à la notion de chiralité. Ce modèle est abstrait, mais il est présenté dans un vocabulaire qui favorise les intuitions. Il a inspiré une suite de leçons données plusieurs fois avec succès à la fin de l'école secondaire par M. Frédérickx. Une communication sur ce sujet a été présentée par F. Buekenhout et M. Frédérickx.

Le Groupe d'Enseignement Mathématique (voir G. Cuisinier et al.) montre, en s'appuyant sur beaucoup d'exemples et quelques expériences en classe, que les représentations planes de solides, qui ont joué un rôle crucial dans la constitution de la géométrie moderne, sont, par delà leur intérêt propre, une source authentique de découvertes et de familiarisation avec un grand nombre de propriétés géométriques, de la prime enfance à l'âge adulte.

Ces six contributions concernent des facettes variées de l'enseignement de la géométrie qui, et ceci est remarquable, sont d'application à tous les âges de la scolarité :

- les malentendus possibles entre enseignant et élèves renvoyant à des paradigmes non clarifiés (point de vue qui peut être étendu au-delà des limites de la géométrie) ;
- le développement d'images mentales et la saisie intuitive de l'espace ;
- les mouvements, symétries et transformations depuis leur appréhension intuitive jusqu'à la théorie des groupes (noyau central de la connaissance

géométrique) ;

– et les représentations planes, non seulement matière géométrique par elles-mêmes, mais source importante d'idées géométriques en général.

2.5 L'analyse

L. Grugnetti et al. présentent une approche de la notion de limite depuis l'école élémentaire jusqu'à la fin de l'école secondaire. Ils insistent sur une familiarisation précoce avec certaines questions d'approximation et sur le rôle joué par les limitations des instruments de mesure, des calculatrices, et de la représentation des nombres dans le système décimal. Leurs expérimentations dans des classes concernent le paradoxe d'Achille et la suite harmonique d'une part, et la duplication du carré avec le problème de la racine carrée de 2 de l'autre.
Bien que les limites soient considérées habituellement comme une matière avancée, Grugnetti et al. nous rappellent avec raison que la question de l'infini est rencontrée précocement par les enfants, et que par conséquent il faut l'affronter aussi tôt que nécessaire.

2.6 La logique

M. Bailleul relève d'abord les allusions à la logique et au raisonnement dans le programme français de l'école élémentaire : ces allusions renvoient davantage à la rigueur et à la soumission qu'à un quelconque plaisir intellectuel. Ensuite il présente deux matériels (Logix et Mystero) visant à développer l'usage des négations, conjonctions et implications. Enfin, il décrit les modalités et l'efficacité de certaines discussions d'intérêt général organisées en classe, en vue de développer le sens d'une argumentation saine.

3. Conclusions

Pour conclure cette synthèse, commençons par retenir six grands axes de réflexion ou points de vue fondamentaux, auxquels les diverses contributions peuvent être rattachées.

I. D'abord, il y a les facteurs constants en jeu dans la *résolution de problèmes* et la compréhension des stratégies générales et des actions successives des personnes résolvant des problèmes (Schœnfeld) ;

II. Ensuite, *la naissance et le développement de la pensée mathématique* de l'enfance à l'âge adulte, décrits dans leurs modalités fondamentales (Tall) ;

III. Puis le développement de la pensée et des connaissances mathématiques en tant que favorisée par des stratégies soigneusement adaptées : *les principes d'organisation d'un enseignement efficace* (Wittmann) ;

IV. Ensuite, *le développement de sujets mathématiques ou de structures importants* : la linéarité (Rouche), les transformations et les groupes (Bouckaert, Roelens, Ballieu et Guissard), l'orientation (Buekenhout et Frédérickx), les représentations planes et les projections (Cuisinier et al.), les limites (Grugnetti). Jaquet ainsi que Burgermeister et Coray ont étudié la problématique de la linéarité aux environs de 11 à 15 ans. Bailleul a parlé de la naissance de la logique. Dans tous les cas, on remarque l'apparition précoce d'une forme intuitive, élémentaire, d'une structure, quelque chose comme une structure à l'état naissant ;

V. *La nature des concepts mathématiques*, avec deux facettes principales, à savoir la verticale et l'horizontale : la flexibilité (Artigue), les images mentales et les représentations (Marchand, Hitt), les métaphores (Soto-Andrade), le normal confronté à l'exceptionnel (Volkert), une pluralité de paradigmes (Houdement et Kuzniak), un soutien trouvé dans l'histoire et les arts (Bšttcher ainsi que Ballieu et Guissard), et la notion de site mathématique (Erdogan) ;

VI. Les points de vue anthropologique et sociologique. Les malentendus et dysfonctionnements dus au manque de coordination entre institutions (Artigue) et enfin la myopie idéologique et le wishful thinking (Sierpinska).

Ces six axes ne sont pas beaucoup plus qu'une table des matières. Voyons maintenant s'il serait possible de formuler quelques observations et recommandations qui feraient sens pour ceux – enseignants, formateurs d'enseignants, concepteurs de programmes, responsables politiques et administratifs – qui exercent une responsabilité dans le domaine de l'éducation mathématique.

A. Les deux facettes de la pensée mathématique

La pensée mathématique est un contrepoint entre réalité et modèle abstrait, contexte et structure, c'est-à-dire phénomènes et théorie, représentations et propriétés abstraites, objets réels ou concrets et symboles. Ces deux facettes sont souvent qualifiées respectivement d'horizontale et de verticale. Toutes deux sont présentes et importantes à toutes les étapes de l'apprentissage, même si la verticale joue un rôle croissant au fur et à mesure que l'on avance dans les âges scolaires.

B. Une tendance d'ensemble vers la généralisation

La pensée et la connaissance mathématiques évoluent des structures élémentaires vers des structures de plus en plus générales. En devenant plus générales, les structures renvoient à un nombre croissant de référents, elles recouvrent de plus en plus d'objets, de situations et de phénomènes. Sur le chemin de la généralisation, on crée des symboles et des règles de calcul. Automatiser certaines parties de la pensée n'est pas un objectif en soi, c'est la condition pour libérer l'esprit et lui permettre de penser plus loin.

C. Des mutations

Chaque pas qui va d'un concept vers un autre plus général est une mutation, un soudain agrandissement du champ des référents avec, le plus souvent, un profond changement de signification (par exemple, des nombres naturels aux fractions positives, ou encore des nombres positifs vers les relatifs). Par conséquent, “la réorganisation des connaissances est une part importante de la construction des curriculums” (Tall).

D. Des connaissances qui aident ou embarrassent

Alors qu'une notion est habituellement mieux comprise grâce aux situations variées o elle s'applique, ces situations et la notion elle-même peuvent faire obstacle à sa généralisation. La signification ancienne subsiste dans le contexte ancien, mais elle change souvent radicalement dans le contexte élargi : d'o une incohérence apparente. Surmonter l'obstacle revient à réaliser la raison d'être de la généralisation.

E. Des niveaux de rigueur

Les garants de la vérité évoluent de la prime enfance à l'âge adulte. Il y a des niveaux successifs de rigueur (Freudenthal). Les premières preuves sont “paradigmatiques” : je vois un exemple, et je suis sûr que les choses se passeraient de la même façon dans *tous* les exemples analogues. Ensuite vient l'utilisation des implications, en partant de propriétés acceptées comme vraies pour une bonne raison quelconque. Puis vient la construction des théories axiomatiques amples.

F. Une vue longitudinale

L'éducation mathématique doit être envisagée dans son ensemble, de la prime enfance à l'âge adulte, car il existe d'importantes filiations depuis son début jusqu'à son terme. C'est pourquoi

- il faut favoriser tous les moyens qui permettent de renforcer la cohérence et de mettre en évidence la direction d'ensemble et le sens global des programmes ;
- il faut organiser des séquences (des trajectoires) d'apprentissage à long terme, s'inspirer de l'idée d'enseignement en spirale (Wittmann) ;

- la formation initiale et continue des enseignants devrait comprendre une instruction sur la façon dont les principales théories mathématiques évoluent à partir de leurs racines dans la pensée commune et de mutation en mutation, jusqu'à leur maturité (Rouche).

G. La résolution de problèmes

En plus d'être une science, les mathématiques sont une activité, qui consiste principalement à résoudre des problèmes. Pour enseigner la résolution de problèmes, les enseignants eux-mêmes devraient résoudre habituellement des problèmes : comment arriver à cela ?

H. Apprendre une science toute faite ou apprendre soi-même en découvrant

Les deux options sont trop radicales. Une solution intermédiaire est plus efficace, l'enseignant aidant les élèves à construire des relations entre les idées (Tall).

J. Les conditions sociales

Une attention accrue devrait être accordée aux cultures particulières des institutions d'enseignement. Les discontinuités au passage de l'une d'elles à la suivante et les différences de conception entre les écoles successives – la maternelle, l'école primaire, le collège et le lycée – peuvent déconcerter une proportion importante des élèves (Artigue).

K. Des politiques réalistes

Toutes les observations et recommandations ci-dessus demeureront lettres mortes et certaines seront même contre-productives si les mesures prises pour les mettre en œuvre ne tiennent pas compte du contexte réel et actuel de l'éducation (Sierpinska).

Nicolas Rouche

De la pensée commune aux mathématiques : sur le besoin de théories génétiques

Abstract. From common thought to mathematics : the need for genetic theories.
Part 1 of this paper shows that mathematical learning, rarely considered in its full extension from early childhood to adulthood, is in need of clear guidelines. Guidelines, the way we understand them here, are outlines of what might be called genetic theories. One shows what such genetic theories could look like. Part 2 develops a possible guideline, one whose title might be : from proportionality to linearity, or the evolution of the concept of ratio. In the conclusion, we revisit the notion of genetic theory to discuss further its nature and relevance.
Consult an english version of this article at
`http ://irem.u-strasbg.fr`, menu "Publications".

Résumé. La première partie de cet article montre que l'apprentissage des mathématiques, rarement considéré dans sa réelle extension de la prime enfance à l'âge adulte, a besoin de fils conducteurs clairs. Les fils conducteurs, au sens où on les entend ici, sont des esquisses de ce que l'on pourrait appeler des théories génétiques. On montre ce que pourraient être de telles théories. La deuxième partie expose un fil conducteur possible, qui pourrait s'intituler : de la proportionnalité à la linéarité, ou l'évolution du concept de rapport. Dans la conclusion, on revient sur la notion de théorie génétique pour en cerner plus précisément la nature et la pertinence.

Mots-clés. Apprentissage mathématique à long terme, théorie génétique, modèle, proportionnalité, linéarité, grandeurs.

À la mémoire de H. Freudenthal,
à qui nous devons tant de lumières
sur l'apprentissage des mathématiques

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, supplément vol. 11, p. 17 – 50.

PREMIÈRE PARTIE

Des fils conducteurs : pourquoi et comment ?

1. Les mathématiques et l'expérience commune

Le chemin qui conduit de l'expérience commune jusqu'aux mathématiques s'allonge de siècle en siècle (on trouvera cette idée exposée en détail dans N. Rouche [2004]). Tout d'abord, alors que les Babyloniens et les Égyptiens traitaient de questions relativement isolées d'arithmétique et de géométrie, les Grecs – en particulier Euclide – ont élaboré des théories de grande ampleur, de longues chaînes de déductions. Cette forme de pensée est très éloignée de la vie quotidienne. Et ce d'autant plus que, dans ce contexte, même les propositions évidentes devaient être prouvées, car tout – hormis les axiomes de départ – devait être prouvé.

La distance de la pensée commune aux mathématiques s'est encore allongée à cause de l'introduction des lettres en algèbre, de la représentation des figures par des équations en géométrie analytique, de l'introduction des nombres négatifs et complexes, de l'arithmétisation du continu (les nombres réels) et, au cours du XX^{e} siècle, de la constitution des mathématiques en un édifice quasiment d'un seul tenant, entièrement déduit des axiomes de la théorie des ensembles.

Une autre étape significative a été franchie avec la création des géométries non euclidiennes, conduisant à la coexistence de plusieurs théories contradictoires, chacune logiquement cohérente. Ce fait historique majeur a entraîné une mutation de la nature de la vérité mathématique. En effet, pour les Grecs, un axiome était vrai du fait de son évidence dans l'univers (platonicien) des idées, alors que dans les mathématiques contemporaines, la vérité s'identifie à l'absence de contradiction dans un système axiomatique.

Enfin, il y a l'existence des structures telles que les groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels et topologiques, catégories, et leur rôle dans la pensée mathématique. Ces structures sont abstraites et, alors qu'elles semblent ne dire rien sur rien, elles expriment l'architecture et le fonctionnement d'un grand nombre de situations particulières, que ce soit dans les mathématiques ou en dehors. C'est ce qui explique le double effet qu'elles ont d'éclairer ces situations et de faciliter les transferts d'intuitions entre celles-ci.

Ces observations rendent compte des mathématiques d'aujourd'hui telles qu'elles apparaissent dans les traités, c'est-à-dire comme un monument hautement abstrait, une science artificielle. Toutefois, et par contraste, la pratique des mathématiques et la résolution de problèmes, à quel que niveau que ce soit, sont des activités stimulantes, nullement *a priori* déductives, s'appuyant sur l'imagination, les conjectures, la recherche d'exemples et de contre-exemples et bien entendu les déductions. Elles sont une source d'intimes satisfactions.

Que les mathématiques soient loin de la pensée commune a pour effet que la plupart des gens ont une idée fausse de cette discipline. Ils la voient comme un monument immuable – ils n'ont pas idée de son évolution séculaire –, ils réduisent l'activité mathématique à l'exécution de calculs routiniers, conduisant dans chaque cas à l'unique solution par l'unique bonne méthode. Rappeler cela est banal, mais c'est une triste vérité. Une telle méconnaissance des mathématiques n'est en aucune façon nouvelle, mais elle empire au fil des siècles, à cause de l'évolution de la connaissance mathématique.

Une importante proportion des enseignants partage cette conception des mathématiques, qui souvent leur a été transmise par leurs propres professeurs. D'autres, bien que conscients de l'authentique nature des mathématiques et capables eux-mêmes de pratiquer cette science de façon créative, lèguent à leurs élèves la conviction qu'elle est purement déductive.

Tous ces malentendus rendent difficile une conception claire et efficace de l'enseignement des mathématiques. Évoquons maintenant, dans les grandes lignes, les réformes par lesquelles on a, depuis une cinquantaine d'années, essayé d'améliorer la situation.

2. La cohérence des « maths modernes »

Dans les années cinquante et soixante du XXe siècle, les promoteurs des « maths modernes » ont vraiment cru avoir trouvé « la solution ». Et peut-être avaient-ils raison sur certains points, malgré les difficultés qu'ils ont rencontrées. Quoi qu'il en soit, leurs options étaient extrêmes et extrêmement claires, ce qui fait qu'elles se prêtent à une critique claire. Rappelons donc ce qu'a été cette réforme et quels en étaient les fondements.

Tout d'abord, ces promoteurs sont partis d'un fait majeur, à savoir que la science mathématique existe en tant que discipline quasiment unifiée, issue déductivement des axiomes de la théorie des ensembles. Donc il fallait la présenter aux élèves de façon axiomatique, déductive, en se focalisant sur les structures. Les matières à enseigner étaient – nous nous en tenons aux principales – les ensembles, les relations, les fonctions (sur le mode naïf, car cela eut été impossible autrement), ensuite les nombres naturels, les entiers, les rationnels et les réels, puis les espaces vectoriels et l'algèbre linéaire, pour aboutir aux limites, à la continuité, aux dérivées et aux intégrales. Les figures étaient considérées comme trompeuses. La géométrie des figures et des solides avait presque disparu, et avec elle une source importante d'intuitions.

L'enseignement devait être rigoureux. Il était, nous l'avons dit, focalisé sur les structures, comme par exemple les groupes, les anneaux, les corps et les espaces vectoriels. Pour éviter confusions et pertes de temps, les concepts devaient être introduits autant que possible dans leur forme définitive, ce qui impliquait nécessairement un niveau élevé de généralité. De plus, les termes techniques et les symboles étaient nombreux, plus que dans l'enseignement traditionnel.

La réforme des « maths modernes » a été conçue initialement par des mathématiciens bien connus (Dieudonné, Choquet, Stone, Artin, ...) au cours de deux colloques tenus l'un en 1959 à Royaumont et l'autre en 1960 à Dubrovnik (voir H. O. Fehr [1961] and O.E.C.E. [1961]). Les actes de Royaumont affirmaient que *tout* l'enseignement mathématique devait être revu. Mais paradoxalement, le colloque de Dubrovnik a suivi en proposant un programme destiné seulement aux classes scientifiques de la fin de l'école secondaire. Toutefois, dans les quelques années ultérieures, ce programme a été étendu, sans changement substantiel de ses principes, aux classes allant de la maternelle jusqu'à 18 ans (voir par exemple G. Papy [1963]).

Et donc des matières très générales étaient proposées à de très jeunes élèves. Mais plus une théorie est générale, plus son champ d'application est étendu. Les jeunes ne pouvaient pas se rendre compte de l'immense variété des référents, que ce soit ou non dans les mathématiques, de notions telles que celles d'ensemble, relation, groupe, etc. Et donc ils devaient se contenter de quelques exemples, souvent artificiels et sans grand intérêt à leur niveau. Certains concepts étaient presque inopérants dans leur champ d'expérience. Dans un tel contexte, il était rarement possible de stimuler leur intérêt pour la résolution de problèmes, même si certains d'entre eux trouvaient leur plaisir dans cet univers formel.

Par delà ces lacunes, il reste que la réforme des « maths modernes » partait d'un plan global clair et bien structuré. *Les matières s'y entre-suivaient de façon ordonnée et intelligible.* Les enseignants capables de saisir l'architecture du programme connaissaient leur position et la position de leurs élèves dans le projet global d'enseignement. Malheureusement, à cause de leur nature même, les fils conducteurs de ce programme étaient rarement saisis, particulièrement par les instituteurs.

Retenons cette observation essentielle : la source à peu de choses près unique de l'enseignement à cette époque était la science mathématique contemporaine. Et d'ailleurs quoi de plus naturel, lorsqu'on veut enseigner une science, que de partir ce celle-ci, d'essayer de la communiquer ? La rationalité de l'enseignement était celle des mathématiques elles-mêmes : des axiomes, des démonstrations rigoureuses, des concepts définitifs, des structures algébriques.

3. Après les « maths modernes », quelle cohérence ?

Que s'est-il passé après l'effacement des "maths modernes" ? Quelques matières qui avaient été nouvellement introduites ont survécu vaille que vaille, principalement les transformations géométriques et les vecteurs. Mais les subdivisions traditionnelles des mathématiques sont réapparues : l'arithmétique de base au niveau élémentaire, l'algèbre centrée sur les équations et non plus sur les structures, la géométrie des figures et des solides. De nouvelles matières sont apparues, principalement l'usage des calculatrices, l'algorithmique (sporadiquement), des éléments de statistique et de traitement des données.

Une autre tendance des programmes d'aujourd'hui est l'insistance sur la résolution de problèmes, un précieux héritage de G. Polya. Et il y a aussi l'importance accordée à la construction – ou la reconstruction – du savoir, dans toute la mesure possible par l'élève lui- même.

Une observation s'impose : alors que, comme nous l'avons dit ci-dessus, les « maths modernes » suivaient un plan global cohérent, les programmes d'aujourd'hui ne montrent pas le plus souvent un tel degré de cohérence. *On ne voit pas clairement comment les élèves sont conduits graduellement vers les mathématiques contemporaines.* Les « maths modernes » résultaient d'une mise à jour des programmes, inspirée par les progrès de la science mathématique observés vers le milieu du XX^{e} siècle. Les programmes et les manuels d'aujourd'hui sont davantage des assemblages, pas toujours bien articulés, de matières modernes et anciennes. *Ils ne sont pas inspirés par une pensée scientifique d'ensemble clairement identifiable.*

Pourtant, le besoin de cohérence est toujours présent. L'idée même de *construction du savoir*, évoquée ci-dessus, en témoigne. Mais elle renvoie davantage aux efforts de chaque élève pour comprendre et organiser un pan de connaissances qu'à l'élaboration d'un savoir global reconnu.

Le besoin de cohérence apparaît aussi, par exemple, dans le fait que trois chapitres des Standards de la NCTM [1989] s'intitulent *Les connexions mathématiques.*

Toutefois, ces chapitres ne développent pas un enchaînement de matières au long du programme : ils invitent l'élève à multiplier les représentations diverses des concepts, à reconnaître les liens entre concepts et à voir les relations entre diverses disciplines, mathématiques, physique, économie, ... Par contraste, les actes de Dubrovnik (O.E.C.E. [1961]) proposaient un enchaînement ferme de questions mathématiques à enseigner dans l'ordre donné.

