Préface - Preface

Montpellier, ville carrefour de l'Europe du Sud, témoin de plus de 7 siècles d'histoire universitaire, ville d'échange et de communication a perpétué sa tradition d'accueil en organisant à l'IREM, au sein de son université Montpellier II, et ce, du 9 au 13 juillet 1993, la première Université d'Été Européenne.

Quelques 250 participants, venus pour la plupart de toute l'Europe, ont ainsi pu débattre du thème "Histoire et Épistémologie dans l'Éducation Mathématique".

L'accueil et le succès d'une telle manifestation, qui a été organisée dans le cadre des universités d'été du Ministère de l'Education Nationale, sous le patronage de l'UNESCO, n'ont été possibles que grâce à la mobilisation de tous et au soutien financier des instances européennes, nationales, régionales et locales suivantes :

- la Commission des Communautés Européennes;
- le Conseil de l'Europe;
- le Ministère des Affaires étrangères;
- le Ministère de la Recherche et des Techniques;
- la Municipalité de Montpellier;
- le District de Montpellier;
- la Région Languedoc-Rousillon;
- l'Assemblée des Directeurs d'IREM (ADIREM);
- l'Association pour le développement des recherches en Histoire et Epistémologie des Mathématiques (ADERHEM);
- le Conseil scientifique de l'Université Montpellier II;
- le Département de mathématiques de l'Université Montpellier II;
- la Mission Académique de Formation des Personnels de l'Education Nationale de Montpellier (MAFPEN);
- l'Institut de Recherche sur l'enseignement des mathématiques de Montpellier (IREM).

Qu'elles en soient ici chaleureusement remerciées.

REGION Languedoc Roussillon

UNIVERSITÉ MONTPELLIER II
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

MONTPELLIER DISTRICT

Nous tenons plus spécialement à exprimer notre gratitude à Mesdames Sylvette MAURY, Directrice de l'IREM de Montpellier en 1993 et Dominique GUIN, la Directrice actuelle, qui ont mis à la disposition de cette manifestation et de ses prolongements - dont les Actes, les infrastructures et personnels de l'IREM :

- Mme Sylvie HIGOUNET, Mme Catherine GAUTHIER, secrétaires à l'IREM dont l'efficacité et la gentillesse ont été appréciées de tous;
- Mme Josiane DICK, secrétaire à l'IREM, pour la confection de ces actes
- M. André VACHE pour la résolution des problèmes techniques et les travaux de reprographie.

Juin 1995.

Françoise LALANDE : Commission Inter-IREM, IREM de Montpellier.
François JABOEUF : Commission Inter-IREM, IREM de Montpellier.
Yvon. NOUAZÉ : USTL de Montpellier - IREM de Montpellier.

Présentation - Presentation

L'Université d'été de Montpellier succèdait aux quatre précédentes Universités d'été sur l'histoire des mathématiques organisées par la Commission inter-IREM "Epistémologie et Histoire des Mathématiques" : Le Mans (1984), Toulouse (1986), La Rochelle (1988), Lille (1990). La tenue de cette cinquième Université d'été avait pour but d'entretenir une dynamique, de renforcer les acquis, de poursuivre la réflexion, de diffuser les résultats des innovations et de former de nouveaux formateurs. Mais elle a été, aussi, la première Université d'été, sur ce thème, organisée à l'échelon européen et international.

Lors des précédentes Universités d'été, le nombre de participants étrangers n'avait cessé d'augmenter (une trentaine sur 150 participants lors de la précédente Université d'été). En effet, l'intérêt pour les relations entre enseignement, épistémologie et histoire des mathématiques dépasse les frontières. Il existe, depuis quelques années, une association internationale, l'International Group on the relations between History and Pedagogy of Mathematics (HPM) qui permet des échanges sous forme d'une "newsletter". Les membres européens affiliés à HPM ont souhaité que la Commission inter-IREM organise une Université d'été à l'échelon européen.

Les apports de la dimension internationale de cette Université d'été doivent être resitués dans l'intérêt général d'une rencontre européenne d'enseignants et dans l'intérêt particulier présenté par le thème de l'Université d'été. D'une part, cette rencontre a confirmé qu'une approche culturelle des mathématiques et une approche historique de leur enseignement constituent des moyens efficaces pour établir des échanges, à un niveau international, sur l'enseignement des mathématiques. D'autre part, les mathématiques semblent "par nature" universelles : les enseignants en déduisent parfois assez vite que la manière de les enseigner est unique. Une approche historique et culturelle, en introduisant le temps et l'espace, permet de questionner ces présupposés et de s'interroger sur ses propres pratiques. A l'occasion de cette Université d'été, beaucoup de participants ont pris conscience des disparités dans les conceptions de l'enseignement des mathématiques, et surtout, ont réalisé l'importance des facteurs culturels. De ce point de vue, la conférence à deux voix de Bruno Belhoste (France) et de Léo Rogers (Grande-Bretagne) sur l'enseignement théorique et l'enseignement pratique en Angleterre et en France, a été particulièrement éclairante. Elle a permis de comparer les deux cultures mathématiques dans ces deux pays et d'enraciner les enseignements des mathématiques de ces deux pays dans l'histoire du 19ème siècle. L'appréhension concrète des différents enseignements a été permise avec les ateliers pédagogiques, où les participants venus de différents pays ont travaillé à partir des expériences proposées par l'animateur de l'atelier.

Sur les 244 participants à l'Université d'été, il y avait 132 participants français (54%) et 112 participants (46%) venaient de 29 pays, de la CEE (34%) : Portugal, Belgique, Italie, Grande-Bretagne, Allemagne, Pays-Bas, Grèce, Danemark, Espagne et Irlande ; d'autres pays européens (3%) : Islande, Suisse, Norvège, Hongrie, Lettonie, Slovaquie et République Tchèque ; d'Israël ; d'Afrique (4%) : Algérie, Maroc, Sénégal, Côte d'Ivoire et Egypte ; du continent Américain (5%) : Canada, USA, Mexique, Brésil, Argentine et Chili. Sur les 92 intervenants, il y avait 41 français (45%) et 51 étrangers (55%).
Les intervenants étrangers venaient de 20 pays : CEE : 33 ; autres pays européens : 4 ; Israël : 1 ; Afrique : 6 ; Amérique : 7.

Le thème de l'Université d'été de Montpellier s'inscrivait dans la réflexion actuelle, sur l'éducation mathématique et sur les programmes de mathématiques, qui vise à une rénovation des contenus et des méthodes pédagogiques : abandon d'un enseignement dogmatique, rôle des problèmes dans les méthodes d'apprentissage, lien avec les autres disciplines, introduction d'une perspective historique. L'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques doit permettre une approche culturelle des mathématiques et doit faciliter l'accès au savoir mathématique à un plus grand nombre d'élèves. De plus, l'histoire des mathématiques invite à une approche interdisciplinaire, et situe d'emblée les mathématiques dans l'histoire des idées, des sciences et des techniques.

Le thème de l'Université d'été répondait aussi aux exigences et aux besoins d'une formation professionnelle auxquels doivent répondre les formateurs d'enseignants de mathématiques : réflexion sur les savoirs mathématiques, conceptions épistémologiques sous-jacentes aux méthodes d'apprentissage, culture professionnelle. Dans leur grande majorité, aussi bien en France qu'à l'étranger, les enseignants de mathématiques n'ont reçu aucune formation en histoire des mathématiques et en épistémologie. Cette formation, reconnue aujourd'hui comme nécessaire, doit faire l'objet d'une formation initiale et d'une formation continue. L'Université d'été avait pour but de répondre à une demande importante de formation.

Les contenus de l'Université d'été visaient à la fois des connaissances historiques, épistémologiques et didactiques. Ils s'organisaient autour de sept grand thèmes :

Thème 1 : *La construction historique des savoirs mathématiques.*
Ce thème a donné lieu à une conférence plénière de Jean-Claude Pont (Suisse) sur l'histoire des géométries non euclidiennes, et à quinze ateliers concernant la construction historique et épistémologique de concepts ou de théories mathématiques.

Thème 2 : *Introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques.*
Ce thème a donné lieu à deux séries d'ateliers portant sur des compte-rendus d'expériences d'insertion de l'histoire des mathématiques dans le secondaire. Le thème était aussi l'objet d'une table ronde qui a permis de faire le point sur la place de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement secondaire et dans les programmes de différents pays européens. Elle était organisée par Jan Van Maanen (Pays-Bas) et réunissait des intervenants, enseignant en Grande-Bretagne, Allemagne, Italie, Grèce, Danemark, France et Portugal.

Thème 3 : *Relations entre l'enseignement et facteurs culturels.*
Ce thème a donné lieu à une conférence à deux voix de Bruno Belhoste et de Léo Rogers sur les enseignements de deux pays "contrastés" : la France et la Grande-Bretagne, et à treize exposés concernant l'histoire de l'enseignement dans un pays donné.

Thème 4 : *Relations entre épistémologie et questions didactiques et pédagogiques*
Ce thème a donné lieu à sept exposés sur des sujets tels que l'épistémologie des problématiques, le constructivisme, les réflexions épistémologiques sur le concept de tangente ou la transposition didactique de la valeur absolue.

Thème 5 : *L'histoire des mathématiques dans la formation, initiale et continue, des enseignants*
Ce thème a donné lieu à onze ateliers portant sur des expériences en formation continue ou initiale des enseignants, et à une table ronde qui a permis de faire le point sur la place de l'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants de différents pays européens. Cette table ronde était organisée par Fulvia Furinghetti (Italie) et rassemblait des formateurs d'enseignants venant de France, de Belgique, du Danemark, de Grande Bretagne, d'Allemagne et des Pays Bas. Les échanges ont permis aussi de dégager les aspects essentiels concernant la formation des enseignants dans ces différents pays.

Thème 6 : *Mathématiques méditerranéennes.*
Ce thème a permis de situer les mathématiques dans un contexte culturel et géographique, il voulait favoriser à l'avenir les échanges entre enseignants et formateurs autour de la Méditerranée, avec en particulier la participation d'enseignants du Maghreb. Ce thème a donné lieu à deux conférences plénières : une conférence générale de Christian Houzel (France) couvrant près de vingt siècles de mathématiques, et une conférence de Hens Høyrup (Danemark) sur l'algèbre d'arpentage depuis les babyloniens jusqu'à Luca Pacioli en passant par les mathématiques arabes. Cinq exposés abordaient des moments précis de l'histoire des mathématiques méditerranéennes.

Thème 7 : *Ethnomathématiques*
Il s'agissait de sensibiliser les participants à une problématique qui n'est pas encore très connue. Une conférence a été donnée par Ubiratan d'Ambrosio (Brésil), promoteur de l'ethnomathématique. Cinq ateliers en parallèle proposaient des exemples d'études ethnomathématiques en Afrique et en Amérique du Sud.

La Commission inter-IREM remercie vivement les membres du Comité scientifique européen qui ont participé à l'élaboration du programme de cette Université d'été : Gertrudes Amaro (Portugal), Rudolf Bkouche (France), John Fauvel (Grande-Bretagne), Fulvia Furinghetti (Italie) Athanassios Gagatsis (Grèce), Mariano Hormigon (Espagne), Jean-Claude Pont (Suisse), Jan Van Maanen (Pays Bas), Nicolas Rouche (Belgique) et Gert Schubring (Allemagne).

La Commision inter-IREM exprime aussi toute sa reconnaissance aux organisateurs de cette Université d'été, en particulier à Françoise Lalande, François Jabœuf et Yvon Nouazé de l'IREM de Montpellier, qui ont su faire face à toutes les difficultés matérielles avec sourire, et qui ont su faire partager à tous la chaleur et la convivialité de leur ville.

Evelyne BARBIN
Responsable de la Commission inter-IREM
Epistémologie et histoire des mathématiques

THÈME 1

TOPIC 1

La construction historique des savoirs mathématiques

The Historical construction of mathematical Knowledge.

ATELIERS - WORSHOPS

EXPOSÉS - LECTURES

CONFÉRENCE - PLENARY LECTURE

PAYSAGES DIFFERENTIELS CHEZ LEIBNIZ

Dominique BENARD et Monique NOUET
I.R.E.M. Pays de la Loire - Centre du Mans

La perception est l'expression
d'une multitude dans l'unité.
G.W. LEIBNIZ

Paysages différentiels...

Pour dire le parcours de quelques textes mathématiques, avec la seule intention de se rendre disponible et attentif à une pensée tout à la fois systématique et chaotique, se laisser toucher par un travail foisonnant où ne manquent ni ombres ni lumières, ni détours pénibles ni raccourcis fulgurants.

Paysage à réinventer, reconstruire et retravailler, plus qu'à en contempler le déploiement.

Chantier différentiel plutôt, dont le propos n'est pas la défense -illustration- promotion d'une quelconque thèse, nouvelle ou ancienne.

Dans quel but alors ?

Emouvoir, "émoustiller" l'intelligence d'abord, en lui faisant préférer la question à la réponse ; rendre actif, ensuite, un souci concernant la formation, plus particulièrement continue, des enseignants de mathématiques ; souci de s'engager ensemble sur des sentiers où le savoir n'est pas déjà donné, où l'exposé systématique des réponses ne vient plus masquer les questions qui les ont suscitées, où la construction mathématique participe à celle d'un rapport au monde qu'il soit d'intelligibilité ou d'action. Et ouvrir ainsi à tout enseignant, à quelque niveau du système éducatif qu'il intervienne, un terrain où il puisse encore et toujours mettre en chantier son propre rapport aux mathématiques, en se frottant à du problème, à de la question, à de l'invention, qui pourront constituer autant d'occasions pour une mise en perspective parfois surprenante et souvent joyeuse des nécessités pédagogiques.

Le début de notre parcours ne coïncidera pas avec celui du travail mathématique de Leibniz sur le calcul différentiel, mais avec le moment où ce travail sort de la seule relation épistolaire pour s'offrir à un débat plus large, au travers des publications dans les Acta Eruditorum de Leipzig (1) .

De là -le premier article publié par Leibniz date de Février 1682- nous remonterons d'abord vers les "origines", du moins celles dont Leibniz lui-même fera le récit beaucoup plus tard- 1714 (2) , puis nous en pisterons les développements grâce à quelques unes des publications ultérieures dans la revue de Leipzig....

Février 1682 : Le bâteleur du calcul des séries (l'un et le multiple)

Le tout premier article mathématique donné par Leibniz dans la revue de Leipzig, renvoie par son titre(3) au très célèbre problème de la quadrature du cercle, ou comment

---

(1) Textes qui nous sont offerts dans la traduction, richement commentée, de Marc Parmentier, parue aux Editions Vrin, sous le titre Naissance du calcul différentiel, Référencé M P.

(2) Histoire et origine du Calcul différentiel, traduction de R. Szeftel-Zylberbaum, in Les Cahiers de Fontenay - I - 1975. Référencé HOCD.

"convertir un cercle en un carré égal, ou en une autre figure rectiligne dépendant du rapport entre le cercle et le carré construit sur le diamètre ".

Là, première surprise... si ce problème déjà tant exploré ne trouve toujours pas de solution, c'est sans doute, avertit Leibniz, qu'on ne sait pas exactement ce que l'on cherche. Et de distinguer quatre "manières" de comprendre le problème et donc de le résoudre ou d'en démontrer l'impossibilité, ce qui, dira-t-il ailleurs, est équivalent à le résoudre : "*On voit que l'Analyse d'un problème est achevée quand on peut soit le résoudre, soit montrer qu'il est impossible* "(4) .

On doit donc distinguer le "calcul" du "tracé" et dans chacun de ces cas la solution "rigoureuse" de la "manière approchée". Et s'intéressant plus particulièrement au calcul rigoureux, que Leibniz appelle quadrature analytique, il importe d'en distinguer trois : la transcendante, l'algébrique et l'arithmétique.

Ce sera l'un des apports de Leibniz (entre autres !) de dégager explicitement la notion d'expression ou de solution "transcendant" toute expression ou solution algébrique, c'est à dire de degré déterminé, et, s'appuyant sur cette distinction, de montrer "sans calcul" l'impossibilité d'une quadrature exacte du cercle ou de l'hyperbole par une expression algébrique (5). De plus, il verra dans le calcul différentiel qu'il invente la possibilité d'étendre aux expressions transcendantes, si utiles à la géométrie, la puissance de l'analyse révélée par le traitement algébrique opéré par Descartes sur la géométrie et dont il déplore la limitation.

Distinction féconde par conséquent, tant par rapport à la solution d'un problème particulier et célèbre que dans son appel à une nouvelle généralité, réalisée, dans cet article de 1682, par l'intervention non pas d'objets nouveaux mais de points de vue nouveaux. Déplacement caractéristique du travail mathématique leibnizien.

On est d'ailleurs frappé de la conformité de cette attitude avec le travail métaphysique tel qu'il s'exprime par exemple dans La Monadologie :

57. Et, comme une même ville regardée de différents côtés paraît toute autre, et est comme multipliée perspectivement ; il arrive de même, que par la multitude infinie des substances simples, il y a comme autant de différents univers, qui ne sont pourtant que les perspectives d'un seul selon les différents points de vue de chaque Monade.

58. Et c'est le moyen d'obtenir autant de variété qu'il est possible, mais avec le plus grand ordre, qui se puisse, c'est à dire, c'est le moyen d'obtenir autant de perfection qu'il se peut (6).

Ici, la métaphysique, dont il a pu parfois paraître juste de dire qu'elle est première chez Leibniz, n'est jamais dominatrice, gardienne ou garante de la vérité ontologique des manipulations mathématiques. Elle semble au contraire libératrice, se faisant trait opératoire inspirant le geste mathématique. On pourrait affirmer aussi, qu'en retour, le travail mathématique fournit une image exemplaire et quasi adéquate d'une aptitude opératoire

---

(3) Expression en nombres rationnels, de la proportion exacte entre un cercle et son carré circonscrit, Acta Eruditorum, Février 1682, MP p. 71-81.

(4) M P, p. 88, in Calcul des mesures des figures, A.E. mai 1684.

(5) Sur la géométrie profonde et l'analyse des indivisibles et des infinis, A.E. juin 1686, M P p. 134.
Leibniz y montre en fait l'impossibilité d'une quadrature quelconque ou indéterminée, c'est à dire de n'importe quel secteur circulaire (intégrale indéfinie), par une expression algébrique ; ce qui n'implique pas a priori l'impossibilité de la quadrature du cercle dans son entier ou d'un secteur particulier (intégrale définie). Là aussi Leibniz prendra soin de distinguer entre "quadratures indéfinies" et "quadratures particulières", l'indistinction des deux problèmes étant source d'erreurs (cf. Calcul des mesures des figures M P p. 88-95).

(6) La Monadologie de Leibniz est disponible en Livre de Poche.

inspirante pour le geste métaphysique... jeux d'ombre et de lumière où mathématique et métaphysique changent tour à tour de rôle, dans une relation de mutuelle inspiration.

Mais c'est une autre histoire. Sortons de la caverne et revenons à l'article de Leibniz où nous lisons que le cercle, dont le carré circonscrit a l'unité pour surface, s'exprime par la série :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots\ldots$$

Ce résultat, ici simplement énoncé sans démonstration, n'est pas vraiment une nouveauté pour l'époque, ni même l'idée d'exprimer une quadrature par une série. Ce qui est nouveau, là encore, c'est le point de vue adopté par Leibniz. Non seulement en effet la série "*renferme* " un ensemble d'approximations dont l'erreur va toujours s'amenuisant, mais "*prise dans sa totalité [elle] exprime [ ] la valeur exacte* ". Une telle affirmation repose sur la loi de progression unique de la série (nous dirions maintenant série alternée des inverses des entiers impairs) qui permet à l'esprit de la "*concevoir convenablement tout entière* ", "*bien qu'on n'en puisse pas écrire la somme en un seul et unique nombre* ". Sort heureux partagé entre autres par la "*Diagonale du carré, la section par moyenne et extrême raison que d'aucuns appellent divine* ". Mais qui manque à la suite des décimales de ce que nous nommons le nombre p, connue à l'époque où écrit Leibniz jusqu'à la trente-cinquième, grâce au labeur du hollandais L. Van Ceulen. Ce dernier réutilise jusqu'à épuisement du calculateur la méthode d'exhaustion qui fournit à Archimède ses encadrements de la mesure du cercle. A l'inverse de la série, telle que lue par Leibniz, la loi de progression des décimales de p n'est pas lisible, ni même accessible, et la connaissance des 35 premières décimales n'est d'aucune utilité pour la détermination de la trente-sixième.

Voilà donc la nouveauté de la lecture leibnizienne : la série n'est plus le résumé de procédures d'approximations dont notre finitude n'épuisera jamais l'infinitude ; mais la lisibilité de sa loi de progression la rassemble en une quadrature arithmétique exacte du cercle.

La suite de l'article paraît tenir du tour de passe-passe.

Leibniz remarque qu'en regroupant les termes deux à deux la série exprimant le cercle devient :

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \ldots = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \ldots\right)$$

ce qui s'énonce ainsi :

le carré inscrit dans le cercle étant $\frac{1}{4}$ (7), le cercle s'exprimera par

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \ldots$$

Cette série est extraite, en prenant un terme sur quatre, de la série des inverses des carrés diminués d'une unité (inverse de $n^2 - 1$), soit

(7) Leibniz passe d'un cercle de diamètre 1 (dont le carré circonscrit est l'unité), à un cercle de diamètre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (dont le carré circonscrit est $\frac{1}{2}$, ou encore dont le carré inscrit est $\frac{1}{4}$.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \frac{1}{48} + \frac{1}{63} + \frac{1}{80} + \frac{1}{99} + \dots$$

et dont Leibniz affirme qu'elle a pour somme $\frac{3}{4}$.

Si, à partir de cette série, on saute un terme sur deux on obtient d'une part la série

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots$$

dont la somme est $\frac{1}{2}$ (dixit Leibniz - pour le comment voir plus loin), et d'autre part, la série complémentaire

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \ .$$

dont la somme sera donc $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

A partir de ces deux nouvelles séries, et prenant à nouveau un terme sur deux, la première produira, comme nous l'avons déjà vu, l'expression de la quadrature arithmétique du cercle dont le carré inscrit est $\frac{1}{4}$, la seconde

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \dots$$

nous apportant une quadrature arithmétique exacte de l'hyperbole de carré $\frac{1}{4}$, c'est à dire, en termes du vingtième siècle, l'aire comprise sous l'hyperbole d'équation $xy = \frac{1}{4}$ et entre les segments d'abscisse $\frac{1}{2}$ et 1.

Ici marquons une pause, pour laisser au lecteur mathématicien le plaisir de vérifier tous ces résultats avec les outils mathématiques dont nous disposons maintenant ...

Et avant de voir de quelle manière Leibniz y parvenait, attardons-nous sur les mots employés ici lorsqu'il se livre au jeu des séries que nous venons d'exposer.

"*Or, puisqu'on obtient, sans aucun travail supplémentaire, une quadrature arithmétique de l'Hyperbole, je voudrais donc faire admirer cette harmonie dans sa totalité* "(8).

L'harmonie est là qui réunit deux quadratures célèbres sous une même série, d'où elles resurgissent par mises en lumière successives de certains termes.

---

(8) Expressions en nombres..., MP p. 80.

Soit donc la série justement appellée harmonique et qui est une expression même de l'infini :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \infty .$$

Laissons d'abord dans l'obscurité tout terme qui n'est pas inverse d'un carré diminué d'une unité (inverse d'un entier de la forme $n^2 - 1$).

Puis sautant de deux en deux à partir du premier terme, puis à nouveau de deux en deux sur la série ainsi obtenue, et "éteignant" chaque fois les termes dans l'intervalle, ne reste à la lumière que l'expression du cercle.

Reprenant enfin le même procédé mais décalé d'un terme, nous voyons alors briller la quadrature de l'hyperbole.

Mais nous devons comprendre, avec Leibniz, que la totalité est toujours là présente, et que chaque point de vue différent ne nous en fait percevoir distinctement qu'une partie.

Nous avons donc là, dans ce petit théâtre de la série harmonique, une image mathématique forte du déploiement des multiplicités diverses comme expressions partielles, par éclairages successifs, d'un seul et même univers. Où l'on ne peut pas démêler qui inspire qui, du mathématicien ou du métaphysicien.

1714 Le magicien dévoile ses tours...

Deux ans avant sa mort, l'essai *Historia et Origo Calculus Differentialis* (9) permet d'abord à Leibniz de faire une mise au point sur ce que l'on appellerait maintenant la question de la priorité dans l'invention du calcul différentiel. On sait les polémiques qui se développèrent à l'époque sur ce sujet. L'article de Leibniz est donc une contribution à ce genre littéraire un peu spécial.

Nous laisserons de côté cet aspect des choses. Car l'essai de 1714 est aussi l'occasion pour Leibniz de rappeller l'importance de l'histoire des questions, des méthodes, des inventions pour la compréhension même, le partage et le développement des dites questions, méthodes , inventions : "*Il est très utile de connaître les véritables origines des inventions fameuses, surtout si leur découverte n'est pas due au hasard, mais au pouvoir de la pensée [...] de plus c'est utile au développement de l'art d'inventer, car la méthode en est connue sur des exemples remarquables* " (10) .