En bref, on dirait que l'enseignement mathématique manque aujourd'hui d'une référence explicite et ferme, qu'il ne sait plus trop où sont ses sources, ni quelles sont ses lignes directrices. Cet embarras s'explique. En effet, si on reconnaît qu'un enseignement globalement déductif, *directement* inspiré par la pensée mathématique contemporaine, est inadapté à une majorité d'élèves, force est de chercher *une voie qui parte davantage de la pensée de ceux-ci pour aller par degrés, par généralisations successives, vers les mathématiques d'aujourd'hui*[1]. Mais cette voie n'est pas facile à dégager. On a l'impression que, depuis trente ou quarante ans, on la cherche à tâtons.

D'où la question fondamentale : comment élaborer des fils conducteurs, des théories génétiques[2] ? Occupons-nous maintenant de cela.

4. Partir de l'expérience commune

Une théorie génétique devrait être un chemin conduisant de manière sensée de la pensée et du langage communs à une théorie mathématique. Or l'expérience quotidienne n'impose pas d'emblée des distinctions entre disciplines : mathématiques, physique, chimie, biologie, géographie et d'autres analogues. Dans cette expérience, il y a des objets qui ont des grandeurs physiques (longueurs, poids, volumes, ...), des mouvements divers, des durées, des ensembles d'objets, des régularités, des rythmes, des relations entre des choses et des gens, etc. Certaines situations dans l'environnement sont en appel d'une explication mathématique, d'autres d'une explication physique, etc. Et même les mathématiques et la physique (ou d'autres couples de cette sorte) ne sont pas immédiatement disjoints. Les mathématiques doivent émerger graduellement, et pour de bonnes raisons, en tant que discipline distincte.

[1]Encore faudrait-il discerner, selon les catégories d'élèves, quels sont les objectifs mathématiques raisonnables.

[2]L'idée de théorie génétique est fortement présente dans l'œuvre de Freudenthal, même si c'est implicitement. Elle ne coïncide pas avec ce que O. Tœplitz [1963] a appelé une *approche génétique*, mais elle en est parente.

Cette émergence ne suit pas un ordre arbitraire, même si certains choix demeurent possibles. En fait, certaines filiations naturelles d'expériences et d'idées s'imposent d'elles-mêmes.

Considérons par exemple la pensée géométrique à ses débuts. La plupart des droites et des plans de notre environnement sont verticaux ou horizontaux. Toutes les droites verticales sont parallèles, et tous les plan horizontaux aussi. Toute droite verticale est perpendiculaire à tout plan horizontal et orthogonale à toute droite horizontale. Il serait difficile de croire que ces deux directions physiques (physiques parce qu'elles doivent leur existence au champ de gravitation) ne joueraient pas un rôle important dans la naissance des notions de droite, de plan, de parallélisme et d'orthogonalité[3]. Bien entendu, à une étape ultérieure de l'étude de la géométrie, toute référence à la physique sera abandonnée. La géométrie apparaîtra alors comme une théorie abstraite, disponible pour des applications variées, y compris bien entendu en physique.

Voici un autre exemple de filiation naturelle. L'origine pratique des nombres décimaux (les nombres à virgule) se trouve dans la mesure des longueurs et d'autres grandeurs dans un système décimal d'unités. C'est aussi leur origine historique. Mesurer une grandeur est une activité physique. Laisser tomber le symbole de l'unité de mesure aboutit à constituer ces nombres en entités abstraites, disponibles pour toutes sortes d'applications. Et donc une succession raisonnable des idées est : d'abord des mesures (c'est-à-dire des décimaux concrets, dont l'usage saute aux yeux), et ensuite des décimaux abstraits[4].

Un principe essentiel sur le chemin qui va de l'expérience commune vers les mathématiques est qu'aucun concept ne devrait être introduit tant qu'il ne joue pas de rôle dans l'une ou l'autre explication. Les concepts mathématiques, tels qu'ils apparaissent dans les théories axiomatiques, sont munis de caractéristiques techniques dont la fonction est de permettre la construction de preuves rigoureuses et complètes, ne négligeant aucun cas particulier, évitant les pièges logiques. Dans les traités mathématiques, le rôle des définitions est moins de dire ce que les choses sont réellement, que de servir d'outils appropriés à la démonstration des théorèmes.

[3]Comme contre-exemples, on notera le rôle négligeable joué par les directions verticale et horizontale aux débuts de la géométrie dans les Standards de la N.C.T.M. [1989] ainsi que dans le programme français pour l'école primaire (voir B.O. [2002]).

[4]Voici de nouveaux contre-exemples : la mesure des grandeurs est souvent présentée non comme la source des décimaux, mais comme une application de ceux-ci (voir les deux références de la note 3).

Aux stades intermédiaires entre la pensée commune et la pensée mathématique, il y a des niveaux de rigueur[5] et des types de notions appropriées au champ de phénomènes étudié. De telles notions ont été appelées *objets mentaux* par Freudenthal[6]. Si un concept est introduit prématurément dans la construction de la pensée, c'est-à-dire à une étape où il ressemble à une machine compliquée pour exécuter des tâches simples, il manque d'une raison d'être.

Dans ces conditions, qu'est-ce qu'une *théorie génétique* au sens où nous l'entendons ici ? C'est une construction rationnelle qui va par paliers de contextes quotidiens vers une théorie mathématique, de questions et de notions simples, éventuellement liées à des perceptions et des manipulations d'objets, vers de nouvelles questions plus générales et plus abstraites. Chaque étape d'une telle construction répond à de nouvelles questions, sert à surmonter des obstacles nouveaux. Les objets mentaux et les concepts mathématiques mobilisés à chaque étape sont appropriés au contexte théorique auquel on est arrivé. En parcourant une théorie génétique d'un bout à l'autre, on doit saisir la raison d'être de chaque nouveau développement.

Ces quelques considérations générales méritent d'être illustrées par un exemple substantiel. Voyons cela.

DEUXIÈME PARTIE

Un essai de théorie génétique : de la proportionnalité à la linéarité

Voici maintenant, à titre d'exemple, une esquisse de théorie génétique concernant une partie des mathématiques enseignées de la maternelle jusqu'à la fin du secondaire. Nous avons choisi d'observer la notion de linéarité, c'est-à-dire les généralisations successives du concept de *rapport,* ou encore la construction de ce que l'on pourrait appeler *la structure linéaire*. Ce choix, qui mériterait d'être discuté en détail, peut être sommairement justifié par la prégnance de cette structure dans les mathématiques en général. De plus, il va dans le sens d'un renforcement de la notion de fonction, également centrale en mathématiques[7].

---

[5]Cf. H. Freudenthal [1973] : "Il y a des niveaux de rigueur, et pour chaque matière, il y a un niveau de rigueur qui lui est adapté ; l'élève devrait passer par ces niveaux et leur rigueur."

[6]Voir H. Freudenthal [1983], p. 31.

[7]Voir à cet égard F. Klein [1933] : "Wir, man nennt uns wohl die "Reformer", wollen in den Mittelpunkt des Unterrichts den Funktionsbegriff stellen, als denjenigen Begriff der Mathematik des letzten 200 Jahren, der überall, wo man mathematisches Denken braucht, eine zentrale Rolle spielt." (Nous, on nous appelle volontiers les « réformateurs », voulons placer le concept

Une remarque s'impose : en mathématiques, une structure est quelque chose qui existe et ne change pas. L'histoire séculaire des mathématiques a abouti à éliminer de cette discipline toute connotation temporelle. Les structures et les théorèmes sont « fixes ». Comment pouvons-nous alors imaginer *une évolution* de la structure linéaire ?

En tant que métaphore, considérons une graine qui devient une pousse, puis un arbuste et finalement un grand arbre. Elle produit des bourgeons, des feuilles, des fleurs et des fruits. Saison après saison, elle n'est jamais exactement la même, et qui plus est elle change considérablement. Toutefois, elle demeure un même être vivant, elle conserve son identité. Elle est un être en évolution. Ici nous aimerions considérer la *linéarité* comme un être en évolution, né dans le contexte des grandeurs (avant toute idée de mesure) et devenant finalement un grand arbre dans le contexte des espaces vectoriels. Une différence importante est toutefois que, par nature, cette évolution consiste en mutations successives, chaque mutation étant une généralisation. À chaque étape, une nouvelle structure – fixe, immobile – est engendrée. Ces discontinuités sont probablement les obstacles principaux rencontrés par les élèves.

Dans ce qui suit, nous avons autant que possible évité trop de subtilité mathématique. Les lecteurs mathématiciens comprendront sans peine au passage certains raccourcis de pensée.

5. Grandeurs et ensembles

Les grandeurs

Les longueurs, aires, volumes, poids et durées sont des exemples de grandeurs[8]. Les grandeurs existent avant d'être mesurées. Quelques-unes de leurs propriétés principales sont :

a) Deux grandeurs d'un même type étant données, elles sont égales, ou l'une est plus grande que l'autre : *les grandeurs sont ordonnées.*

b) Pour chaque type de grandeur, *il y a une addition.* Par exemple,

---

de fonction au centre de l'enseignement. Car il est celui des concepts mathématiques des 200 dernières années qui, partout où on a besoin de la pensée mathématique, joue un rôle central.)

Le principe didactique dont cette citation témoigne était connu en Allemagne, au début du XX[e] siècle, comme *das funktionales Denken" (la pensée fonctionnelle).* Pour plus de détails, voir K. Krüger [1999]. La notion de fonction mériterait d'être envisagée pour servir à l'élaboration de fils conducteurs.

[8]Pour une définition rigoureuse des grandeurs comme classes d'équivalence, voir N. Rouche [1992].

mettre deux bâtons bout à bout réalise la somme de deux longueurs ; rassembler deux objets lourds réalise la somme de deux poids ; verser deux quantités d'eau dans un vase réalise la somme de deux volumes.

c) Additionner deux grandeurs égales revient à multiplier une grandeur par 2. On peut dire la même chose pour 3, 4, … Ainsi, *il existe une multiplication des grandeurs par les nombres naturels.*

d) Toute grandeur peut être divisée en 2, en 3, … parts égales. Et donc *il existe une division des grandeurs par les nombres naturels.*

Les ensembles

Considérons maintenant les ensembles, en nous bornant aux ensembles finis. Pour plus de clarté, nous ne retenons que les ensembles formés d'objets identiques. Les ensembles partagent avec les grandeurs les propriétés a), b) et c) ci-dessus. Plus précisément,

a′) Étant donné deux ensembles, ils sont égaux[9], ou l'un est plus grand que l'autre (l'*égalité* est la possibilité d'une mise en correspondance terme à terme).

b′) Deux ensembles disjoints peuvent être *additionnés* (mis ensemble pour n'en faire plus qu'un).

c′) Tout ensemble peut être multiplié par 2, ou 3, ou 4, etc.

D'autre part et contrairement aux grandeurs, les ensembles ne possèdent pas la propriété d). En effet :

d′) Un ensemble peut être divisé en n parts égales seulement si n divise le nombre de ses éléments.

Les ensembles sont *discrets*, alors que les grandeurs sont *continues.*

Physique ou mathématique ?

Les opérations pratiques sur les grandeurs et les ensembles (d'objets matériels) demandent des manipulations physiques. De plus, ces manipulations souffrent de limitations importantes. Tout d'abord et surtout, les comparaisons de grandeurs ne sont pas entièrement précises, à cause principalement du manque d'acuité de nos organes sensoriels. Mais en outre et par exemple :

des objets trop grands ou trop petits, ou des ensembles comprenant des objets trop nombreux, ne peuvent pas être manipulés ;

[9]Nous utilisons ici le terme *égal* dans son sens quotidien. Il s'agit en réalité de l'égalité des cardinaux.

> alors que des surfaces planes découpées dans du carton peuvent être comparées par superposition, tel n'est pas le cas des objets solides, car ils ne se pénètrent pas mutuellement ;
>
> deux durées ne peuvent pas être comparées directement si elles ne commencent (ou ne finissent) pas en un même instant.

On pourrait aisément donner d'autres exemples. Au tout début, il n'y a pas de distinction entre propriétés physiques et mathématiques. Toutefois, *dès que l'on se met à raisonner à leur propos,* on suppose – fut-ce implicitement – qu'elles existent et sont exactes. Elles sont idéalisées. Autrement, beaucoup de propositions demeureraient indécises.

6. La proportionnalité avant les mesures

Une première notion de rapport

Pour pouvoir introduire l'une ou l'autre situation de proportionnalité, nous avons besoin de savoir ce qu'est un rapport. Soient a et b deux grandeurs. Il arrive – bien que rarement – qu'il existe un nombre naturel n tel que $b = n \times a$. Si c'est le cas, nous dirons que n est *le rapport de* b *à* a. Le rapport exprime combien b est plus grand que a.

Soient m et n deux nombres naturels. Quand il existe un nombre naturel p tel que $m = p \times n$, nous dirons que p est *le rapport de* m *à* n. Un tel rapport existe[10] si m est multiple de n.

Trois exemples de proportionnalité

Voici maintenant trois exemples de *proportionnalité* (la proportionnalité est la linéarité à sa naissance).

I. Premier exemple : lorsqu'on verse de l'eau dans un vase cylindrique, il y a une correspondance terme à terme entre les hauteurs et les volumes d'eau (voir la figure 1, qui montre des dessins en lieu et place des vases eux-mêmes). Observons que les hauteurs et les volumes sont des grandeurs de deux types différents. Par cette correspondance,

> la somme de deux hauteurs correspond à la somme des volumes correspondants ;
>
> lorsqu'il existe un rapport entre deux hauteurs, le même rapport existe

[10] On prendra garde à ce que, jusqu'à nouvel ordre dans cet exposé, un rapport est un nombre naturel.

entre les volumes correspondants.

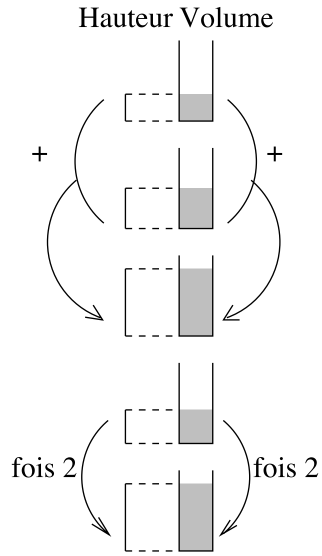


FIG. 1

Nous résumons ceci en disant que les hauteurs et les volumes sont *proportionnels*. La figure 1 est un *tableau de proportionnalité*. Ces propriétés, formulées ici dans un langage scientifique, sont comprises et s'expriment dans la vie quotidienne de façon plus familière. Par exemple, on dit "deux fois plus haut, deux fois plus de volume", et cela renvoie, fut-ce implicitement, à la correspondance des rapports.

Les flèches sur la figure 1 illustrent la correspondance des sommes et celle des rapports. Nous appellerons ces derniers *rapports internes*, parce que ce sont des rapports entre grandeurs apparaissant *à l'intérieur* d'une même colonne du tableau (les rapports internes seront opposés plus tard aux rapports externes).

II. Un autre exemple, à propos cette fois d'ensembles, est donné par une situation de troc. Je suis disposé à échanger 2 billes bleues contre 3 rouges. Et donc il existe une correspondance terme à terme entre les ensembles d'un nombre pair de billes bleues et ceux d'un nombre de billes rouges multiple de 3. Par cette correspondance,

la réunion de deux ensembles disjoints de la première sorte correspond à la réunion des deux ensembles disjoints correspondants de l'autre sorte ;

lorsqu'il y a un rapport entre deux ensembles de la première sorte, il existe le même rapport entre les ensembles correspondants de l'autre sorte.

III. Comme troisième exemple, considérons une balance à bras inégaux : par exemple avec un bras deux fois plus long que l'autre, comme sur la figure 2. Établissons une correspondance terme à terme entre les poids qui équilibrent la

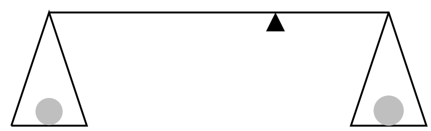


Fig. 2

balance, l'un sur le plateau de gauche et l'autre sur celui de droite. De nouveau, par cette correspondance

la somme de deux poids de la première sorte (ceux venant du plateau de gauche) correspond à la somme des poids correspondants de la seconde sorte (ceux venant du plateau de droite) ;

quand il existe un rapport entre deux poids de la première sorte, le même rapport existe entre les poids correspondants de la seconde.

Propriétés constitutives de la proportionnalité

Les exemples ci-dessus illustrent la notion de *proportionnalité* avant l'introduction des mesures. En voici les éléments :

il y a deux ensembles de grandeurs (ou deux ensembles d'ensembles) ;

il y a une correspondance terme à terme entre ces deux ensembles ;

toute somme de deux éléments d'un des ensembles (n'importe lequel) correspond à la somme des éléments correspondants de l'autre ;

quand il existe un rapport entre deux éléments d'un des ensembles (n'importe lequel), le même rapport existe entre les éléments correspondants de l'autre (ces rapports sont appelés *rapports internes*).

La correspondance des sommes entraîne celle des rapports[11], via la définition du produit d'un nombre naturel par un autre comme addition répétée.

[11] Rappelons qu'il ne s'agit jusqu'à présent que de rapports entiers.

Commentaires

1) Les grandeurs et les ensembles se comportent de la même façon dans le contexte envisagé.

2) Ils sont des entités physiques, mais idéalisées du fait qu'ils deviennent des objets mentaux.

3) Ils ne sont pas mesurés. Les mesures apparaîtront plus tard dans notre construction de la linéarité.

4) L'addition est sans doute la première, la plus simple et la plus fondamentale des opérations binaires rencontrées au cours du développement cognitif : qu'est-ce qui pourrait être plus simple en effet que *mettre deux objets ensemble* ? Les correspondances terme à terme sont probablement les applications les plus simples que l'on puisse imaginer, car les correspondances multiples impliquent des choix non définis (plusieurs images correspondant à un seul original). La conservation des sommes et des rapports via une correspondance terme à terme a quelque chose d'ordonné et de rassurant. D'où, sans doute, le caractère naturel de la proportionnalité.

7. La mesure en tant que proportionnalité

Dans cette section, nous considérons des grandeurs d'un type donné, n'importe quel type.

Les mesures en nombres naturels

Nous savons qu'il n'existe pas toujours un rapport (au sens proposé pour ce mot à la section 6 : un rapport est jusqu'ici un nombre naturel !) entre deux grandeurs a et b. En particulier, il n'y a pas de rapport de b à a si $b < a$.

Malgré ce défaut, introduisons une première notion de mesure. Soit u une grandeur, choisie comme *unité de mesure*. Considérons ensuite toutes les grandeurs a de la forme

$$a = n \times \mathrm{u},$$

où n est un nombre naturel quelconque. En d'autres termes, nous considérons toutes les grandeurs qui ont un rapport avec l'unité u.

Il existe une correspondance terme à terme entre ces grandeurs et les nombres naturels. Nous dirons de ceux-ci qu'ils sont les mesures des grandeurs dans l'unité u. Par cette correspondance, la somme de deux grandeurs correspond à la somme de leurs mesures ;

s'il existe un rapport entre deux grandeurs, le même rapport existe entre leurs mesures.

Un tel système de mesures est intéressant, car *les grandeurs et leurs mesures sont proportionnelles* : les mesures représentent fidèlement les grandeurs. Cela veut dire que les opérations habituelles sur les grandeurs ont une traduction fidèle en termes de mesures. De plus, l'addition des grandeurs et leur multiplication par un nombre naturel peuvent être exécutées sur leurs mesures. *Des opérations mentales – ou papier-crayon – remplacent des opérations physiques.*

Mais ce système de mesures comporte deux lacunes :

seules les grandeurs de la forme $a = n \times \mathrm{u}$ ont une mesure ;

il n'y a pas toujours un rapport entre deux grandeurs de cette forme.

Dans tous les cas où a n'est, pour aucun n, de la forme $n \times \mathrm{u}$, on peut chercher un n tel que

$$n \times \mathrm{u} < a < (n+1) \times \mathrm{u}.$$

Un tel n existe toujours, mais il n'exprime une mesure qu'approximativement.

Une réponse partielle à cette difficulté consiste à changer l'unité u, à en choisir une autre très petite, de sorte que davantage de grandeurs aient une mesure, et que les mesures soient plus précises. Mais il restera toujours que la plupart des grandeurs ne pourront être mesurées par un nombre naturel, et ce quelque petite que soit l'unité u choisie.

Bien entendu, une telle affirmation est théorique. En fait, quand u est très très petite, les limitations de nos organes sensoriels sont telles que nous ne percevons plus de différence entre $n \times \mathrm{u}$ et $(n+1) \times \mathrm{u}$. Et donc on peut toujours croire alors que la mesure est un nombre naturel.

Et maintenant vient la question : est-il possible d'améliorer ce système de mesures ?