Nous venons de voir comment, parlant en 1682 du problème de la quadrature du cercle, il s'attache à redéfinir la question, nous faisant apercevoir que derrière l'expression unifiante de "quadrature du cercle", se cachaient des questions diverses, appellant donc des réponses diverses. Il faut ajouter maintenant que, dans le cours de cette redéfinition, Leibniz replace à l'intérieur du point de vue nouveau qu'il expose, les contributions de ses prédécesseurs ou contemporains, d'Archimède à Viète et Huygens en passant par N. de Cuse et T. Hobbes.

Ce souci aura été constant tout au long de son travail mathématique. Ainsi, dans un article des Acta de mai 1697(11) , dont le titre annonce une communication sur la courbe brachystochrone (le toboggan le plus rapide), il n'accorde à l'exposé véritablement mathématique de sa solution que le dernier quart de son écrit. Le reste, Leibniz le consacre majoritairement à l'histoire, de cette courbe et de questions connexes comme la courbe isochrone ou la chaînette. Au-delà de rendre à chacun son dû, l'histoire permet à Leibniz

---

(9) Histoire et origine du Calcul Différentiel, traduction de R. Szeftel-Zylberbaum, in Les Cahiers de Fontenay - I - 1975. Référencé HOCD.

(10) HOCD p. 58.

(11) "*Communication de ma solution au problème de la courbe de plus brève descente que M. Jean Bernoulli a proposé à tous les Géomètres, et des solutions que M. Jean Bernoulli, puis M. le Marquis de l'Hospital, m'ont chargé de publier, accompagnées de ma solution à un autre problème que M. Bernoulli a proposé par la suite* ", Acta Eruditorum, Mai 1697, MP p. 351-358.

d'inventorier les voies diverses d'une même question pour en souligner les points communs ou au contraire les différences. Comme dans l'article de 1682, il dégage sous une dénomination unique, ici les questions de "Maxima et Minima", la diversité de problèmes qui, précise-t-il, sont par ailleurs d'inégale difficulté : ainsi la question de déterminer les tangentes d'une courbe donnée diffère-t-elle du problème de la détermination de la courbe elle-même devant "*remplir optimalement une condition donnée* " (12) . Clarifier les questions, c'est déjà s'engager dans la voie de leurs résolutions...

De plus, et c'est encore une constante des écrits leibniziens, le recours à l'histoire est l'occasion d'un appel à l'intelligence d'autrui, aux méthodes particulières, au partage et à la diffusion des problèmes et des inventions. "*Soumettre* -commence-t-il dans son écrit de mai 1697- *des problèmes aux Géomètres est une chose courante et profitable à tous, lorsqu'on ne le fait pas dans l'intention de vanter ses propres succès, mais d'inciter d'autres à en obtenir, de sorte que l'art d'inventer s'enrichisse des méthodes particulières adoptées par tout un chacun* " (13) . Et plus loin, parlant de l'utilisation faite par les frères Bernoulli de son calcul différentiel, il dira "*qu'il semble désormais leur appartenir autant qu'à moi* "(14) . Est à l'oeuvre, ici encore, une métaphysique du point de vue, qui loin de s'abîmer dans un quelconque relativisme, construit la condition même de l'universalité.

Lisant donc Leibniz, nous sommes souvent ramenés à l'affirmation que faire l'histoire des problèmes est une composante importante du travail mathématique lui-même ; que c'est aussi mesurer a posteriori la fécondité de l'apport de points de vue différents. D'où cette nécessité de les susciter a priori...

Voilà comme un écho de notre souci actuel de confronter l'enseignant à l'histoire de sa discipline ; cette confrontation, au-delà de l'apport culturel de savoir "qui" a fait "quoi", est déjà par elle-même un travail de et sur les mathématiques.

Revenons donc au contenu de l'essai de Leibniz sur l'origine du calcul différentiel. Nous y trouvons, expliquées par l'auteur, les techniques et idées que masque la virtuosité du jeu sur les séries, auquel il se livre dans l'article de 1682.

Une première manipulation très simple consiste en une reprise, mais aussi une extension, du procédé pythagoricien d'engendrement des carrés par les impairs. La série (nous dirions la suite) des entiers impairs, 1 3 5 7 9 11 ..., est en effet la série des différences de deux termes consécutifs de la série des carrés 0 1 4 9 16 25 36 ... D'où il suit de façon quasi immédiate que $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 1 - 0 + 4 - 1 + 9 - 4 + 16 - 9 + 25 - 16 + 36 - 25 = 36 - 0 = 36$ (15) .

Leibniz ensuite, par un travail où l'analogie tient une grande part, étend ce procédé aux séries de nombres "décroissants à l'infini " (16) . Suivons le en faisant travailler l'analogie sur l'exemple des séries qu'il manipule en 1682.

Soit donc la série des inverses des entiers impairs

$$1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{9} \ldots$$

La série des différences de deux termes consécutifs est

$$\frac{2}{3} \quad \frac{2}{15} \quad \frac{2}{35} \quad \frac{2}{63} \ldots$$

(12) Communication..., MP p. 355.

(13) Communication..., MP p. 351.

(14) Communication..., MP p. 353.

(15) HOCD p. 65-66.

(16) HOCD p. 68-69.

Par conséquent, la somme de cette série des différences sera égale au premier terme de la première série, diminué du "dernier terme", qui ici est nul puisque l'inverse d'un entier "s'évanouit à l'infini" :

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} \ldots = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \ldots = 1 .$$

Le même travail, effectué à partir de la série des inverses des entiers pairs, nous fournit alors :

$$\frac{2}{8} + \frac{2}{24} + \frac{2}{48} + \frac{2}{80} + \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \ldots = \frac{1}{2}$$

De là, les résultats de Leibniz sur la somme de la série des inverses des carrés diminués d'une unité, ainsi que des sommes des deux suites extraites en sautant un terme sur deux.

Pour tester encore la force d'une telle procédure, faisons la opérer, comme Leibniz le fait lui-même, sur la progression géométrique de raison b, dont le terme général s'écrit b^n. La série des différences de deux termes consécutifs aura pour terme général $b^{n+1} - b^n = b^n . (b - 1)$. "*Par conséquent* ", conclut Leibniz, "*il est manifeste que la suite -différence d'une progression géométrique donnée est aussi une progression géométrique proportionnelle à la progression donnée. De là, on obtient la somme d'une progression géométrique* " (17).

Ce qu'il convient de remarquer ici, c'est le passage de la référence à une série particulière de nombres par l'écriture de ses premiers termes, suivis de points de suspension, à la référence par écriture de son "terme général". C'est que, explique lui-même Leibniz, "*il possédait ces résultats [sur les différences finies], alors qu'il n'était pas encore versé dans l'Analyse Cartésienne : après s'y être adonné, il considéra que n'importe quel terme d'une suite pouvait, la plupart du temps, être désigné par une notation générale -par ce moyen on peut se référer à une suite particulière. Par exemple, si n'importe quel terme de la suite des naturels 0, 1 , 2, 3, 4 , 5, 6, 7, etc... est appellé "x", on appellera n'importe quel terme de la suite des carrés "x.x" ou de celle des cubes "x* ^{3}*" etc... ; n'importe quel terme de la suite des nombres triangulaires, c'est-à-dire : 0, 1, 3, 6, 10, etc..., s'appellera :* $\frac{x(x+1)}{1.2}$, *soit :* $\frac{x^2 + x}{2}$ "(18).

Ce court extrait de l'essai de 1714, outre qu'il nous fait entendre Leibniz parler de lui-même à la troisième personne, nous rappelle qu'à l'époque où il commençait ses travaux sur les différences finies (vers 1672), il n'était pas mathématicien de métier, ni même seulement "éduqué". Ce sera toujours la limitation et aussi la chance de Leibniz que de s'être plongé dans les difficultés sans grande préparation ; limitation, puisque son manque de pratique lui occasionnera quelques bourdes, notamment dans les calculs ; chance, dans la mesure où sa méconnaissance des difficultés les lui fera aborder sans crainte et sans préjugés, l'innocence étant ici possibilité d'un regard neuf.

Mais aussi, ce passage souligne l'importance accordée par Leibniz à l'écriture, qui aura été l'une de ses préoccupations majeures. Changer d'écriture, c'est changer de point de vue et parfois permettre à une harmonie jusque là cachée de se révéler... son utilisation du triangle arithmétique de Pascal, redisposé en tableau rectangulaire pour en faire apparaître le lien avec la cascade itérative des différences d'une série donnée, en est un exemple frappant (19) . Par ailleurs, l'écriture est parfois principe d'économie comme nous venons de le voir avec le "terme général" d'une suite ; et "*l'on peut même dire que la spécieuse en général, c'est-à-dire l'art des*

(17) HOCD p. 90-91.
(18) HOCD p. 86-87.
(19) HOCD p. 67-69.

caractères, est d'un secours merveilleux, parce qu'elle décharge l'imagination " [20]. Enfin et surtout, l'écriture est ce qui fait surgir le procédé des différences finies comme un opérateur, comme un objet en tant que tel, déplaçant l'attention du résultat de l'opération à l'opération même. Il nous semble que l'on doive considérer ce déplacement comme l'un des apports majeurs de Leibniz, qui imprègne tout "son " calcul différentiel, et qui le relie directement au XXème siècle, lui homme du XVIIème siècle, tellement appuyé sur de vieilles notions du XVIème siècle, certes retravaillées, comme l'harmonie ou l'analogie. Une telle considération est toujours risquée, car d'une certaine façon toujours fausse, mais... qu'on lise par exemple son Symbolismus memorabilis calculi... paru en 1710 dans une revue de Berlin où, développant une analogie entre puissance d'une somme et différentielle d'un produit (la célèbre formule de Leibniz), il esquisse une véritable algèbre des opérateurs de puissance et de différenciation [21] . Un trouble naît d'ailleurs à la lecture de cet article, qui vient de ce qu'il semble que ce soit précisement la vieille, si vieille, méthode de l'analogie qui lui permette d'engager ce travail si neuf. Méditons...

Quant au calcul proprement dit, Leibniz lui-même nous explique que c'est cette manipulation des séries de différences finies d'une série numérique donnée, et qu'il appelle calcul différentiel numérique, qui fournit la pratique inspirante du calcul différentiel infinitésimal, c'est-à-dire du calcul des différences incomparables avec les grandeurs différenciées [22].

Ainsi, notant dx et dy les termes généraux des suites numériques différences des suites x et y, un rapide calcul nous fournit la suite des différences de la suite produit :
$d\,x\,.\,y = (x + dx)\,(y + dy) - x\,.\,y = x\,.\,dy + dx\,.\,y + dx\,.\,dy$.

Lorsque les différences dx et dy ne sont plus celles, finies et comparables aux grandeurs différenciées, de suites numériques, mais celles, infinitésimales, de quantités continûment variables, le produit $dx\,.\,dy$ est incomparable à $x\,.\,dy + dx\,.\,y$. Il est alors considéré comme "actuellement" nul et nous obtenons la formule bien connue : $d\,x.y = x.dy + y.dx$.

Cette distinction à opérer entre les deux calculs, qui dérive de ce que Leibniz appelle "la loi d'homogénéité transcendentale"[23], nous la retrouverons plus loin au coeur des critiques adressées au nouveau calcul par certains contemporains, et au coeur des réponses que Leibniz leur apportera. Réponses fécondes sur le terrain mathématique et riches en échos métaphysiques...[24].

Ces questions, toutefois, nous laissent loin encore de l'expression de la quadrature du cercle de diamètre unité par la série alternée des inverses des entiers impairs. Reprenant le fil de l'essai, nous découvrons deux joyaux du travail différentiel de Leibniz : le "triangle caractéristique" et la "méthode de métamorphose".

Nous en donnerons une idée, en nous appuyant sur des figures simplifiées par rapport à celles que Leibniz nous a léguées [25].

Sur la figure 1, YZD est un triangle rectangle "infiniment petit", dont les côtés YD et DZ sont les "éléments" d'abscisse et d'ordonnée, respectivement désignés dx et dy, et dont l'hypoténuse YZ est un "élément" de la tangente à la courbe C, désigné ds. Voilà ce que Leibniz

---

[20] in Nouveaux Essais sur l'entendement humain, Garnier-Flammarion, p. 387.

[21] Symbolisme remarquable du calcul algébrique et infinitésimal, pour comparer puissances et différences, et de la loi d'homogénéité transcendantale", Miscellanea Berolinensia, 1710, MP, p. 414-421.
Nous renvoyons par ailleurs, pour une analyse mathématique plus détaillée, à La méthode chez Leibniz, de M. Nouet in Questions de Méthode, travail collectif du Groupe Histoire des Mathématiques de l'I.R.E.M. du Mans, à paraître prochainement.

[22] HOCD p. 70.

[23] Symbolisme remarquable..., MP p. 420.

[24] "Réponses à quelques objections soulevées par M. Bernard Niewentijt à propos de la méthode différentielle ou infinitésimale", Acta Eruditorum, Juillet 1695, MP p. 324-337.

[25] HOCD p. 72-80.

appelle "triangle caractéristique". Le triangle YPX, lui, est ordinaire ; YX, désignée par l'ordonnée y de Y, est la perpendiculaire abaissée du point Y sur l'axe des abscisses ; YP, désignée par n, est la normale à la tangente YZ.

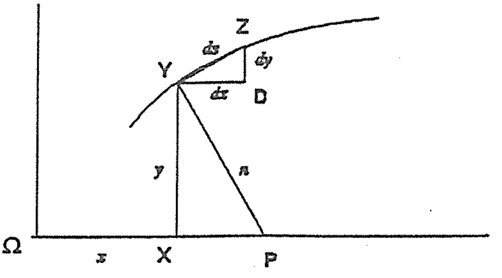


Figure 1

L'intérêt d'une telle figuration réside dans la similitude du triangle infinitésimal YDZ avec le triangle ordinaire YXP ; on en tire la proportion : $\frac{YZ}{YD} = \frac{YP}{YX}$, d'où suit l'égalité différentielle y.ds = n.dx.

Cette considération vint à Leibniz comme une généralisation du travail de B. Pascal dans son Traité du sinus du quart de cercle et permit le calcul de surfaces de solides de révolution, ramenant ce dernier au "problème inverse des tangentes", c'est-à-dire à la détermination d'une courbe connaissant ses tangentes.

2py.ds est en effet la surface du tronc de cône différentiel[26] engendré par la rotation dans l'espace de l'élément ds autour de l'axe des abscisses. La surface totale du solide engendré par cette rotation est alors : $\int 2py.ds = 2p \int n.dx$. La courbe C étant donnée, ses normales n sont données, et calculer $\int n.dx$ c'est précisément déterminer la quantité variable z telle que $\frac{dz}{dx} = n$.

Au-delà de ce résultat, dont nous laissons au lecteur mathématicien la joie de le faire opérer pour le calcul de la surface de la sphère, comme le fit B. Pascal, ou de l'aire d'un paraboloïde de révolution, à l'instar de C. Huygens, la méthode du triangle caractéristique a ceci de remarquable qu'elle réintroduit le jeu des proportions pour ramener "l'inassignable" à "l'assignable". Comment, en effet, opérer avec ou calculer sur des grandeurs par définition imperceptibles, insaisissables, invisi-bles ? Similitudes et proportions nous permettent cependant d'accéder à leurs "raisons" (quotients différentiels $\frac{ds}{dx}$), par identification à des rapports de grandeurs "mesurables" (les côtés du triangle YXP). Il s'agit d'ailleurs ici de bien autre chose que d'une simple "anecdote technique". Leibniz invoquera le livre V des Eléments d'Euclide pour répondre à des objections qu'on lui avait faites sur ces "éléments différentiels" et leurs différences [27] , tant du point de vue de leur maniement que de leur fondement. Une pensée des proportions, telle que nous l'offre Euclide, rend possible, une fois distingués les différents ordres de différenciation, la manipulation dans un même calcul, un même raisonnement, des raisons de toutes les grandeurs, qu'elles soient assignables, différentielles, différo-différentielles, etc... Une telle pensée fonde leur "compossibilité", ou possibilité d'être ensemble, et par là assure leur existence même, mieux que toute considération ontologique et tout renvoi à un réel extérieur dont ces grandeurs ne seraient que l'écho.

---

(26) Merci à A. Deledicq pour son amicale et active participation.

(27) Réponses à quelques objections..., MP p. 325-329.

On voit, là encore, l'accompagnement métaphysique libérer le calcul du versant ontologique de son fondement, ce qui fera écrire à Leibniz cette assertion quelque peu inquiétante que "*ce calcul porte sa vérité avec soi* ". Ce dernier, en retour, nous fournissant une image opératoire de ce qui se trame sous la notion leibnizienne de "compossibilité" (28) et ses rapports avec l'être.

Autre écho, qui ne nous semble pas plus anecdotique par rapport à la pensée de Leibniz : de quoi ce fameux triangle est-il caractéristique ? De la variation en ce qu'elle n'est plus seulement aperçue une fois achevée, globalement et de l'extérieur, mais comme saisie en plein vol, concentrée en chaque point de la courbe. Vision dynamique qui fait du quotient différentiel et de son "image", le "triangle caractéristique", l'expression de la variation comme tendance ramassée au sein même de la courbe, intensité intermédiaire entre la puissance et l'acte. Méditation de la force, de la plasticité de la matière, des rapports entre l'intensité et l'étendue...

C'est de cette variation même qu'il est encore question dans la "méthode des métamorphoses", expression aux fragrances plus alchimiques qu'analytiques (Leibniz emploie même le mot "transmutation"). Cette méthode met en scène un déplacement du sujet en un point, éventuellement extérieur à la courbe, qui devient ainsi point de vue sur la variation (29) .

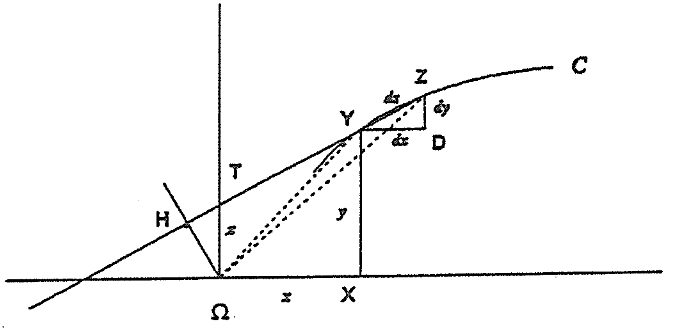


Figure 2

Soit donc -Figure 2- YZ élément de tangente à la courbe C, tangente rencontrant l'axe des ordonnées en T et découpant ainsi un segment WT désigné z, précisément dénommé "sous-tangente".

Utilisant la similitude du triangle WHT et du triangle caractéristique YDZ, l'aire du triangle WYZ est $\frac{1}{2}$ YZ . WH = $\frac{1}{2}$ WT . YD = $\frac{1}{2}$ z . dx.

Soit alors à quarrer l'aire délimitée par la courbe, l'axe des abscisses, et comprises entre les segments verticaux Aa et Bb - Figure 3 :

(28) Cf. Le pli de G. Deleuze, Ed. de Minuit, notamment le chapitre V : incompossibilité, individualité, liberté.

(29) Le Pli, p. 25-27. L'importance, chez Leibniz, de la variation et de la variabilité comme notions fondamentales, se retrouve, au niveau mathématique, dans ses considérations sur des familles de courbes dépendant d'un paramètre ; c'est ce dernier, qui soumis au processus de différenciation, exprime non plus la variation par rapport à une courbe donnée, mais la variabilité de l'objet "courbe" au sein d'une "série" donnée : "j'emploie ici des équations infiniment plus vastes, correspondant à un point quelconque d'une courbe quelconque, au sein d'une série de courbes successives " MP p.272.

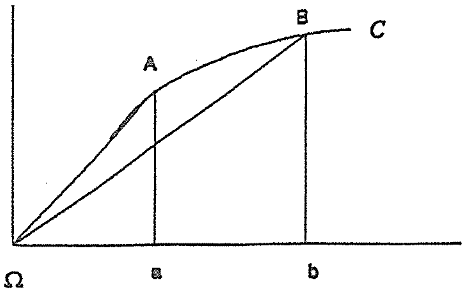


Figure 3

Le déplacement du sujet au point de vue W nous permet d'écrire : aire (ABba) = aire (WAB) + aire (WBb) - aire (WAa). L'aire du "triangle mixtiligne" WAB, surface "balayée" par le point de vue W sur la portion de courbe AB, est la somme des aires des triangles infinitésimaux WYZ, chacun d'eux étant la saisie par un même point de vue W d'un élément de tangente, c'est-à-dire saisie de la variation même.

D'où il ressort que aire (WAB) = $\frac{1}{2} \int z.dx$, ce qui nous donne, en utilisant une notation plus contemporaine que leibnizienne :

$$\int_a^b y.dx = \frac{1}{2}[x.y]_a^b + \frac{1}{2}\int_a^b z.dx \ .$$

Mais qu'a-t-on gagné au juste dans cette métamorphose ?

Pour le voir, métamorphosons ainsi le quart de cercle d'équation $y^2 = 2x - x^2$ ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y$). Des considérations géométriques simples nous permettent de relier l'abscisse x à la sous-tangente z par $x = \frac{2.z^2}{1+z^2}$.

Une intégration par parties, que Leibniz expose géométriquement, nous donne alors :

$$\frac{1}{2}\int_0^1 z\,dx = \frac{1}{2}\Big[x.z\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dz = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{z^2}{1+z^2}\,dz\ .$$

Reprenant enfin, par analogie, une technique inventée par N. Mercator pour la quadrature de l'hyperbole, il écrit :

$$\frac{z^2}{1+z^2} = z^2 - z^4 + z^6 - z^8 + \ldots$$

D'où l'on tire

$$\int_0^1 \frac{z^2}{1+z^2}\,dz = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \ldots$$

Et finalement, la quadrature du quart de cercle de rayon unité, $\int_0^1 y.dx$, s'exprime par la série annoncée.

Pour clore enfin sur l'art et la manière dont a usé Mr de Leibniz pour obtenir ses séries, signalons que le travail de Mr Mercator fournit également l'expression de la quadrature de l'hyperbole de carré $\frac{1}{4}$ par la série $\frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \dots$.

Suspension...

Il faut bien cesser d'écrire, et se résoudre, par exemple, à ne pas parler de l'importance et de l'originalité de la notion leibnizienne de perception, de son écho dans le calcul différentiel.

A nous relire, il semble que nous n'ayons que très peu "pisté" les développements, par Leibniz, de son propre calcul, comme annoncé en introduction ; qu'il ait été très peu question, ici, du calcul différentiel lui-même (30) ... mais que nous nous soyons laissés brasser par l'entrelacs des mathématiques et de la métaphysique.

C'est que le paysage différentiel, chez Leibniz, n'est pas la simple juxtaposition de techniques, points de vue et astuces plus ou moins chatoyants.

Retrouver ainsi les mathématiques dans leur histoire, et peut-être exemplairement dans ce "moment" dénommé Leibniz, c'est aussi l'occasion de les retravailler comme vibrant des questions grandes ou petites qui nous hantent.

Venu du XVIIème siècle, un trésor pour nous enseignants de la fin du XXème siècle.

---

(30) Nous nous promettons d'y revenir...

LA MÉTHODE DES AIRES CHEZ EUCLIDE

Philippe BRIN, Martine BÜHLER
Groupe M:A.T.H. IREM Paris VII

L'atelier présentait , aussi simultanément que possible, la méthodes des aires chez Euclide et l'exploitation en classe de certains extraits des *Eléments*. La traduction utilisée est celle de Peyrard (réédition Blanchard) car nous avions besoin, non seulement d'extraits des livres I et II, mais aussi des livres V et VI et la traduction de B. Vitrac aux PUF n'est actuellement parue que pour les quatre premiers livres.

Pour une présentation globale des Eléments, nous renvoyons au compte-rendu de l'atelier de J.P. Friedelmeyer.

Dans le livre I des *Eléments*, Euclide développe la méthode des aires: pour démontrer l'égalité de deux triangles ou deux parallélogrammes, on découpe mentalement les deux figures en morceaux superposables ou on rajoute des morceaux superposables pour obtenir des figures identiques. Il n'y a aucune numérisation dans le livre I des *Eléménts*, Euclide ne mesure pas les aires, il les compare. Il utilise les résultats de base qu'il a démontré au début du livre I: La proposition 4 et la proposition 26 énoncent ce que nous appelons communément les deux premiers cas d'égalité des triangles. Rappelons à ce propos qu'il existe deux notions concernant l'égalité de figures chez Euclide: l'une correspond à la superposabilité (c'est le cas des propositions 4 et 26), l'autre est l'égalité des aires de ces figures. La proposition 29 donne les résultats d'égalité d'angles dues au parallèlisme. En voici l'énoncé: "*Une droite qui tombe sur deux droites parallèles, fait les angles alternes égaux entr'eux, l'angle extérieur égal à l'angle intérieur opposé et placé du même côté, et les angles intérieurs placés du même côté égaux à deux droits*".

La méthode des aires proprement dite débute à la proposition 33: "*Les droites qui joignent, des mêmes côtés, des droites égales et parallèles, sont elles-mêmes égales et parallèles*".