Les mesures en fractions (positives)

On essaie de généraliser la notion de rapport. Donnons-nous deux grandeurs a et b. Au lieu de chercher un seul nombre naturel n tel que

$$b = n \times a,$$

cherchons deux nombres m et n tels que

$$b = m \times (a : n),$$

expression dans laquelle " :" signifie *divisé par*. On écrit cela d'habitude sous la forme

$$b = (\frac{m}{n}) \times a,$$

et $\frac{m}{n}$ est appelé *fraction*[12]. Quand une telle égalité existe, nous disons par voie de généralisation que $\frac{m}{n}$ est le *rapport* de b à a.

Les fractions sont considérées comme une nouvelle sorte de nombres, généralisant les nombres naturels. Elles sont munies d'une addition et d'une multiplication, ce que nous ne montrerons pas ici. L'existence de ces opérations entraîne que le concept de rapport peut être étendu aux fractions. Effectivement, si trois fractions sont telles que

$$(\frac{m}{n}) = (\frac{p}{q}) \times (\frac{m'}{n'}),$$

alors on dit que $\frac{p}{q}$ est *le rapport de* $\frac{m}{n}$ *à* $\frac{m'}{n'}$.

Observons que la notion de rapport a subi une mutation. En fait, tant que nous n'examinions que des nombres naturels, nous disions que le rapport d'une grandeur (ou d'un nombre) à une autre disait combien la première était plus grande que la deuxième. Mais maintenant, un rapport entre deux grandeurs (ou fractions) exprime combien l'une est *plus grande* ou *plus petite* que l'autre : nous entendons par là qu'un rapport peut dorénavant être soit plus petit, soit plus grand que un.

Nous pouvons faire deux observations :

> premièrement, deux grandeurs a et b étant données, *il arrive qu'il n'y ait pas de fraction* $\frac{m}{n}$ *telle que* $b = (\frac{m}{n}) \times a$ *ou, en d'autres termes, pas de rapport de* b *à* a. Un exemple bien connu est celui où b est la longueur de la diagonale d'un carré et où a est la longueur de son côté ;
>
> deuxièmement, *entre deux fractions, il y a toujours un rapport.*

Nous pouvons maintenant étendre notre système de mesures. Choisissons une unité de mesure u et considérons toutes les grandeurs de la forme

$$a = (\frac{m}{n}) \times \mathrm{u},$$

où $\frac{m}{n}$ est une fraction quelconque ou, en d'autres termes, toutes les grandeurs qui ont un rapport avec u. Il existe une correspondance terme à terme entre ces grandeurs et les fractions. Nous appelons ces dernières les *mesures* des grandeurs dans l'unité u.

Dans cette correspondance,

---

[12] Dans le présent contexte, *fraction* doit être interprété comme *fraction positive*.

> la somme de deux grandeurs correspond à la somme de leurs mesures ;
>
> le rapport de deux grandeurs est égal au rapport de leurs mesures.

Autrement dit, dans ce nouveau système de mesures, *les grandeurs et leurs mesures sont encore proportionnelles.* Ce n'est pas une surprise, car l'addition et la multiplication des fractions ont été définies de l'unique façon qui assure cette proportionnalité. Les opérations sur les fractions sont les contreparties exactes des opérations sur les grandeurs[13].

Mesurer en fractions est beaucoup plus performant que mesurer en nombres naturels. De fait, une unité u étant choisie, il y a beaucoup plus de grandeurs de la forme $(\frac{m}{n}) \times \mathrm{u}$ que de la forme $n \times \mathrm{u}$.

Toutefois, ce système de mesures présente une lacune :

> en effet, *seules les grandeurs de la forme* $a = (\frac{m}{n}) \times u$ *possèdent une mesure.*

Quand une grandeur a ne peut pas être mesurée par une fraction, alors on peut chercher une fraction $\frac{m}{n}$ telle que

$$(\frac{m}{n}) \times \mathrm{u} < a < (\frac{m+1}{n}) \times \mathrm{u}.$$

Une telle fraction existe toujours, et – encore mieux –, n peut être choisi aussi grand que l'on veut, de sorte que, u étant choisie, la mesure de a peut être estimée avec une précision arbitraire.

Et maintenant, malgré les améliorations que nous venons de relever, la question demeure : que faire pour améliorer, pour compléter ce système de mesures ?

Les mesures en nombres réels (positifs)

Une fois de plus, on essaie de généraliser le concept de rapport. Nous n'entrerons pas ici dans les détails. Un nouveau type de nombres est créé, appelé les *réels,* dont les naturels et les fractions sont des cas particuliers[14]. Ils sont tels que, *a et b étant deux grandeurs, il existe toujours un réel α tel que*

$$b = \alpha \times a.$$

Par voie de généralisation, α est appelé le *rapport* de b à a.

---

[13] C'est à ce point vrai que, dans l'enseignement élémentaire, les opérations sur les fractions sont définies via les manipulations correspondantes sur les grandeurs, ce qui est tout à fait sensé.

[14] Les *réels* doivent être interprétés ici comme *réels positifs.*

Les réels sont eux-mêmes munis d'une addition et d'une multiplication. Le concept de rapport s'étend alors à ces nombres, et on a même la propriété très intéressante que voici : deux réels α et β étant donnés, il en existe toujours un troisième γ tel que

$$\beta = \gamma \times \alpha.$$

Par voie de généralisation, nous appelons γ *le rapport de* β *à* α.

Étendons maintenant à nouveau notre système de mesures. Une grandeur quelconque u étant choisie comme unité de mesure, *toute grandeur est de la forme* $a = \alpha \times u$ *pour un certain réel* α. Il y a une correspondance terme à terme entre les grandeurs et les réels. Nous appelons ces derniers les *mesures* des premières dans l'unité u. Par cette correspondance,

> la somme de deux grandeurs correspond à la somme de leurs mesures ;
> le rapport de deux grandeurs égale le rapport de leurs mesures.

Les grandeurs et leurs mesures sont toujours proportionnelles.

La figure 3 illustre la proportionnalité des volumes et de leurs mesures en litres.

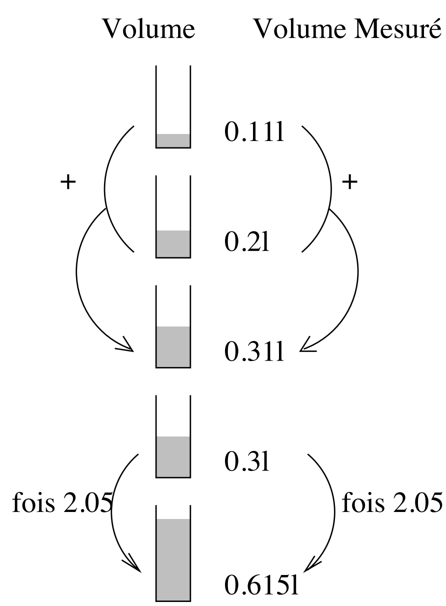


FIG. 3

La correspondance des sommes et celle des rapports internes y est illustrée par des flèches appropriées.

Au rebours des précédents, ce système de mesures ne présente aucune lacune. Et de fait, comme nous l'avons déjà observé,

> toute grandeur possède une mesure en nombre réel ;
>
> deux grandeurs quelconques ont toujours un rapport entre elles, deux réels quelconques aussi.

Il s'agit donc là, du moins d'un point de vue théorique, d'un système de mesures parfait. Pourquoi d'un point de vue théorique ? D'abord parce que les mesures échouent pratiquement dès qu'un trop grand degré de précision est exigé, et qu'alors seulement des approximations sont possibles. Ensuite parce que, alors que les nombres naturels étaient faciles à additionner, multiplier et diviser, ces opérations sont plus compliquées avec les fractions, et beaucoup plus compliquées avec les réels. *Les nombres réels fournissent une caractérisation numérique du continu,* mais au prix d'une théorie assez lourde, et à plus d'un égard peu naturelle.

8. Proportionnalité entre mesures

Grandeurs de même espèce

Comme premier exemple, considérons deux vases cylindriques de bases inégales, posés côte à côte sur une table horizontale. Versons de l'eau jusqu'au même niveau dans chacun d'eux. Il y a une correspondance terme à terme entre les volumes d'eau, également lorsqu'ils sont mesurés (dans une même unité).

premier vase : volume en litres	deuxième vase : volume en litres
0,2	0,4
0,4	0,8
0,6	1,2
0,8	1,6
1,2	2,4

Tab. 1

Il s'agit d'une correspondance entre des grandeurs, mais aussi entre des nombres, ceux qui mesurent les volumes. Ceci est illustré par un tableau contenant seulement des nombres (voir tableau 1). Il s'agit d'un tableau de proportionnalité, possédant les propriétés qui nous sont maintenant familières : la correspondance des sommes et celle des rapports internes.

Mais il y a autre chose. Nous avons des volumes de chaque côté, et donc il existe un rapport entre deux volumes qui se correspondent, égal au rapport de leurs mesures. Dans notre exemple, l'aire de la base du second vase vaut deux fois l'aire de la base du premier, ce qui entraîne que toute mesure lue à droite égale deux fois la mesure correspondante lue à gauche. Ce rapport, – le même pour tous les couples de mesures – est appelé *rapport externe* parce qu'il organise le passage d'une colonne à l'autre. Bien entendu, le passage de la colonne de droite à celle de gauche mobilise le rapport inverse, $\frac{1}{2}$ dans notre exemple. Au tableau 1, nous aurions pu ajouter des flèches (sur le modèle de celles des figures 1 et 3) pour montrer le rapport externe, et aussi la correspondance des sommes et celle des rapports internes.

En généralisant cet exemple qui portait sur des volumes, nous pouvons énoncer ce qui suit :

> dans un tableau de proportionnalité entre grandeurs de même espèce *mesurées dans une même unité,* il existe un rapport externe, qui est le rapport entre deux mesures quelconques qui se correspondent.

Ce rapport est aussi appelé *le coefficient de proportionnalité.*

Une propriété importante est que l'existence du rapport externe entraîne la correspondance des rapports internes, et réciproquement. Nous ne prouverons pas cette propriété ici.

Un deuxième exemple s'avérera d'une grande importance pour ce qui suit. Considérons, comme à la figure 4, une droite horizontale OP, une droite inclinée OQ et quelques segments verticaux. Les segments horizontaux Oa_0, Oa_1, Oa_2, etc. sont en correspondance terme à terme avec les segments verticaux a_0b_0, a_1b_1, a_2b_2, etc. La même chose est vraie aussi de leurs mesures dans une unité quelconque, par exemple le centimètre. Cette correspondance est une proportionnalité. Elle est illustrée par le tableau 2.

Dans celui-ci, le rapport externe est $\frac{2}{5}$. On vérifie aisément sur ce tableau la correspondance des sommes et celle des rapports internes.

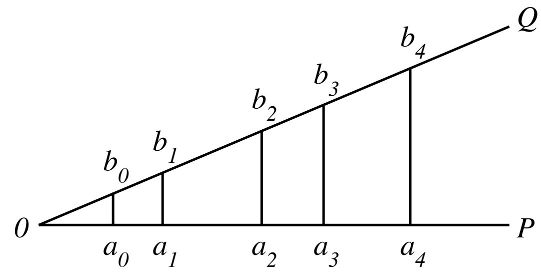


FIG. 4

segments horizontaux : longueurs en cm	segments verticaux : longueurs en cm
1,5	0,6
2,5	1
4,5	1,8
5,75	2,3
7,5	3

TAB. 2

Voici une propriété fondamentale de cette proportionnalité :

> sans plus nous occuper de la droite OQ, traçons un nombre quelconque de segments *proportionnels* tels que Oa_0, a_0b_0, ou Oa_1, a_1b_1, ou Oa_2, a_2b_2, etc., les uns horizontaux et les autres verticaux. Alors, il se fait que les points b_0, b_1, b_2, etc. sont alignés.

Un troisième exemple de proportionnalité, également fondamental, se trouve dans la reproduction d'objets à l'échelle. Considérons un objet A' qui reproduit un objet A à l'échelle 0,4. La distance entre deux points quelconques de A' égale la distance entre les points correspondants de A multipliée par 0,4. Les distances dans A' sont proportionnelles aux distances dans A, et le rapport externe est de 0,4. Dans ce contexte, *rapport externe* et *échelle* sont synonymes.

Grandeurs d'espèces différentes

Le tableau 3 montre à gauche un certain nombre d'intervalles de temps, et à droite les distances parcourues par un marcheur pendant ces intervalles. Il s'agit d'un tableau de proportionnalité.

durées en heures	distances en kilomètres
0,25	1
0,5	2
0,75	3
2	8
4	16

TAB. 3

Comparons maintenant ce tableau avec les tableaux 1 et 2. Au tableau 1, nous avions des volumes dans les deux colonnes, et au tableau 2 des longueurs dans les deux. On définit sans peine un rapport entre deux grandeurs de même espèce. C'est pourquoi nous avons pu trouver un rapport externe pour les tableaux 1 et 2. Au tableau 3, nous avons à faire à des grandeurs d'espèces différentes. Il n'y a pas de rapport entre de telles grandeurs. Personne n'arrivera jamais, en multipliant un intervalle de temps par un nombre, à obtenir une distance. Voilà qui est vrai pour des grandeurs non mesurées. Mais au tableau 3, les intervalles de temps et les distances sont mesurés, et les mesures sont des nombres. Et entre deux nombres (en excluant zéro), il y a toujours un rapport. Au tableau 3, le rapport externe égale 4. Mais les nombres représentant des grandeurs dépendent des unités de mesure, et donc le rapport change si on change celles-ci. On mentionne cette dépendance des mesures en disant que ce rapport, aussi appelé la *vitesse* du marcheur, est de 4 *kilomètres à l'heure*, ce que l'on écrit également $4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

On pourrait aussi, sur le tableau 3, ajouter des flèches pour montrer le rapport externe et illustrer la correspondance des sommes et celle des rapports internes.

En généralisant cette observation, nous pouvons conclure :

> dans un tableau de proportionnalité entre deux grandeurs d'espèces différentes, toutes deux mesurées dans une unité donnée, il existe un rapport externe qui dépend des unités choisies.

Une conséquence de cette dépendance par rapport aux unités est que, dans les cas de grandeurs d'espèces différentes, les rapports internes sont plus faciles à comprendre et à manipuler que le rapport externe[15]. D'où le succès de la *règle de trois* dans la résolution des questions de proportionnalité, cette règle reposant uniquement sur les rapports internes.

Des graphiques en ligne droite

La figure 5 est un graphique montrant le mouvement du marcheur considéré ci-dessus. Ce graphique repose sur les proportionnalités suivantes :

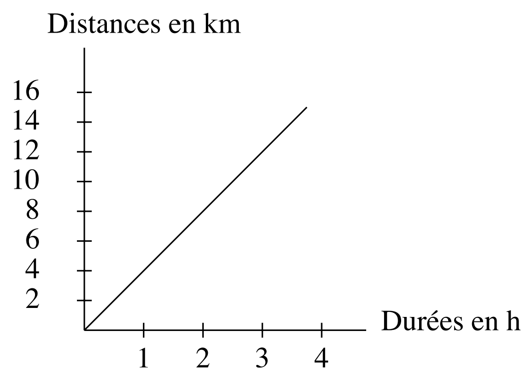


Fig. 5

tout d'abord et principalement, les distances et les durées, deux grandeurs physiques, sont proportionnelles (au sens donné à ce terme à la section 6, c'est-à-dire avant toute mesure) ;

les durées sont mesurées en heures, et ces mesures sont proportionnelles aux durées ;

les durées en heures sont transformées en longueurs exprimées en cm, à raison de 1,2 cm pour une heure ; cette transformation est aussi une proportionnalité ;

ces mesures en centimètres sont marquées sur l'axe des abscisses (cette activité de report est la réciproque d'une mesure : le passage d'une mesure à la grandeur physique correspondante, la longueur sur l'axe) ;

les distances sont mesurées en km, et ces mesures sont proportionnelles aux distances ;

[15] C'est là un fait communément observé dans les écoles, et il a été illustré de façon spectaculaire par I. Soto [1994] dans une étude sur les paysans illettrés du Chili.

les distances en km sont transformées en longueurs exprimées en cm, à raison de 0,3 cm par kilomètre ;

ces mesures en centimètres sont marquées sur l'axe des distances.

Il y a proportionnalité à tous les étages. Le résultat est un graphique en ligne droite. Pourquoi ? Nous avons vu plus haut qu'une disposition appropriée de longueurs proportionnelles fournissait un tel diagramme en ligne droite. Dans l'exemple ci-dessus, à cause de toute la chaîne des proportionnalités, les longueurs marquées sur l'axe des durées sont proportionnelles aux longueurs marquées sur l'axe des distances. Ceci explique la ligne droite.

Cet exemple d'un mouvement est typique d'une pratique générale : pour les besoins de la représentation, toutes les sortes de grandeurs sont transformées en longueurs, via des mesures et des échelles. Les longueurs sont les grandeurs les plus *lisibles*. C'est pourquoi la plupart des représentations graphiques sont basées sur des longueurs. La transformation des grandeurs en longueurs est une application centrale de la proportionnalité. Il ne fait pas de doute que la proportionnalité est une clé de la représentation fidèle des grandeurs et des fonctions.

9. L'intervention des quantités négatives

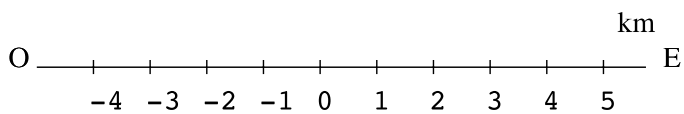


FIG. 6

La figure 6 montre une route orientée d'ouest en est, où les distances sont marquées en kilomètres. Ces distances sont mesurées à partir d'un certain point 0 et comptées positivement vers l'est et négativement vers l'ouest. Sur cette figure, des nombres positifs et négatifs localisent les points sur la droite.

Ceci implique une nouvelle interprétation de la notion d'ordre. Jusqu'à présent, *plus grand* et *plus petit* étaient interprétés dans leur sens ordinaire. Dorénavant, un nombre sera dit *plus grand* qu'un autre si le point qui lui correspond est sur l'axe à la droite de ce dernier. Alors que les lois abstraites de l'ordre, par ex. la transitivité, sont toujours valides, l'interprétation change considérablement. C'est une mutation drastique. Toutefois, l'interprétation précédente demeure valable pour les nombres positifs.

Le tableau 4 donne la position d'un marcheur sur cette route à différents moments.

temps en heures	position en kilomètres
-0.75	$+3$
-0.50	$+2$
-0.25	$+1$
0	0
$+0.25$	-1
$+0.50$	-2
$+0.75$	-3
$+1.00$	-4
$+1.25$	-5

Tab. 4

La situation est semblable à celle du marcheur considéré précédemment au sens où, dans les deux cas, une personne marche à $4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Mais il y a des différences importantes. Par exemple, concernant un tel mouvement, on peut se poser les questions suivantes :

> Étant donné la position du marcheur au temps $(+0,50)$, où était-il 2 heures plus tôt ?
>
> Connaissant la vitesse du marcheur et sa position au temps 0, où est-il (ou où était-il) à un instant donné, positif ou négatif ?

Pour répondre facilement à de telles questions, on introduit une addition et une multiplication pour cette nouvelle sorte de nombres. Ceux-ci – les réels dans toute leur extension –, généralisent les réels positifs. Cette extension est une mutation, comme le montrent entre autres deux changements spectaculaires :

> la somme de deux réels n'est plus nécessairement plus grande que chacun de ses deux termes ;
>
> le produit de deux nombres réels obéit à la fameuse règle des signes, qui n'a pas de raison d'être pour les réels positifs.

Ensuite, *on généralise une fois de plus la notion de rapport.* Malgré les changements majeurs mentionnés ci-dessus, *sa définition ne change pas de forme* :

> si α, β et γ sont des réels, et si
>
> $$\beta = \gamma \times \alpha,$$

alors γ est appelé le rapport de β à α.

De plus, et comme auparavant, deux réels quelconques (zéro excepté) ont un rapport.

Alors que la définition du rapport n'a pas changé, il n'en va pas de même de sa signification. Un rapport est maintenant plus qu'une estimation de combien un nombre est plus grand ou plus petit qu'un autre. Il prend aussi en compte le fait que les nombres comparés se trouvent ou non du même côté de l'origine 0 sur la droite des nombres.

Maintenant, en dépit de ces interprétations totalement nouvelles de l'addition et du rapport, les tableaux de proportionnalité existent toujours et demeurent formellement les mêmes, au sens où ils obéissent à la même définition. On peut, sur le tableau 4, vérifier cette permanence de la structure. La figure 7 montre que le graphique de la proportionnalité est toujours une ligne droite.

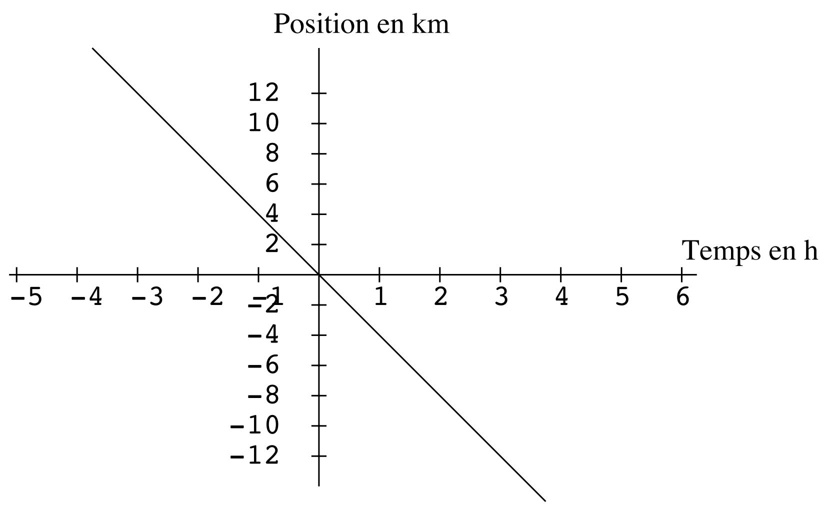


FIG. 7

Insistons sur le fait que, bien que la notion de proportionnalité soit demeurée structurellement la même, son interprétation, sa relation aux situations réelles a changé considérablement. Toutefois, dès qu'il s'agit seulement de nombres positifs, rien n'est changé.

10. La proportionnalité abstraite, la linéarité

Dans les exemples considérés jusqu'ici, tous les nombres exprimaient des mesures de volumes, de longueurs, de distances parcourues par un marcheur, de distances à partir d'une origine sur un axe, de durées, de vitesses, etc. Donc nous avons pris en compte les unités de mesure, et nos rapports externes étaient parfois des grandeurs composées, telles que des vitesses (mesurées). « Coupons maintenant le cordon ombilical » de la proportionnalité.

Laissons tomber toute référence aux mesures et définissons une proportionnalité entre nombres purs. Une telle proportionnalité est une correpondance terme à terme entre le système des nombres réels et lui-même. Elle peut être illustrée par un tableau en deux colonnes, montrant des couples de nombres réels (autant que l'on veut) face à face, avec les propriétés suivantes : la correspondance des sommes, la correspondance des rapports internes, l'existence d'un rapport externe, un graphique en ligne droite. Cette correspondance est aussi appelée *fonction réelle linéaire.*

À première vue, une telle notion abstraite de la proportionnalité ne dit rien sur rien, à part sur elle-même. À quoi sert-elle ? Elle est une pure structure – chose commune en mathématiques – un modèle prêt à être appliqué soit à des situations concrètes, soit dans d'autres contextes mathématiques.

11. Grandeurs orientées, vecteurs, transformations linéaires

Certaines des grandeurs que nous avons étudiées jusqu'ici étaient mesurées en nombres réels positifs et pouvaient être représentées sur un demi-axe gradué. D'autres étaient mesurées par des nombres réels généraux, c'étaient des grandeurs munies d'un signe, représentables sur un axe gradué. Les deux sortes étaient à une dimension. Toutefois, dans la vie quotidienne autant qu'en géométrie, en physique, etc., on rencontre des grandeurs orientées dans le plan ou l'espace. Par exemple, les changements de position d'un point, les translations d'un objet solide, les vitesses d'un point mobile dans un plan ou dans l'espace, les forces, etc. sont toutes des grandeurs qu'un nombre réel ne suffit pas à mesurer et qui ne peuvent pas être représentées par un point sur une droite. En plus d'être grandes ou petites, elles ont une direction. Nous les appelons *grandeurs orientées.* On peut les représenter par une flèche. Bien entendu, la notion commune de proportionnalité, celle que nous avons étudiée jusqu'à présent, ne s'applique pas telle quelle à ce nouveau type de grandeurs, elle doit être adaptée.

En principe, exactement comme nous l'avons fait pour les grandeurs ordinaires, nous devrions maintenant étudier les grandeurs orientées *concrètes*, c'est-à-dire que nous devrions explorer les contextes dans lesquels cette nouvelle sorte de grandeurs apparaît. Une telle étude, qui s'impose dans tout programme aboutissant aux espaces vectoriels, serait ici trop longue. Contentons-nous donc de jeter un coup d'œil d'une part sur les déplacements d'un point, et de l'autre sur les forces.

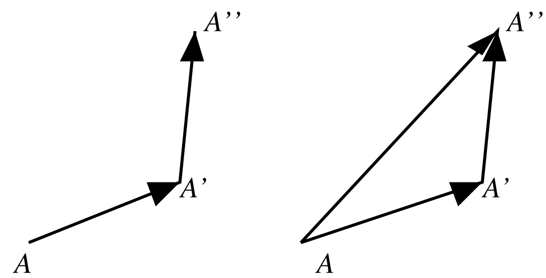


FIG. 8

Si un point mobile passe d'une position fixe A à une autre A', et ensuite de A' à A'', ses déplacements peuvent être représentés, comme le montre la figure 8, par des flèches, à savoir $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{A'A''}$ (dans des notations évidentes). Le déplacement résultant est $\overrightarrow{AA''}$. Nous l'appelons la *somme* des deux autres.

La figure 9 représente deux forces $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$ appliquées à un point P (par exemple un point possédant une masse).

On peut imaginer que les deux forces sont obtenues en tirant sur des ficelles attachées au point P. Elles ont un effet sur P (une accélération). On obtient le même effet sur P lorsqu'on remplace $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$ par une autre force $\overrightarrow{h}$, celle qui apparaît sur la figure 9(b). Nous appelons cette troisième force la *somme* des deux autres.

Remplaçons maintenant les déplacements et les forces par des flèches "abstraites" : nous les appellerons *vecteurs*[16]. Deux vecteurs peuvent être additionnés comme des déplacements ou comme des forces : le résultat est le même. Ainsi, nous avons une *addition des vecteurs.*

[16]On nous pardonnera de confondre *flèche* (ou *segment orienté)* et *vecteur.*

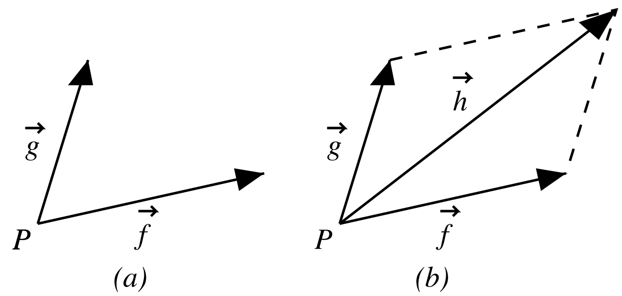


Fig. 9

De même que nous avons défini le produit d'une grandeur par un nombre réel, nous définissons le produit d'un vecteur par un nombre réel. Ce produit est connu sous le nom de multiplication du vecteur par un *scalaire* (un nouveau nom pour *nombre réel*).

Qu'en est-il maintenant des rapports ? Le rapport d'un vecteur à un autre "devrait être" un nombre qui, multipliant le second, donne le premier. Mais un tel nombre existe si et seulement si les deux vecteurs ont la même direction. Une impasse ?

Alors que, nous venons de le voir, il est habituellement impossible (dans un plan) de passer d'un vecteur à un autre en utilisant un seul nombre réel, il est habituellement possible de passer de *deux* vecteurs à un troisième en utilisant *deux* nombres réels. Soit $\overrightarrow{c}$ un vecteur, et $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ deux vecteurs non nuls de directions différentes. Alors il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{c} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b}$. Une telle expression est appelée *combinaison linéaire* de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$. Ainsi, la combinaison linéaire est, d'une certaine manière, une forme généralisée du rapport.

Voyons maintenant si nous pouvons utiliser l'idée de combinaison linéaire pour généraliser celle de proportionnalité. Et pour cela, revenons un instant en arrière pour voir comment il est possible de construire un tableau de proportionnalité dans le cadre des nombres réels. On inscrit un nombre réel non nul a dans la première colonne. On inscrit ensuite dans celle-ci autant de nombres réels que l'on veut. Chacun de ceux-ci est susceptible d'être mis sous la forme $b = \lambda a$, où λ est un nombre réel. Ce nombre est le rapport (interne) de b à a. Ensuite on inscrit, en face de a dans la deuxième colonne, un nombre a' quelconque. Et enfin, en utilisant la correspondance des rapports internes, en face de chaque nombre $b = \lambda a$, on écrit le nombre $b' = \lambda a'$. Le rapport externe du tableau est $\frac{a'}{a}$.

Imitons cette procédure dans le cadre des vecteurs. Dans une première colonne, écrivons deux vecteurs $\overrightarrow{a_1}$ et $\overrightarrow{a_2}$ non nuls et de directions différentes. Inscrivons dans la même colonne autant de vecteurs que nous voulons, de la forme

$$\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{a_1} + x_2\overrightarrow{a_2}, \tag{$*$}$$

où x_1 et x_2 sont deux nombres réels. Inscrivons ensuite, en face de $\overrightarrow{a_1}$ et $\overrightarrow{a_2}$ respectivement, deux vecteurs quelconques $\overrightarrow{a'_1}$ et $\overrightarrow{a'_2}$. Et enfin, en face de chaque vecteur de la forme (*), écrivons

$$\overrightarrow{x'} = x_1\overrightarrow{a'_1} + x_2\overrightarrow{a'_2}.$$

Le tableau ainsi constitué est tel que toute combinaison linéaire de deux vecteurs de la première colonne a pour image dans la seconde la même combinaison linéaire des deux vecteurs correspondants.

Cette propriété peut être reformulée de manière équivalente et sans doute plus suggestive de la manière suivante. Si deux vecteurs $\overrightarrow{x'}$ et $\overrightarrow{y'}$ correspondent dans le tableau à $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$, alors $\overrightarrow{x'} + \overrightarrow{y'}$ correspond à $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$. Il y a correspondance des sommes. En outre, si $\overrightarrow{x'}$ correspond à $\overrightarrow{x}$, alors $\lambda\overrightarrow{x'}$ correspond à $\lambda\overrightarrow{x}$. Il y a correspondance des rapports internes, dans ce sens restreint (vecteurs de même direction).

Ce que nous avons défini est une *application linéaire* pour les vecteurs en dimension 2. Elle généralise la notion de proportionnalité, que l'on peut donc aussi appeler *application linéaire* en dimension 1. On construirait de même des applications linéaires en dimension 3. Dans ce passage de une à deux, puis à trois dimensions, on voit surgir une grande richesse de phénomènes nouveaux. Mentionnons seulement le fait que toutes les géométries classiques du plan et de l'espace se rattachent aux applications linéaires en question. Nous voyons maintenant comment la proportionnalité, à l'origine une modeste graine (nourrie de contextes multiples), est devenue un arbre (abstrait) couvert de fleurs.

Ceci n'est toutefois pas la fin de l'histoire. Car la linéarité se développe ensuite du plan vers l'espace à trois dimensions, puis vers les espaces à n dimensions, là où l'algèbre prend par nécessité le relais de la géométrie, où l'imagination tombe en difficulté et où néanmoins les intuitions spatiales fonctionnent toujours. Pour ne pas mentionner les espaces à un nombre infini de dimensions de l'analyse fonctionnelle, avec la découverte dramatique que, dans ce cadre, les applications linéaires ne sont pas toutes continues.

À la fin de ce long parcours, remarquons que, lorsqu'on étudie les phénomènes linéaires, on ne devrait pas oublier de les contraster avec les non linéaires. Malheureusement, le manque de place nous empêche de développer ici ce point de vue pédagogique fondamental.

CONCLUSIONS

Ici s'achève notre esquisse d'une théorie génétique, celle de la structure linéaire. À la lumière de cet exemple, essayons de préciser ce que nous entendons par *théorie génétique*, de dire quelles en sont la nature et l'utilité. On l'a vu, il s'agit d'une suite de notions, de théories, de structures qui vont de la pensée commune jusqu'aux mathématiques constituées. Pour l'essentiel, cette suite va dans le sens d'une généralité croissante, chaque notion s'avérant pertinente dans un contexte plus large que la précédente. Le passage de l'une à la suivante est fortement motivé par des questions, une ou des lacunes constatées, un obstacle à franchir, la recherche d'une compréhension nouvelle. Chaque théorie apparaît comme une réponse adéquate, efficace, aux difficultés rencontrées, aux nouveaux contextes pris en compte. Elle s'enracine dans tout le cheminement qui précède, où elle puise son sens et trouve sa source d'intuitions.

La théorie génétique aboutit à des théories abstraites : les rationnels, les réels, les espaces vectoriels... Ces théories larguent en cours de route leurs amarres à l'expérience commune, aux contextes concrets. Mais elles peuvent à tout moment en retrouver le chemin, car elles en sont issues. Elles ne sont pas comme des théories conçues d'emblée au niveau formel, partant ensuite à la recherche de leurs applications.

Ainsi, une théorie génétique ne va pas d'axiomes et de définitions en lemmes, théorèmes et corollaires. Elle n'est pas *globalement* déductive. Mais alors, on peut se demander où sont, dans un tel schéma, les démonstrations, les déductions. Nous l'avons souligné en cours de route, chaque notion ou théorie nouvelle est le résultat d'une mutation (qu'on se souvienne des avatars du concept de rapport). Et donc, comme à chaque étape il y a changement de l'une ou l'autre définition ou propriété, il faut chaque fois réorganiser les choses. Et réorganiser veut dire mettre de l'ordre déductif. La théorie génétique est jalonnée de preuves.

Voyons maintenant à quoi servent les théories génétiques ? Voici quelques essais de réponses. Elles servent à clarifier les relations entre les choses et les phénomènes quotidiens et leur expression mathématique, à exhiber les raisons fortes, quoique parfois cachées, qui sous-tendent la construction des mathématiques. Elles cernent ce que l'on pourrait appeler une culture mathématique consciente de ce qu'elle doit à la pensée commune. Si ce n'était là une expression un peu ambitieuse, on pourrait dire qu'elles sont le résultat d'un effort vers une *épistémologie rationnelle*[17].

Mais en quoi une théorie génétique peut-elle être utile à l'enseignement ?

Pour éviter de graves confusions, soulignons d'abord qu'*une théorie génétique ne peut pas inspirer directement un programme d'études.* En effet, les choses se passent, dans la progression familiale et scolaire d'un enfant, dans un ordre qui n'a pas un tel degré de rationalité. Par exemple,

> les enfants ne découvrent pas en détail les propriétés des grandeurs non encore mesurées avant de rencontrer certaines mesures ;
>
> ils n'apprennent pas les propriétés principales qui fondent les nombres naturels avant de rencontrer quelques fractions simples ;
>
> ils découvrent les nombres négatifs sur le thermomètre longtemps avant d'apprendre à les utiliser pleinement en algèbre ;
>
> ils ont l'expérience des vitesses et des forces et de certaines de leurs propriétés élémentaires longtemps avant de les représenter par des vecteurs.

Une fois cette précaution prise, venons-en aux raisons qui justifient l'élaboration de théories génétiques dans la perspective de l'enseignement.

On peut espérer que si les auteurs de curriculums et de programmes comprennent en profondeur la *construction* de la matière mathématique, il introduiront de façon plus efficace les concepts nouveaux et seulement en cas de nécessité ou d'utilité visible.

On peut espérer qu'un enseignant qui a compris et assimilé une théorie génétique bien bâtie, d'une part dispose de clés pour construire son cours et interpréter certaines difficultés rencontrées par ses élèves, et d'autre part soit conscient de l'endroit où se trouve sa classe dans la construction d'un certain savoir, de ce qui

[17] *Épistémologie rationnelle* par opposition à *l'épistémologie historique*, qui étudie l'émergence des concepts au fil des siècles, et à *l'épistémologie génétique* (au sens de Piaget) qui étudie l'émergence des concepts chez les individus au cours de leur enfance. L'épistémologie rationnelle résulterait davantage d'une recherche des liens entre concepts, tels que peut les apercevoir un adulte utilisant sa raison. Elle relèverait de la *lumière naturelle* au sens cartésien ou pascalien de l'expression.

vient logiquement (pas chronologiquement) avant, et de ce qui se prépare pour après.

On peut espérer qu'un enseignant qui aurait approfondi l'une ou l'autre théorie génétique réaliserait que les mathématiques ont des racines dans la réalité, qu'elles ont une forme et des articulations intelligibles, qu'il aurait pour les mathématiques un intérêt accru et qu'il en aurait moins peur.

Qu'on nous permette de conclure par une seule suggestion : *que dans chaque pays, un groupe permanent d'enseignants de tous niveaux et de mathématiciens étudie le curriculum comme un tout, de la prime enfance à l'âge adulte, de la connaissance commune aux mathématiques, en évitant tout concept prématuré.* Insistons sur le fait qu'il doit s'agir d'un *groupe permanent*, car la probabilité est trop grande que des discussions occasionnelles s'avèrent inefficaces, sur un sujet où on sait que la compréhension mutuelle est difficile. Ne serait-il pas essentiel de mettre au travail sur un même projet ceux qui connaissent intimement les enfants et ceux qui connaissent intimement les mathématiques ?

Le présent article prend la suite d'une étude collective du CREM sur le même sujet (voir N. Rouche [2002]). J'exprime ma gratitude à ses auteurs : M. Ballieu, M.-F. Guissard, P. Laurent, Ch. Lemaître, L. Lismont, Ph. Tilleuil, Th. Sander, E. Vanderaveroet, F. Van Dieren, M.-F. Van Troeye, J. Van Santvoort et P. Wantiez.
Merci aussi à M. Ballieu, G. Cuisinier, Ch. Docq et M.-F. Guissard dont les remarques et critiques ont permis d'améliorer cet exposé et à Th. Gilbert pour d'intéressantes et fructueuses discussions.

Bibliographie

R. Bkouche [1991], Les mathématiques comme science expérimentale, *in* B. Charlot *et al.*, *Faire des mathématiques, le plaisir du sens*, A. Colin, Paris, 79-97.

B.O. [2002], *Programme de l'École Primaire, cycle des approfondissements*, Le Bulletin Officiel, n° 1, 14 février 2002, hors-série.

H. F. Fehr coord. [1961], *Mathématiques nouvelles*, O.E.C.E., Paris. Compte rendu du Colloque réuni à Royaumont du 23 novembre au 4 décembre 1959.

H. Freudenthal [1983], *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Reidel, Dordrecht.

H. FREUDENTHAL [1973], *Mathematics as an Educational Task,* Reidel, Dordrecht.

F. KLEIN [1933] *Elementar Mathematik vom Höheren Standtpunkte aus,* 1er vol. Arithmetik, Algebra, Analysis, 4e éd., Springer, Berlin.

K. KRÜGER [1999] *Erziehung zum funktionalen Denken, zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips*, Logos, Berlin.

N.C.T.M. (National Council of Teachers of Mathematics) [1989], *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston, Virginia.

O.E.C.E. [1961], *Un programme moderne de mathématiques pour l'enseignement secondaire*, Paris, (sans date, probablement 1961). Compte rendu du Groupe de travail réuni à Dubrovnik du 2 août au 19 septembre 1960.

G. PAPY [1963], *Mathématique moderne*, Marcel Didier, Bruxelles. Voir aussi quatre volumes publiés ultérieurement sous le même titre.

N. ROUCHE coord. [2002], *Des grandeurs aux espaces vectoriels, la linéarité comme un fil conducteur*, C.R.E.M., Nivelles (Belgique).

N. ROUCHE [2004], *De l'élève aux mathématiques, le chemin s'allonge, in* Ph. Bouillard et J. Lemaire, *L'apprentissage des sciences en question(s),* Espace de Libertés, Bruxelles, 2005, 29-49.

I. SOTO, N. ROUCHE [1994], Résolution de problèmes de proportionnalité par des paysans chiliens, *Repères-IREM* 14, pages 5-19.

O. TŒPLITZ [1963], *The Calculus, a Genetic Approach*, Univ. of Chicago Press.

NICOLAS ROUCHE
Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM)
5 rue Émile Vandervelde
B-1400, Nivelles, Belgique
rouche@math.ucl.ac.be

GINETTE CUISINIER, CHRISTINE DOCQ, THÉRÈSE GILBERT, CHRISTIANE HAUCHART, NICOLAS ROUCHE, ROSANE TOSSUT

LES REPRÉSENTATIONS PLANES COMME UN FIL CONDUCTEUR POUR L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

Abstract. Plane representations as a guideline for the teaching of geometry.
Learning space geometry rests on plane representations of solids, whereas realizing such representations relies on some notions of geometry. That is why these representations have a substantial and constant relation to geometry. They range from children's drawings to orthogonal and parallel projections, and to linear perspective, that is from naive perceptions to more and more advanced and complex representations. For such reasons, they constitute an interesting guideline for geometry learning. The workshop will illustrate this point of view by a sequence of questions appropriate to geometry learning from early childhood to adulthood.