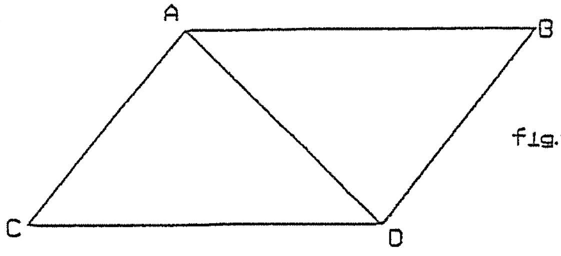


fig.1

La démonstration est une utilisation classique des résultats ci-dessus: (AB) est parallèle à (CD) donc les angles (BAD) et (ADC) sont égaux. Les triangles ABD et ADC ont donc un côté commun, AD, un côté "égal", AB=CD, l'angle compris entre deux côtés "égaux" égal $\angle BAD = \angle ADC \angle BAD = \angle ADC$..Les deux triangles sont donc superposables et l'on a AC =BD ainsi que l'égalité des angles (CAD) et (ADB), d'où l'on tire le parallèlisme des droites (AC) et (BD).

La proposition 34 se démontre de façon analogue: "*Les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entre eux, et la diagonale les partage en deux parties égales*".

La proposition 35 est la première à utiliser réellement la méthode du "puzzle mental" décrite en introduction. C'est l'une de celles qu'il nous a paru intéressant de faire étudier aux élèves.

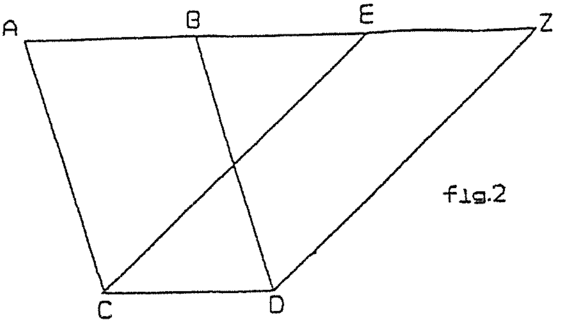


fig.2

Activités avec des élèves.

Nous avons tout d'abord proposé aux élèves de lire la proposition suivante:

Proposition 35: "*Les parallèlogrammes, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux*".

Le premier travail demandé aux élèves était de type oral. En effet, il nous semblait important, à l'occasion de cette lecture, de dégager les notions mise en oeuvre par Euclide et de lever dès le premier texte, les ambiguïtés générées par celui-ci. La première demande qui leur était faite était donc la lecture de la proposition 35, puis la réalisation d'une figure illustrant cette proposition. Cette étape a fait l'objet d'une vive discussion à propos des expressions "*même base*", et "*égaux entr'eux*". Les élèves ont en général facilement accepté les définitions qui leur étaient proposées, mais l'introduction de l'égalité d'aires associée à l'égalité de 'hauteur" a soulevé un second problème: "Pourquoi démontrer ceci puisque l'aire d'un parallèlogramme est égale au produit de la base par la hauteur?". Cette question a, bien-sûr, été au centre des débats tout au long du travail avec les élèves: comment faire abstraction de connaissances acquises par les élèves au cours de leur scolarité? Heureusement, un grand nombre d'élèves a admis l'intérêt d'un travail sur les aires sans numérisation pour en trouver l'aspect ludique.

La seconde étape a été la lecture de la démonstration d'Euclide. Nous leur avons demandé de dégager les propriétés utilisées ainsi que les notions communes: "*les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles;*" et "*si à des grandeurs égales, des grandeurs égales sont ajoutées, les touts seront égaux*".

Ce travail a permis de reécrire la démonstration d'Euclide en termes modernes. Les élèves ont dans leur ensemble bien cité les propriétés utilisées. L'égalité des angles correspondants leur était familière et le deuxième cas d'égalité des triangles, bien qu'ignoré, leur a semblé "évident" compte tenu de la possibilité qu'ils avaient d'utiliser la translation (voir texte en annexe).

Le second travail qui leur a été demandé portait sur la proposition 36 dont voici l'énoncé:

Proposition 36: "*Les parallèlogrammes, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, son égaux entr'eux*".

Le texte de la proposition ainsi que sa démonstration (voir annexe) leur étant fourni, les élèves devaient:

a) Lire la proposition 36 et sa démonstration puis dégager l'architecture de la démonstration.

b) Réécrire la démonstration en citant chaque notion ou théorème utilisés.

Un grand nombre d'élèves a réussi à mettre en évidence les différentes étapes de celle-ci, mais la rédaction a créé beaucoup de difficultés à la plupart d'entre-eux. Ces difficultés portaient en général sur une mauvaise utilisation des mots-clés du raisonnement.

Prop. 37: "*Les triangles construits sur la même base entre les mêmes parallèles sont égaux*".

Prop. 38: "*Des triangles construits sur des bases égales sont égaux entr'eux*".

Les propositions 37 et 38 ont fait l'objet d'un travail plus superficiel, l'accent étant surtout porté sur l'utilisation répétée des propositions précédentes. Les élèves ont tout de même été invités à relever les étapes successives de la proposition 37.

Il est à noter que l'on peut dès à présent démontrer la proposition 41: "*Si un parallèlogramme a la même base qu'un triangle, et s'il est entre les mêmes parallèles, le parallélogramme est double du triangle*".

L'étude de cette proposition n'a pas été effectuée avec les élèves et nous avons donc utilisé les propositions précédentes à chaque fois que cela était nécessaire.

Après l'étude de ces propositions, il était possible de s'intéresser à la proposition 47 du livre I, "Le théorème de Pythagore". Cette fois ci, le travail demandé était moins dirigé puisque les élèves étaient en possession de l'énoncé de la proposition, de sa démonstation par Euclide et d'un plan de travail (voir document annexe). En ce qui concerne le travail effectué par les élèves, nous pouvons signaler que l'exercice a été assez bien compris. Les élèves ont traité correctement les questions 1 à 6 qui n'envisageaient qu'un seul problème à la fois. Par contre, ils ont éprouvé de grosses difficultés à conduire le raisonnement de bout en bout dans la 7e question.

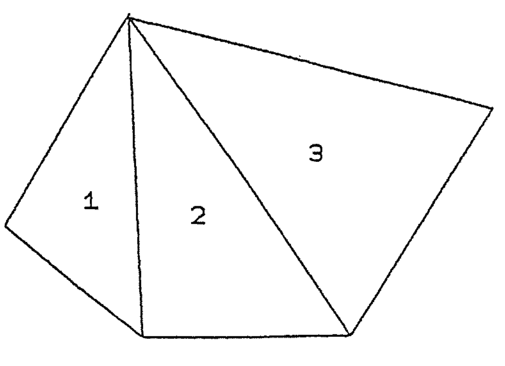
D'autres propositions du livre I.

Nous venons de voir que les 41 premières propositions sont suffisantes pour démontrer la proposition 47, point culminant du livre I. Pourquoi, alors, insérer les autres propositions ? L'intérêt est conforter la théorie: la méthode des puzzles permet toujours de découper une figure polygonale en un rectangle de même aire ayant une base donnée.

Proposition 42: "*Construire, dans un angle rectiligne donné, un parallèlogramme égal à un triangle donné*".

Proposition 44: "*A une droite donnée, et dans un triangle rectiligne donné, appliquer un parallélogramme égal à un triangle donné*".

Tout polygone peut se décomposer en triangles. Donnons-nous un angle (droit par exemple) et une longueur AB. Alors on sait construire, pour chaque triangle intervenant dans le découpage, un rectangle de base AB ayant même aire que le triangle. En "empilant" les rectangles, on obtient un rectangle de base donnée dont l'aire est celle du polygone de départ (voir figure). On peut donc toujours comparer deux polygones.



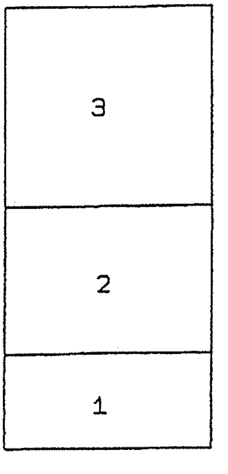


fig.3

Le livre II est une application de la méthode des aires: cette méthode permet de démontrer des égalités d'aires de polygones qui, numérisées et traduites en langage algébrique, sont équivalentes à nos identités remarquables. (Voir à ce sujet les notes de la traduction de Vitrac). Euclide résout également dans ce livre des problèmes de construction. Pour avoir une idée du type de résultats énoncés et démontrés, voici la proposition I du livre II: "*Si l'on a deux droites, et si l'une d'elle est coupée en tant de parties qu'on voudra, le rectangle contenu sous ces deux droites est égal aux rectangles contenus sous la droite qui n'a point été coupée, et sous chacun des segments de l'autre*".

Il est tentant d'algébriser un tel résultat et d'y reconnaître la distrivutivité de la multiplication par rapport à l'addition: $\lambda(a+b+c+d)=\lambda a+\lambda b+\lambda c+\lambda d$

Nous avons avec nos élèves, étudié la proposition II qui résout un problème de construction qu'on peut, à notre époque, ramener à la résolution d'une équation du second degré (voir Mnémosyne n°1).

La méthode des aires permet donc de démontrer des résultats importants (thm de Pythagore) et de résoudre des problèmes du "second degré". Cependant, elle se révèle insuffisante dès que l'on considère des rapports: on voit bien ce que peut signifier: "telle figure (n°1) est à telle autre (n°2) comme 2 est à 3" (si j'assemble trois figures n°1 et deux figures n°2, alors les figures obtenues ont même aire). Mais quel sens donner à une telle comparaison si les aires sont incommensurables (le problème est d'ailleurs le même pour les longueurs)?

Le livre V répond à cette question par la théorie des proportions, probablement due à Eudoxe. Euclide se préoccupe de raisons de grandeurs: ("*une raison, est certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entr'elles, suivant la quantité*") et définit de façon abstraite, mais néanmoins opératoire, l'égalité de raisons.

Définition 6: "*Des grandeurs sont dites être en en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque les équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois*".

Comment dirions-nous la même chose? Soient A,B,C,D, quatre grandeurs. A et B ont même raison que C et D si la condition suivante est respectée: pour m et n dans $\mathbb{N}$, on est toujours dans l'une de situations suivantes:

1) mA>nB et mC > nD
2) mA=nB et mC = nD
3) mA<nB et mC < nD.

Le second cas ne se rencontre que lorsque A et B (donc C et D) sont commensurables. Sinon on est toujours dans l'un des cas 1) ou 2) que l'on peut traduire par:

$$1)\ \frac{m}{n}>\frac{B}{A}\ et\ \frac{m}{n}>\frac{D}{C}\ ou 2)\frac{m}{n}<\frac{B}{A}\ et\ \frac{m}{n}<\frac{D}{C}.$$

On reconnait qu'on a la même raison lorsque, dans les deux cas, le partage des rationnels en rationnels plus petits et rationnels plus grands que la raison donnée est le même. On a envie de parler de coupures.

Comment une définition si abstraite peut-elle s'utiliser pratiquement? On la voit très bien fonctionner dans la proposition 1 du livre VI des éléments.

Proposition 1: "*Les triangles et parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs bases*".

Paraphasons Euclide: Soient deux triangles ABC et ACD ayant même hauteur. Prolongeons le segment $[BD]$de part et d'autre, de telle sorte que, d'une part, BC=BE=EF=FG=... et d'autre part, CD=DM=ML=...

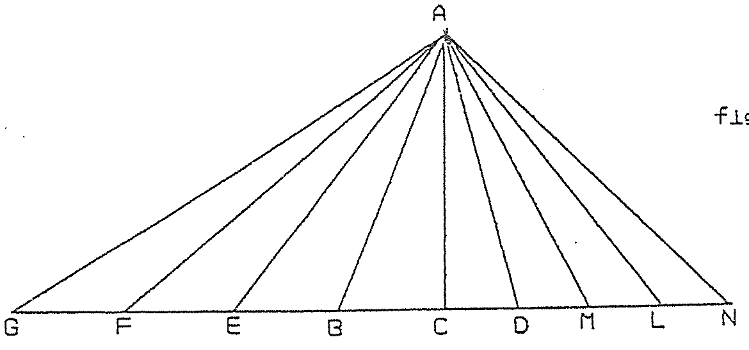


fig.4

Les triangles ABC, ABE, AEF, AFG,... sont égaux puisqu'ils ont même hauteur et que leurs bases sont égales (prop 38 Livre I). Il en est de même des triangles ACD, ADM, AML,.... Donc le triangle ACG et la base CG sont des équimultiples du triangle ABC et de la base BC. De même le triangle ACL et la base CL sont des equimultiples du triangle ACD et de la base CD. Les triangles ayant tous la même hauteur, d'après la proposition 38 du livre I, si la base CG est égale à CL, le triangle ACG est égal au triangle ACL, si la base CG surpasse CL, le triangle ACG surpasse ACL et enfin si la base CG est plus petite que CL alors le triangle ACG est plus petit que le triangle ACL. Nous sommes donc en présence de quatre grandeurs, ABC, ACD, BC, CD, qui vérifient les conditions de la définition 6 du livre V. On peut donc en déduire que les grandeurs ABC et ACD ont même raison que les grandeurs BC et CD. C'est à dire que "ABC est à ACD comme BC est à CD".

Cette propostion (sans sa démonstration) a permis d'étudier, avec les élèves d'une classe de seconde, la démonstration de la proposition 2 du livre VI, appelée "théorème de Thalès": "*Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle; et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle*".

Nous n'avons étudié avec les élèves que la démonstration dans le sens direct et non sa réciproque en raison du nombre de renvois nécessaires et de la difficulté du raisonnement d'Euclide. Au préalable, nous avions donné la proposition1 sans la démontrer mais en veillant à expliquer le vocabulaire et les expressions utilisées. La notion de proportionnalité avait déjà soulevé de nombreuses questions. Il avait été nécessaire de faire référence à leurs connaissances concernant le calcul de l'aire d'un triangle pour "convaincre" l'ensemble de la classe. Voici donc la façon dont nous avons procédé pour étudier la proposition 2 du livre VI avec les élèves.

Nous leur avons fourni le texte de la proposition ainsi que la traduction que nous leur demandions de lire. Ces textes étaient accompagnés d'un questionnaire que voici:

1) Ecrire en langage moderne les lignes 5 et 6.
2) Montrer l'égalité des aires des triangles $E\Delta\Gamma et E\Delta B$ (lignes 8 et 9).
3) Ecrire à l'aide de rapports, l'égalité énoncée lignes 11 et 12.
4) Ecrire à l'aide de rapports, les égalités énoncées ligne 12 et ligne 15 puis les justifier.
5) Ecrire la conclusion à laquelle vous êtes arrivés.

Ce travail était proposé en travaux dirigés et a été l'occasion de nombreuses discussions. Un certain nombre de commentaires s'imposent.

- L'absence de numérisation a été un obstacle pour beaucoup d'élèves.

- La configuration étudiée n'était pas toujours placée "dans le bon sens" (les élèves sont en général habitués à avoir la base "en bas" du triangle et donc la hauteur "verticale") ce qui entraînait une difficulté de compréhension de l'expression: "compris entre les mêmes parallèles".

- L'idée de démontrer ce théorème, maintes fois utilisé mais rarement compris, a paralysé de nombreux élèves, focalisés sur le résultat.

- Enfin, il faut préciser que nous n'avons pas abordé la réciproque du théorème en raison de la lourdeur des pré-requis nécessaires à sa démonstration.

Certains élèves (les meilleurs) ont bien senti l'intérêt de la démarche et ont "joué le jeu" de la démonstration euclidienne. En ce qui concerne les autres élèves, il nous a semblé que seuls quelques élèves en grande difficulté ont su profiter d'une nouvelle façon de présenter ce théorème. Ils s'en sont trouvés valorisés, car ils n'étaient plus en échec par rapport à l'ensemble de la classe. Les élèves "moyens" ont souvent considéré cet exercice comme une "bizarrerie" de leur professeur. Pour autant, on peut considérer que l'ensemble de la classe a admis cette démonstration, même si tous n'ont pas été convaincus par son utilité.

Pour achever notre propos, nous nous intéresserons aux propositions 12, 14 et 23 du livre VI qui illustrent bien les possibilités de la méthode des aires.

Proposition 12: "*Trois droites étant données, trouver une quatrième proportionnelle*".

AB, BC, AD étant des longueurs données, telles que A,B,C soient alignés et D ne soit pas sur la droite (AB), on trace la parallèle à BD passant par C. Elle coupe (AD) au point E. Alors, d'après la proposition VI2, AB est à BC comme AD est à DE. On a ainsi construit la quatrième proportionnelle.

Proposition 14: "*Deux parallélogrammes étant égaux et équiangles, les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels; et les parallélogrammes équiangles dont les côtés autour des angles sont réciproquement proportionnels, sont égaux entr'eux*".

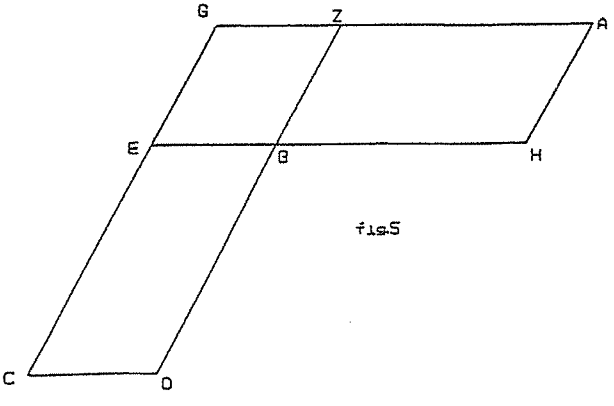


fig.5

Comme dans les *Eléments*, les parallélogrammes seront notés par une de leurs diagonales.

Le parallélogramme AB est au parallélogramme ZE comme le parallélogramme BC est au parallélogramme ZE (puisque #AB = #BC). Mais le parallélogramme AB est au parallélogramme ZE comme BD est à BE (Prop.VI 1). De même le parallélogramme BC est au parallélogramme ZE comme BH est à BZ. Donc BD est à BE comme BH est à BZ (nous dirons :

$\frac{BD}{BE}=\frac{BH}{BZ}$,c'est à dire que les côtés autour des angles sont réciproquement proportionnels).

La réciproque s'obtient de la même façon.

Proposition 23: "Les parallélogrammes ont entr'eux une raison composée[1] des côtés".

Soit K une longueur quelconque et L une longueur telle que BC est à CH comme K est à L. Soit de plus d'une longueur M telle que DC est à CE comme L est à M. L'existence d'une quatrième proportionnelle, assurée par la proposition VI 12, permet d'assurer l'existence de L, puis celle de M, donc de parler de la raison de K à M, composée des raisons de K à L et de L à M, c'est à dire composée des raisons de BC à CH et de DC à CE (raison composée des côtés[2]). Le parallélogramme BD est au parallélogramme CG comme BC est à CH, i.e. comme K est à L. Le parallélogramme CG est au parallélogramme CZ comme DC est à CE, i.e. comme L est à M, donc le parallélogramme BD est au parallélogramme CZ comme K est à M, i.e. comme la raison composée des côtés. Un mathématicien moderne transcrira la raison des rapports de rééls et écrira $\frac{a_1}{a_2}=\frac{l_1L_1}{l_2L_2}$: l'aires des parallélogrammes équiangles est proportionnelle au produit des côtés. Evidence ou pas?

La méthode des puzzles fonctionne bien lorsque les côtés sont rationnels, mais sinon? On peut toujours remplir un rectangle avec un quadrillage de plus en plus fin, puis effectuer un passage à la limite.

Ce que prouve le livre VI, c'est que le résultat de base sur l'aire des rectangles ne nécessite aucun passage à la limite, qu'il ne relève pas du calcul infinitésimal et peut se démontrer avec comme seuls outils la méthode des aires et, bien sûr, la théorie des proportions.

Qu'en est-il dans l'espace? La "pièce" de base est alors la pyramide et on ne peut pas concevoir de méthode équivalente à la méthode des aires pour en calculer le volume. Euclide, lui-même, utilise la méthode dite d'exhaustion qui s'apparente à un calcul infinitésimal sans avoir recours à l'infini. (Pour plus d'informations à ce propos, voir "Histoires de pyramides" de Michèle Grégoire, Mnémosyne Numéro spécial I, édité par l'IREM de Paris VII).

---

[1] Précisons ce qu'est une raison composée: soit trois grandeurs homogènes A, B, C. La raison composée des raisons de A à B et de B à C est la raison de A à C. On ne peut donc composer des raisons que par l'intermédiaire de raisons ayant un terme commun, ce qui explique la lourdeur de la démonstration.

[2] Euclide a d'ailleurs montré au livre V que cette notion de raison composée a bien un sens. Si on choisit K'#K, alors on peut définir L' et M' comme L et M et il montre que la raison de K' à M' est égale à celle de K à M.

LE PREMIER LIVRE

DES ELEMENTS D'EUCLIDE

DEFINITIONS

1. Le point est ce dont la partie est nulle.
2. Une ligne est une longueur sans largeur.
3. Les extrémités d'une ligne sont des points.
4. La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.

30. Parmi les figures quadrilatères, le quarré est celle qui est équilatérale et rectangulaire.
31. Le rectangle, celle qui est rectangulaire, et non équilatérale.
32. La rhombe, celle qui est équilatérale, et non rectangulaire.
33. Le rhomboïde, celle qui a ses côtés et ses angles opposés égaux entre eux, et qui n'est ni équilatérale ni rectangulaire.
34. Les autres quadrilatères, ceux-là exceptés, se nomment trapèzes.
35. Les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.

DEMANDES

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.
2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.
3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.
6. Deux droites ne renferment point un espace.

NOTIONS COMMUNES

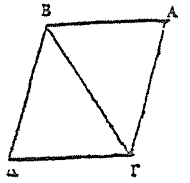
1. Les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles.
2. Si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux.
3. Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux.
4. Si à des grandeurs inégales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront inégaux.
5. Si de grandeurs inégales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux.
6. Les grandeurs, qui sont doubles d'une même grandeur, sont égales entre elles.
7. Les grandeurs, qui sont les moitiés d'une même grandeur, sont égales entre elles.
8. Les grandeurs, qui s'adaptent entre elles, sont égales entre elles.
9. Le tout est plus grand que la partie.

PROPOSITION XXXIII

Les droites qui joignent, des mêmes côtés, des droites égales et parallèles, sont elles-mêmes égales et parallèles.

Soient AB, ΓΔ deux droites égales et parallèles; que les droites AΓ, BΔ les joignent des mêmes côtés; je dis que les droites AΓ, BΔ sont égales et parallèles.

Joignons BΓ.



Puisque AB est parallèle à ΓΔ, et que BΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ABΓ, BΓΔ sont égaux entr'eux (29). De plus, puisque AB est égale à ΓΔ, et que la droite BΓ est commune, les deux droites AB, BΓ sont égales aux deux droites ΓΔ, BG; mais l'angle ABΓ est égal à l'angle BΓΔ; donc la base AΓ est égale à la base BΔ, le triangle ABΓ est égal au triangle BΓΔ, et les angles restants, opposés à des côtés égaux, seront égaux, chacun à chacun (4); donc l'angle AΓB est égal à l'angle ΓBΔ. Mais la droite BΓ tombant sur les deux droites AΓ, BΔ fait les angles alternes AΓB, ΓBΔ égaux entr'eux; donc la droite AΓ est parallèle à la droite BΔ (27). Mais on a démontré qu'elle lui est égale; donc, etc.

PROPOSITION XXXIV

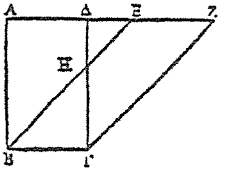
Les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux, et la diagonale les partage en deux parties égales.

Soit le parallélogramme AΓΔB, et que BΓ soit sa diagonale; je dis que les côtés et les angles opposés du parallélogramme AΓΔB sont égaux entr'eux, et que la diagonale BΓ le partage en deux parties égales.

PROPOSITION XXXV

Les parallélogrammes, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

Que les parallélogrammes ABΓΔ, EBΓZ soient construits sur la même base BΓ, et entre les mêmes parallèles AZ, BΓ; je dis que le parallélogramme ABΓΔ est égal au parallélogramme EBΓZ.

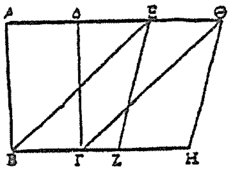


Car puisque ΑΒΓΔ est un parallélogramme, ΑΔ est égal à ΒΓ (34); par la même raison, ΕΖ est égale à ΒΓ; donc ΑΔ est égal à ΕΖ; mais la droite ΔΕ est commune; donc la droite totale ΑΕ est égale à la droite totale ΔΖ (not. 2); mais ΑΒ est égal à ΔΓ (34); donc les deux droites ΕΑ, ΑΒ sont égales aux deux droites ΖΔ, ΔΓ, chacune à chacune; mais l'angle extérieur ΖΔΓ est égal à l'angle intérieur ΕΑΒ (29); donc la base ΕΒ est égale à la base ΖΓ (4); donc le triangle ΕΑΒ sera égal au triangle ΔΓΖ. Retranchons la partie commune ΔΗΕ; le trapèze restant ΑΒΗΔ sera égal au trapèze restant ΕΗΓΖ (not. 3); ajoutons le triangle commun ΗΒΓ, le parallélogramme total ΑΒΓΔ sera égal au parallélogramme total ΕΒΓΖ. Donc, etc.