Résumé. D'une part, l'étude de la géométrie de l'espace s'appuie sur des représentations planes de solides, et d'autre part on ne réalise de telles représentations qu'en s'appuyant sur des notions de géométrie. Ainsi, ces représentations entretiennent avec la géométrie un lien substantiel et constant. Elles vont des dessins d'enfants à la perspective centrale, en passant par les projections orthogonales et parallèles, c'est-à-dire du dessin naïf vers des formes de projection de plus en plus évoluées et complexes. Pour ces diverses raisons, elles constituent un fil conducteur intéressant pour l'apprentissage de la géométrie. Dans cet atelier, nous illustrerons ce point de vue par quelques questions jalonnant l'enseignement de la prime enfance à l'âge adulte.

Mots-clés. Géométrie, représentations planes, ombres, projections, perspectives, enseignement maternel, primaire et secondaire.

Introduction

Le présent article résulte d'un travail au Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM) de Louvain-La-Neuve. Ce groupe rassemble, entre 15 et 30 fois par an, des enseignants de tous niveaux, de la maternelle à l'université, bénévoles, pour travailler des questions liées à l'enseignement des mathématiques. Il s'est attaché à l'idée que les représentations planes de solides constituent un contexte intéressant pour l'enseignement de la géométrie, d'un bout à l'autre de la scolarité.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, supplément vol. 11, p. 51– 71.

Afin d’illustrer ce point de vue, nous avons sélectionné quelques activités de représentations planes d’objets de l’espace qui peuvent jalonner l’enseignement à différents âges de la scolarité.

Bien que l’on puisse imaginer représenter des objets aux formes les plus libres, notre présentation est globalement centrée sur des objets du plan ou de l'espace tels que des carrés, rectangles, assemblages et pavages de carrés, parallélépipèdes, cubes et assemblages de cubes, ...

Certaines activités ont été vécues en classe, d’autres ne sont que des propositions d’activités, qui doivent encore être expérimentées. En ce sens, la présente contribution est davantage un témoignage que peut apporter au thème principal du colloque un groupe d’enseignants curieux et motivés, qu'un ensemble de résultats définitifs.

Les auteurs remercient les membres du GEM qui ont pris part à cette réflexion ainsi que ceux qui ont expérimenté des activités dans leurs classes : Micheline Citta, Lucie De Laet, Martine de Terwangne, Alain Desmaret, John Dossin, Stéphane Lambert, Sophie Loriaux, Monique Meuret, Bruno Taquet, Jean-Pascal Bodart. Un tout grand merci aussi à Ginette Cuisinier qui, outre sa participation à l'ensemble du travail, a réalisé les figures.

1. Dessin d’enfants

La réflexion menée au GEM à propos de dessins d’enfants a permis de mieux cerner quelles compétences sont mobilisées, et quelles difficultés sont rencontrées par les enfants dans certaines activités de dessin. Ces activités ont été réalisées dans plusieurs classes de divers niveaux : troisième maternelle, première, troisième et cinquième primaires (enfants âgés d'environ 5, 6, 8 et 10 ans).

1.1. Dessiner une table

Dans toutes les classes, on a donné la consigne : « Dessine une table avec une assiette ». Dès que les réalisations ont été rassemblées, une question de méthode s’est imposée : comment rendre compte des dessins d’enfants ? Notre premier réflexe a été de repérer ceux qui correspondaient à ce que nous aurions nous-mêmes dessiné, en fait en perspective cavalière. Mais nous avons découvert des dessins très différents, manifestant des connaissances, une réflexion et une cohérence qu’il nous fallait tenter d’analyser. Nous proposons ci-après trois compétences qui peuvent servir à rendre compte des résultats : conceptualiser un objet, choisir un point de vue et respecter un code.

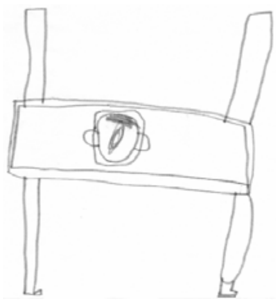
Conceptualiser l'objet. Dessiner une table quand on n'en a pas sous les yeux, c'est *dessiner un concept*. Il est encore différent de dessiner une table que l'on voit, ou de dessiner une table donnée d'un point de vue donné. Remarquons que, dans tous les cas, le dessinateur est obligé de conceptualiser pour dessiner.

Qu'est-ce qu'un concept de table ? C'est un concept qui intègre et schématise dans l'esprit de chacun toutes les tables qu'il a vues, de tous les points de vue possibles et avec tous les usages. Il en résulte l'idée de *quelques parties possédant chacune une forme définie et articulées les unes aux autres d'une certaine façon*. Dans chaque dessin, on trouve quelques-unes des propriétés suivantes (mais jamais toutes…) :

– une table possède un plateau, souvent rectangulaire ;
– ce plateau est horizontal ;
– une table a en général quatre pieds ;
– ces pieds sont articulés aux quatre coins du plateau ;
– ils sont verticaux, parallèles entre eux et perpendiculaires au plateau ;
– ils sont de même longueur ;
– ils sont orientés vers le bas à partir du plateau ;
– et ils descendent jusqu'au même niveau, celui du sol.

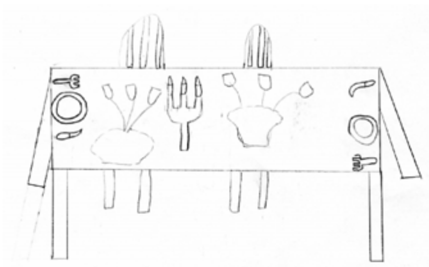
Les figures ci-dessous montrent quelques dessins typiques. La figure 1 montre un plateau rectangulaire avec quatre pieds articulés aux quatre coins du plateau et à peu près d'égales longueurs. Les pieds sont perpendiculaires à un bord du plateau.

A la figure 2 par contre, les quatre pieds sont orientés vers le bas ; montrer les quatre pieds ne permet pas de les dessiner parallèles.



Quentin, 1e primaire

Figure 1



Joana, 5e primaire

Figure 2

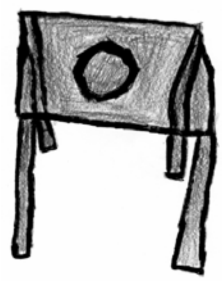
La figure 3 montre un plateau rectangulaire avec quatre pieds verticaux, orientés vers le bas et descendant jusqu'à un même niveau ; ces choix empêchent d'articuler les pieds aux quatre coins.

On le voit, le fait de passer de trois à deux dimensions oblige à ne conserver qu'une partie des propriétés, et l'on imagine bien que le choix est parfois difficile.

La figure 4 montre que certains enfants parviennent à respecter à peu près toutes les propriétés, grâce au choix de dessiner un plateau transparent !

Nicolas, 3e maternelle

Figure 3

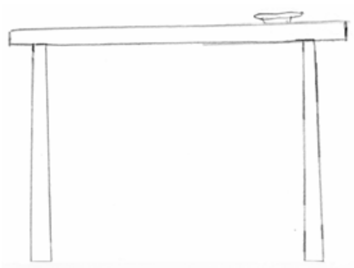


Julien, 5e primaire

Figure 4

Nous pointons ainsi un premier intérêt pédagogique du dessin, ainsi qu'une première difficulté. *Proposer une telle activité à un enfant l'amène à conceptualiser, mais le met aussi devant un choix difficile : quelles propriétés conserver ?*

Choisir un point de vue. Dessiner implique généralement de choisir un point de vue. Mais choisir un point de vue, c'est souvent être contraint de déformer la réalité, ici de faire fi de certaines caractéristiques d'une table et de ne pas tout dessiner.



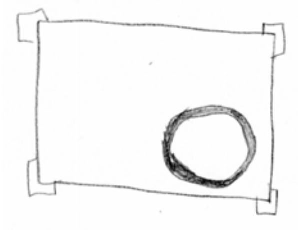
Céline, 3e primaire

Figure 5

Wacil, 5e primaire

Figure 6

De nombreux dessins d'enfants montrent un tel choix. Ainsi, à la figure 5, la table est vue de bout, ce qui implique que les pieds de derrière sont cachés. A la figure 6, la vue de bout pour le plateau est combinée à un effet de perspective pour les pieds (les pieds de derrière sont dessinés plus courts que ceux de devant). Enfin la figure 7 montre la table vue du dessus, ce qui ne montre pas grand chose de ses pieds…



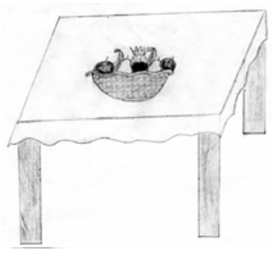
Joshua, 5e primaire

Figure 7

D'autres dessins encore s'apparentent plutôt à une vue de la table en perspective à point de fuite, pour le plateau seulement ou pour l'ensemble de la table...

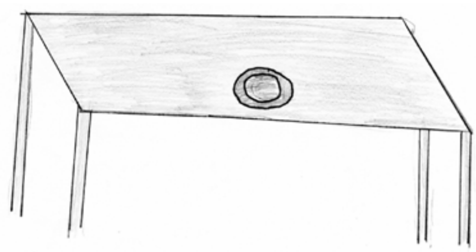
Une deuxième difficulté du dessin est donc de choisir un point de vue et de renoncer à certaines propriétés de l'objet.

Respecter un code. Des dessins d'enfants révèlent déjà le respect de certaines règles de représentation. Certains élèves dessinent spontanément et sans défaut en perspective cavalière (figure 8). D'autres le font approximativement (figure 9).



Lætitia, 5e primaire

Figure 8



Valérie, 5e primaire

Figure 9

Mais cela suffit à montrer que la perspective cavalière est dans l'air : ces élèves l'ont déjà rencontrée et tentent de s'y conformer. Le code qu'ils s'imposent consiste en deux règles au plus :

- respecter le parallélisme ;

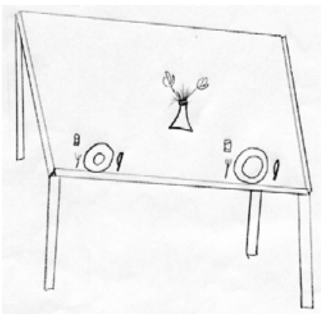
– respecter l'égalité des longueurs de segments parallèles, éventuellement alignés.

Respecter ce code demande de repérer les parallélismes utiles, de repérer les égalités de longueurs utiles, de choisir un point de vue, de réaliser qu'il ne faut pas respecter plus de propriétés que nécessaire. Par exemple, les angles droits ne doivent généralement pas être dessinés droits.

Ainsi, respecter un code implique de repérer certaines propriétés de l'objet et c'est là aussi un intérêt pédagogique du dessin.

Qui plus est, il faut s'en tenir à un code et un point de vue, et ne pas en changer en cours de route. Certains dessins mélangent perspective cavalière et perspective à point de fuite, ou montrent un changement de point de vue entre le plateau et les pieds.

Un dessinateur entraîné s'aide de la perception de la forme globale qu'il a de l'objet. Dans le cas de la table rectangulaire, l'enveloppe de l'objet est en gros un parallélépipède rectangle. Sachant cela, on comprend que, le plateau étant dessiné en forme de parallélogramme, les bases des quatre pieds occupent aussi sur le dessin les sommets d'un parallélogramme (non dessiné), isométrique au premier et situé sous lui. Pour se rendre compte de cela, il suffit d'imaginer une corde entourant les quatre pieds à la base. La figure 10 montre un dessin où cette exigence de concevoir deux parallélogrammes translatés l'un de l'autre n'est pas respectée. Sans doute le besoin de dessiner quatre pieds est-il plus fort que celui de respecter les longueurs ou le parallélisme.



Selim, 5e primaire

Figure 10

1.2. Achever le dessin d'une table

Dans une classe de cinquième primaire (11 ans), l'institutrice a poursuivi l'expérience en imposant implicitement un point de vue et un code. Elle a distribué aux enfants un dessin de table inachevé (figure 11) : un plateau de table rectangulaire dessiné en perspective cavalière sur du papier quadrillé. Au bas de ce dessin figure la consigne « Dessine les quatre pieds de la table ».

Le quadrillage joue un rôle d'incitant et de guide pour compléter le dessin selon le code de la perspective cavalière. En perspective cavalière, les propriétés suivantes doivent être respectées :

- raccord du haut des pieds aux quatre coins du plateau ;
- alignement de certains segments en position frontale, comme *AB* et *CD* sur la figure 12, et parallélisme de ces segments au bord frontal *HI* de la table ;
- alignement des dessins de certains segments en position latérale, comme *EF* et *GA* sur la figure 12, et parallélisme de ces segments au bord latéral *JH* de la table ;
- égalité des longueurs des pieds.

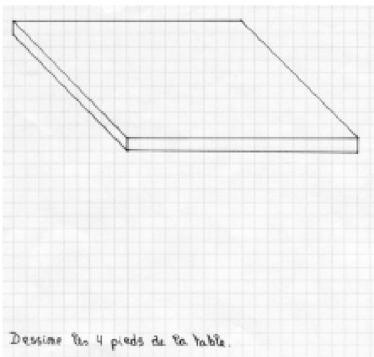


Figure 11

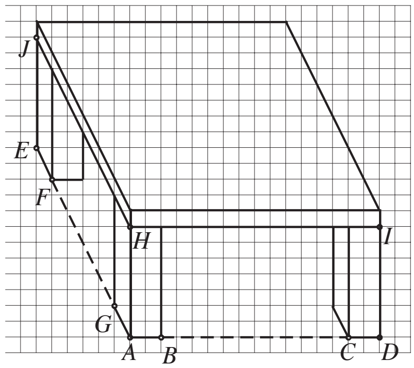
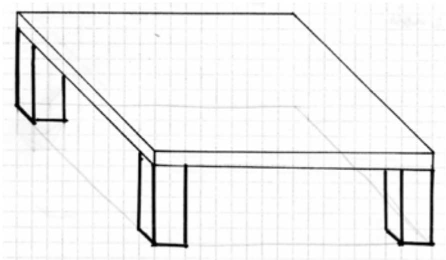


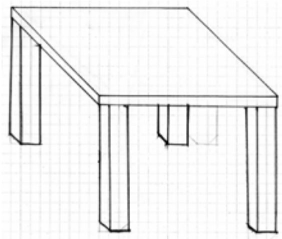
Figure 12

Avec cette consigne, nous voulions voir, d'une part dans quelle mesure les élèves connaissent et respectent ce code, et d'autre part quelles propriétés de l'objet ils respectent. Rappelons que ces élèves n'ont reçu aucune instruction particulière sur les représentations planes d'objets de l'espace.



Billy, 5e primaire

Figure 13



Duygu, 5e primaire

Figure 14

Un seul dessin sur seize a été réalisé selon les règles, et c'est le seul comportant un pied caché (figure 13). Qu'ont fait les enfants et que repère-t-on comme types d'erreurs ? Ils sont généralement partis des coins du plateau pour tenter d'y raccorder les quatre pieds. Quant aux erreurs, elles correspondent selon les cas à des problèmes de raccord de certains pieds au plateau, à des problèmes de longueur de pieds (11 élèves sur 16 n'ont pas respecté l'égalité des longueurs des pieds), ou encore de perte de l'alignement de segments disposés en position frontale ou en position latérale.

En ce qui concerne les alignements mentionnés ci-dessus, notons que la plupart des enfants ont respecté l'alignement des segments en position frontale (13 dessins sur 16) et pas l'alignement en position latérale (12 sur 16).

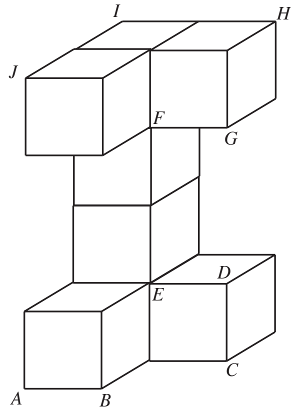
On trouve, à la figure 14, un problème de raccord du pied avant gauche au plateau. Et comme l'enfant s'est arrangé pour que les pieds au sol s'inscrivent dans un parallélogramme parallèle au plateau, ce problème se répercute en un problème de longueurs des pieds et un problème de raccord du pied arrière droit au plateau...

2. Vues coordonnées d'un objet appelé "module de paix"

Dans l'activité de représentation de tables, les enfants dessinent spontanément. On pourrait dire que les projections y sont implicitement présentes au sens où cette activité est en attente d'une théorisation qui s'appuie sur les projections. Mais les enfants n'y voient pas des projections, ils ignorent d'ailleurs ce que c'est : ils voient des tables, perçoivent sans doute un code.

Dans la deuxième activité que nous décrivons maintenant et qui s'adresse à des élèves du début du secondaire, le lecteur reconnaîtra les projections orthogonales, bien qu'elles ne sont pas abordées comme des transformations. Elles sont ici abordées de manière informelle et sont appelées *vues*.

1. Vous recevez un module de paix. Posez-le sur une table en l'orientant comme suggéré sur la figure ci-contre et représentez-le au moyen des trois vues orthogonales coordonnées : de haut, de face et de gauche.



2. Sur la figure précédente, certains sommets du module de paix sont désignés par les lettres *A, B, C, D, E, F, G, H, I* et *J*. Indiquez ces sommets sur chacune des vues de face, de gauche et de haut que vous avez réalisées en 1.

a) Sachant que la distance entre *A* et *B* vaut 1, quelles sont dans la réalité les distances suivantes : *d(C,D), d(E,D), d(E,F), d(E,G), d(F,G), d(B,C), d(G,H), d(I,H), d(I,J)* ?

b) Retrouvez-vous ces distances en les mesurant sur les vues de haut, de face et de gauche ?

Avec cette activité, les élèves peuvent prendre conscience de l'intérêt du mode de représentation en trois vues coordonnées. Il fournit (figure 15) un dessin en vraie grandeur de parties bien disposées de l'objet : la face du dessus sur la vue de haut, celle de gauche sur la vue de gauche et celle de face sur la vue de face. Il est fréquemment utilisé dans la vie quotidienne, par exemple dans des domaines techniques. Il se réfère aux directions privilégiées que sont la verticale et l'horizontale. On peut le voir comme une première étape vers les projections parallèles. Une difficulté pour décoder ce mode de représentation tient à ce qu'il faut coordonner les trois vues.

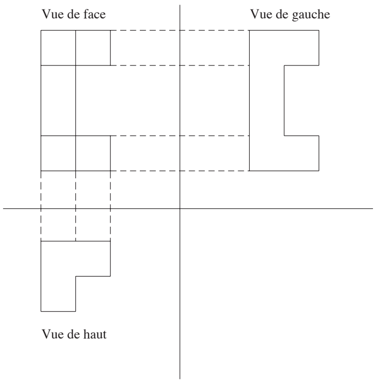


Figure 15

Les enfants sont aussi amenés à réaliser que la représentation sur une des vues coordonnées fait perdre de l'information par rapport à la réalité : ainsi par exemple, un unique et même point représente sur la vue de face, les deux sommets distincts *I* et *J* de la réalité. Enfin, ils réalisent aussi que si dans certains cas (pour des parties privilégiées de l'objet), ce mode de représentation fournit une image en vraie grandeur, dans les autres cas, il raccourcit ou annule les distances. Ainsi par exemple,

- la distance entre *A* et *B*, qui vaut 1 ans dans la réalité, est conservée sur la vue de haut et sur celle de face et vaut 0 sur la vue de gauche ;
- la distance entre *B* et *C*, qui vaut $\sqrt{2}$ dans la réalité, est conservée sur la vue de haut et est réduite à 1 sur les vues de face et de gauche.

Enfin, la question relative aux distances sollicite des connaissances de géométrie plane, comme le théorème de Pythagore.

Notons au passage que la lecture de la question 1 passe par celle d'un dessin du module en perspective cavalière : même si la plupart des élèves n'en connaissent pas encore les règles, décoder un tel dessin ne leur pose pas de problème.

3. Ombres, au soleil et à la lampe, d’échelles et de quadrillages

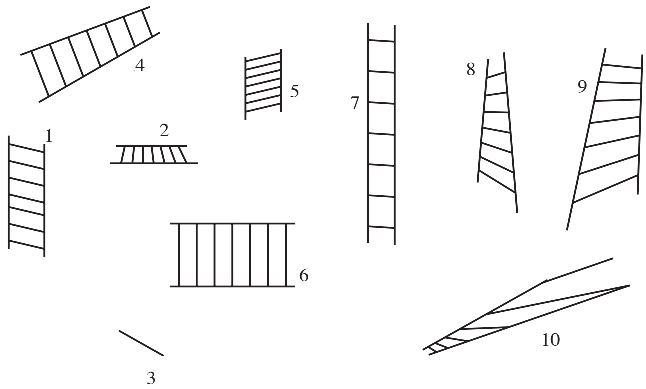
Pour permettre à des élèves du début du secondaire de prendre conscience des différences entre perspective cavalière et perspective à point de fuite, nous leur proposons dans un premier temps d’observer des ombres pour qu’ils puissent acquérir un support intuitif aux propriétés géométriques sous-jacentes.