PROPOSITION XXXVI

Les parallélogrammes, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

Que les parallélogrammes ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ soient construits sur des bases égales ΒΓ, ΖΗ, et entre les mêmes parallèles ΑΘ, ΒΗ; je dis que le parallélogramme ΑΒΓΔ est égal au parallélogramme ΕΖΗΘ.



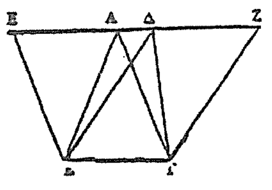
Joignons ΒΕ, ΓΘ.

Puisque ΒΓ est égal à ΖΗ, et ΖΗ égal à ΕΘ, la droite ΒΓ est égale à ΕΘ; mais les droites ΒΕ, ΓΘ joignent ces droites qui sont parallèles, et les droites qui joignent des mêmes côtés deux droites égales et parallèles, sont égales et parallèles (35); donc les droites ΕΒ, ΓΘ sont égales et parallèles; donc ΕΒΓΘ est un parallélogramme, et ce parallélogramme est égal au parallélogramme ΑΒΓΔ (35); car il a la même base ΒΓ que lui, et il est construit entre les mêmes parallèles. Par la même raison le parallélogramme ΕΖΗΘ est égal au parallélogramme ΕΒΓΘ; donc le parallélogramme ΑΒΓΔ est égal au parallélogramme ΕΖΗΘ. Donc, etc.

PROPOSITION XXXVII

Les triangles, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux.

Que les triangles ΑΒΓ, ΔΒΓ soient sur la même base ΒΓ et entre les mêmes parallèles ΑΔ, ΒΓ; je dis que le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΔΒΓ.



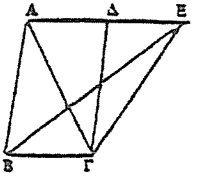
PROPOSITION XXXVIII

Des triangles, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

Que les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ soient construits sur des bases égales ΒΓ, ΕΖ et entre les mêmes parallèles ΒΖ, ΑΔ; je dis que le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΔΕΖ.

PROPOSITION XLI

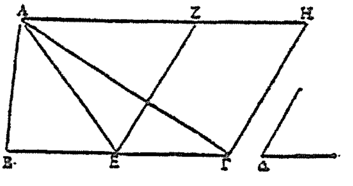
Si un parallélogramme a la même base qu'un triangle, et s'il est dans les mêmes parallèles, le parallélogramme est double du triangle.



PROPOSITION XLII

Construire, dans un angle rectiligne donné, un parallélogramme égal à un triangle donné.

Soit ΑΒΓ le triangle donné, et Δ l'angle rectiligne donné; il faut construire un parallélogramme égal au triangle ΑΒΓ dans l'angle rectiligne Δ.



Coupons la droite ΒΓ en deux parties égales en Ε (10), joignons ΑΕ, sur la droite ΕΓ, et au point Ε de cette droite construisons un angle ΓΕΖ égal à l'angle Δ (25), par le point Α conduisons ΑΗ parallèle à ΕΓ (31), et par le point Γ conduisons ΓΗ parallèle à ΕΖ; la figure ΖΕΓΗ sera un parallélogramme.

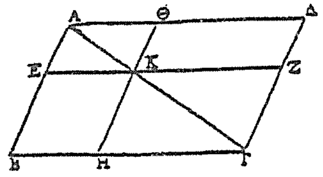
Puisque ΒΕ est égal à ΕΓ, le triangle ΑΒΕ est égal au triangle ΑΕΓ (38), car ils sont sur des bases égales ΒΕ, ΕΓ, et entre les mêmes parallèles ΒΓ, ΑΗ; donc le triangle ΑΒΓ est double du triangle ΑΕΓ. Mais le parallélogramme ΖΕΓΗ est double du triangle ΑΕΓ (41), car il a la même base que lui, et il est dans les mêmes parallèles; donc le parallélogramme ΖΕΓΗ est égal au triangle ΑΒΓ (not.6), et il a l'angle ΓΕΖ égal à l'angle donné Δ.

Donc le parallélogramme ΖΕΓΗ a été construit égal au triangle ΑΒΓ dans un angle qui est ΓΕΖ égal à l'angle donné Δ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XLIII

Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes, autour de la diagonale, sont égaux entr'eux.

Suit le parallélogramme ΑΒΓΔ, que ΑΓ soit sa diagonale, qu'autour de ΑΓ soient les parallélogrammes ΕΘ, ΖΗ, et les parallélogrammes ΒΚ, ΚΔ qu'on appelle compléments; je dis que le complément ΒΚ est égal au complément ΚΔ.



Car puisque ΑΒΓΔ est un parallélogramme, et que ΑΓ est sa diagonale, le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΑΓΔ (34). De plus, puisque ΕΚΘΑ est un parallélogramme, et que ΑΚ est sa diagonale, le triangle ΑΕΚ est égal au triangle ΑΘΚ; le triangle ΚΖΓ est égal au triangle ΚΗΓ, par la même raison; donc puisque le triangle ΑΕΚ est égal au triangle ΑΘΚ, et le triangle ΚΖΓ égal au triangle ΚΗΓ, le triangle ΑΕΚ, avec le triangle ΚΗΓ, est égal au triangle ΑΘΚ avec le triangle ΚΖΓ; mais le triangle entier ΑΒΓ est égal au triangle entier ΑΔΓ; donc le complément restant ΒΚ est égal au complément restant ΗΔ (not. 3). Donc, etc.

PROPOSITION XLIV

A une droite donnée, et dans un angle rectiligne donné, appliquer un parallélogramme égal à un triangle donné.

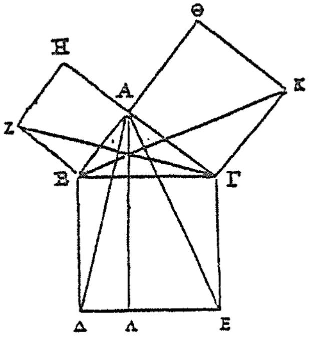
Que ΑΒ soit la droite donnée, Γ le triangle donné, et Δ l'angle rectiligne donné; il faut sur la droite ΑΒ et dans un angle égal à Δ, appliquer un parallélogramme égal au triangle donné Γ.

PROPOSITION XLVII

Dans les triangles rectangles, le quarré du côté opposé à l'angle droit est égal aux quarrés des côtés qui comprennent l'angle droit.

Soit ΑΒΓ un triangle rectangle, que ΒΑΓ soit l'angle droit; je dis que le quarré du côté ΒΓ est égal aux quarrés des côtés ΒΑ, ΑΓ.

Décrivons avec ΒΓ le quarré ΒΔΕΤ, et avec ΒΑ, ΑΓ les quarrés ΗΒ, ΔΓ; et par le point Α conduisons ΑΛ parallèle à l'une ou l'autre des droites ΒΔ, ΓΕ; et joignons ΑΔ, ΖΓ.



Puisque chacun des angles BAΓ, BAH est droit, les deux droites AΓ, AH, non placées du même côté, font avec la droite BA au point A de cette droite, deux angles de suite égaux à deux droits; donc la droite ΓA est dans la direction de AH; la droite BA est dans la direction AΘ, par la même raison. Et puisque l'angle ΔBΓ est égal à l'angle ZBA, étant droits l'un et l'autre, si nous leur ajoutons l'angle commun ABΓ, l'angle entier ΔBA sera égal à l'angle entier ZBΓ (not. 4). Et puisque ΔB est égal à BΓ, et ZB à BA, les deux droites ΔB, ΔA sont égales aux deux droites ΓB, BZ, chacune à chacune; mais l'angle ΔBA est égal à l'angle ZBΓ; donc la base AΔ est égale à la base ZΓ, et le triangle ABΔ égal au triangle ZBΓ (4). Mais le parallélogramme BΔ est double du triangle ABΔ (41), car ils ont la même base BΔ et ils sont entre les mêmes parallèles BΔ, AΛ; le quarré BH est double du triangle ZBΓ, car ils ont la même base BZ et ils sont entre les mêmes parallèles ZB, HΓ; et les grandeurs qui sont doubles de grandeurs égales, sont égales entr'elles; donc le parallélogramme BΛ est égal au quarré HB. Ayant joint AE, BK, nous démontrerons semblablement que le parallélogramme ΓΛ est égal au quarré ΘΓ; donc le quarré entier BΔEΓ est égal aux deux quarrés HB, ΘΓ. Mais le carré BΔEΓ est décrit avec BA, AΓ; BA, AΓ; donc le quarré du côté BΓ est égal aux quarrés des côtés BA, AΓ. Donc dans les triangles, etc.

LE DEUXIEME LIVRE

DES ELEMENTS D'EUCLIDE

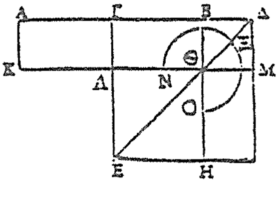
PROPOSITION VI

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute directement une droite, le rectangle compris sous la droite entière avec la droite ajoutée, et sous la droite ajoutée, avec le quarré de la moitié de la droite entière, est égal au quarré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite.

Qu'une ligne droite AB soit coupée en deux parties égales au point Γ; qu'on lui ajoute directement une autre droite BΔ; je dis que le rectangle compris sous AΔ, ΔB, avec le quarré de ΓB, est égal au quarré de ΓΔ.

Avec la droite ΓΔ décrivons le quarré ΓΕΖΔ (46.I); joignons ΔΕ; par le point B conduisons BH parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΕ, ΔΖ (3I. I); par le point Θ, conduisons KM parallèle à l'une ou à l'autre des droites AΔ, EZ, et enfin par le point A conduisons AK parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΛ, ΔM.

Puisque AΓ est égal à ΓB, le rectangle AΛ est égal au rectangle ΓΘ (56.I). Mais le rectangle ΓΘ est égal au rectangle ΘΖ (43.I); donc le rectangle ΛA est égal au rectangle ΘΖ; ajoutons le rectangle commun ΓM, le rectangle entier AM sera égal au gnomon NΞO. Mais AM est le rectangle sous AΔ, ΔB, car ΔM est égal à ΔB (4.2); donc le gnomon NΞO est égal au rectangle compris sous AΔ, ΔB. Ajoutons le quarré ΛH qui est égal au quarré de ΓB, le rectangle compris sous AΔ, ΔB avec le quarré de ΓB sera égal au gnomon NΞO et au



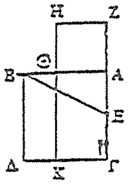
quarré ΛH. Mais le gnomon NΞO, et le quarré ΛH sont le quarré entier ΓΕΖΔ, qui est le quarré de ΓΔ; donc le rectangle compris sous AΔ, ΔB avec le quarré de ΓB est égal au quarré de ΓΔ. Donc, etc.

PROPOSITION XI

Couper une droite donnée, de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au quarré du segment restant.

Soit AB la droite donnée; il faut couper AB de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au quarré du segment restant.

Avec la droite AB décrivons le quarré ABΔΓ (46.I); coupons AΓ en deux parties égales au point E (10.I); joignons BE, prolongeons ΓA vers Z; faisons EZ égal à BE (3.I); décrivons avec AZ le quarré ZΘ; et prolongeons HΘ vers K; je dis que la droite AB est coupée en Θ, de manière que le rectangle compris sous AB, BΘ est égal au quarré de AΘ.



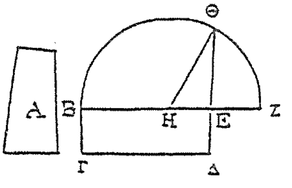
Puisque la droite AΓ est coupée en deux parties égales en E, que AZ lui est ajoutée; le rectangle compris sous les droites ΓZ, ZA avec le quarré de AE est égal au quarré de EZ (6.2). Mais EZ est égal à EB; donc le rectangle compris sous ΓZ, ZA avec le quarré de AE, est égal au quarré de EB. Mais les quarrés des droites BA, AE sont égaux au quarré de EB (47.I), car l'angle en A est droit; donc le rectangle sous ΓZ, ZA avec le quarré de AE est égal aux quarrés des droites BA, AE. Retranchons le quarré de AE; le rectangle restant compris sous ΓZ, ZA sera égal au quarré de AB. Mais le rectangle sous les droites ΓZ, ZA est le rectangle ZK, parce que AZ est égal à ZH, et le quarré de AB est le quarré AΔ; donc le rectangle ZK est égal au quarré AΔ. Retranchons le rectangle commun AK; le quarré restant ZΘ sera égal au rectangle GΔ. Mais ZΘ est le quarré de AΘ, et ΘΔ est le rectangle sous AB, BΘ; donc le rectangle compris sous AB, BΘ est égal au quarré de ΘA.

Donc la droite AB est coupée en Θ, de manière que le rectangle compris sous AB, BΘ est égal au quarré de ΘA; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XIV

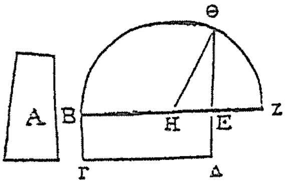
Construire un quarré égal à une figure rectiligne donnée.

Soit A la figure rectiligne donnée; il faut construire un quarré égal à cette figure rectiligne.



Construisons un parallélogramme rectangle BΔ égal à la figure rectiligne donnée A (45.I). Si BE était égal à EΔ, on aurait fait ce qui était proposé; car le quarré BΔ aurait été construit égal à la figure rectiligne A. Si cela n'est pont, l'un des côtés BE, EΔ est plus grand que l'autre. Que BE soit le plus grand, prolongeons-le vers Z, et faisons EZ égal à EΔ (3.I); coupons BZ en deux parties égales au point H; du centre H et d'un intervalle égal à l'une des droites HB, HZ, décrivons la demi-circonférence BΘZ (dem.3); prolongeons ΔE vers Θ, et joingons HΘ.

Puisque BZ est partagé en deux parties égales au point H, et en deux parties inégales au point E; le rectangle compris sous BE, EZ avec le quarré de HE, est égal au quarré de HZ (5.2). Mais HZ est égal à HΘ; donc le rectangle compris sous BE, EZ avec le quarré de HE est égal au quarré de HΘ. Mais les quarrés des droites ΘE, EH sont égaux au quarré de HΘ (47.I); donc le



rectangle compris sous BE, EZ avec le quarré de HE, est égal aux quarrés de droites ΘE, EH. Retranchons le quarré commun de HE; le rectangle restant compris sous BE, EZ sera égal au quarré de EΘ. Mais le rectangle compris sous BE, EZ est le rectangle compris sous BE, EΔ, puisque la droite EZ est égale à la droite EΔ; donc le parallélogramme BΔ est égal au quarré de ΘE. Mais BΔ est égal à la figure rectiligne A; donc la figure rectiligne A est égale au quarré de EΘ.

Donc le quarré décrit avec EΘ a été construit égal à la figure rectiligne donnée A; ce qu'il fallait faire.

FIN DU DEUXIEME LIVRE

LE CINQUIEME LIVRE

DES ELEMENTS D'EUCLIDE

DEFINITIONS

1. Une grandeur est partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand la plus petite mesure la plus grande.

2. Une grandeur plus grande est multiple d'une grandeur plus petite, quand la plus grande est mesurée par la plus petite.

3. Une raison, est certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entr'elles, suivant la quantité.

4. Une proportion est une identité de raisons.

5. Des grandeurs sont dites avoir une raison entr'elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.

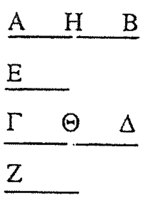
6. Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois.

7. Les grandeurs qui ont la même raison sont dites proportionnelles.

PROPOSITION PREMIERE

Si l'on a tant de grandeurs que l'on voudra, égales en nombre à d'autres grandeurs, chacune des premières étant le même équimultiple de chacune des secondes, une des premières grandeurs sera le même multiple d'une des secondes que la somme des premières l'est de la somme des secondes.

Soient AB, ΓΔ (245), tant de grandeurs qu'on voudra égales en nombre à d'autres grandeurs E, Z, chacune étant le même multiple de chacune; je dis que AB est le même multiple de E, que la somme de AB et de ΓΔ l'est de la somme de E et de Z.



Puisque AB est multiple de E, que ΓΔ l'est de Z, il y aura dans AB autant de grandeurs égales à E, qu'il y a de grandeurs égales à Z. Partageons AB en grandeurs égales à E, et que ces grandeurs soient AH, HB; partageons aussi ΓΔ en grandeurs égales à Z, et que ces grandeurs soient ΓΘ, ΘΔ. Le nombre des parties ΓΘ, ΘΔ sera égal au nombre des parties AH, HB. Mais AH est égal à E, et ΓΘ égal à Z; donc la somme de AH et de ΓΘ sera égale à la somme de E et de Z. Par la même raison, HB est égal à E, et ΘΔ à Z; donc la somme de HB et de ΘΔ est égale à la somme de E et de Z. Il y a donc dans AB autant de grandeurs égales à E, qu'il y a dans la somme de AB et de ΓΔ de grandeurs égales à la somme de E et de Z. Donc AB est le même multiple de E que la somme de AB et ΓΔ l'est de la somme de E et de Z. Donc, etc.

PROPOSITION VII

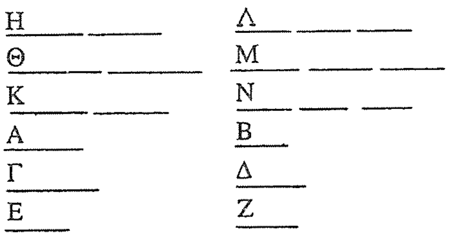
Des grandeurs égales ont la même raison avec une même grandeur, et une même grandeur a la même raison avec des grandeurs égales.

Soient les grandeurs égales A, B, et Γ une autre grandeur quelconque; je dis que chacune des grandeurs A, B a la même raison avec Γ, et que Γ a la même raison avec chacune des grandeurs A, B.

PROPOSITION XII

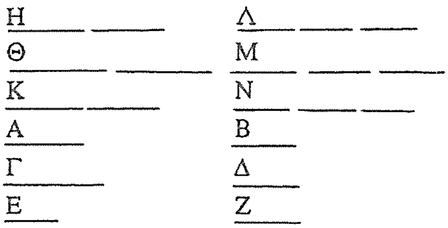
Si tant de grandeurs qu'on voudra sont proportionnelles, un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents.

Soient A, B, Γ, Δ, E, Z tant de grandeurs proportionnelles qu'on voudra; que A soit à B comme Γ est à Δ et comme E est à Z; je dis que A est à B comme la somme des antécédents A, Γ, E est à la somme des grandeurs B, Δ, Z.



Prenons des équimultiples quelconques H, Θ, K des grandeurs A, Γ, E, et d'autres équimultiples quelconques Λ, M, N des grandeurs B, Δ, Z.

Puisque A est à B comme Γ est à Δ, et comme E est à Z; que l'on a pris des équimultiples quelconques H, Θ, K des grandeurs A, Γ, E, et d'autres équimultiples quelconques Λ, M, N des grandeurs B, Δ, Z; si H surpasse Λ, Θ surpasse M, et K surpasse N; si H est égal à Λ, Θ est égal à M, et K égal à N; et si H est plus petit que Λ, Θ est plus petit que N, et K plus petit que N (déf. 6. 5). Donc, si H surpasse Λ, la somme des grandeurs H, Θ, K surpasse la somme des grandeurs Λ, M, N; si H est égal à Λ, la somme des grandeurs H, Θ, K est égale à la somme des grandeurs Λ, M, N; et si H est plus petit que Λ, la somme des grandeurs H, Θ, K est plus petite que la somme des grandeurs Λ, M, N. Mais la grandeur H et la somme des grandeurs H, Θ, K sont des équimultiples de la grandeur A et des grandeurs A, Γ, E, parce que si tant de grandeurs qu'on voudra sont les mêmes multiples d'autres grandeurs égales en



nombre, chacune de chacune, la somme des premières grandeurs est le même multiple de la somme des secondes, qu'une de ces grandeurs l'est d'une de ces grandeurs (I.5). Par la même raison, la grandeur Λ et la somme des grandeurs Λ, Μ, Ν sont des équimultiples de la grandeur Β et de la somme des grandeurs Β, Δ, Ζ; donc Α est à Β comme la somme des grandeurs Α, Γ, Ε est à la somme des grandeurs Β, Δ, Ζ (déf. 6. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XVI

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles seront proportionnelles par permutation.

Soient les quatre grandeurs proportionnelles Α, Β, Γ, Δ, c'est à dire que Α soit à Β comme Γ est à Δ; je dis que ces grandeurs sont proportionnelles par permutation, c'est-à-dire que Α est à Γ comme Β est à Δ.

LE SIXIEME LIVRE

DES ELEMENTS D'EUCLIDE

DEFINITIONS

1. Les figures rectilignes semblables sont celles qui ont les angles égaux chacun à chacun, et dont les côtés autour des angles égaux sont proportionnels.

2. Les figures sont réciproques, lorsque les antécédents et les conséquents des raisons se trouvent dans l'une et l'autre figure.

3. Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison, lorsque la droite entière est au plus grand segment comme le plus grand segment est au plus petit.

4. La hauteur d'une figure est la perpendiculaire menée du sommet sur la base.

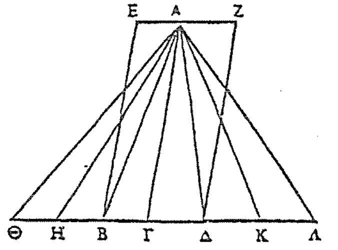
PROPOSITION PREMIERE

Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.

Soient les triangles ΑΒΓ, ΑΓΔ, et les parallélogrammes ΕΓ, ΓΖ, ayant la même hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point Α sur ΒΔ; je dis que la base ΒΓ est à la base ΓΔ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ, et comme le parallélogramme ΕΓ est au parallélogramme ΓΖ.

Prolongeons la droite ΒΔ de part et d'autre vers les points Θ, Λ; prenons tant de droites qu'on voudra ΒΗ, ΗΘ égales chacune à la base ΒΓ, et tant de droites qu'on voudra ΔΚ, ΚΛ, égales chacune à la base ΓΔ; joignons ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Puisque les droites ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ sont égales entr'elles, les triangles ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ sont égaux entr'eux (38. I); donc le triangle ΑΘΓ est le même multiple du triangle ΑΒΓ que la base ΘΓ l'est de la base ΒΓ. Par la même raison, le triangle ΑΛΓ est le même multiple du triangle ΑΓΔ que la base ΓΛ l'est de la base ΓΔ. Donc si la base ΘΓ est égale à la base ΓΛ, le triangle ΑΘΓ est égal au triangle ΑΛΓ; si la base ΘΓ surpasse la base ΓΔ, le triangle ΑΘΓ surpasse le triangle ΑΛΓ (38. I); et si la base ΘΓ est plus petite que la base ΓΛ, le triangle ΑΘΓ est plus petit que le triangle ΑΛΓ. Ayant donc quatre grandeurs, les deux bases ΒΓ, ΓΔ ; et les deux triangles ΑΒΓ, ΑΓΔ, on a pris des équimultiples quelconques de la base ΒΓ, et du triangle ΑΒΓ, savoir, la base ΘΓ et le triangle ΑΘΓ; on a pris aussi d'autres équimultiples quelconques de la base ΓΔ et du triangle ΑΓΔ, savoir, la base ΓΛ et le triangle ΑΛΓ; et l'on a démontré que si la base ΘΓ surpasse la base ΓΛ, le triangle ΑΘΓ surpasse le triangle ΑΛΓ; que si la base ΘΓ est égale à la base ΓΛ, le triangle ΑΘΓ est égal au triangle ΑΛΓ, et que si la base ΘΓ est plus petite que la base ΓΛ, le triangle ΑΘΓ est plus petit que le triangle ΑΛΓ; donc la base ΒΓ est à la base ΓΔ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ (déf. 6. 5.).



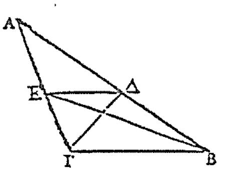
Puisque le parallélogramme EΓ est double du triangle ABΓ, que le parallélogramme ZΓ est double aussi du triangle AΓΔ (prop. 41. I), et que les parties ont entr'elles la même raison que leurs équimultiples (prop. 15 5), le triangle ABΓ est au triangle AΓΔ comme le parallélogramme EΓ est au parallélogramme ZΓ. Puisqu'on a démontré que la base BΓ est à la base ΓΔ comme le triangle ABΓ est au triangle AΓΔ, et puisque le triangle ABΓ est au triangle AΓΔ comme le parallélogramme EΓ est au parallélogramme ZΓ, la base BΓ est à la base ΓΔ comme le parallélogramme EΓ est au parallélogramme ZΓ (II.5). Donc, etc.

PROPOSITION II

Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle; et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle.

Menons ΔE parallèle à un des côtés BΓ du triangle ABΓ; je dis que BΔ et à ΔA comme ΓE est à EA.

Joignons BE, ΓΔ.



Le triangle BΔE sera égal au triangle ΓΔE (37.1), parce qu'ils ont la même base ΔE, et qu'ils sont compris entre les mêmes parallèles ΔE, BΓ. Mais AΔE est un autre triangle; et des grandeurs égales ont la même raison avec une même grandeur (7.5); donc le triangle BΔE est au triangle AΔE comme le triangle ΓΔE est au triangle AΔE. Mais le triangle BΔE est au triangle AΔE comme BΔ est à ΔA; car ces deux triangles, qui ont la même hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point E sur la droite AB, sont entr'eux comme leurs bases (I.6). Par la même raison le triangle ΓΔE est au triangle AΔE comme ΓE est à EA; donc BΔ est à ΔA comme ΓE est à EA (II.3).

Mais que les côtés AB, AΓ du triangle ABΓ soient coupés proportionnellement aux points Δ, E, c'est à dire que BΔ soit à ΔA comme ΓE est à EA, et joignons ΔE; je dis que ΔE est parallèle à BΓ.

Faisons la même construction. Puisque BΔ est à ΔA comme ΓE est à EA, que BΔ est à ΔA comme le triangle BΔE est au triangle AΔE (I.6), et que ΓE est à EA comme le triangle ΓΔE est au triangle AΔE, le triangle BΔE est au triangle AΔE comme le triangle ΓΔE est au triangle AΔE (II.5). Donc chacun des triangles BΔE, ΓΔE a la même raison avec le triangle AΔE. Donc le triangle BΔE est égal au triangle ΓΔE (9.5); et ils sont sur la même base ΔE. Mais les triangles égaux et construits sur la même base sont entre les mêmes parallèles (39.I). Donc ΔE est parallèle à BΓ. Donc, etc.

PROPOSITION III

Si un angle d'un triangle est partagé en deux parties égales, et si la droite qui partage cet angle coupe la base, les segments de la base auront la même raison que les côtés restants de ce triangle; et si les segments de la base ont la même raison que les autres côtés du triangle, la droite menée du sommet à la section, partagera l'angle de ce triangle en deux parties égales.

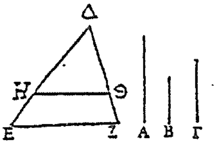
Soit le triangle ABΓ, que l'angle BAΓ soit partagé en deux parties égales par la droite AΔ; je dis que BΔ est à ΔΓ comme BA est à AΓ.

PROPOSITION XII

Trois droites étant données, trouver une quatrième proportionnelle.

Soient A, B, Γ les droites données; il faut trouver une quatrième proportionnelle aux droites A, B, Γ.

Soient les deux droites ΔE, ΔZ, comprenant un angle quelconque EΔZ; faisons la droite ΔH égale à A, la droite HE égale à B, et la droite ΔΘ égale à Γ; et ayant joint HΘ, par le point E menons EZ parallèle à HΘ.



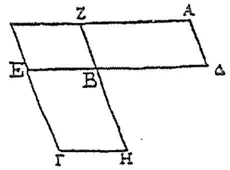
Puisque la droite HΘ est parallèle à un des côtés EZ du triangle ΔEZ, la droite ΔH est à HE comme ΔΘ est à ΘZ (2.6). Mais ΔH est égal à A, la droite HE égale à B, et la droite ΔΘ égale à Γ; donc A est à B comme Γ est à ΘZ.

Donc trois droites A, B, Γ étant données, on a trouvé une quatrième proportionnelle ΘZ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XIV

Deux parallélogrammes étant égaux et équiangles, les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels; et les parallélogrammes équiangles dont les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels, sont égaux entr'eux.

Soient AB, BΓ deux parallélogrammes égaux et équiangles, ayant deux angles égaux en B, plaçons BE dans la direction de ΔB, la droite BH sera dans la direction de ZB (14.I); je dis



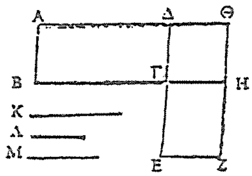
que les côtés des parallélogrammes AB, BΓ autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels, c'est à dire que AB est à BE comme HB est à BZ.

PROPOSITION XXIII

Les parallélogrammes équiangles ont entr'eux une raison composée des côtés.

Soient les parallélogrammes équiangles AΓ, ΓZ, ayant l'angle BΓΔ égal à l'angle EΓH; je dis que le parallélogramme AΓ a avec le parallélogramme ΓZ une raison composée des côtés, c'est à dire de celle que BΓ a avec ΓH, et de celle que ΔΓ a avec ΓE.

Plaçons ces parallélogrammes de manière que la droite BΓ soit dans la direction de la droite ΓH; la droite ΓH sera dans la direction de ΓE (14.1). Achevons le parallélogramme ΔH; prenons une droite quelconque K; faisons en sorte que BΓ soit à ΓH comme K est à Λ, et que ΔΓ soit à ΓE comme Λ est à M (12.6).



Les raisons de K à Λ et de Λ à M seront les mêmes que les raisons des côtés, c'est à dire que celle de BΓ à ΓH et que celle de ΔΓ à ΓE. Mais la raison de K à M est composée de celle de K à Λ, et de celle de Λ à M; donc la droite K a avec la droite M une raison composée des côtés. Et puisque BΓ est à ΓH comme le parallélogramme AΓ est au parallélogramme ΓΘ (1.6), et que BΓ est à ΓH comme K est à Λ, K est à Λ comme le parallélogramme AΓ est au parallélogramme ΓΘ (11.5). De plus, puisque ΔΓ est à ΓE comme le parallélogramme ΓΘ est au parallélogramme ΓZ, et que ΔΓ est à ΓE comme Λ est à M (I.6), Λ est à M comme le parallélogramme ΓΘ est au parallélogramme ΓZ (11.5). Mais on a démontré que K est à Λ comme le parallélogramme $A\Gamma$ est au parallélogramme $\Gamma\Theta$, et Λ est à M comme le parallélogramme $\Gamma\Theta$ est au parallélogramme ΓZ; donc, par égalité, K est à M comme le parallélogramme $A\Gamma$ est au parallélogramme ΓZ (22.5). Mais la droite K a avec la droite M une raison composée des côtés; donc le parallélogramme $A\Gamma$ a avec le parallélogramme ΓZ une raison composée des côtés. Donc, etc.

APPROCHES MECANIQUE ET GEOMETRIQUE DU MOUVEMENT DANS L'ANTIQUITE GRECQUE

Jöelle DELATTRE

On présente parfois la philosophie de Platon comme la recherche d'un compromis entre deux pensées antagonistes: celle de Parménide qui affirmait l'identité de l'Etre et du Penser en niant l'existence du mouvement, et celle d'Héraclite qui déclarait que tout se meut et se renouvelle indéfiniment. La pensée du changement et du mouvement a beaucoup préoccupé les premiers penseurs grecs qu'on appelait "physiciens" ou "philosophes de la nature"; en témoignent en particulier quatre des quarante Paradoxes[1] de l'élève de Parménide, Zénon d'Elée, connus grâce à l'analyse d'Aristote, dans la Physique[2], où il s'efforce génialement de les réfuter...

Notre propos ne sera pas ici d'entreprendre une étude exhaustive de toutes les opinions, théories, critiques et réfutations sur le mouvement dans l'Antiquité[3]. Nous voudrions plus modestement nous appuyer sur la lecture de quelques pages d'un philosophe du deuxième siècle après notre ère, Théon de Smyrne, auteur d'un traité intitulé: *Les connaissances mathématiques utiles à la lecture de Platon*, dont le troisième livre est entièrement consacré à l'astronomie. En effet l'auteur y utilise la plupart des ressources philosophiques et mathématiques disponibles à son époque pour tenter de parvenir à une explication cohérente du mouvement des astres par rapport à la Terre, objectif que, semble-t-il, Platon avait dû se fixer, en son temps, au fil de ses grands mythes cosmologiques[4]. Or Théon prétend dépasser les oppositions et les querelles entre mathématiciens et entre philosophes, en faisant valoir une certaine démarche plus "*phusicôs*", naturelle ou physique, dont il s'enorgueillit de maîtriser le "mode d'emploi" et en même temps l'aboutissement tangible et matériel sous la forme d'une "sphéropée mécanique platonicienne".

Avant d'aborder la lecture même du texte de Théon, nous nous efforcerons de clarifier deux énigmes difficiles pour l'historien des sciences, étant donné la rareté, l'éloignement dans le temps et le caractère contradictoire des témoignages. La première peut se formuler assez simplement de la manière suivante: les premiers astronomes grecs ont-ils été d'abord des géomètres ou des mécaniciens? La seconde, dont Théon se fait précisément l'écho et, pourrait-on dire, l'interprète, concerne la démarche épistémologique permettant de rendre compte rationnellement de mouvements et repos astronomiques apparents. Comment caractériser les multiples et géniales inventions des astronomes et penseurs grecs: modèles géométriques, modèles mécaniques ou théories philosophiques? Nous allons voir que le projet pédagogique de Théon, faciliter la lecture des textes astronomiques ou plus exactement cosmologiques de Platon, cherche sa voie entre ces trois options, tout en semblant valoriser une "manipulation mécanique" qui permette de visualiser les hypothèses philosophiques et géométriques et d'apprécier celles dont les conséquences correspondent le mieux à la fois aux observations célestes et aux principes de la nature.

---

[1] Cf. *Les Présocratiques*, éd. J.P. DUMONT, Paris 1988, Fg. A XV p. 281 et Fg A XXV pp. 287 à 289.
[2] Voir *Physique* VI ix 239b.
[3] Le temps imparti à notre atelier de lecture de textes anciens à l'Université d'été de Montpellier, n'y aurait pas suffi!
[4] Voir notre communication du 16/4/93 à l'Université d'été de Lille III, à paraître grâce à la collaboration de l'IREM de Lille et de la MAFPEN Philosophie de l'Académie de Lille.

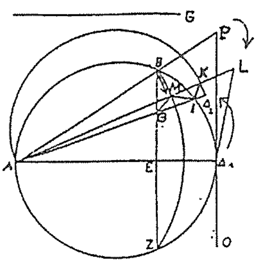
I - LES PREMIERS ASTRONOMES GRECS ONT-ILS ETE DES GEOMETRES OU DES MECANICIENS?

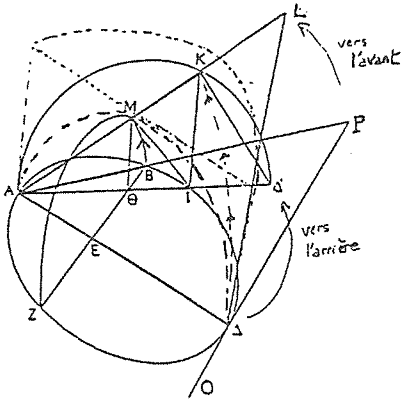
Nous partirons de l'écart entre le témoignage d'Eutocius[5] au Ve siècle et celui de Plutarque[6] à la fin du Ier siècle, à propos de la méthode utilisée par Archytas de Tarente et Eudoxus de Cnide pour résoudre le problème des moyennes proportionnelles. Le premier juge qu'ils le résolvaient par le seul raisonnement sans réussir à le mettre effectivement en oeuvre, tandis que le second évoque le "courroux" de Platon, lequel leur aurait reproché de "mêler" aux pures considérations géométriques, des éléments mécaniques comme le recours aux mouvements et à la manipulation, ce qui en gâchait la qualité et la valeur.

a) déterminer les moyennes proportionnelles par le raisonnement géométrique ou par la manipulation instrumentale

La traduction française des fragments des plus importants penseurs présocratiques, éditée maintenant en collection de poche[7], permet de relire facilement la démonstration du savant pythagoricien, vivant au début du IVe siècle avant notre ère, Archytas de Tarente; elle est conservée grâce au témoignage d'Eutocius lequel se réfère lui-même à Eudème, historien de la géométrie du IIIe siècle avant notre ère. Voici la récapitulation des étapes de cette démonstration qu'il paraît préférable de suivre en construisant en même temps une figure dans l'espace du genre de celle que nous proposons, la figure antique traditionnelle nous semblant plus difficile à lire:

G = AB < AD
DP _|_ AD
BEZ // PDO





1) A reste fixe; le demi-cercle sur AD se meut vers l'arrière à travers le demi-cylindre sur lequel il décrit une courbe de D en K;

2) AD reste fixe; le triangle APD pivote vers l'avant selon un mouvement opposé, en décrivant une surface conique qui coupe le cylindre en remontant jusqu'en K;

3) quand la position des deux éléments est fixée, au point de rencontre K sur le cylindre, la perpendiculaire KI est abaissée sur le cercle ABDZ (le long du cylindre);

4) le point B monte sur le demi-cercle BMZ perpendiculaire au cercle ABDZ; il vient en M; on détermine les triangles semblables: AMI, MI0 et MA0; M0 _|_ cercle ABDZ --> M0 _|_ BZ, et M0 // KI;

---

[5] Cf. *Commentaires Sur la sphère et le cylindre d'Archimède II, in Oeuvres d'Archimède IV*, trad. C. MUGLER, Paris 1972.
[6] Cf. *Vie de Marcellus*, trad. AMYOT, Paris 1587, pp.301-302.
[7] Cf. *Les Ecoles présocratiques*, ed. J.P. DUMONT, Paris 1991, pp.281 et 282.

5) or B0 . 0Z ou A0 . 0I = $M0^2$,
et les angles IMA, DKA sont droits;

6) donc KD // MI, et
AD, AK, AI, AM forment une proportion continue;
AM = AB = G et deux médiétés entre AD et G sont trouvées.

En étudiant de près le texte de la démonstration, nous avons pu reconnaître la présence d'un raisonnement géométrique et en même temps celle d'une puissante imagination dynamique. Mais il n'est pas facile de décider entre une démarche de type instrumental, correspondant par exemple à l'utilisation d'une sorte d'astrolabe, qui consisterait à maintenir fixe telle ou telle partie de l'appareil pour en ajuster telle ou telle autre partie, et la transposition conceptuelle de cette démarche; le texte, en effet, ne fait appel qu'à la conception et à l'imagination (ou représentation) géométrique, et ne propose, en tout cas, aucune autre manipulation ni construction que le déplacement combiné d'un demi-cercle et d'un triangle, et l'abaissement d'une perpendiculaire.

Aussi avons-nous quelque raison d'être étonnés du "courroux" de Platon auquel Plutarque fait allusion. D'autant que Platon lui-même avait donné son nom à une machine simple[8] pour déterminer et construire, entre deux segments perpendiculaires donnés, ces deux longueurs moyennes proportionnelles dont Théon, citant Eratosthène dans l'introduction de son ouvrage[9] , rappelle qu'elles constituaient une réponse géométrique au problème de l'oracle de Délos, le Dieu, consulté à propos de la peste qui ravageait l'île, ayant demandé qu'on doublât la taille de son autel.

b) manipuler un instrument astronomique pour mieux concevoir et comprendre le cosmos

Selon certains témoignages, Platon aurait aussi construit une espèce de réveil-matin![10] Il nous a donc semblé important de l'interroger directement pour mieux connaître son sentiment concernant les liens et les démêlés entre géométrie et mécanique. Or, la relecture des pages 36 à 40 du *Timée* a, de ce point de vue, le plus grand intérêt.

Platon y met à contribution l'arithmétique et la géométrie pour construire le mécanisme mobile du monde, conçu comme un vivant animé. Décrivant la création de l'âme du monde par le démiurge, le philosophe nous dit que, pour ce faire, le Dieu "*machine*", qu'il s'arrange pour que soit construit un mécanisme tout entier constitué de nombre et de mouvement circulaire. Et l'analogie indéniable avec l'art du forgeron construisant une sphère armillaire[11] (autre instrument astronomique) ne doit pas faire oublier qu'il s'agit essentiellement d'un modèle intellectuel, numérique et géométrique, exprimant qu'une vie intelligente pénètre le monde de part en part et revient sans cesse sur elle-même[12] en un mouvement circulaire capable de se démultiplier et se différencier sans perdre son uniformité ni sa régularité:
"Il prescrivit que ces cercles aillent en sens inverse les uns des autres, trois avec des vitesses semblables , et les quatre autres avec des vitesses différentes les unes par rapport aux autres,

---

[8] Voir à ce propos le chapitre "Pourquoi la règle et le compas?" dans l'ouvrage collectif de la Commission Inter-IREM: *Histoires de problèmes*, Paris 1993.
[9] Cf. *o.c.*, trad. J.DUPUIS, p.5.
[10] Cf P. M. SCHUHL, in *La Fabulation platonicienne*, Paris 1968, p.97, où est rappelée la citation d'Aristoclès (écrivain du IIe siècle av. n.è.) par Athénée (écrivain du IIIe siècle), dans son *Banquet des sophistes*, à propos de l'horloge de nuit de Platon qui, semble-t-il, devait, fonctionner comme une clepsydre.
[11] Comme le signale fort justement L. BRISSON dans sa récente traduction : *Timée et Critias*, éd. G.F., Paris 1991.
[12] Voir le *commentaire* de Proclus à ce passage du *Timée*, dans la remarquable traduction de A.-J. FESTUGIERE, Paris 1966, tomes III et IV.

mais suivant un mouvement réglé"[13]. Chacun peut reconnaître le dispositif mobile d'une sphère armillaire géocentrique très complexe, distinguant le mouvement lié du Soleil, de Vénus et de Mercure, et un mouvement de type différent pour la Lune d'une part, Mars, Jupiter et Saturne d'autre part. Et Platon lui-même ne laisse plus planer aucun doute quand, un peu plus loin, il explique comment le démiurge "*a l'idée de fabriquer*" le temps en même temps qu'il "*met le ciel en ordre*"[14]. Le Dieu, en effet, "*s'arrangea*" pour que naquissent les jours, les nuits, les mois, et les années, "*en même temps qu'il construisait le ciel*". Et c'est ainsi qu'il conçut et façonna le Soleil, la Lune, et les cinq autres astres, et les plaça sur leurs orbites circulaires "*pour définir et conserver les nombres du temps*"[15]. La lettre même du texte de Platon semble entremêler la description d'un travail de conception et d'imagination et celle d'une activité de forgeron, de sculpteur ou de savant mécanicien. Or il est remarquable que, après "l'installation" ou "l'établissement" de la Terre, "*enroulée autour de l'axe qui traverse le tout*" ou bien "*pelotonnée sous l'arrondi du ciel*"[16], les quatre pages du *Timée* que nous nous proposions de relire se terminent justement par ce paragraphe étonnant auquel Théon juge bon de renvoyer pour justifier son projet[17]

"*Or décrire les danses de ces mêmes corps célestes, leurs juxtapositions les unes par rapport aux autres, déterminer les rétrogradations et les progressions de leurs courses circulaires les unes par rapport aux autres, dire quand elles se trouvent en conjonction, lesquelles se font l'une à l'autre écran et au bout de quel temps chacune se cache à nos yeux pour de nouveau reparaître, provoquant ainsi l'effroi et fournissant des présages sur les événements à venir aux gens qui ne sont point capables de les prévoir grâce au calcul, expliquer tout cela, ce serait peine perdue, si on n'avait pas sous les yeux une représentation mécanique des mouvements considérés*"[18].

Cela signifie-t-il que Platon a lui-même ce type de représentation sous les yeux quand il écrit? L'hypothèse a déjà été formulée par des commentateurs modernes du philosophe[19], et nous pensons qu'elle permet seule de démêler l'enchevètrement dont nous parlions plus haut, à propos du démiurge, d'un modèle conceptuel et d'un modèle mécanique ou artisanal. L'utilisation de l'instrument astronomique est alors déviée de son usage "professionnel", visée et observation du ciel, prédiction d'événements ou mesures d'angles et de distances, pour un usage "paradigmatique", où la compréhension et la maîtrise du fonctionnement du modèle réduit permette par analogie, ou plutôt par extrapolation, de concevoir et imaginer celui du cosmos véritable.

c) deux usages de l'instrument astronomique et plusieurs manières de pratiquer l'astronomie

En même temps, pour revenir au "courroux" attribué à Platon par la tradition de Plutarque, il est bien évident que le modèle mécanique apparaît surtout comme un outil facilitateur, pour aider les ignorants à comprendre, visualiser et se représenter les hypothèses explicatives de la science astronomique. Or, qu'il s'agisse de mettre en conformité des théories scientifiques abstraites avec les observations dans le temps et dans l'espace, ce que semble-t-il, Eudoxe de Cnide et son disciple Callippe, avec leurs emboîtements de sphères homocentriques, auraient tenté de faire, ou qu'il s'agisse de chercher à mettre à la portée de tous, par une réalisation matérielle, "image" ou "imitatrice", la réalité concevable mais non observable,

---

13 Cf. *Timée* 36d, trad. L. BRISSON, p. 126.
14 Cf. *Timée* 37d, trad. cit., p.127.
15 Cf. *Timée* 37e et 38c, trad. cit., p. 129.
16 Les traditions manuscrites proposent deux termes presque homophones dont l'un signifie un mouvement, et l'aurtre une position de repos. L'ambiguïté existait déjà, semble-t-il, dès l'époque d'Aristote, lequel a pris parti pour l'interprétation immobile. Voir le commentaire de Proclus, trad. A.-J. FESTUGIERE, IV 133 p.177.
17 Cf. *o.c.*, ch. 16, trad. J DUPUIS, p. 239: "*nous avons construit une sphère d'après ses explications. Platon dit en effet qu'on ferait un travail inutile si on voulait exposer ces phénomènes sans les images qui parlent aux yeux*".
18 Cf. *Timée* 40c-d, *trad. cit.*, p.132
19 Voir en particulier, A.RIVAUD, Etudes platoniciennes I, in *Revue d'Histoire de la Philosophie* 2, 1928, p. 126; et P. M. SCHUHL, *La Fabulation platonicienne*, Paris 1968, pp. 71 à 98.

comme semble-t-il Archimède devait le proposer dans son traité aujourd'hui perdu *Sur la sphéropée*, nous nous trouvons devant deux aspects de "*l'expédient mécanique*" utilisés par l'astronome mais que le philosophe sera tenté de repousser sous prétexte qu'ils le détournent de la recherche de la vérité. En effet, dans la *République*[20] , Platon fait préciser par Socrate, à son interlocuteur étourdi, que l'astronomie ne consiste pas à regarder le ciel bouche bée, mais, comme la géométrie, à poser et résoudre des problèmes! Et en l'occurrence, l'énoncé du problème le plus important, selon Platon, pour tout astronome digne de ce nom, nous a été conservé par le témoignage de Simplicius, au Ve siècle de notre ère, citant Sosigène, astronome postérieur à Ptolémée, citant lui-même Eudème, l'historien du IIIe siècle avant notre ère, à propos d'Eudoxe. Voici comment G. AUJAC propose de le traduire[21] .

"Platon, en imposant aux mouvements des corps célestes l'obligation d'être circulaires, uniformes et réglés, a proposé aux mathématiciens le problème suivant: quelles sont les hypothèses qui par des mouvements uniformes, circulaires et réglés pourront sauver les faits observés pour les planètes?"

Tel était donc le problème que Platon posait aux "*meilleurs élèves de l'Académie*", selon l'expression de T. HEATH[22] En effet Théon rappelle, dans les dernières lignes de l'introduction de son traité, que "*Platon lui-même ne veut pas que l'on continue jusque dans l'extrême vieillesse à tracer des figures géométriques ou à chanter des chansons, choses qui conviennent aux enfants, et qui sont destinées à préparer et purifier leur esprit, pour le rendre capable de comprendre la philosophie.*[23]

Or, il est étonnant que Théon, pourtant si scrupuleux dans ses citations, selon ses propres affirmations[24] , et ainsi que les nombreuses références faites à l'oeuvre de Platon, dans l'introduction de son ouvrage, permettent de le vérifier[25] , n'attribue pas l'énoncé du problème d'astronomie à Platon lui-même, mais à Pythagore[26] , figure tutélaire, selon lui, de l'astronomie scientifique grecque. Comme Proclus[27] semble confirmer aussi l'origine pythagoricienne de l'exigence de simplicité dans la recherche des combinaisons de mouvements susceptibles d'expliquer le mouvement des astres, le témoignage de Théon nous paraît digne d'attention. En effet, l'enjeu est d'importance pour le commentateur: il s'agit bien d'introduire à une lecture "technique" des textes cosmologiques de Platon, en insistant le moins possible sur leur dimension symbolique et mystique, symbolisme et mystique des nombres renvoyant, par ailleurs, au "pythagorisme" de Platon lui-même.