Les objets que nous proposons sont des objets plans (échelles miniatures à montants parallèles et quadrillages) qui faciliteront la découverte des invariants fondamentaux de ces perspectives.

Les élèves reçoivent une échelle miniature à montants parallèles et les consignes suivantes.

1. Imaginez et dessinez une ombre possible, sur une surface plane, de cette échelle ;
   a) Placée au soleil ;
   b) placée devant une lampe ponctuelle.

   Si nécessaire, réalisez concrètement l'expérience[1].
2. Voici quelques dessins :



   Quels sont ceux qui peuvent être une ombre de l'échelle placée au soleil ?

   Quels sont ceux qui peuvent être une ombre de l'échelle placée devant une lampe ponctuelle ?
3. Imaginez et dessinez des ombres possibles d'un quadrillage ;
   a) placé au soleil ;
   b) placé devant une lampe ponctuelle.

3.1. Imaginer des ombres d'échelles

Cette question très ouverte doit amener les élèves à s'interroger sur les caractéristiques principales de ces deux types d'ombre. Ils pourront ainsi avoir une première grille de lecture des dessins qui leur sont présentés dans la deuxième question.

---

[1] Une lampe ponctuelle et, au cas où le soleil est caché, une lampe à faisceaux parallèles sont disponibles en classe.

3.2. Ombres d'échelles possibles ou impossibles

3.2.1. Ombres au soleil

L'observation de l'échelle et de son ombre semble indiquer que l'ombre au soleil conserve les alignements, le parallélisme des droites dans toutes les directions et les rapports de longueurs sur une droite ou sur des droites parallèles. Elle ne conserve généralement pas les longueurs, ni les angles.

Le débat en classe débouche sur l'explication suivante : le soleil est tellement loin de la planète terre que les rayons parvenant sur la terre sont quasi parallèles ; on peut donc modéliser le phénomène des ombres au soleil sur une surface plane par le concept mathématique de projection parallèle sur un plan, au phénomène de pénombre près.

On aboutit à la définition suivante de projection parallèle, pour un plan π et une droite d non parallèle à π :

- La *projection parallèle à la droite d sur le plan* π est la transformation qui envoie un point P de l'espace sur le point de percée dans le plan π de la droite menée par P parallèlement à d ;
- Cette droite parallèle à d est appelée *rayon projetant*. Les points du plan π sont leur propre image.

Nous abordons les propriétés des projections parallèles en exploitant le lien étroit entre les représentations planes et la géométrie de l'espace. En effet, on justifie par des propriétés de géométrie synthétique de l'espace et du plan les propriétés suivantes des projections parallèles :

- conservation de l'incidence et de l'alignement ;
- conservation du parallélisme ;
- conservation des rapports de longueurs sur une droite ou sur des droites parallèles ;
- l'image d'un rectangle est un parallélogramme ;
- l'image d'une figure située dans un plan parallèle au plan de projection est isométrique à la figure ;
- l'image d'une figure située dans un plan parallèle aux rayons projetants est réduite à un segment.

Ces mises au point sur l'ombre au soleil, sur sa modélisation sous forme de projection parallèle et sur les propriétés d'une telle projection, permettent de revenir à la question concernant les formes possibles de l'ombre de l'échelle.

Nous interprétons désormais cette ombre comme l'image d'une échelle idéalisée[2] par une projection parallèle. Elle peut être

- un segment ;
- une échelle[3] isométrique à l'échelle de départ ;
- une échelle dont les montants sont de même longueur et parallèles entre eux, les échelons sont parallèles entre eux mais pas nécessairement perpendiculaires aux montants et les espaces inter-échelons sont en forme de parallélogrammes isométriques.

Ainsi, les dessins n[os] 3, 6, 5 et 7 montrés à la figure 16 sont acceptés.

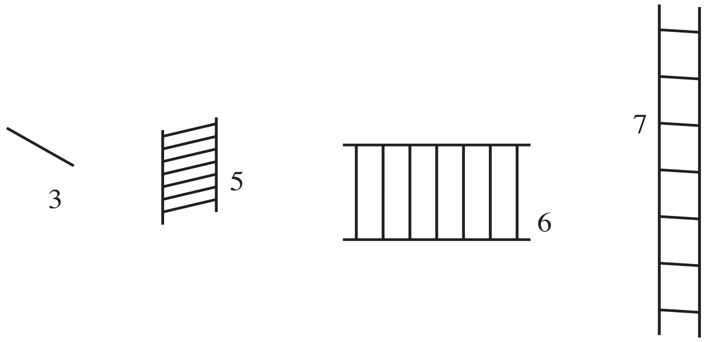


Figure 16

Enfin, le lien entre les projections parallèles et les représentations planes est mis en évidence. A ce stade, on peut nommer la représentation plane associée à une projection parallèle : il s'agit d'une *perspective cavalière* (axonométrique suivant les dessins technologiques).

Quant aux projections orthogonales rencontrées dans l'activité précédente (les trois vues coordonnées), elles sont reconnues comme des cas particuliers de projections parallèles : les rayons projetants sont perpendiculaires au plan de projection.

3.2.2. Ombres à la lampe

L'observation de l'échelle et de son ombre semble indiquer que l'ombre à la lampe ponctuelle conserve les alignements, le parallélisme des droites parallèles au plan

[2] Il s'agit d'une figure plane, correspondant à une échelle à montants parallèles de même longueur, et aux échelons perpendiculaires aux montants et régulièrement disposés (les espaces inter-échelons sont des rectangles isométriques).

[3] Dans la suite de ce texte, nous commettons l'abus de langage qui consiste à utiliser *échelle, montants, échelons, espaces inter-échelons, etc.* au lieu *de image de l'échelle, images des montants, images des échelons, images des espaces inter-échelons, etc.* , estimant que le contexte permet de déterminer l'interprétation qu'il faut choisir.

de l'ombre et les rapports de longueurs sur ces droites, mais ne conserve pas le parallélisme et les rapports de longueurs pour les autres droites.

A nouveau, la travail en classe débouche sur une modélisation : l'ombre portée par une lampe ponctuelle sur un plan est modélisée par une projection centrale de l'espace sur un plan.

La projection centrale est définie comme suit, pour un plan π donné et un point C n'appartenant pas à ce plan :

> La *projection centrale de centre C sur le plan* π est la transformation qui envoie un point P de l'espace (n'appartenant pas au plan parallèle à π passant par C) sur le point de percée dans le plan π de la droite déterminée par les points P et C.
>
> Cette droite est appelée *rayon projetant*. Les points de π sont leur propre image et aucun point du plan contenant C et parallèle à π n'a d'image.

On relève ensuite les premières propriétés des projections centrales :

- conservation de l'alignement ;,
- l'image d'une figure située dans un plan parallèle au plan de projection est homothétique à la figure[4] ;
- les images de deux droites[5] parallèles entre elles mais non parallèles au plan de projection sont deux droites concourant en un point appelé *point de fuite* (figure 17),

et on les justifie par des propriétés de géométrie synthétique de l'espace et du plan.

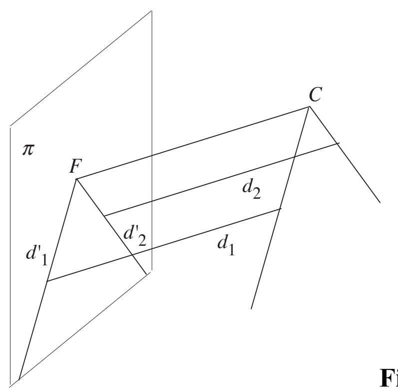


Figure 17

[4] On considère que la figure ne se trouve pas dans le plan parallèle à π passant par C.

[5] On considère qu'aucune des deux droites ne passe par C.

Avant de pouvoir déterminer quels dessins sont des ombres à la lampe de l'échelle, il nous a semblé intéressant d'étudier d'abord les ombres de quadrillages.

3.3. Ombres de quadrillages

On observe d'abord qu'un quadrillage peut être interprété comme une juxtaposition de plusieurs échelles isométriques dont les espaces inter-échelons sont cette fois des carrés. Donc, toutes les propriétés mentionnées pour les ombres des échelles sont d'application.

Ainsi, l'ombre au soleil la plus générale d'un quadrillage est un « parallélogrammage », c'est-à-dire un pavage du plan fait de parallélogrammes isométriques dont les sommets sont réunis aux nœuds du pavage.

L'ombre à la lampe ponctuelle d'un quadrillage présente, suivant sa position par rapport au plan de projection, des parallèles et/ou des points de fuite (figure 18).

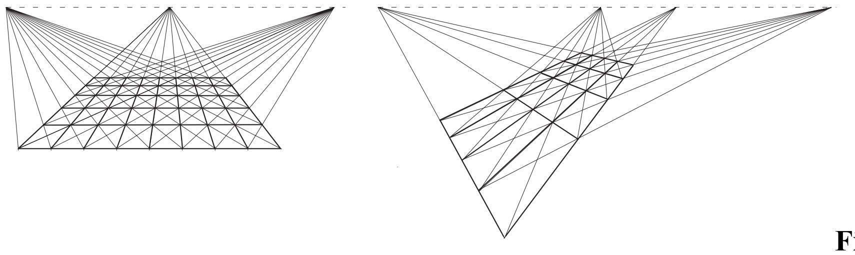


Figure 18

Avec un quadrillage, on est en présence de quatre familles de droites parallèles : les deux familles de parallèles dont les directions sont celles des côtés du quadrillage et les deux familles de diagonales. Pour chacune de ces familles, lorsque les droites ne sont pas parallèles au plan de projection, les images doivent converger en un point de fuite. Dès lors, lorsque le quadrillage n'est pas parallèle au plan de projection, l'ombre présente trois ou quatre points de fuite (trois lorsque les droites d'une famille sont parallèles au plan de projection et quatre sinon). Ces points de fuite doivent être alignés car ils appartiennent à la droite d'intersection du plan de projection avec le plan passant par le centre de projection et parallèle au plan du quadrillage.

3.4. Retour aux ombres d'échelles

On déduit de ce qui précède que certains dessins doivent être rejetés comme ombre possible d'échelle, même si les montants convergent et les échelons convergent : c'est le cas du dessin n° 8 complété à la figure 19 qui montre une famille de diagonales ne convergeant pas vers un point.

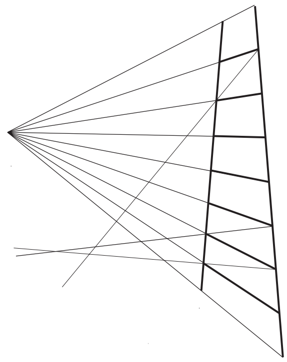
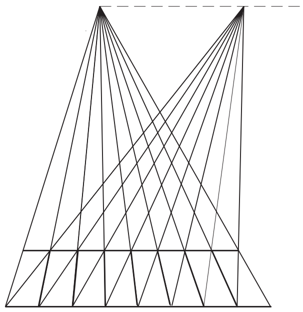


Figure 19

Ces observations permettent enfin de conclure à propos des ombres possibles sur une surface plane, d'une échelle idéalisée exposée à la lampe ponctuelle. Cette ombre, que nous interprétons désormais comme une image par une projection centrale peut être

– un segment ;
– une échelle agrandie, semblable à l'échelle de départ ;
– une échelle dont les échelons sont parallèles et de longueurs différentes, et dont les montants et les deux familles des diagonales des espaces inter-échelons convergent respectivement en trois points alignés ;
– une échelle dont les montants sont parallèles et de longueurs différentes et dont les échelons et les deux familles de diagonales des espaces inter-échelons convergent respectivement en trois points alignés ;
– une échelle dont les montants, les échelons et une des familles de diagonales des espaces inter-échelons convergent respectivement en trois points alignés ;,
– une échelle dont les montants, les échelons et les deux familles de diagonales des espaces inter-échelons convergent respectivement en quatre points alignés.

Les dessins n^{os} 2 et 10, repris à la figure 20, sont ainsi acceptés. Le n° 10 a la particularité d'avoir l'image d'un échelon parallèle à celle d'un montant ; c'est dû à la présence du point d'intersection de l'échelon et du montant dans le plan parallèle au plan de projection et passant par le centre de projection.



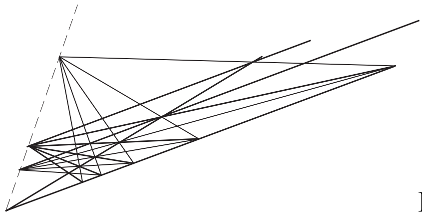


Figure 20

Le lien entre les projections centrales et les représentations planes est mis en évidence. A ce stade, on peut nommer la représentation plane associée à une projection centrale : il s'agit d'une *perspective à point de fuite*.

Au travers de ces activités, ombres d'échelles et de quadrillages, les élèves ont pu tisser des liens entre le contexte des ombres, le domaine mathématique des transformations spatiales que sont les projections parallèles et les projections centrales, et le contexte des représentations planes, en particulier les perspectives dites respectivement cavalières et à point de fuite.

4. Quelques énoncés d'exercices de représentation [6]

Représentation d'une boite cubique quadrillée intérieurement

La figure 21 est la photo d'une boîte cubique sans couvercle.

Figure 21

Représentez, en perspective cavalière, cette boîte placée dans la même position que sur la photo. Ensuite représentez un quadrillage 8 sur 8 sur les faces intérieures de la boîte.

Faites le même travail en perspective centrale.

[6] Les solutions de ces exercices sont consultables en ligne à l'adresse suivante : http://irem.u-strasbg.fr menu « publications ».

Représentations du module de paix à l'aide du quadrillage

On suppose que les petits cubes qui forment le module ont même côté que les carrés du quadrillage. La figure 22 montre, vus du haut, trois modules posés sur la face horizontale de la boîte.

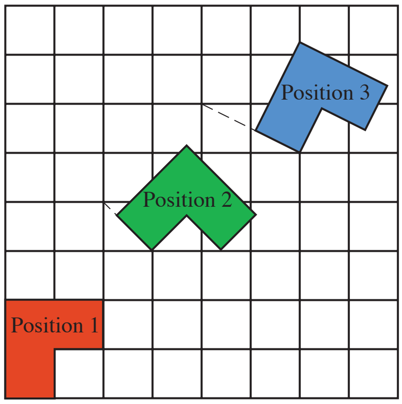


Figure 22

Représentez ces modules en perspective cavalière en vous servant du quadrillage construit précédemment. Faites ensuite le même travail en perspective centrale.

Représentations du module de paix sans quadrillage

La figure 23 est une représentation en perspective cavalière d'un module disposé verticalement, en position frontale. Complétez cette figure en représentant le même module de telle sorte que l'arête *OP* soit sur la droite *d* et que *P* soit placé à l'avant de *O*

Faites ensuite le même travail en perspective centrale.

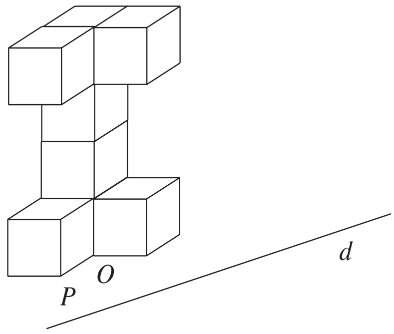


Figure 23

5. Conclusion

La thèse principale de cette étude est que les représentations planes d'objets de l'espace peuvent être présentes *à toutes les étapes* d'apprentissage de la géométrie, de la prime enfance à l'âge adulte et qu'elles sont appelées à jouer les trois rôles suivants.

1. Elles sont un mode d'expression et de communication des situations spatiales dans tous les cas où on ne dispose pas de modèles à trois dimensions. A ce titre, elles sont un outil pour apprendre certains chapitres de géométrie ;
2. Mais dans la mesure où on les ramène techniquement à des projections parallèles ou centrales, la théorie des projections et d'autres notions de géométrie sont un outil pour produire et interpréter les représentations. En nous appuyant en cours de route sur des propriétés d'incidence et d'orthogonalité, ainsi que sur le théorème de Thalès dans le plan et sur le théorème de Pythagore, nous avons illustré le fait que d'autres notions de géométrie (par delà la théorie des projections sricto sensu) interviennent dans les représentations ;
3. Les représentations planes sont un sujet d'étude géométrique intéressant en soi, ne serait-ce que par leur intérêt dans la vie quotidienne et dans l'histoire de l'art.

Par ailleurs, on discerne clairement plusieurs étapes dans l'apprentissage des représentations planes. Les voici, rapidement esquissées, dans un ordre non entièrement obligé.

1. *La réalisation de dessins par les enfants*, point de départ essentiel, les amène à exercer l'observation et les perceptions. Elle leur fournit des occasions de réaliser le caractère réducteur et les ambiguïtés des représentations : l'impossibilité fréquente d'exprimer fidèlement un concept, en l'occurrence celui de table. A ce stade, *pas de théorie géométrique mais,* vers la fin du primaire, *la familiarisation avec* un premier code de représentation, celui de *la perspective cavalière*. Soulignons par ailleurs que, s'il est vrai que les dessins d'enfants sont loin de la géométrie théorisée, ils y préparent ;
2. Nous avons débuté l'étude des représentations planes *par le biais des trois vues coordonnées, chacune simple, mais avec la difficulté si instructive* (si utile à l'exercice de l'intuition spatiale) *de leur coordination ;*
3. Nous avons ensuite abordé *les premiers éléments des projections parallèles et centrales par le biais des ombres*. Cet apprentissage mobilise diverses propriétés de la géométrie d'incidence et de la proportionnalité. Nous avons opté pour un apprentissage concomitant des deux types de projections et des

modes de représentation qui y sont associés. Cela permet de mettre en évidence les analogies et les différences qui existent entre ces deux modes de représentation. Leur confrontation contribue à se familiariser avec leurs propriétés respectives ;

4. Nous avons poussé nos exemples jusqu'à *la réalisation de perspectives cavalières et centrales de quadrillages et d'objets de l'espace*. Nous n'avons pas eu le loisir de compléter notre étude par une approche technique complète des deux types de projection.

Dans l'introduction, nous avons annoncé l'exposé de quelques activités de représentations planes d'objets de l'espace. Or, nous avons traité à plusieurs reprises de représentations d'objets plans comme des échelles et des quadrillages. Notons à ce sujet que, pour dessiner un objet de l'espace, on a souvent besoin d'y discerner des parties planes. En outre, des objets plans situés dans l'espace sont des objets de l'espace et, à ce titre, relèvent de la géométrie de l'espace.

On dira peut-être que la référence constante à la verticale et à l'horizontale, qui relèvent de la physique, sortent du cadre de la géométrie. Mais celle-ci part du monde réel avant de devenir abstraite et formelle. Et, dans ce contexte du monde réel, on travaille la pensée géométrique.

Les représentations planes constituent *un fil conducteur au sens où*, obéissant à une progression claire, elles sont une source de questions et d'intuitions, et un champ d'application de la théorie à toutes les étapes de l'éducation. Elles sont un contexte de référence dans lequel, à chaque étape, on peut savoir d'où on vient, où on est et vers où on va**.** On peut même y discerner en filigrane une progression dans la suite des géométries emboîtées du Programme d'Erlangen, dans la mesure où les projections orthogonales (telles que nous les avons présentées, avec des vues en vraie grandeur), parallèles et centrales sont parentes respectivement des géométries métrique, affine et projective.

Soulignons que nos exemples d'activités n'épuisent pas les points d'appui possibles pour apprendre les représentations planes. Nous n'avons fait allusion ni à l'histoire de la perspective en peinture, ni à la "vitre de Dürer", ni à la photographie, ... Il n'était pas nécessaire d'évoquer toutes ces possibilités pour montrer leur caractère fécond.

Bibliographie

BKOUCHE R. (1982) De l'enseignement de la géométrie, in *Actes du colloque sur l'enseignement de la géométrie*, 33-44, Mons.

BKOUCHE R. (1988) Appendice historique, in LEHMANN D., BKOUCHE R., *Initiation à la géométrie,* PUF, Paris.

CREM (1995) *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques,* Ministère de l'Education, de la Recherche et de la Formation de la Communauté française de Belgique, Nivelles.

CUISINIER G., LEGRAND D. & VANHAMME J. (1995) *Géométrie de l'espace par le biais de l'ombre à la lampe,* Academia Erasme, Namur.

GILBERT TH. (1987) *La perspective en questions*, Gem-Ciaco éd.