Nous voudrions enfin rappeler une page du traité de Vitruve[28] , proposant un classement des astronomes en penseurs théoriciens et observateurs praticiens, parce que [24] Voir l'introduction de la deuxième partie de son ouvrage, trad.cit., p. 79: "*il ne nous déplaira pas de rapporter ce que nos devanciers ont découvert...sans nous vanter d'en avoir découvert la moindre partie*".
L'architecte latin y range Eudoxe parmi ceux qui recouraient aux instruments en astronomie, confirmant ainsi la tradition de Plutarque. En l'état actuel de nos connaissances, aussi bien pour

---

[20] Cf. *République* VII 530, trad. E. Chambry, p. 169.
[21] Cf. les "*testimonia*" traduits dans les dernières pages de l'édition des *Oeuvres d'Autolycos de Pytane*, Paris 1979, en particulier, p. 160, Simplicius, *Commentaire du second livre du traité du ciel d'Aristote*, p. 493 de l'édition HEIBERG.
[22] Cf. *Greek Astronomy*, p. xliv.
[23] Cf. *trad. cit.* , p.25.
[24] Voir l'introduction de la deuxième partie de son ouvrage, trad. cit., p.79: "il ne nous déplaira pas de rapporter ce que nos devanciers ont découvert...sans nous vanter d'en avoir découvert la moindre partie.
[25] Quelques écarts laissent supposer qu'il cite les textes de mémoire, mais très peu d'erreurs se détectent, comme par exemple, une seule confusion entre la *République* et les *Lois*, sur la trentaire de citations de Platon que compte la seule introduction.
[26] Cf. ch.22, *trad. cit.*, p. 245.
[27] Cf. *Hypotypose des hypothèses astronomiques*, I 34-35 éd. MANITIUS p. 18.
[28] Cf. *De Architectura* IX 6, trad. C. PERRAULT, p. 148, éd. DIDOT: "*Eudoxus, Euctémon, Callipus, Méto, Philippus, Hipparchus, Aratus et les autres astrologues, ont fait à l'aide de la parapegmatique, des observations plus exactes*".

Archytas de Tarente que pour Eudoxe, il est difficile de trancher et de décider s'ils furent plutôt des géomètres ou des mécaniciens; sans doute ont-ils été les deux à la fois, utilisant la puissance de chacune des deux disciplines pour combler les insuffisances de l'autre, comme Archimède réussit à l'expliquer magnifiquement, dans sa lettre à Eratosthène *Sur la méthode*[29] .

[29] Cf. *Oeuvres d'Archimède*, trad. C. MUGLER.

II - QUELS PROBLEMES SOULEVE LA DEMARCHE DE LA SCIENCE ASTRONOMIQUE GRECQUE POUR RENDRE COMPTE RATIONNELLEMENT DES MOUVEMENTS ASTRONOMIQUES APPARENTS?

Nous avons déjà évoqué deux manières différentes de recourir à l'"expédient mécanique" pour l'astronome grec. Ou bien, procédant comme Eudoxe, et après lui Callippe, on s'efforcera de concevoir une combinaison de mouvements géométriques, susceptible de produire une trajectoire la plus semblable possible à celle que l'observation permet d'attribuer aux astres dits "errants". Ou bien, comme Archimède et peut-être Archytas, on mettra en oeuvre matériellement une certaine combinaison de mouvements dans une machine perfectionnée plus ou moins automate, laquelle permettra surtout de "montrer" et de faire comprendre ce que la recherche géométrique étudie et démontre théoriquement[1]. Il est assez tentant à partir de cela de distinguer deux types d'astronomie:

- une astronomie savante pour initiés et dont l'objet serait surtout de rendre compte des déplacements des astres et d'en calculer la "raison" (*logon*), c'est-à-dire en particulier, s'intéresser aux rapports de distance et de vitesse, à la composition des mouvements, aux retours cycliques et aux régularités, pour pouvoir déduire et prévoir les passages et événements remarquables (conjonctions et éclipses par exemple);
- et une astronomie de "démonstration" pour grand public laquelle n'aurait d'autre prétention, que de représenter mécaniquement les déplacements des astres à l'aide de dispositifs simples dont la caractéristique principale serait d'abord de "reproduire" ou "imiter" les apparences observées. Un argument pour soutenir la distinction que nous suggérons peut se trouver dans le fait que Ptolémée, au IIe siècle, ait jugé bon d'écrire, à côté de la *Syntaxe Mathématique*, un autre traité d'astronomie s'adressant à "ceux qui préfèrent utiliser des sphères automates ou actionnées à la main". C'est à ce traité, intitulé "*Hypothèses des planètes*" que G. AUJAC renvoie[2] pour démontrer l'importance de la sphéropée dans la pratique antique de l'astronomie.

a) rejeter la contradiction

Il ne s'agirait toutefois pas d'imaginer deux astronomies concurrentes ou antagonistes, même si quelques possibilités existent de repérer des écoles d'astronomie différentes, en Asie mineure, à Athènes, à Rhodes, à Alexandrie, avec des méthodologies différentes[3], comme il y a sans doute eu aussi des écoles géométriques différentes par souci de compatibilité avec les principes fondamentaux de doctrines philosophiques originales comme l'épicurisme ou le stoïcisme[4]. En effet, la double tendance que nous avons définie pourrait bien être une caractéristique fondamentale de la démarche complexe de l'astronome grec, sur laquelle nous voulons maintenant faire porter notre étude.

Qu'on l'attribue à Platon ou à Pythagore, une fois admise l'exigence épistémologique d'une recherche des mouvements les plus simples susceptibles d'expliquer par leur combinaison les apparences complexes et variées, une autres difficulté surgit concernant la possibilité pour un être de se mouvoir et d'être en repos en même temps. Comment échapper à

---

[1] Cf La Lettre d'Archimède à Eratosthène *Sur la méthode*, in *Oeuvres complètes d'Archimède*, trad. C. MUGLER, Les Belles Lettres, Paris 1972. Voir aussi les témoignages sur les constructions mécaniques d'Archytas de Tarente, *Les Ecoles présocratiques*, p. 280, en particulier ce que dit Favorinus de la colombe volante, selon le témoignage d'Aulu-Gelle.

[2] Cf. G. AUJAC, *La sphéropée ou la mécanique au service de la découverte du monde*, in Revue d'Histoire des Sciences XXIII, 1970, pp. 93-107.

[3] Ainsi Proclus, dans son *Hypotypose des hyprothèses astronomiques* signale qu'il va présenter les doctrines et théories qui procèdent "*différemment de Ptolémée*" ; cf. ch. I 34-35, p. 18 éd. MANITIUS, Leipzig 1909.

[4] Voir les *Actes de l'Université d'été d'épistémologie et d'histoire des mathématiques de Lille*, notre contribution, "Géométrie ou géométries antiques?", Irem de Lille I, 1993.

la contradiction? Platon, dans une page bien connue de la *République* [5], pose le problème de manière magistrale, en se référant au paradigme des toupies:

"*Si un subtil interlocuteur soutenait que les toupies sont tout entières, et dans le même temps en repos et en mouvement, quand, leur centre restant fixe, elles tournent sur elles-mêmes, et qu'il en est de même de tout autre objet qui tourne sur lui-même sans bouger de place, nous rejetterions ce raisonnement.*" L'argumentation du philosophe pour rejeter un tel raisonnemnt, qu'il qualifie néanmoins de *subtil*, mérite une lecture très attentive :

"*il faut distinguer en elles l'axe et la circonférence*". En effet, immobiles selon leur axe, elles se meuvent circulairement selon leur circonférence ; la solution est claire et sans bavure: "*ce n'est pas dans les mêmes parties d'elles-mêmes que les toupies sont ainsi en repos et en mouvement.*" Mais Platon ajoute ensuite:

"*que si l'axe penchait à droite ou à gauche, en avant ou en arrière, tandis que l'objet tourne, alors il ne serait plus en repos d'aucune part.*" Certes le contexte de ce passage n'est pas du tout astronomique, puisqu'il s'agit de parvenir à une définition cohérente et convaincante de la justice. Pourtant cette image stable et mobile de la toupie, par l'évocation du mouvement de son axe, oscillant d'avant en arrière, ou de côté et d'autre, correspond à l'expérience de la précession de tout corps mû circulairement sur lui-même, et ne peut qu'interpeler l'historien de l'astronomie.

L'évocation d'un tel mouvement de rotation, pour un être "*qui ne serait plus en repos d'aucune part*", peut se produire à trois niveaux différents: celui du cosmos dans son ensemble, celui de chacun des astres "errants", et enfin même celui de la Terre. En effet, si l'on considère traditionnellement que la découverte de la précession des équinoxes revient à Hipparque (IIe siècle avant notre ère), le débat reste ouvert[6] concernant l'attribution de l'hypothèse d'"un certain mouvement de la Terre" à Héraclide du Pont et à Platon lui-même[7] Une citation scrupuleuse d'Alexandre d'Aphrodise, reprise textuellement par Simplicius, nous a conservé le témoignage relais de Géminus à ce propos[8] Il n'y a aucune raison de ne pas lui accorder de valeur suffisante, sous prétexte qu'il est unique, et qu'Archimède attribue, quant à lui, à Aristarque de Samos l'hypothèse du mouvement terrestre héliocentrique [9].

b) formuler des hypothèses dont les conséquences s'accordent avec les apparences

Mais revenons à la démarche de l'astronome. Elle est essentiellement hypothétique. Aucune hypothèse n'est a priori exclue en recherche astronomique, aussi paradoxale et aberrante puisse-t-elle paraître, pourvu que, au bout du compte, les apparences soient sauvegardées (*ta phainoména sôthèsétai*) [10] autrement dit, cela signifie que les conséquences déductibles de ces hypothèses doivent s'accorder (*sumbainein* ou *sumphônein*) avec les observations[11]. Une critique intéressante de Proclus[12], peut-être reprise de Géminus, fait pourtant apparaître l'insuffisance de telles hypothèses, "*construites en prenant les conclusions pour point de départ*": qui peut nous garantir que des hypothèses contradictoires ne puissent pas aussi bien conduire à des conséquences conformes aux apparences observées? Car

---

[5] Cf *République*, IV 436 d-e.
[6] Voir les arguments respectifs de G. SCHIAPARELLI, in "Origine del sistema planetario eliocentico presso i Greci", Milan 1898 et T. HEATH, in *Aristarque de Samos. The ancient Copernicus*, Londres 1913.
[7] Voir *Timée* 40 d, déjà cité plus haut.
[8] Cf. *Abrégé des météorologiques de Posidonius*, trad. G. AUJAC, pp. 112 et 113 de l'éd. de l'*Oeuvre de Géminus*, Paris 1975.
[9] Cf. Archimède, *L'Arénaire*, ed. HEIBERG II pp. 216-217 (Leipzig 1913); voir la traduction de C. MUGLER in *Oeuvres complètes*, Paris 1972. Cf. aussi Sextus Empiricus, *Adversus Mathematicos* X 174, éd. R. G. BURY, Londres 1961.
[10] Cf. Théon, *o. c.*, ch. 26 éd. J. DUPUIS, par exemple pp. 254, 264, et 266.
[11] Cf Ptolémée, *Almageste* III 1 ; voir aussi Aristote, *Du Ciel* II 296 a.
[12] Proclus, *Hypotypose ou Représentation des hypothèses astronomiques*, cité et retraduit par P. DUHEM, in *Système du monde* II p. 105.

on peut tirer une conclusion vraie d'hypothèses fausses!. Ainsi Théon insiste, non sans malice[13], sur l'étonnement qu'Hipparque cherchait à faire partager aux mathématiciens (peu soucieux habituellement de la conformité de leurs résultats avec l'observation), devant la capacité pour des hypothèses aussi différentes que celle des excentriques, et celle des épicycles, d'expliquer aussi bien l'une que l'autre, l'anomalie du mouvement solaire, et les stations et rétrogradations des mouvements planétaires. Sans doute aussi est-ce la raison pour laquelle Géminus explique que l'astronome ne pourra décider seul de la meilleure hypothèse, et devra s'en remettre au physicien[14]. Cet argument était connu très certainement de Théon, et l'on peut penser qu'il l'adapte en insistant plusieurs fois sur la nécessité d'adopter une démarche qui soit plus "*phusikôs*". Or, c'est à Eudoxe, à Callippe et à Aristote, ainsi qu'à leur modèle ou dispositif de sphères homocentriques que Théon nous renvoie, pour signifier une manière plus physique d'aborder l'explication du mouvement des astres.

Concernant le modèle des sphères homocentriques d'Eudoxe, il est extrêmement difficile de se rendre compte s'il est un modèle simplement géométrique, sans souci d'une mise en oeuvre matérielle, ou s'il correspond à la construction effective de maquettes explicatives et pédagogiques du type de celles dont Platon préconise l'usage, à la fin des quatre pages du *Timée* que nous avons lues plus haut, pour lutter contre l'ignorance, la superstition et la panique de ceux qui ne savent pas prédire les événements astronomiques par le calcul. Que Callippe ait été amené à ajouter plusieurs sphères, puis Aristote à son tour, en particulier ces fameuses sphères "compensatrices" destinées à annuler les effets de frottement et d'entraînement des sphères supérieures, cela montre à quel point le modèle d'Eudoxe était insuffisant, aussi génial fût-il du strict point de vue géométrique, comme l'a si bien montré G. SCHIAPARELLI[15]. En effet, ses deux insuffisances les plus graves consistaient dans l'incapacité à rendre compte de l'inégalité des saisons, et dans l'écart très grand entre les trajectoires observées pour Mars, Vénus et Mercure, et celle que le modèle eudoxéen déduisait pour chacun de ces astres, ainsi que pour la lune.

D'autres théories géométriques[16] se sont alors développées en concurrence avec le modèle des sphères homocentriques. L'excentricité de la trajectoire solaire, par rapport à la Terre, permettait d'expliquer plus facilement l'*anomalie* ou irrégularité des saisons. Le recours à des trajectoires épicycloïdales, pour les différentes planètes, et en particulier, à des épicycles se déplaçant circulairement autour du Soleil, pour Vénus et Mercure, permettait de mieux "sauver" les apparences observées, et d'en rendre compte plus fidèlement.

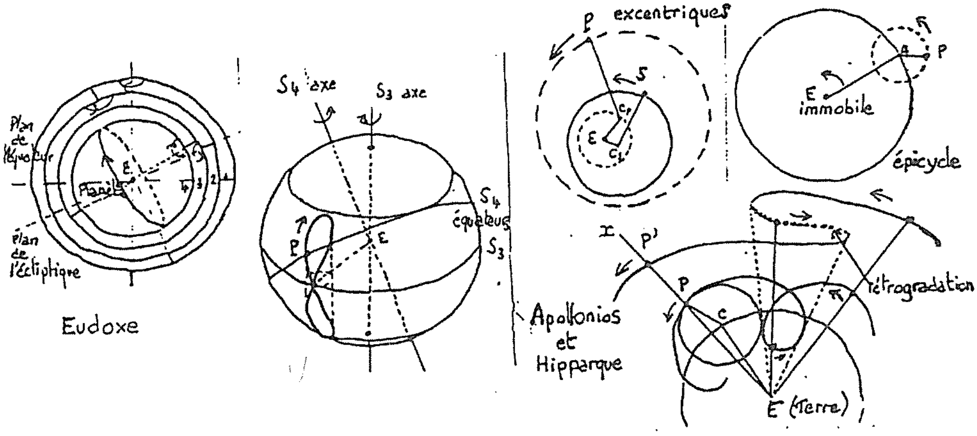
---

[13] Cf Théon, *o.c.*, trad. cit., ch. 26 p. 269.

[14] Voir Simplicius, *Commentaire à la Physique (II 193b) d'Aristote*, suite de la traduction de G. AUJAC, p.113, citée plus haut.

[15] Cf. G. SCHIAPARELLI, *Le sfere omocentiche di Eudosso, di Callippo e di Airistotele*, Milano 1875, pp. 24 à 36.

[16] On peut considérer que ces théories géométriques ont pris naissance, comme celles d'Eudoxe, à l'Académie, et en attribuer les premières ébauches à Héraclide du Pont. Même si l'hypothèse héliocentrique n'est vraiment mise au point que plus tardivement par Aristarque de Samos, et si la complexité des trajectoires épicycloïdales et excentriques est étudiée plus systématiquement par Apollonius de Perge et par Hipparque (aux IIe et IIIe siècles avant notre ère), on s'aperçoit bien qu'il s'agit de modèles et d'hypothèses géométriques concurrents ou éventuellement complémentaires, destinés à corriger les imperfections du modèle eudoxéen des sphères homocentriques.



c) soutenir ces hypothèses par une "intuition mécanique", sinon une manipulation

Les difficultés n'ont pu que surgir alors, à partir du moment où l'on cherchait à mettre en oeuvre effectivement, par la construction de maquettes de bois ou de métal, les intuitions mécaniques ou géométriques concurrentes. Si au IIIe siècle avant notre ère, Archimède a jugé bon d'écrire un traité de sphéropée, c'est que cette construction était problématique, et que sa puissante intelligence mécanique lui permettait de proposer de géniales solutions, dont témoigne encore, deux siècles plus tard, à l'époque de Cicéron, une merveilleuse sphère armillaire rapportée avec le butin du siège de Syracuse[17]. On peut certes considérer, comme Théon, le modèle Eudoxéen, amélioré par Callippe, puis par Aristote, comme "plus physique", parce qu'on y parle de sphères homocentriques (plutôt que de cercles), s'entraînant les unes les autres, s'accélérant et se ralentissant mutuellement en fonction de l'inclinaison de leurs axes, ainsi que de leurs vitesses et leurs sens de rotation; mais cela ne signifie nullement que ces dispositifs aient été effectivement réalisés dès le IVe siècle avant notre ère, et pas simplement conçus géométriquement. Au contraire, Théon peut se vanter, lui, d'avoir réussi cette prouesse: une sphéropée mécanique platonicienne tenant compte à la fois du modèle des sphères homocentriques, et de celui des trajectoires excentriques et épicycloïdales.

L'intuition mécanique des anciens astronomes soutiendrait alors une démarche purement hypothétique et intellectuelle, portant sur des combinaisons de mouvements certes, et pas seulement des rapports de distances, de vitesses, ou d'angles, d'arcs de circonférences et de segments de droites[18]. Mais le recours à la manipulation est loin d'être évident car il nous est très difficile d'imaginer que les quarante-sept ou les cinquante-cinq sphères d'Aristote ont un jour été construites, l'idée même d'une construction qui vérifierait la pertinence de l'hypothèse ou simplement sa "faisabilité" ne se rencontrant d'ailleurs pas dans les textes.

Par contre, nous avons été étonnée, en parcourant *Du visage qui apparaît sur le disque lunaire* de Plutarque, de découvrir une page assez extraordinaire, illustrant ce que nous avons appelé "intuition mécanique". On y sent bien comment celle-ci permet de lutter contre la panique superstitieuse, mais ne peut suffire à fonder un savoir scientifique ou technologique[19].

---

17 Cf.Cicéron, De republica, I14.

18 Voir par exemple la démonstration archimédienne des propriétés géométriques de la spirale, courbe mécanique type, construite par la combinaison de deux mouvements. Cf. *Sur les Spirales* II 44-46, éd. HEIBERG; Voir I. THOMAS, *Greek Mathematical Work* II p. 182 et suiv.

19 Cf Plutarque, *De la face qui apparaît dedans le rond de la Lune*, trad. AMYOT, pp. 919-920, Paris 1606.

"Pharnacès... a pitié de ceux qui sont à plomb au dessous du cours de la Lune, comme les Ethiopiens et ceux de la Trapobane, de peur qu'un si pesant fardeau ne tombe sur eux: et toutefois il y a le mouvement de la Lune qui engarde qu'elle ne tombe, et la violence de la révolution, ne plus ne moins que les pierres et cailloux, et tout ce qu'on met dedans une fronde, sont empêchés de tomber, parce qu'on les tourne violemment en rond. Car chaque corps se meut selon son mouvement naturel, s'il n'y a autre cause qui l'en détourne. C'est pourquoi la Lune ne se meut point selon le mouvement de sa pesanteur, étant son inclinaison déboutée et empêchée par la violence de la révolution circulaire. A l'avanture y auroit-il plus de raison de s'esbahir qu'elle demeurast totalement ferme sans se remuer, ne plus ne moins que la Terre..."

Mais l'hypothèse audacieuse que Newton exploitera avec génie, est ici seulement émise sur le mode de la conversation libre entre philosophes cultivés et maniant volontiers le paradoxe. Son efficacité est grande pour lutter contre la superstition, toutefois, c'est la liberté de parole du philosophe qui lui donne cette puissance, et non la démarche rationnelle de l'astronome, lequel préfère d'ailleurs s'en remettre, nous l'avons vu, au philosophe de la nature pour le fondement ou la garantie de ses hypothèses. Il nous reste donc, comme Plutarque un peu plus loin dans le texte, à faire appel à... Théon!

III - EN QUOI LE RECOURS A LA MANIPULATION MECANIQUE FAIT-IL DIFFICULTE?

L'originalité du projet de Théon nous semble être précisément de prendre en charge complètement le problème de la validation de la meilleure hypothèse. Par l'exigence d'une méthode plus physique ou naturelle, nous avons vu qu'il cherchait surtout à dépasser les querelles d'écoles entre mathématiciens partisans des épicycles, des excentriques, ou bien des sphères. Mais il s'agissait aussi pour lui de fonder l'hypothèse la meilleure, en se situant par rapport aux différends entre philosophes empiristes et nominalistes, pour qui les trajectoires proposées par les géomètres pour les astres sont des êtres géométriques incorporels incapables de "porter" les énormes et immenses corps célestes[1], et les philosophes rationalistes pour qui les principes de l'unité et de l'homocentricité doivent rester inviolés, mais qui sont pourtant en litige entre eux, concernant l'apparence ou la réalité d'un mouvement contraire pour les astres[2], ou comme nous l'avons déjà évoqué, à propos du mouvement et du repos relatifs de la Terre et de la sphère céleste.

a) Le projet de conciliation entre les diverses hypothèses se limite de lui-même

Après un long chapitre de théorie géométrique dans lequel Théon développe en ordre, à propos du Soleil, les propriétés de la solution des excentriques et de celle des épicycles, puis triomphant, l'équivalence réversible des deux hypothèses, on le voit interrompre rapidement une tentative similaire pour rendre compte du mouvement planétaire, et délibérément s'engager dans l'explication "physique" du déplacement des planètes. Or, ce que finalement il nous propose au chapitres 31 et 32, c'est une solution technique qui s'efforce de concilier les hypothèses des cercles épicycles, des cercles excentriques, et celle des sphères homocentriques.

Nous avouons avoir quelque difficulté à comprendre la raison pour laquelle les historiens déprécient ou dévalorisent ce résultat vanté par Théon. Voici par exemple ce qu'écrit T. HEATH: "*la prétention que le livre contient des choses utiles à la lecture de Platon ne doit pas être prise trop au sérieux*"[3]; en effet, on y trouve la description d'un système dans lequel des sphères portantes appelées creuses ont entre elles des sphères solides qui, par leur propre mouvement, entraînent ces sphères portantes dans la direction contraire du fait de leur contact avec elles. "*Ces sphères solides (qui portent la planète fixée en un point de leur surface) jouent pratiquement le même rôle que des épicycles*". Or, dans les deux hypothèses concernant la disposition et le mouvement de Vénus et de Mercure par rapport au soleil, "*on reconnaît, par comparaison avec Chalcidius, (après avoir éliminé les épicycles importés par erreur dans les deux systèmes) les hypothèses de Platon et d'Héraclide respectivement.*"[4]

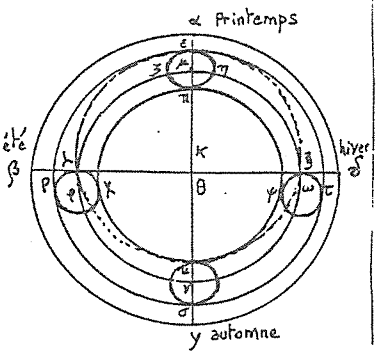
P. DUHEM parle d'Adraste et de Théon comme d'habiles artisans pour qui la possibilité de réaliser en bois ou en métal, "*avec des sphères solides, convenablement emboîtées, un mécanisme qui représentât les mouvements célestes*" suffisait pour reconnaître la conformité d'une hypothèse astronomique avec la nature des choses[5]. Et, G. SCHIAPARELLI de son côté, constate que "*le système de la sphère solide est une dérivation du système homocentrique*", système complètement abandonné à partir du moment où l'on admet un seul mouvement excentrique par rapport au centre du monde. Et donc, "*les sphères solides, plus qu'une filiation des doctrines d'Eudoxe, sont un travestissement de la doctrine des épicycles*"[6].

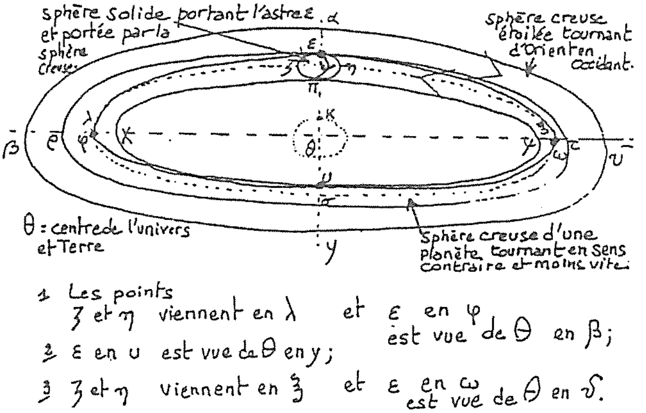
Mais revenons tout simplement au texte de Théon. A la fin du passage où les dispositifs d'Eudoxe de Callippe et d'Aristote sont présentés, Théon décrit en quelques lignes

---

[1] Cf. Théon, *o. c.*, ch. 31, trad. J. DUPUIS, p. 289.
[2] *Ibidem*, ch. 18, p. 241.
[3] Cf T. HEATH, *Greek Astronomy* II,p. 239.
[4] *Ibid.*, p. 244.
[5] Cf. P. DUHEM, *Système du monde* II pp. 81-82.
[6] Cf. G. SCHIAPARELLI, *o. c.*, p. 52.

les rouages complexes d'une machine céleste avec cylindres, tambours, et roues dentées[7] qui fait penser aux fameux différentiels du calendrier astronomique d'Anticythère décrit par DEREK DE SOLLA PRICE[8]. Quand on réalise la complexité technique de l'appareil reconstitué par les chercheurs, on conçoit que Théon ne soit pas peu fier de son travail, et cherche à faire partager à d'autres le plaisir qu'il a eu à le construire ou à le faire construire. C'est la raison pour laquelle, au chapitre juste suivant, il nous propose une figure "mode d'emploi", sur laquelle il invite le lecteur à suivre la suite de son exposé. Cette figure est présentée projetée dans le plan, mais représente un dispositif dans l'espace que nous avons essayé de visualiser par un schéma en perspective dont nous voudrions qu'il fasse plus clairement apparaître les trois exigences conciliées: trajectoire épicycloïdale de la planète sur la sphère solide, trajectoire en même temps excentrique de la planète dans l'espace zodiacal, et homocentricité du déplacement du centre de la sphère solide, à l'intérieur de la deuxième sphère creuse. On voit bien alors comment l'hypothèse de l'homocentricité bénéficie d'une préférence, pour des raisons physiques et mécaniques fondamentales, doublées sans aucun doute de l'exigence pédagogique incontournable consistant à produire un résultat le plus conforme possible aux apparences observées.





Or, précisément, Théon a dit, à la fin du chapitre 32, que "*ce ne sont pas même des cercles* (ni des sphères) *que les planètes paraissent décrire, mais des hélices*"; et un peu plus loin, il trouve utile de préciser que le mouvement hélicoïdal est accessoire et second, car, "*c'est le mouvement selon l'obliquité* (du zodiaque) *dont il faut dire qu'il se produit le premier*"[9]. Que veut-il dire exactement?

b) Les erreurs et les apories des mathématiciens résultent de leur manque de maîtrise de la "physiologie"

Le souci de rendre compte techniquement de la formation seconde des hélices planétaires, mais aussi physiquement (*phusicôs*), ou conformément à la philosophie de la nature, est particulièrement sensible dans le dernier chapitre du traité. Il convient, selon nous, de le relire à la lumière des reproches adressés par Théon à tous ceux, mathématiciens, astronomes ou philosophes, auxquels il manque une certaine maîtrise de la physiologie[10]. Ce reproche touche, en tout premier chef, les Chaldéens et les Egyptiens dont les méthodes et d'observation et de description, fondées sur des principes différents[11] , pèchent néanmoins

[7] *Ibidem*, ch. 31: "*De même que dans des sphères artificielles, les tympans roulant autour de leurs axes peuvent de leur propre mouvement, et à l'aide de dents faire mouvoir et rouler en sens contraire des corps adjacents et en contact.*" (trad. J. DUPUIS, p. 290).

[8] DEREK DE SOLLA PRICE, "Gears from the Greeks", *American Philosophical Society*, vol. 64 part 7, 1974.

[9] Théon, trad. cit., ch. 41, p. 325.

[10] Ibid., ch.30, p. 287

[11] A savoir des méthodes arithmétiques pour les Chaldéens, et des méthodes graphiques pour les Egyptiens.

l'une l'autre par manque de vue d'ensemble et de cohérence explicative, avantages que, selon Théon, la sphéropée mécanique apporte justement.

Platon lui-même introduit souvent la confusion en parlant indifféremment de cercles ou de sphères, ou encore d'axes en lieu de pôles[12], ce qui est, cette fois, plutôt un manque d'exactitude scientifique. Or la sphéropée, en réalisant matériellement le dispositif de combinaison de mouvements, permet de différencier sans difficulté les trajectoires circulaires sur ou dans les sphères supports. Elle montre aussi clairement comment les pôles de chacune des sphères sont à la fois fixés dans une certaine inclinaison, et entraînés dans leur mouvement régulier grâce aux tiges sans doute métalliques[13] qui matérialisent leurs axes.

Quant à Hipparque, auquel Théon se réfère très souvent, et qui est comme sa meilleure référence scientifique, la confusion dans laquelle il est tombé et qui dénote un manque de maîtrise de la "*phusiologia*", consiste à ne pas avoir su clairement distinguer ce qui est conforme à la nature, *kata phusin*, de ce qui est *kata sumbébèkos*. On traduit traditionnellement cette expression grecque, dans les écrits d'Aristote en particulier, par l'expression "par accident". Mais cela semble difficile dans le contexte du traité de Théon. En effet, c'est aussi l'expression qu'il emploie pour opposer le mouvement non premier des hélices, par rapport au mouvement fondamental du zodiaque. Nous serions tentée par la suggestion de P. DUHEM qui propose le sens de "résultat de la composition d'autres mouvements"[14].

Toutefois, la relecture du chapitre 43[15] où l'expression est employée avec insistance pour qualifier les hélices décrites par les planètes fait apparaître qu'une traduction uniquement géométrique ou plutôt mécanique courrait le risque de réduire ou rétrécir le sens. En effet, il nous est précisé que la considération d'hélices, décrites perpendiculairement aux cercles tropicaux et équatorial par les planètes à travers la zone zodiacale, ne doit pas nous cacher une autre hélice, parallèle aux cercles célestes, et correspondant à la course sans fin des astres selon l'obliquité du zodiaque, montant et descendant d'un tropique à l'autre indéfiniment. Les figures qui accompagnaient ce texte ont disparu. Cette "autre hélice" a intrigué quelques historiens des sciences qui se sont passionnés à la fin du siècle dernier et au début de ce siècle pour y reconnaître ou non la fameuse hippopède d'Eudoxe. Les arguments de G. SCHIAPARELLI qui exclut magistralement cette interprétation[16] nous semblent assez convaincants, d'autant que Théon fait lui-même allusion à une telle courbe ailleurs dans le traité, en la plaçant sur le même plan que les épicycles, les excentriques, ou les hélices, comme une sorte de trajectoire parmi les autres propositions des géomètres[17]. Il s'agit ici d'une hélice qu'on nous invite à "concevoir" et à "découvrir"[18] par un effort d'imagination tout intellectuel, certes soutenu par des représentations géométriques, et sans nul doute aussi par la sphéropée mécanique, actionnée avec habileté.

Aussi l'hypothèse avancée par le savant italien d'une divagation de philosophe ne nous semble-t-elle pas non plus très pertinente, à moins qu'il entende par là une intuition mécanique du type de celle que nous avons vue à l'oeuvre dans l'écrit de Plutarque. Il nous semble plutôt que nous sommes en présence ici d'une tentative épistémologique intéressante, qui consiste à chercher à rendre compte scientifiquement d'une telle intuition de philosophe de la nature, car la course hélicoïdale du Soleil a été évoquée par plusieurs savants présocratiques et stoïciens[19]. En effet ce passage témoigne aussi d'un certain usage technique de la projection, avant les écrits théoriques et l'effort de systématisation de Ptolémée, et l'on peut dire que l'autre hélice est décrite comme le résultat d'une transformation projective. Tout le problème nous paraît tenir alors dans le fait que le procédé employé pour faciliter la conception ou la représentation de l'autre hélice, décrite elle aussi *kata sumbébèkos*, est donné à la manière d'une recette presque

---

[12] Ibid. ch.34, p.305

[13] Cf. DUHEM, Le Système du monde II, pp. 81-82.

[14] Ibid. IIp. 84 note 3

[15] Pour une étude détaillée de ce chapitre, nous renvoyons aux actes du Colloque Inter-IREM épistémologie et Histoire des mathématiques qui s'est tenu en 1992 à BREST: *Histoire d'infinis* (à paraître).

[16] Cf G. SCHIAPARELLI, "Le sfere omocentriche di Eudosso, di Callippo e di Aristotele", Milano 1875, p. 24 à 35.

[17] Voir ch. 41 où il est question de lignes semblables à la course sinueuse d'un cheval" (trad. J. DUPUIS).

[18] Cf. Théon, *o.c.*, ch 43, p.330.

[19] Voir en particulier Anaxagore de Démocrite, ainsi que le stoïcien Cléanthe.

magique, sans justification ni effort d'explication, comme une évidence ou une révélation initiatique, ce qui n'est d'ailleurs pas sans rapport avec la situation d'Er le Pamphilien placé face à la superbe vision de la fin de la *République* de Platon. Ce rapport qu'entretient le profane ou l'ignorant avec le merveilleux sacré, ou avec le savoir ainsi révélé n'est qu'incident (*épeisodiôdès*) ou co-incident (*sumbébèkos*), comme les trajectoires hélicoïdales des planètes[20] par rapport au mouvement premier selon l'obliquité zodiacale.

c) En quoi consiste exactement la "physiologia" dont Théon prétend indirectement ne pas manquer

Le terme de *physiologia* est employé par Aristote au sens d'"enquête sur les causes naturelles et les phénomènes"[21] . Toutefois, la connotation épicurienne de cette "enquête" ne nous semble pas anodine, d'autant que nous avons déjà remarqué plus haut avec quelle malice Théon attribuait à Hipparque la remarque aux mathématiciens: que des hypothèses concurrentes pour expliquer le mouvement des astres se révèlent finalement équivalentes quant à l'accord avec les phénomènes. En effet, Epicure, dans la *Lettre à Pythoclès*, insiste sur la pluralité et l'équivalence des explications scientifiques auxquelles nous devons avoir la sagesse de demander essentiellement de nous prémunir contre l'angoisse et la superstition, rôle attribué aussi par Platon, dans le *Timée*, aux maquettes automates des astronomes.

Nous avons cru déceler deux <u>usages différents de la manipulation mécanique</u> par Théon: un usage expérimental pourrait-on dire, et un usage heuristique. Dans le premier cas, il s'agit de valider une hypothèse explicative par combinaisons de mouvements en proposant une réalisation matérielle de ces combinaisons qui permette d'en contrôler à la fois la cohérence et la conformité aux phénomènes observables. Dans le second cas, on utilise la réalisation matérielle déjà réalisée, et correspondant à l'hypothèse choisie, pour "montrer", "faire découvrir", aider à "concevoir", un phénomène très difficile, sinon impossible à observer directement. L'instrument acquiert alors une puissance d'investigation scientifique, par l'aide à la conceptualisation qu'il permet, et par la démarche de type paradigmatique[22] dont il facilite la mise en place. Or cette démarche, si elle est caractéristique d'une investigation méthodique, est aussi parfaitement adaptée à un apprentissage progressif. Ainsi pouvons-nous découvrir comment la seule finalité avouée, et avouable par un philosophe, pour un tel dispositif technique sera son <u>efficacité pédagogique</u>. Il montre, il aide à concevoir et à imaginer, il permet toutes les décompositions de mouvements en en contrôlant les étapes intermédiaires. Il peut donc servir de support et de guide pour une relecture des textes de Platon, dont l'ambiguïté et le caractère volontiers allusif ne sont un secret pour personne.

Quant à Théon, présenté dans le titre même de son ouvrage comme un philosophe platonicien, nous avons pensé un certain temps pouvoir l'inscrire dans la tradition d'astronomes stoïciens, comme Géminus et Cléomède, commentateurs des écrits de Posidonius[23] . Or, il semble surtout avoir en commun avec eux la conviction empiriste que des concepts scientifiques complexes peuvent se former à partir de situations quotidiennes ou de manipulations simples[24] ; mais cette conviction était, si nous en croyons le témoignage de Diogène Laërce, doxographe du IIIe siècle environ, aussi partagée par les philosophes épicuriens[25] Aussi sommes-nous plus

[20] Cf. Théon, o.c., ch. 41, p.324.

[21] Voir LSJ p. 1964. La référence à Aristote concerne l'étude des plantes; toutes les références avec un sens général sont par contre épicuriennes et stoïciennes.

[22] Voir le *Politique de Platon*, pp. 277b-278d, pour une ébauche de théorisation de cette démarche, dans le contexte précisement du mythe cosmologique de ce grand dialogue.

[23] Posidonius d'Apamée, le grand savant stoïcien de la fin du IIe siècle avant notre ère, n'est cité qu'une fois dans l'ouvrage de Théon, et en tout cas, pas dans le livre sur l'Astronomie.

[24] Cf. par exemple la manière dont Sextus Empiricus rapporte, dans son traité *Contre les géomètres*, la formation de la représentation compréhensive de longueur sans largeur à partir de l'étirement d'un fil très étroit (par.51-52). Ce passage est traduit par J.P. DUMONT, dans "Mos geometricus, mos physicus", in *La Logique des stoïciens*, ed. J. BRUNSCHWIG, Paris 1978.

[25] Cf. Diogène Laërce, *Vies, doctrines et sentences des philosophes illustres*, trad. R. GENAILLE, livre VII p. 68 et livre X p. 225, une même phrase est répétée exactement pour expliquer la formation des concepts dans les

indécise sur le classement de cet auteur, de toute évidence très informé des théories et enseignements de son époque. La philosophie de la nature ou *phusiologia* qu'il défend dans son traité d'astronomie est en fait une sorte d'éclectisme scientifique teinté de néoplatisme[26].

Ainsi, le livre de Théon sur l'astronomie se révèle être, pour peu qu'on veuille bien le relire scrupuleusement, un précieux commentaire des écrits cosmologiques de Platon, mais aussi un remarquable exemple de recours à la fois expérimental et heuristique à la construction mécanique. Nous pouvons certes dire que la pensée qu'il développe s'y auto-limite et se stérilise en quelque sorte, en s'inscrivant dans une finalité essentiellement pédagogique, plutôt que dans un véritable projet d'enquête scientifique au sens moderne.

Ce n'est pourtant pas le moindre des intérêts de ce traité, qu'une certaine indépendance de pensée par rapport même à Platon, à la lecture duquel il prétend introduire, et dont il critique l'absence de rigueur dans l'emploi des termes, ou le statut de réalité accordé au mouvement contraire. Certes, H. STIERLIN a longuement démontré[27] que "*l'unique moteur de la débauche d'efforts technologiques et scientifiques* (dans la construction en particulier d'instruments cosmologiques monumentaux) *était la curiosité des puissants face à l'avenir*", et que "*l'astrologie constitue le mobile profond des progrès de la technique antique*". Il semble bien difficile de remettre en cause la plupart de ses arguments. "*Pour engager des frais artisanaux considérables*", nous dit-il, la seule curiosité devant le fonctionnement de la mécanique céleste, pas plus que le besoin d'appuyer son exposé sur un support clair et manifeste, éprouvés par un philosophe ou un astronome, ne sont des "*motivations suffisantes*"[28]. ET SI THÉON, AVEC SA SPHÉROPÉE PLATONICIENNE AVAIT VOULU DÉMONTRER LE CONTRAIRE?

Nous avons peu de renseignements sur le statut social et les ressources des enseignants et des chercheurs de l'antiquité, mais ils semblent avoir plutôt été de riches notables, suffisamment nantis ou protégés par la qualité reconnue de leurs travaux, pour ne pas craindre quelque dépense exceptionnelle. Aussi l'explication des historiens n'est-elle pas si "*courte*"[29], selon nous, qui admet le caractère pédagogique ou de démonstration de certains des instruments cosmologiques de l'antiquité. Elle peut même se justifier, encore une fois, pour des raisons de philosophie très épicurienne: le sage ne pouvant trouver l'absence de trouble et le bonheur, ni dans la recherche ou la fréquentation du pouvoir, ni dans la connaissance insensée de futurs contingents, a besoin néanmoins d'explications rationnelles et cohérentes, concernant les phénomènes célestes en particulier, pour se prémunir contre l'angoisse et la peur superstitieuse.

---

deux écoles philosophiques rivales. Nous avons étudié en 1969 dans notre mémoire de maîtrise sur "La théorie de la connaissance des stoïciens et des épicuriens" ce "parallèle" très intéressant.

[26] Quelques rapprochements avec des auteurs comme Galien, Plotin, Proclus, en particulier concernant l'emploi de l'expression "*kata sumbébèkos*", nous entraînent dans ce sens.

[27] Cf. H. STIERLIN, *L'astrologie et le pouvoir - De Platon à Newton*, Paris 1986. Voir aussi in *Astronomie et sciences humaines*, n°8, Strasbourg 1993, l'article intitulé "Le développement de la mécanique antique sous l'impulsion de l'astrologie", p. 17 à 32.

[28] *Ibid.* p. 30.

[29] *Ibid.* p. 30

L'ÉMERGENCE ET LE DÉVELOPPEMENT CONCEPTUEL DE L'ALGÈBRE[1]

Luis Radford
Université Laurentienne
Ontario, Canada

§1. Introduction

Il nous semble que la nature des concepts mathématiques enseignés à l'école et à l'université peut être mieux saisie à travers une étude didactique de leur dimension épistémologique (cf. à ce sujet Filloy et Rojano, 1984; Barbin, 1993; Thomaidis, 1993, par exemple). Ainsi, la connaissance des circonstances qui ont donné naissance à un concept (par exemple celui d'équation ou celui d'inconnue) peut nous permettre de mieux comprendre l'insertion du concept en question au sein de la théorie correspondante. Dans le même ordre d'idées, la connaissance de l'évolution d'un concept où, de façon plus générale, celle d'une théorie mathématique, peut nous renseigner sur les obstacles rencontrés au long de la formation de la théorie et la façon par laquelle ils ont été franchis. Ces connaissances peuvent donner aux professeurs une idée de la profondeur et de la nature de ces obstacles, et les aider dans la façon de mener l'apprentissage chez leurs élèves.

C'est dans cette perspective historico-didactique que nos recherches s'intéressent à la problématique de l'émergence et le développement des concepts et des méthodes de ce qu'on appelle aujourd'hui l'«algèbre élémentaire», et dans laquelle il y a un certain nombre de questions qu'on peut se poser: qu'est-ce que l'algèbre était au début? Quels problèmes l'algèbre était-elle censée résoudre? Quel était le rapport entre l'arithmétique la géométrie et l'algèbre? Quels étaient les méthodes de résolution de problèmes? Comment justifiait-on ces méthodes? Quelles connaissances a-t-il fallu mobiliser pour faire émerger les concepts algébriques, puis pour les faire évoluer?

Il est hors de la portée de cet article de répondre en détail à toutes ces questions. Nous allons nous limiter à faire certaines considérations sur l'émergence de l'algèbre et aux premiers pas de son développement conceptuel.

[1]Cet article fait partie d'une recherche qui a reçu une subvention FRUL (Fonds de Recherche de l'Université Laurentienne) et une subvention du Bureau de la Vice-rectrice adjointe, Enseignements et Services en français de l'Université Laurentienne.

§2 L'émergence de l'algèbre: le critère d'analycité opératoire

La première chose à faire est d'essayer de clarifier ce que nous entendons par «algèbre». Si on regarde l'histoire des mathématiques, on peut reconnaître au moins deux activités mathématiques qui présentent une certaine ressemblance avec l'«algèbre élémentaire» d'aujourd'hui. On a, d'une part, une activité centrée sur l'étude de certaines propriétés numériques, comme celle que nous écririons en termes modernes par: $(a\pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$, et dont la présence semble remonter aux environs du 22e siècle av. J.-C. On a, d'autre part, une activité centrée sur la résolution de problèmes en mots (*word problems*). C'est sur l'activité de résolution de problèmes que nous allons nous arrêter ici, laissant de côté l'aspect «propriétés numériques» de l'algèbre[2]

En ce qui concerne la résolution de problèmes, on peut remarquer que dans l'«arithmétique», contrairement à ce qui se passe dans l'«algèbre», on développe des techniques ou des procédures de résolution dans lesquelles les calculs se font sur les chiffres donnés dans l'énoncé du problème; l'*inconnue* (c'est-à-dire, ce qu'on cherche) est le point d'aboutissement: dans une démarche arithmétique, l'inconnue n'est pas opérée. En algèbre, par contre, on développe des procédures de résolution de problèmes dans lesquelles l'inconnue est supposée connue (c'est l'aspect **analytique**) et elle est opérée (c'est l'aspect **opération** de l'inconnue (cf. Filloy et Rojano, 1989)); au cours de la résolution, l'inconnue exprime une égalité (une *équation*) entre termes (non nécessairement exprimés sous forme symbolique) comprenant l'inconnue. De plus, il y a un raisonnement sur l'«équation».

Pour mieux montrer la différence entre la pensée arithmétique et la pensée algébrique, nous allons prendre un exemple. Il s'agit d'un problème tiré des mathématiques babyloniennes provenant de la famille des problèmes contenus dans les tablettes VAT 8389 et VAT 8391, tablettes qui remonteraient à la première dynastie babylonienne (vers 1900 av. J.-C.). Ces problèmes concernent deux champs et leur production de grains. Si nous désignons par a la production (par unité d'aire) du premier champ et par X son aire, et si nous désignons par b la production (par unité d'aire) du deuxième champ et par Y son aire, nous aurons que la plupart des problèmes de ces tablettes peuvent s'énoncer, en utilisant des notations modernes, comme suit:

$$aX \pm bY = c; \quad X \pm Y = d \quad \text{(où a, b, c et d sont des données du problème).}$$

Nous allons nous contenter ici d'analyser un de ces problèmes: le problème 1 de la tablette VAT 8389 (d'après la traduction de Thureau-Dangin, 1938, p. 103-105):

---

[2]Aspect que nous abordons dans «Diophante ou les deux visages de l'algèbre» (à paraître)

"Par *bur*, j'ai perçu 4 *kur*. Par second *bur*, j'ai perçu 3 *kur* de grain. Un grain excède l'autre de 8`20 <*sila*>. J'ai additionné mes champs: 30` <*SAR*> Que sont mes champs?

<u>Solution babylonienne</u>:
Pose 30` <SAR>, le *bur*. Pose 20`, le grain qu'il a perçu. Pose 30` <SAR>, le second *bur*. Pose 15`, le grain qu'il a perçu. Pose 8`20, ce dont un grain excède l'autre. Enfin, pose 30`, la somme de la superficie des champs. Puis fractionne en deux 30`, la somme de la superficie des champs: 15`. Pose 15` et 15` deux fois. Dénoue l'inverse de 30`, le *bur*: 2”. Porte 2” à 20`, le grain qu'il a perçu: 40’, le grain fa[ux]. Porte à 15`, que tu as posé deux fois: 10`. Que ta tête (le) retienne. Dénoue l'inverse de 30`, le second *bur*: 2”. Porte 2” à 15`, le grain qu'il a perçu: 30’, le grain faux. Porte à 15` que tu as posé deux fois: 7`30. De quoi 10`, que ta tête retient, excède 7`30? Il excède de 2`30. Soustrais 2`30, ce dont il excède, de 8`20, ce dont un grain excède l'autre: tu laisseras 5`50. Que ta tête retienne 5`50, que tu as laissé. Additionne le coef[ficient ] 40’ et [le coef]ficient 30’: 1°10’. [Je ne connais pas] l'inverse. Que dois-je poser à 1°10’, qui me donne 5`50, que ta tête retient? Pose 5`. Porte 5` à 1°10’, cela te donnera 5`50. De 15`, que tu as posé deux fois, soustrais de l'un, ajoute à l'autre, 5`, que tu as posé: le premier est 20`, le sécond 10`. La superficie du premier champ est 20`, la superficie du second champ 10`.

<u>Commentaires</u>
Le *bur* est une unité de mesure de surface. 1 *bur* = 30` SAR (Rappelons que le nombre30`, écrit en base 60, signifie 30x60 en base dix; rappelons aussi que 1 SAR ≈ 12 yds. carrées). Il transforme les *kur* en *sila* : 1 *kur* = 5 *sila*. Donc 4x5=20 *sila* pour le premier champ, et 3x5=15 *sila* pour le deuxième champ. Ensuite, le scribe assume (dans une démarche de fausse position) que les champs ont 15` SAR chacun. Pour calculer la production qui correspond à chaque champ, il calcule l'inverse de 30`: c'est 2”, ou $2/(60)^2$, en base 10. Il calcule alors 2”x20` = 40’ sila/SAR (donc 40/60 en base 10 ). Alors 40’ sila/SAR x 15`SAR = 10` sila pour le premier champ. Un calcul similaire donne 7`30° sila la production du deuxième champ. On a après: 10` - 7`30=2`30.
Puis: 40’+30’=1°10’. Il arrive à l'«équation»: 1°10’Z=5`50°. Il obtient que Z vaut 5`. La solution est donc 15`+5` et 15`-5`, ie. 20` et 10`.

Si nous revenons aux notations modernes, le problème correspond au système linéaire suivant:

$$aX - bY = c$$
$$X+Y = d.$$

Les calculs précédents montrent que, pour trouver X et Y le scribe prend une solution fausse a priori: il prend comme solution initiale $X_o=Y_o=d/2$ (solution qui vérifie la condition X+Y=d). Ensuite il calcule la production qui correspondrait à chaque champ, s'ils avaient une aire égale à d/2; ces productions sont aX_o et bY_o, respectivement, de sorte que l'excès de la production du premier champ sur le second est $aX_o-bY_o=c_o$. Après il calcule $c-c_o$. Il faudra donc augmenter d'une certaine quantité l'aire du premier champ et de diminuer de cette même quantité celle du deuxième champ. Or, pour chaque unité qu'il augmente X, la production du premier champ augmente de a, et pour chaque unité qu'il diminue Y, la production du deuxième champ diminue de b, de sorte que l'excès de production du premier champ sur le deuxième augmente de a+b. Le scribe arrive alors à une équation:

«Que dois-je poser à 1° 10', qui me donne 5`50, que ta tête retient?»