GRAND'HENRY-KRYSINSKA M. (rééd. 1998) *Géométrie dans l'espace et géométrie de l'espace,* Academia Bruylant, Louvain-La-Neuve.

LISMONT L. & ROUCHE N., coordinateurs, (2001) *Construire et représenter, un aspect de la géométrie de la maternelle jusqu'à 18 ans*, CREM, Nivelles.

TOSSUT R. (1996) *La naissance de la démonstration projective*, Thèse de Doctorat, Université Charles de Gaulle, Lille III.

WITTMANN E. (1998) *Géométrie élémentaire et réalité*, *Introduction à la pensée géométrique,* Didier Hatier, Bruxelles.

MACQUOI J., MÜLLER G.N., WITTMANN E. & COLLABORATEURS (2000) Jeu associé au manuel *Faire des maths en première année*, Erasme.

GROUPE D'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
2, chemin du Cyclotron,
1348 Louvain-La-neuve
hauchart@math.ucl.ac.be

MICHEL BALLIEU et MARIE-FRANCE GUISSARD

CULTURE MATHÉMATIQUE

Abstract. Mathematical Enculturation.
Resorting to cultural activities can prove to be invaluable to introduce and install abstract notions. This workshop emphasizes two means for restoring the pleasure of learning to demotivated pupils: history and artistic realizations.
The historical approach of mathematics allows to enter the concepts showing in which context and why they were born, how they have evolved. A round through the systems of numeration and the solution of equations gives a good example of these words. As to geometrical decorations whose examples are founded into all civilizations they can be used as aid for geometry learning so geometry shows its whole visual attraction. Repetitive patterns as friezes or tilings lend themselves to activities which combine intuition, creativity and analysis of mathematical structures.

Résumé. Le recours à des activités culturelles peut s'avérer une aide précieuse pour introduire et installer des notions abstraites. Cet atelier met l'accent sur deux registres susceptibles de rendre un certain plaisir d'apprendre aux élèves démotivés : l'histoire et les réalisations artistiques.
L'approche historique des mathématiques permet d'aborder les concepts en montrant dans quel contexte et pourquoi ils sont nés, comment ils ont évolué. Un parcours à travers les systèmes de numération et la résolution des équations illustre ce propos. Quant aux décors géométriques, dont on trouve des exemples dans toutes les civilisations, ils peuvent servir de support à l'apprentissage de la géométrie, qui montre ainsi tout son attrait visuel. Des motifs répétitifs tels que les frises ou les pavages se prêtent à des activités qui allient intuition, créativité et analyse des structures mathématiques.

Mots-clés. Histoire des mathématiques, réalisations artistiques, culture mathématique, scolarité dans son ensemble, formalisme algébrique, structures mathématiques.

---

1. Introduction

L'une des dernières recherches du CREM [4], dont nous rendons compte ici, s'intitule « Pour une culture mathématique accessible à tous ». Elle tente de porter une réflexion sur ce qui pourrait constituer une culture mathématique de base.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, supplément vol. 11, p. 73 – 89.

Compter, situer, mesurer, dessiner, jouer, expliquer sont des activités propres à tous les peuples. Elles permettent de développer, dès le plus jeune âge, des compétences mathématiques. Celles-ci devraient se compléter progressivement et s'enrichir tout au long de la scolarité. Or on constate que la culture mathématique échappe, de nos jours, à de nombreux adultes, même très cultivés dans d'autres domaines et/ou ayant un niveau d'études supérieures ou universitaires.

Les mathématiques ont pour vocation de résoudre des problèmes. Elles nécessitent la mise en œuvre de processus d'abstraction et de raisonnements analytiques qui dicteront les opérations à effectuer ; c'est en général l'interprétation des résultats qui fournit alors la solution.

Très souvent, dans l'enseignement, l'accent est mis sur les processus opératoires, alors que ceux-ci constituent la phase la moins « humaine » de la résolution des problèmes. Dans notre société moderne, c'est d'ailleurs la partie dévolue aux machines. Presque toujours, on impose aux élèves l'apprentissage d'algorithmes de calcul, sans dire à quelles occasions ces méthodes ont été mises au point, sans justifier leur pertinence ni exhiber des classes de problèmes qu'elles permettent de résoudre. De plus, sous prétexte d'exercer les élèves à utiliser ces algorithmes, on leur soumet des listes de calculs à effectuer hors de tout contexte. Ces pratiques conduisent inévitablement à faire percevoir les mathématiques comme un ensemble de procédures vides de sens, fournissant des réponses vides de sens à des questions vides de sens.

Dans cette recherche, comme dans les précédents travaux du CREM, on a tenté de donner du sens aux activités mathématiques proposées. Pour rendre un certain plaisir d'apprendre aux élèves démotivés, nous avons travaillé sur quatre registres :

– les mathématiques au quotidien ;
– les récréations mathématiques ;
– l'histoire des mathématiques ;
– les réalisations artistiques.

Suivant la tradition du CREM, la scolarité est envisagée dans son ensemble, de la maternelle jusqu'à 18 ans. Il s'agit d'un travail de synthèse, qui dégage des fils conducteurs soulignant les étapes successives de l'apprentissage des mathématiques, tant sur le plan de la numération (calcul, formalisation) que sur celui de la manipulation de figures, d'objets géométriques (symétries, structures, ...).

Dans le cadre de cet atelier, nous allons illustrer deux des moyens préalablement cités, l'histoire et les réalisations artistiques. L'enseignement traditionnel – en tout cas, ici en Belgique – exhibe rarement ces aspects culturels des mathématiques.

2. Le recours aux sources historiques

2.1. L'apport de l'histoire

Nombreux sont ceux qui pensent que le rôle de l'histoire dans le cours de mathématiques est multiple. Citons par exemple, le courant représenté par le regretté John FAUVEL [11].

En premier lieu, une approche historique contribue à faire connaître les apports des différentes cultures à l'évolution des mathématiques. L'histoire des sciences est trop souvent négligée dans le cours d'histoire. Or, l'influence des connaissances scientifiques égyptienne, mésopotamienne, indienne, arabe, ... et du rationalisme mathématique grec a été prépondérante dans la construction de notre mode de pensée occidental.

Par ailleurs, les obstacles épistémologiques que doit franchir l'élève sont souvent ceux-là mêmes qui ont posé problème dans le passé. Contrairement à une idée que défendait la « mathématique moderne », on a compris aujourd'hui qu'on n'enseigne pas directement des notions abstraites dans leur forme définitive, telles qu'elles sont publiées[1]. Elles doivent mûrir, muter, et cela, l'histoire encore le montre fort bien.

Lorsque l'élève assiste à la naissance d'un concept au travers des circonstances dans lesquelles celui-ci apparaît et se développe, il perçoit mieux le côté profondément humain des mathématiques ainsi que leur utilité. L'histoire permet ainsi d'observer les mécanismes qui mettent en marche la pensée mathématique.

Ajoutons encore qu'il y a un certain réconfort pour l'élève à resituer ses propres difficultés dans une continuité historique : d'autres avant lui ont dû faire face à des problèmes, affronter des défis ; ils ont obtenu des résultats...

Dans notre recherche, l'apport de l'histoire est illustré à travers des activités sur la numération (des débuts jusqu'aux nombres irrationnels), sur la résolution des équations et sur l'introduction à la trigonométrie.

1. *Numération.* – Des activités de décodage de nombres écrits dans différents systèmes de numération sont proposées à des jeunes de dix à douze ans. Par oppositions et comparaisons (nombre de symboles utilisés, base, présence du zéro, relation entre longueur de l'écriture et valeur du nombre, importance de la position des symboles, impossibilité d'écrire de très grands nombres), les élèves découvrent les différentes propriétés de notre système décimal

[1] Comme le dit H. FREUDENTHAL [12], « Aucune idée mathématique n'a jamais été publiée telle qu'elle fut découverte ».

positionnel, afin de mieux le comprendre et l'utiliser.

Le théorème de PYTHAGORE donne une première approche de l'irrationnalité, pour des élèves d'environ 14 ans. Une seconde approche est présentée aux élèves du degré supérieur de l'enseignement général, par la découverte et l'expérimentation de l'algorithme de THÉON, puis par le calcul d'une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre positif par l'algorithme de HÉRON.

2. *Trigonométrie.* – Elle est introduite par la construction d'une table de cordes, comme l'a fait PTOLÉMÉE dans son *Almageste*. Cela permet, non seulement de bien installer la notion de sinus, mais donne également l'occasion d'exploiter les outils géométriques mis en place durant la troisième année du secondaire, au cours d'une activité de justification et de démonstration.
3. *Symbolisme algébrique.* – Il s'agit de faire découvrir la formule de résolution de l'équation du deuxième degré à partir d'un extrait du texte d'AL-ḪWĀRIZMĪ sur le *calcul par le ǧabr et la muqābala*, généralement considéré comme le texte fondateur de l'algèbre. L'idée est de montrer le sens des développements algébriques en les confrontant à une représentation géométrique.

C'est ce dernier point qui a été développé dans l'atelier.

2.2. Découverte de la formule de résolution de l'équation du deuxième degré à travers un extrait du texte d'AL-ḪWĀRIZMĪ

Ne disposant pas des nombres négatifs ni du nombre zéro, AL-ḪWĀRIZMĪ a classé les équations de degré au plus deux en six types, dont il donne et démontre la formule de résolution. L'extrait proposé explique cette méthode pour l'équation du type $ax^2 + bx = c$.

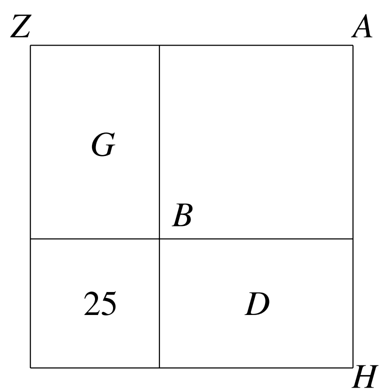
Notre traduction est très fidèle, nous avons seulement jugé utile d'ajouter entre <> les mots <carrée> et <ce cinq> qui ne figurent pas dans le texte arabe. Pour éviter toute confusion entre le « carré x^2 » et le « carré figure géométrique », nous avons délibérément choisi de garder le terme arabe *māl*, qui désigne x^2, au lieu de le traduire.

L'activité en classe commence par une lecture commentée de ce texte, dans lequel AL-ḪWĀRIZMĪ donne de l'algorithme qu'il a décrit précédemment, deux démonstrations qui s'appuient sur deux figures différentes. La première démonstration proposée, qui n'est pas reproduite ici, intervient dans l'espace noté [...] entre les deux paragraphes. C'est la deuxième approche, basée sur la figure la plus simple, que nous proposons en lecture aux élèves.

Démonstration du cas « un māl et dix de ses racines égalent trente-neuf dirhams. »

La figure pour expliquer ceci est une surface <carrée> dont les côtés sont inconnus. Elle représente le *māl* qu'on veut connaître ou dont on veut connaître la racine. C'est la surface $\overline{AB}$, dont chaque côté peut être considéré comme une de ses racines ; et si on multiplie un de ces côtés par un nombre quelconque, alors le résultat obtenu peut être considéré comme le nombre des racines qui sont ajoutées à la surface. [...]

Mais il y a aussi une autre figure qui mène à ce résultat, et c'est la surface <carrée> $\overline{AB}$ qui représente le *māl*. Nous voulons lui ajouter l'équivalent de dix de ses racines. Nous avons pris la moitié de ces dix, c'est-à-dire cinq. Nous avons transformé ceci en deux surfaces $\overline{G}$ et $\overline{D}$ sur les flancs de la première surface. La longueur de chacune de ces deux surfaces devient cinq, qui est la moitié des dix racines, et la largeur est comme le côté de la surface $\overline{AB}$. Il nous reste le carré dans l'angle[2] de la surface $\overline{AB}$, et c'est cinq par cinq, et <ce cinq> est la moitié des racines que nous avons ajoutées sur les flancs de la première surface.



Nous savons donc que la première surface est le *māl*, et que les deux surfaces qui sont sur ses deux flancs sont les dix racines. Tout cela vaut trente-neuf, et il reste, pour compléter la surface la plus grande, le carré cinq par cinq, soit vingt-cinq.

[2] Littéralement, « le carré des angles de la surface $\overline{AB}$ ».

> Nous l'avons ajouté à trente-neuf pour que la surface la plus grande se complète, c'est la surface $\overline{ZH}$, et tout cela vaut soixante-quatre. Nous prenons sa racine, huit, et c'est l'un des côtés de la surface la plus grande. Si on lui retranche l'égal de ce que nous lui avons ajouté, à savoir cinq, il reste trois. C'est le côté de la surface $\overline{AB}$, qui est le *māl*, et c'est sa racine. Et le *māl* est égal à neuf.

La découverte de la formule de résolution de l'équation du deuxième degré se fera en trois étapes, à partir de ce texte accompagné du dessin.

2.2.1. Analyse du texte

On demande aux élèves de transposer les explications fournies par le texte en utilisant le symbolisme mathématique actuel et de compléter la figure en y reportant les mesures des côtés et des aires des carrés et des rectangles.

La lecture du texte appelle quelques commentaires.

Le terme *māl* signifie le bien, l'argent, la richesse, le capital, la fortune, le troupeau… Dans l'algèbre rhétorique, ce mot désigne la quantité qui a une racine. En fait on recherche X le *māl* et $\sqrt{X}$ le *ǧiḏr* qui est sa racine, et non une inconnue x et son carré x^2. Quant à l'expression *trente-neuf dirhams*, elle désigne une quantité positive connue, qui n'est ni un nombre de carrés, ni un nombre de racines. C'est ce que nous appelons aujourd'hui le terme indépendant.

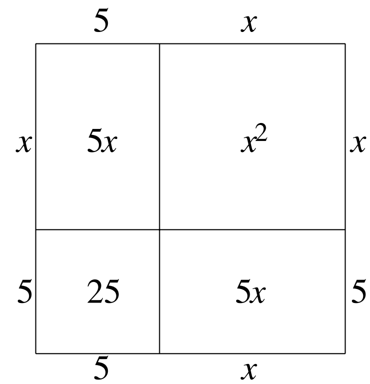
L'équation à résoudre est donc

$$X + 10\sqrt{X} = 39 \quad \text{ou} \quad x^2 + 10x = 39.$$

La première forme est plus proche de l'esprit du texte arabe, mais nous lui substituons la seconde, mieux adaptée au travail à effectuer avec les élèves.

C'est le recours au dessin qui montre clairement pourquoi l'auteur recommande de diviser en deux le nombre des racines (10 dans l'exemple choisi), le terme $10x$ de l'équation étant obtenu par l'adjonction au carré de deux rectangles de $5x$ chacun. al-Ḫwārizmī insiste sur le fait que la longueur cinq de chacun des deux rectangles est la moitié du nombre des racines. C'est cette précision qui va permettre de passer du cas particulier, où on ajoute dix racines, au cas général, où on ajoute un nombre quelconque de racines.

$$
\begin{aligned}
x^2 + 10x &= 39 \\
x^2 + 10\,x + 25 &= 39 + 25 \\
x^2 + 10\,x + 25 &= 64 \\
(x+5)^2 &= 64 \\
(x+5) &= 8 \\
x &= 8 - 5 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$



Après avoir complété le dessin, comme on le voit dans la figure ci-dessus, les élèves sont en mesure de transposer, sous forme d'équations, les opérations décrites dans le dernier paragraphe.

Pour les mathématiciens de l'époque, qui ne concevaient pas les quantités négatives en tant que nombres, la seule valeur dont le carré vaut 64 est 8. Dans le contexte actuel, nous considérons aussi la valeur -8, ce qui nous permet de compléter la résolution d'AL-H̱WĀRIZMĪ.

Dans le domaine des nombres positifs et négatifs, l'équation $(x + 5)^2 = 64$ est équivalente à

$$x + 5 = 8 \quad \text{ou} \quad x + 5 = -8,$$

ce qui donne les solutions

$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -13.$$

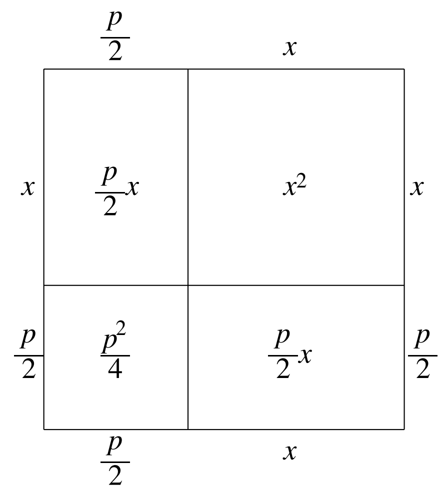
2.2.2. De l'exemple à l'algorithme

L'étape suivante consiste à se dégager de l'exemple numérique, à franchir un pas vers l'abstraction.

On demande aux élèves de recommencer le même raisonnement pour l'équation $x^2 + px = q$ (où p et q sont ce que nous appelons aujourd'hui des rationnels positifs).

Il s'agit donc de remplacer 10 par p, 5 par $\frac{p}{2}$ et 39 par q. Les calculs littéraux qui s'ensuivent mènent à une première formule.

$$\begin{aligned}
x^2 + px &= q \\
x^2 + p\,x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\
\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\
\left(x + \frac{p}{2}\right) &= \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \\
x &= -\frac{p}{2} + \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$



Complétons à nouveau la résolution en ajoutant la racine carrée négative de $q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$.

L'équation $(x + \frac{p}{2})^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$ est équivalente à

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \quad \text{ou} \quad x + \frac{p}{2} = -\sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2},$$

ce qui donne les solutions

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{p}{2} - \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}.$$

En fait, nous avons obtenu une formule générale de résolution de l'équation de deuxième degré $x^2 + px = q$. En effet, alors que la démonstration géométrique ne s'applique qu'aux seuls cas où p et q sont strictement positifs, le développement algébrique, qui consiste à compléter le membre de gauche pour obtenir un carré parfait, peut être effectué avec n'importe quelle valeur de p et q.

2.2.3. La formule actuelle

Dans la troisième étape, il reste à dégager la formule qui donne la solution de l'équation sous la forme générale utilisée actuellement, à savoir $ax^2 + bx + c = 0$.

Les élèves doivent modifier les résultats obtenus pour exprimer les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ en fonction des coefficients a, b et c, où a est non nul. Nous avons supposé a non nul de manière à ce que l'équation ne soit pas réduite à une équation de premier degré. Dans ce cas, nous pouvons diviser tous les termes par a, ce qui donne

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a},$$

forme facilement comparable à

$$x^2 + px = q.$$

Les élèves verront qu'il suffit de remplacer p par $\frac{b}{a}$ et q par $\frac{-c}{a}$. On leur demande d'effectuer cette transformation de formule.

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} \qquad \text{devient} \qquad x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}.$$

En réduisant au même dénominateur, ils obtiennent

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad \text{et finalement} \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Cette unique formule nous permet de résoudre toute équation du type $ax^2 + bx + c = 0$, avec des coefficients a, b et c positifs ou négatifs, b et c éventuellement nuls.

3. Les réalisations artistiques

3.1. L'apport de l'art

Nombreux sont les liens entre mathématiques et art, en peinture, architecture, musique, ... En particulier, les réalisations artistiques de nature géométrique, dont on retrouve des exemples dans toutes les civilisations et à toutes les époques, peuvent servir de support à l'apprentissage de la géométrie. On peut exploiter les peintures murales dans l'art africain, les zelliges de l'art hispano-musulman, mais aussi les pavages qui décorent les cuisines et les salles de bain, les frises qui ornent la vaisselle et le linge de maison...

Par des activités alliant le côté créatif à l'analyse des structures mathématiques, il est possible de stimuler le besoin de comprendre par le désir de créer. Un tel apprentissage développe l'intuition et aiguise le sens de l'observation, tout en

procurant à la fois une satisfaction intellectuelle et un plaisir esthétique. La géométrie, qui a souvent été cantonnée à l'enseignement du raisonnement logique et de la méthode hypothético-déductive, montre ainsi tout son attrait visuel et l'un de ses rôles fondamentaux, l'organisation et la structuration de l'espace.
Pour certains élèves de l'enseignement technique ou professionnel, la motivation à la pratique d'activités géométriques peut être directement liée au travail en atelier. L'apprentissage peut encore être enrichi par l'utilisation de logiciels de dessin. C'est l'occasion d'un premier contact avec le DAO[3], un des nombreux domaines où mathématiques, techniques et arts se rencontrent.
Les décors géométriques, tels que peintures murales, pavages, frises, ... constituent le matériel de base des activités géométriques proposées dans la recherche, de l'école primaire à la fin du secondaire. Les rythmes visuels portés par des motifs répétés ou *patterns* permettent de dégager des structures communes à des objets apparemment très différents. Élaborer des techniques de production de frises et de pavages sont des activités que l'on peut déployer à tous âges et qui développent des compétences multiples.

1. *Symétries à l'école primaire.* – À ce niveau, des manipulations (papier calque, miroirs) visent à mettre en place la notion de symétrie. Par le biais de réalisations de puzzles, de pliages et découpages, de peintures, les enfants analysent les symétries dans l'art africain et produisent des créations personnelles.

2. *Pavages et angles de polygones au début du secondaire.* – Une analyse en profondeur des pavages réguliers et semi-réguliers conduit à la construction des polyèdres platoniciens, en passant par des considérations sur les mesures des angles intérieurs des polygones réguliers.

[3]Dessin assisté par ordinateur.

3. *Frises à différents niveaux de la scolarité.* – Les frises sont une source inépuisable de situations d'apprentissage. Des activités intuitives débouchent sur la découverte des isométries qui laissent une frise invariante. L'immense diversité de ces bandes décorées, que l'on rencontre un peu partout, incite à les répertorier, les classer ; mais cela nécessite évidemment la mise au point de critères de classement. La structure de groupe qui émerge tout naturellement dans ce cadre géométrique, à partir des groupes de symétries, peut être dégagée dans les classes plus avancées de l'enseignement général.

   C'est ce thème qui est développé dans l'atelier.

3.2. Les frises : de la symétrie aux structures

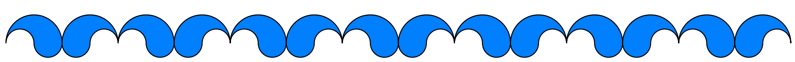
Le propos est de montrer que les frises permettent de travailler la géométrie des transformations à plusieurs niveaux d'abstraction, relevant de différents aspects de la pensée géométrique.

3.2.1. Intuition (observation, analyse, compréhension)

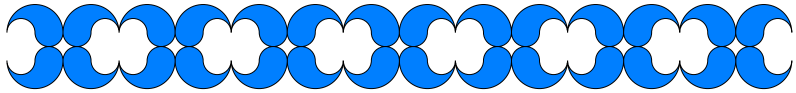
Une première phase d'observation révèle sans trop de peine qu'une frise est un décor sur bande et que ce décor est obtenu par reproduction d'un « motif de base » qui se répète tout au long de la bande.

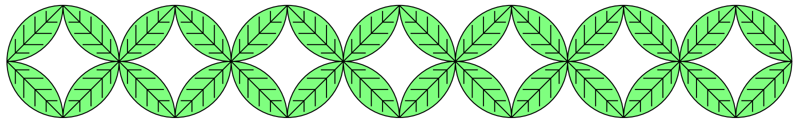
Une activité avec des frises de papier et leurs photocopies sur transparents permet

- de travailler la notion d'infini dans un contexte géométrique ;
- d'identifier les mouvements qui permettent de fabriquer de nouvelles frises à partir du matériel et d'y associer l'isométrie correspondante ;



– de reconnaître des ressemblances de structure entre des frises différentes.





3.2.2. Classement (raisonnement, conjecture, justification, démons–tration)

Les frises sont répertoriées en fonction des isométries qui les conservent globalement. On adopte une définition plus précise :
une frise est une bande décorée invariante par les translations d'une famille infinie de translations, toutes multiples d'une translation minimale.
Les élèves doivent prendre conscience que l'invariance par translation implique le caractère infini de la frise. Ils identifient les mouvements susceptibles d'appliquer une frise sur elle-même :

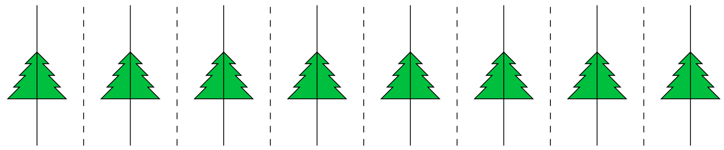
1. des translations dans la direction de la bande,
2. une symétrie d'axe médian,
3. des symétries d'axes perpendiculaires à la direction de la bande,
4. des symétries centrales dont le centre est sur l'axe médian.

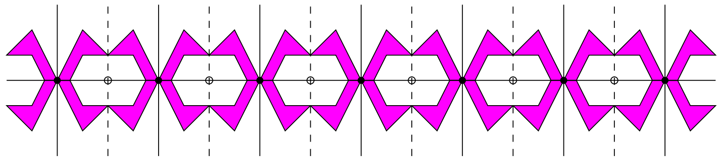
En ajoutant à cette liste les composées des isométries ainsi répertoriées, les élèves rencontrent la symétrie glissée.

Pour réaliser le classement, on leur demande de trouver parmi une bibliothèque de frises celles qui sont invariantes pour

– uniquement des translations ;
– des translations et un seul type de symétries ;
– des translations et plusieurs types de symétries.

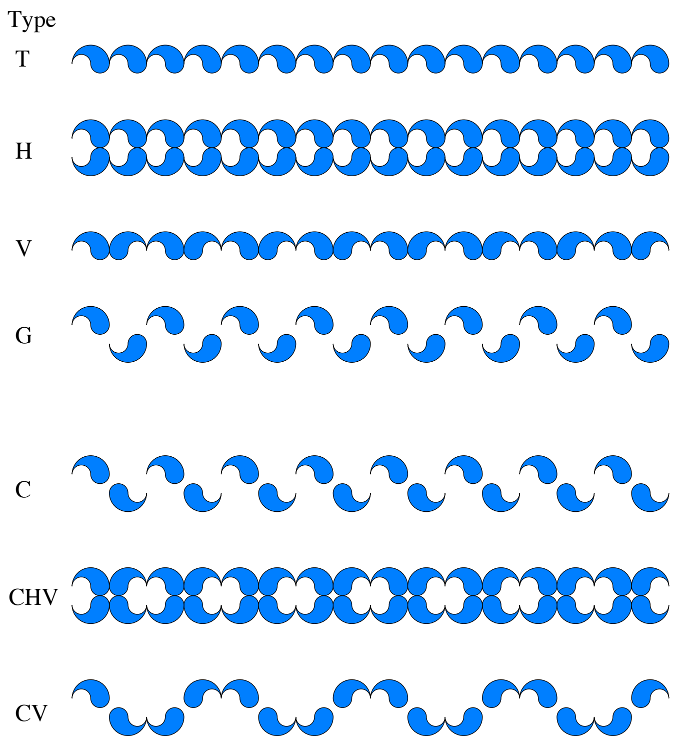
Tout en effectuant ce travail de classement, on démontre quelques propriétés de la composition des isométries. Par exemple, la première figure se prête à la découverte de la composée de deux symétries d'axes parallèles, la seconde à la composée de deux symétries d'axes perpendiculaires. On y découvre aussi les composées des symétries avec des translations ou avec des demi-tours.





On en arrive ainsi à classer les frises en 7 types et à se convaincre qu'il n'y en a pas d'autres.

Sept types de frises

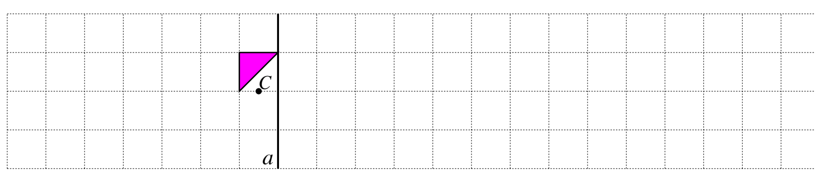


Les frises de type **T** sont invariantes par translations seulement ; celles de type **H**, **V**, **G**, **C** sont respectivement invariantes par symétrie d'axe horizontal, par symétries d'axes verticaux, par symétries glissées, par symétries centrales (outre les translations). Les frises des types **CHV** et **CV** sont invariantes par plusieurs symétries différentes. Les élèves complètent un tableau récapitulatif en indiquant les isométries qui conservent les frises de chaque type.

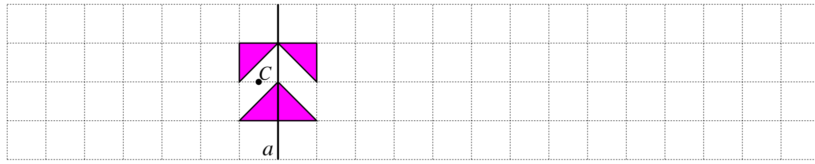
Type	Translations	Symétrie d'axe horizontal	Symétries d'axe vertical	Symétries centrales	Symétries glissées
T	×				
H	×	×			×
V	×		×		
G	×				×
C	×			×	
CHV	×	×	×	×	×
CV	×		×	×	×

3.2.3. Structuration

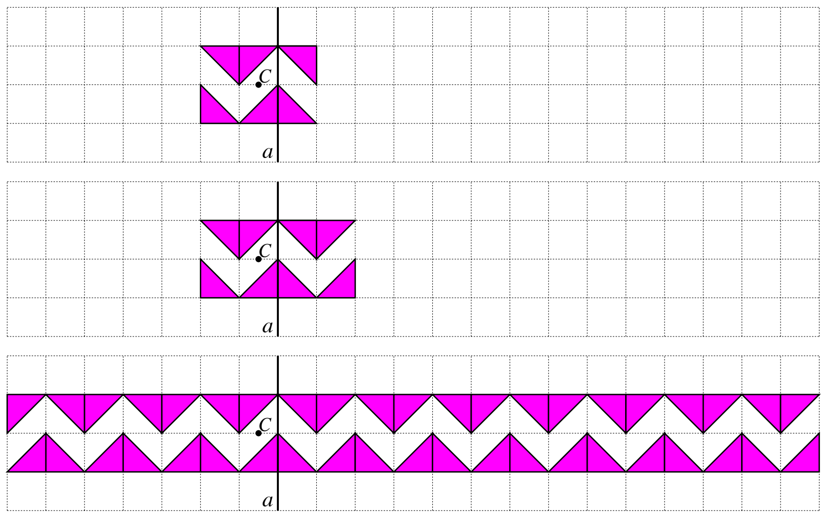
La structure de groupe est introduite à partir des ensembles d'isométries qui conservent chaque type de frise. Ces groupes sont infinis mais peuvent être engendrés par composition d'une, deux ou trois isométries (génératrices) bien choisies. À titre d'exemple, montrons comment on peut engendrer le groupe $\mathcal{CV}$ des frises du type **CV**.
Les élèves sont invités à compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie de centre C et par la symétrie s_a d'axe a.



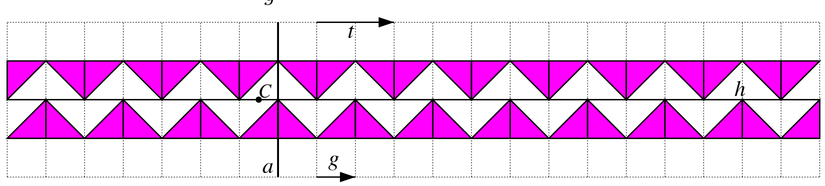
On complète tout d'abord la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie centrale s_C, puis par la symétrie s_a d'axe a,



et on recommence indéfiniment en alternant les symétries s_C et s_a, jusqu'à l'obtention de la frise des figures suivantes.



Ajoutons sur la figure l'axe médian h, la translation de glissement g et la translation t. La symétrie glissée $s_g = s_h \circ g = g \circ s_h$ applique la frise sur elle-même, ainsi que la translation $t = s_g^2$.



On a $s_g = s_a \circ s_C$, ce qui permet de conclure que $\mathcal{CV} = < s_C, s_a >$:
- par la composition de s_a et s_C, on obtient la symétrie glissée s_g,
- les symétries glissées sont obtenues comme puissance à exposant impair de s_g,
- les translations kt sont obtenues comme puissance à exposant pair de s_g,
- les symétries d'axe vertical sont obtenues par composition de s_a avec les translations,

– les symétries centrales sont obtenues par composition de s_C avec les translations.

C'est l'occasion, pour les élèves de ces classes, de rencontrer une idée fondamentale de la géométrie moderne : on n'étudie plus les figures dans l'espace, mais les figures considérées comme des espaces, c'est-à-dire des ensembles organisés, structurés [16].

Bibliographie

[1] AL-ḪWĀRIZMĪ, sans date. *The Algebra of Mohammed ben Musa.* G. Olms, Hildesheim. Ed. and translated by F. ROSEN. Rééd. 1986.

[2] M. BALLIEU, mars-avril 2001. Quelques « étapes » de l'histoire des mathématiques dans les pays arabes. *Mathématiques et Pédagogie*, 131 : 5–24.

[3] A. J. BISHOP, 1988. *Mathematical Enculturation.* Kluwer, Dordrecht.

[4] CREM, 2004. *Pour une culture mathématique accessible à tous. Élaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes.* Ballieu, M. et Guissard, M.-F., coordinateurs, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

[5] C. CULUS et C. PERSOENS, mars 1995. Les transformations dans le secondaire inférieur. Document pédagogique, UREM, Université Libre de Bruxelles, Campus Plaine CP216, Bld Triomphe, B1050 Bruxelles.

[6] G. DE VECCHI, 1992. *Aider les élèves à apprendre.* Hachette, Paris.

[7] G. DE VECCHI et N. CARMONA-MAGNALDI, 1996. *Faire construire des savoirs.* Hachette, Paris.

[8] A. DELEDICQ, mai 1993. Le monde des symétries. In *Collection Maths pour tous.* ACL-Éditions, Paris, 50 rue des Écoles, 75005 Paris.

[9] A. DJEBBAR, 1988a. Quelques aspects de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe d'orient. In *Actes de l'Université d'été,* IREM de Toulouse, pages 259–286.

[10] H. ELKHADEM, 1997. *La transmission des connaissances scientifiques au Moyen-Âge entre l'Orient et l'Occident.* Les Cahiers du CeDoP, Histoire des sciences et de la civilisation arabes. Centre de documentation pédagogique de l'Université Libre de Bruxelles, avenue Jeanne 44, 1050 Bruxelles.

[11] J. FAUVEL et J. VAN MAANEN, éditeurs, 2000. *History in Mathematics Education, The ICMI Study.* Kluwer, Dordrecht.

[12] H. FREUDENTHAL, 1983. *Didactical phenomenology of mathematical structures.* D. Reidel, Dordrecht.

[13] GRUNBAUM et SHEPHARD, 1989. *Tilings and Patterns.* W. H. Freeman and Co., New York.

[14] J. HØYRUP, 1992. « Algèbre d'Al-ǧabr » et « algèbre d'arpentage » au neuvième siècle islamique et la question de l'influence babylonienne. In F. MAWET et PH. TALON, éditeurs, *D'Imhotep à Copernic, Actes du colloque international, Université Libre de Bruxelles, 3-4 novembre 1989*, pages 23–38. Peeters, Leuven.

[15] G. G. JOSEPH, 1994. *The Crest of the Peacock (Non-European Roots of Mathematics).* Penguin Books, London.

[16] F. KLEIN, 1872. *Le programme d'Erlangen (Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes).* Jacques Gabay, Paris. Rééd. 1991.

[17] N. MAHAMMED, 1995. *Sur la résolution des équations algébriques.* IREM de Lille.

[18] G. E. MARTIN, 1982. *Transformation Geometry, An Introduction to Symmetry.* Springer, New York.

[19] J. SESIANO, 1999. *Une introduction à l'histoire de l'algèbre.* Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne.

[20] E. C. WITTMANN et G. MÜLLER, 1990 et 1994. *Handbuch produktiver Rechenübungen,* 2 vol. Ernst Klett, Stuttgart.

Pour une culture mathématique accessible à tous. Élaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes est un ouvrage collectif dont les auteurs sont Michel BALLIEU, Jean-Michel DELIRE, Marie-France GUISSARD, Amélie JONKERS, Philippe MAIRESSE, Bénédicte MESTAG, Jules MIÉWIS, Laure MOURLON BEERNAERT, Jacques VANDEKERCKHOVE et Françoise VAN DIEREN.

Le texte de cette recherche est disponible sur Internet à l'adresse

`http://www.enseignement.be/prof/dossiers/recheduc/rech1.asp`

en introduisant le mot-clé « mathématiques ».

MICHEL BALLIEU
Professeur à l'Athénée Royal de Binche
`michel.ballieu@ulb.ac.be`

MARIE-FRANCE GUISSARD
Professeur à l'Athénée Royal de Waterloo

LISTE DES PARTICIPANTS

ALAPLANTIVE Bruno (Saint-Jean-du-Falga–France)

ARTIGUE Michèle, (Paris–France)

BAILLEUL Marc, (Cambes en Plaine–France)

BAIR Jacques, (Liège–Belgique)

BALLIEU Michel (Braine-L'Alleud–Belgique)

BERDONNEAU Catherine (Paris–France)

BLISS Leigh Ann (Atlanta GA–USA)

BÖTTCHER Franke (Frankfurt–Allemagne)

BOUCKAERT Charlotte (Kraainem–Belgique)

BRIDOUX Stéphanie (Quaregnon–Belgique)

BUEKENHOUT Francis (Court-Saint-Etienne–Belgique)

BURGERMEISTER Pierre-François (GY–Suisse)

CABRERA Juliana (Montevideo–Uruguay)

CORAY Michel (Genève–Suisse)

CUISINIER Ginette (Thiméon–Belgique)

DALLA PIAZZA Aldo (Courtelary–Suisse)

DE BLOCK - DOCQ Christine (Bruxelles–Belgique)

DEGRYSE Gérard (Autingues–France)

DESMARET Alain (Belgique)

DE TERWANGNE Martine (Wavre–Belgique)

DE VLEESCHOUWER Martine (Namur–Belgique)

DEPREZ Johan (Nieuwrode–Belgique)

D'HAUTCOURT Dimitri (Mons–Belgique)

DOSSIN John (Nivelles–Belgique)

EENENS Philippe (Guanajuato–Mexique)

ERDOGAN Abdulkadir (Paris–France)

FRÉDÉRICKX Monique (Basy-Thy–Belgique)

FREMAL Mady (Ans–Belgique)

GALLOY-BIHAIN Françoise (Jambes–Belgique)

GILBERT Thérèse (Court-Saint-Etienne–Belgique)

GOSSEZ Renée (Hoeilaart–Belgique)

GRUGNETTI Lucia (Maracalagonis–Italie)

GUISSARD Marie-France (Braine-L'Alleud–Belgique)

HASSAN Anthony (Rotimi Rivers State–Nigéria)

HAUCHART Christiane (Court-Saint-Etienne–Belgique)

HENRY Valérie (Liège–Belgique)

HERMAN Michel (Soumagne–Belgique)

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, supplément vol. 11, p. 91– 92.

HITT Fernando (Montréal–Canada)

HOSTETTLER Thierry (Schwadernau–Suisse)

HOUDEMENT Catherine (Mt St Aignan–France)

JADIN Benoît (Warzée–Belgique)

JANSSENS Dirk (Heverlee–Belgique)

JAQUET François (Les Fins–France)

KAENDERS Rainer AG (Nijmegen–Pays-Bas)

KAHANE Jean-Pierre (Paris–France)

KEYMOLEN Anne-Marie (Yvoir–Belgique)

KÖHLER Hartmut (Urbach–Allemagne)

KUZNIAK Alain (Paris–France)

LAMBERT Stéphane (Limal–Belgique)

LEGRAND Danièle (Bruxelles–Belgique)

LORIMIER Corinne (Casteau–Belgique)

MACHTELINGS Martine (Belgique)

MAIRESSE Philippe (Nivelles–Belgique)

MARCHAND Patricia (Rimouski–Canada)

MORANGE Georges (Varennes-Sur-Allier–France)

NAVEZ Jacques (Stavelot–Belgique)

NOËL Guy (Resteigne–Belgique)

PILLONEL-WYRSCH Roland-Pierre (Matran–Suisse)

ROELENS Michel (Leuven–Belgique)

ROUCHE Nicolas (Louvain-La-Neuve–Belgique)

SAUTELET Murielle (Paris–France)

SCHOENFELD Alan (Berkeley–USA)

SCREVE René (Chatelet–Belgique)

SIERPINSKA Anna (Montréal–Canada)

SKILBECQ Philippe (Nivelles–Belgique)

SOTO Isabel (Penalolen Santiago–Chili)

SOTO ANDRADE Jorge (Santiago–Chili)

TALL David (Coventry–Grande-Bretagne)

TANCRÉ Manoëlle (ANS–Belgique)

TOSSUT Rosane (Nil-St-Vincent–Belgique)

VAN DOOREN Wim (Leuven–Belgique)

VANDENBRUAENE André (Leernes–Belgique)

VERGNAUD Vaniélys (Mortefontaine en Thelle–France)

VOLKERT Klaus (Bexbach–Allemagne)

WANTIEZ Patricia (Manage–Belgique)

WARNIER Anne (Jodoigne–Belgique)

WATTIAUX David (Mons–Belgique)

WITTMANN Erich (Dortmund–Allemagne)

YILDIRIM Aysegul (Istanbul–Turquie)