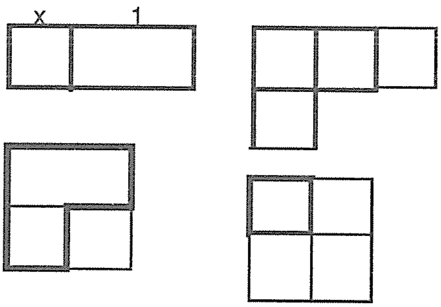
L'équation est, en termes modernes: 1° 10'Z = 5`50°. Le scribe sait comme résoudre cette équation: il sait qu'il doit multiplier 5`50 par l'inverse de 1° 10'. Bien que la table d'inverses ne lui fournit pas l'inverse de 1° 10', il trouve que le nombre cherché est 5`. C'est nombre est, évidemment, la quantité qu'il faut ajouter au premier champ et enlever au deuxième champ.

Quelques remarques s'imposent. En premier lieu, on voit que la méthode est une méthode arithmétique de fausse position: on donne une valeur numérique artificielle, reconnue fausse a priori, aux inconnues du problème. Ces solutions fausses permettent d'*avancer* dans le problème à travers un calcul sur les nombres donnés dans l'énoncé. Ce n'est qu'à la fin des calculs qu'on arrive aux *vraies inconnues* (ie. aux aires exactes des champs) qui jouent ainsi le rôle de point d'arrivé du processus. Dans une démarche algébrique, par contre, on raisonne et on calcule en terme des valeurs exactes (bien que non connues encore) de ces inconnues..., qui se constituent ainsi en un point de départ.
En deuxième lieu, il convient de remarquer que l'équation à laquelle arrive le scribe dans sa démarche de résolution n'est pas une équation au sens algébrique, d'après la caractérisation que nous avons proposé au début du §2: en effet, pour résoudre l'équation, le scribe n'opère point l'inconnue: les calculs se font sur des nombres (l'inverse de 1^o 10' est multiplié par 5`50), et l'inconnue reste sans intervenir. C'est donc une **équation arithmétique** (cf. Filloy et Rojano, 1984, 1989).
Une autre remarque qu'on peut faire par rapport aux raisonnements arithmétiques concerne la "charge sémantique" ou *présence* de la signification des nombres et des relations entre ceux-ci tout au long de la résolution. Ce phénomène, qui a été mis en évidence, sous le plan didactique, par Bednarz et al. (1992), apparaît dans le problème précédent comme moteur conducteur de l'organisation des calculs du scribe (on calcule la "production fausse" de chaque champ, on calcule l'excès des productions, ...). Par contre, dans les raisonnements algébriques, la "charge sémantique" diminue voire disparaît, surtout après la mise en équation, comme nous allons le voir au §4, ci-dessous.

§3 La géométrie du collage
Avant d'aller plus loin, il convient de nous arrêter sur une autre dimension des mathématiques babyloniennes. J. Høyrup (1986) a proposé une interprétation très intéressante des procédures de calcul que les tablettes babyloniennes exhibent en termes d'une géométrie de "coupage et collage" (*cut-and-paste-procedures*); il s'agit d'une nouvelle interprétation de ce qu'on appelle l'"«algèbre» babylonienne".Ce qui nous intéresse ici est d'essayer de voir dans quelle mesure l'«algèbre» du collage est conceptuellement liée à l'«algèbre» que nous avons caractérisée par la propriété d'analycité mentionné ci-dessus. Pour ce faire, nous allons prendre un exemple. Il s'agit d'un problème provenant de la tablette BM 13901:

> "The surface and the square-line I have accumulated: 3/4. 1 the projection you put down. The half of 1 you break, 1/2 and 1/2 you make span [a rectangle, here a square], 1/4 to 3/4 you append: 1, makes 1 equilateral. 1/2 which you made span you tear out inside 1: 1/2 the square-line" (Høyrup, 1986, p. 450. *N.B.* Les nombres dans la traduction de Høyrup ont été écrit en base 10 et on utilise le symbole usuel pour désigner les fractions)[3]

[3] La traduction française de ce problème, fournie par Thureau-Dangin (où les nombres apparaissent en base 60) est: "J'ai additionné la surface et le côté de mon carré: 45'. Tu poseras 1, l'unité. Tu fractionneras en deux 1: (30'). Tu croiseras [30'] et 30': 15'. Tu ajouteras 15' à 45': 1. C'est le carré de 1. Tu soustrairas 30', que tu as croisé, de 1: 30', le côté du carré." (Thureau-Dangin, 1938, p.1).



Comme on voit sur le dessin, la procédure telle qu'expliquée par Hoyrup, consiste à découper la figure originale (première figure) en sorte de compléter un carré (quatrième figure): dans un premier temps, le rectangle de dimensions égales à 1 et x est coupé en deux rectangles; la base de ces rectangles devient donc 1/2. Le rectangle à droite est transféré en bas (figure 3). On complète alors le carré (figure 4).

Ce qui nous intéresse ici est de voir de plus près ce que devient l'inconnue dans ces transformations. De façon plus précise, est-ce que l'inconnue est *prise en compte* dans les calculs? Est-ce qu'on *opère* cette inconnue? Une lecture attentive de la traduction de Høyrup laisse voir que l'inconnue est prise en considération (on arrive à l'égalité que nos notations modernes permettraient d'écrire comme $(x+1/2)^2 = 1$) On voit donc que dans cette conceptualisation, l'élément hypothético-déductif propre à la pensée analytique est présent.. Mais on peut remarquer aussi que l'inconnue n'est vraiment pas opérée! Or, ce qui distingue, d'après nous, l'analycité propre à la pensée géométrique de l'analycité propre à la pensée algébrique est justement l'opération de l'inconnue...

En fait la méthode du collage permet d'éviter de faire des véritables calculs sur l'inconnue. L'inconnue reste ainsi un support statique dans la procédure de résolution.

D'après la caractérisation en termes l'analycité opératoire que nous avons proposée pour distinguer les débuts des démarches proprement algébriques, l'«algèbre» babylonienne, sous l'intéressante interprétation de Høyrup en termes de «géométrie naïve» ou «géométrie du collage» ne pourrait pas être considérée comme «algèbre».

Remarquons, enfin, que la conceptualisation qui sous-tend la géométrie du collage demande un recours constant au registre géométrique; ce registre constitue à la fois sa force et sa limite. Ainsi, faire du calcul sur l'inconnue un objet d'étude (ne serait-ce qu'élémentaire), apparaît en dehors du cadre problématique de géométrie du collage. Ce ne sera pas le cas du cadre problématique chez Diophante, dont l'oeuvre commence justement par un certain nombre de considérations sur ce que nous pourrions appeler «les règles de base du calcul sur l'inconnue» (des règles que nos notations modernes nous permettraient d'écrire comme: $(x^2)2 = x^4$; $x(1/x^2) = 1/x$, etc.).

L'étude de quelques problèmes des *Livres Arithmétiques* de Diophante va nous permettre de préciser d'avantage notre idée d'analycité opératoire et de mieux distinguer la différence entre les trois conceptualisations qui nous concernent: celle des méthodes de fausse position, celle de la géométrie du collage et celle de l'«algèbre».

§4 L'«algèbre» chez Diophante

Nous allons voir maintenant le problème 6 du Livre 1 des *Livres Arithmétiques*, de Diophante d'Alexandrie (vers 250 ap. J.-C.)[4]

Livre 1, problème 6:

«Partager un nombre proposé en deux nombres, de manière qu'une fraction donnée du premier nombre excède d'un nombre donné une fraction donnée du second nombre»

Solution de Diophante:	Traduction moderne:
«Il faut toutefois que le nombre donné soit plus petit que le nombre obtenu lorsque l'on prend la fraction excédente donnée du nombre initial proposé.	Condition de faisabilité de la solution (cf. Radford, 1992a)
Proposons donc de partager 100 en deux nombres, de manière que l'excédent du quart du premier nombre sur le sixième du second nombre soit 20 unités.	Diophante spécifie les constantes du problème, qui devient donc: $x+y=100$; $x/4 - y/6 = 20$
Posons que le sixième du second nombre est 1 arithme; donc, ce nombre sera 6 arithmes. Dès lors, le quart du premier nombre sera 1 arithme plus 20 unités; donc, ce premier nombre sera 4 arithmes plus 80 unités. Nous voulons, du reste, que les deux nombres additionnés forment 100 unités. Or, ces deux nombres additionnés forment 10 arithmes plus 80 unités, lesquels égaleront 100 unités.	$y/6 = 1A$, donc $y = 6A$. $x/4 = 1A + 20$ $x = 4A + 80$. Mais $x + y = 100$. Or $x+y = 10A+80$ $10A+80=100$.
Retranchons les semblables des semblables: il reste 10 arithmes égaux à 20 unités, et l'arithme devient 2 unités.	$10A = 100-80$ $10A = 20$. Donc $A= 2$.
Revenons à nos positions. On a posé que le sixième du second nombre est 1 arithme, c'est-à-dire 2 unités; donc, le second nombre sera 12 unités. D'autre part, le quart du premier nombre étant 1 arithme plus 20 unités, il sera donc 22 unités, et le premier nombre sera donc 88 unités. Dès lors, il est établi que le quart du premier nombre excède le sixième du second nombre de 20 unités, et que les nombres additionnés forment le nombre proposé.»	Vérification des résultats.

(Ver Eecke, 1926, pp. 12-13)

La procédure de Diophante est tout à fait différente, du point de vue conceptuel, des procédures de fausse position et de la géométrie du collage. En effet, ici, une inconnue (désignée par l'arithme, c'est-à-dire le *nombre*) est mise en oeuvre dans les calculs. Cette inconnue n'est pas, comme dans les procédures arithmétiques, le point d'arrivé des calculs; elle n'est pas non plus, comme c'est le cas dans les procédures de la géométrie du collage, un point de référence statique dans le développement du problème, mais bel et bien une quantité qui est opérée comme si c'était un nombre connu: dans le texte cité ci-dessus, Diophante fait le calcul *6 arithmes plus 4 arithmes et 80 unités*, pour arriver à l'équation *10 arithmes et 80 unités égal à 100 unités*. Ce calcul repond à notre critère l'analycité opératoire.

Il convient de noter que cette conceptualisation analytique opératoire, présente dans l'oeuvre de Diophante, débouche sur l'élaboration d'un «nouveau calcul» -un calcul sur l'arithme- que Diophante mène assez loin (dans le problème 6, Livre "VI", il pourra, par exemple, mettre en facteur un polynôme de deuxième degré; dans le problème 11 du même Livre, il développe sans

---

[4]Rappelons qu'au début des *Livres Arithmétiques*, Diophante dit que l'oeuvre est composée de 13 livres. On en connaît seulement 10; les 6 premiers sont désignés par Livre I, Livre II, ... et Livre VI. On ne sait pas exactement la place des autres trois livres connus dans l'ensemble de l'oeuvre; on les désigne alors par Livre"VI", Livre VII" et Livre "VIII"

peine le carré de «6 arithmes plus 1 unité moins 1 carré d'arithme», etc.). Un tel calcul semble impossible d'être envisagé à l'intérieur de la conceptualisation de la géométrie du collage ou à l'intérieur de celle des méthodes de fausse position: dans ces conceptualisations, ce calcul n'a simplement pas de *raison d'être*...

Enfin, on peut voir que dans la procédure de Diophante, la "charge sémantique" des nombres est très vite perdue. Ainsi, on se débarrasse tôt des fractions et les expressions qui en résultent viennent se fusionner à d'autres expressions qui n'auront plus de correspondance sémantique avec l'énoncé du problème[5].. Par contre, dans le cas des méthodes de fausse position et dans les méthodes de la géométrie du collage la sémantique n'est pas évacuée.

§5. D'où vient donc l'algèbre?
Au début du Livre I, Diophante dit: "Il se peut que la matière paraisse plus difficile qu'elle ne l'est, parce qu'elle n'est pas encore connue, et que les débutants désespèrent de réussir." (Ver Eecke, 1926, p. 1. C'est nous qui soulignons)
Prise à la lettre, la phrase précédente indiquerait que c'est Diophante qui introduit pour la première fois cette "matière". En nous en tenant à la phrase, Diophante serait donc le fondateur de l'algèbre. Mais une lecture des *Livres Arithmétiques* qui nous sont parvenus, suggère l'existence d'autres oeuvres et d'autres sources qui seraient à la base de cette "nouvelle matière". Ainsi, on a en particulier un *Porisme* auquel Diophante fait allusion à quelques endroits (cf. problème 3 du livre "V" ou le problème 5 du livre "V", par exemple). D'autre part, Gandz (1938) a mis en évidence certaines traces des mathématiques babyloniennes dans l'oeuvre de Diophante. Bien que nous ne puissions pas adhérer complètement aux arguments de Gandz, en raison que ceux-ci supposent la maîtrise d'un langage algébrique que de toute évidence était hors de la portée de Diophante, l'exemple suivant est néanmoins très suggestif au sujet des sources babyloniennes dans l'algèbre de Diophante.

---

[5]Dans le problème 34 du Livre I, Diophante arrive à l'équation «24 arithmes sont égaux à 8 carrés d'arithme» (Ver Eecke, 1926, pp. 42-43). Serait-il possible de retrouver l'énoncé du problème à la lumière de la seule équation?

Livre I, problème 27:
Trouver deux nombres dont la somme et le produit forment des nombres donnés.

Solution de Diophante

«Proposons que la somme des nombres forme 20 unités, et que leur produit forme 96 unités. Que l'excédent des nombres soit 2 arithmes. Dès lors, puisque la somme des nombres est 20 unités, si nous la divisons en deux parties égales, chacune de ces parties sera la moitié de la somme, ou 10 unités. Donc si nous ajoutons à l'une des parties, et si nous retranchons de l'autre partie, la moitié de l'excédent des nombres, c'est-à-dire 1 arithme, il s'établit à nouveau que la somme des nombres est 20 unités, et que leur excédent est 2 arithmes. En conséquence, posons que le grand nombre est 1 arithme augmenté de 10 unités qui est la moitié de la somme des nombres; donc le plus petit nombre sera 10 unités moins 1 arithme, et il s'établit que la somme des nombres est 20 unités et que leur excédent est 2 arithmes.
Il faut aussi que le produit des nombres forme 96 unités. Or leur produit est 100 unités moins un carré d'arithme, ce que nous égalons à 96 unités, et l'arithme devient 2 unités. En conséquence, le plus grand nombre sera 12 unités et le plus petit sera 8 unités, et ces nombres satisfont la proposition»
(Ver Eecke, 1926, pp. 36-38)

Traduction en langage moderne

$x + y = 20$
$xy = 96$
$x - y = 2A$

$x_0 = y_0 = 20/2 = 10$
$x = x_0 + 1A = 10 + 1A$
$y = y_0 - 1A = 10 - 1A$
On a $x+y = 20$
et $x-y = 2A$.
Posons donc $x = 10 + 1A$
$y = 10 - 1A$

$xy = 96$
Or $xy = 100 - 1A^2$
$= 96$
Donc $A=2$
Donc $x=10+2=12$ et
$y = 10-2 = 8$.

On peut contraster cette solution à la solution donnée par le scribe au problème VAT 8389 mentionné ci-dessus (§2). On voit que l'idée de partager la somme des nombres qu'on cherche est présente dans les deux procédures. Mais à la place de partir avec ces valeurs comme solutions initiales et les ajuster à la fin, comme fait le scribe babylonien, ce que Diophante fait est d'introduire dès le départ cette quantité d'ajustement (l'arithme), qui se voit ainsi impliquée dans les calculs: elle devient solution d'une équation de deuxième degré[6].

La ressemblance étonnante entre les deux procédures suggère que la conceptualisation de la méthode de Diophante est plus proche des méthodes de fausse position que de celles de la géométrie du collage. Cette affirmation semble aussi être appuyée par d'autres textes historiques, en particulier par celui du *Liber Mensurationum* d'Abû Bekr qui aurait été écrit vers le 11e siècle (cf. l'édition de Busard, 1968). En effet, tel que Høyrup (1986) l'a signalé, dans ce livre il est souvent question de résoudre un même problème par deux méthodes différentes, l'une -celle de la géométrie du collage- et l'autre celle qui appartiendrait à l'*al-gabr* (cf. par

[6]Le problème 6 du Livre I des *Livres Arithmétiques* (vu au §4) peut aussi être résolu par cette même procédure: Diophante aurait alors pu prendre 50 + 1A pour le premier nombre et 50 - 1A pour le deuxième. Il aurait été alors amené à calculer la différence entre le quart de 50 + 1A et le sixième de 50 - 1A et faire cette différence égale à 20 unités. Mais cela l'aurait amené à un calcul sur des nombres fractionnaires, qu'il évite souvent (c'est pour quoi il prend dans le problème 6 du Livre I le sixième du second nombre égal à 1 arithme et non pas simplement le second nombre égal à 1 arithme; c'est pour quoi aussi dans le problème 27 du Livre I qu'on vient de voir, il prend la différence entre les nombres égale à 2 arithmes et non pas 1 arithme...).

exemple, les problèmes No. 32 ou No.41 du *Liber Mensurationum*). Mais ces méthodes sont perçues comme *étant différentes*, même si parfois, sur le plan des calculs il y a coïncidence.

Avant d'aller plus loin dans l'histoire de l'algèbre, il est important de faire quelques commentaires additionnels sur les deux problèmes de Diophante discutés ci-dessus. D'une part, on remarque qu'*au niveau des calculs* les vraies inconnues du problème ne sont jamais mises en scène : on se réfère à ces nombres comme «le premier nombre», «le deuxième nombre», ... On ne trouvera jamais, *à l'intérieur des calculs algébriques*, une équation dont l'inconnue serait justement «un des nombres» (ie. «le premier nombre» ou «le deuxième nombre», etc.). En effet, les vraies inconnues du problème sont toujours exprimées en fonction d'une seule inconnue, l'*arithme*, qui est l'inconnue qu'on opère au sens analytique. Comme nous l'avons vu précédemment, dans le problème 6 du Livre I, Diophante fait $y/6 = 1A$, de là il obtient $y = 6A$, et compte tenu du fait que $x/4 - y/6 = 20$, il arrive à $x/4 = 1A + 20$. L'arithme (que nous avons désigné par A) apparaît ainsi comme une inconnue auxiliaire à caractère analytique qui sert d'*intermédiaire* entre les vraies inconnues[7]..
Il est clair, par ailleurs, que dans les problèmes que nous venons de voir, on n'augmente guère le coût syntactique si on considère comme *inconnue* analytico-opératoire un des nombres qu'on cherche (ie. «le premier nombre», «le deuxième nombre», ...) En effet, les *calculs* qui sont requis pour résoudre ***directement*** les systèmes d'équations qui correspondent à ces problèmes (c'est-à-dire sans passer par l'arithme, comme ferait un élève de secondaire de nos jours) étaient à la portée de Diophante. Mais dans la conceptualisation de l'algèbre de Diophante il y a une faussée infranchissable entre les inconnues du problème et l'inconnue des calculs (l'arithme): ce sont des objets qui appartiennent à des niveaux conceptuels différents.

L'algèbre chez Diophante apparaît comme un outil pour résoudre des problèmes: elle n'est pas autonome. L'arithme, quand à lui, est un artifice heuristique (Radford, 1992a). L'oeuvre d'Al-Khwarizmi nous montre, par contre, une algèbre constituée en discipline.

§4 Mohammed Ben Musa Al-Khwuarizmi: l'algèbre comme discipline
On situe la vie de Mohammed Ben Musa Al-Khwarizmi entre la deuxième moitié du VIII siècle et la première du IX siècle (cf. Youschkevitch, 1976). L'oeuvre qui nous intéresse ici, *Le Traité concis sur le calcul par al-gabr et l'al-muquabala*, aurait été écrit entre 813 et 833 à Bagdad (cf. Rashed, 1984)[8]
Dans la préface, l'auteur dit qu'il a été encouragé «à écrire un petit travail sur le Calcul par l'al-gabr et l'al-muquabala, en y confinant tout ce qui est le plus facile et le plus utile en arithmétique, comme ce que les hommes requièrent constamment dans le cas d'héritages, de legs, de répartitions, de procès et du commerce, et dans le commerce des uns avec les autres, ou bien dans la mesure de terres, l'excavation de canaux, dans le calcul géométrique, et d'autres objets de plusieurs classes qui s'y rattachent». (Rosen, p. 3).
Ainsi, contrairement à Diophante, le projet d'Al-Khwarizmi se présente comme un projet appliqué, basé sur des règles de calcul qu'on nomme de façon explicite.
Mais qu'est-ce que c'est ce calcul par l'al-gabr et l'al-muquabala? Sur quoi calcule-t-il? «J'ai remarqué, dit Al-Khwarizmi, que les nombres qui sont requis dans le calcul de l'al-gabr et l'al-muquabala sont de trois classes, à savoir, les racines, les carrés et les nombres simples sans relation à la racine ou au carré. La racine est n'importe quelle quantité qui sera multipliée par

---

[7]Ainsi, dans le problème 20 du Livre I, Diophante cherche à partager 100 en trois nombres, tels que le premier, augmenté du second, soit le triple du troisième. Le raisonnement commence ainsi:«Posons que le troisième nombre est un arithme». Puis il aboutit à l'équation: "4 arithmes ègal à 100 unités", qui n'est pas plus compliquée syntactiquement d'obtenir que l'équation: "4 fois le troisième nombre égal à 100 unités".

[8]On dispose d'un certain nombre de traductions du *Traité Concis*; citons les traductions latines (12e siècle) de Gerardo de Cremona (dont une édition critique a été faite par Hughes, 1986) et celle de Robert of Chester (qui a servi de base à la traduction anglaise de Karpinski, 1915) et la traduction anglaise de Rosen.

elle-même, composée d'unités ou de nombres qui augmentent ou des fractions qui diminuent[9]». (Rosen, pp. 5-6; le souligné est nôtre).

Les racines et les carrés sont reliés, bien sûr, par le fait que la multiplication d'une racine par elle-même donne un carré. Mais bien que les racines et les carrés soient des nombres, dans le *Calcul* ce sont des nombres différents aux nombres simples: "un nombre simple est un nombre qui n'est pas connecté à la racine ou au carré par une proportion quelconque." (Karpinski, p. 69). La racine est le carré sont donc impossibles d'exprimer à l'intérieur de la théorie des proportions, la théorie sur les grandeurs la "plus puissante" avant l'algèbre. Ce sont vraiment des objets nouveaux. Ils sont considérés dès le départ comme des objets mathématiques *per se*. Ils ne constituent pas juste un artifice heuristique puissant dans la résolution de problèmes; au contraire, leur statut mathématique fera possible la construction d'une nouvelle théorie, dans laquelle un nouveau calcul (un calcul algébrique) aura lieu. (En fait il s'agira d'un calcul sur des polynômes de deuxième degré).

L'équation algébrique ou **espèce**[10] est le point central de l'organisation de l'oeuvre du *Traité concis*, ce qui marque une différence fondamentale par rapport aux *Livres Arithmétiques* de Diophante, où ce qui prime est le *problème*. L'équation résulte de la possibilité qu'ont les nombres de base du nouveau *Calcul* d'être égaux entre eux:
«Un nombre appartenant à une de ces classes peut être égal à un nombre d'une autre classe; tu peux dire, par exemple, "des carrés sont égaux à des racines" ou "des carrés sont égaux à des nombres" ou "des racines sont égales à des nombres"». (Rosen, p. 6). Cette combinaison de classes définit aussi les **types d'espèces** à étudier. Al-Kwharizmi distingue trois cas simples et trois cas combinés. Les cas simples sont les suivants:
(a) «Des carrés sont égaux à des racines»; (b) «Des carrés sont égaux à des nombres»; (c) «Des racines sont égales à des nombres». Les cas d'espèces combinées sont: (a') «Des racines et des carrés sont égaux à des nombres»; (b') «Des carrés et des nombres sont égaux à des racines»; (c') «Des racines et des nombres sont égaux à des carrés»

Voici quelques exemples donnés par Al-Khwarizmi:
Exemple du (a): «"Un tiers du carré est égal à quatre racines;" donc le carré complet est égal à douze racines, c'est-à-dire à cent quarante-quatre; et sa racine est douze.». Exemple du (c): «"Une racine égale trois en nombres;" donc la racine est trois, et le carré est neuf.». Exemple du (a'): «Par exemple, dit Al-Khwarizmi, "un carré, et dix racines du même font trente-neuf dirhams;" c'est-à-dire, quel doit être le carré qui, quand augmenté de dix de ses propres racines, fait trente-neuf? La solution est celle-ci: tu prends la moitié du nombre des racines, qui dans le cas présent fait cinq. Cela tu le multiplies par lui-même; le produit est vingt–cinq. Ajoute cela à trente-neuf; la somme est soixante-quatre. Maintenant prends la racine de cela, qui est huit, et soustrais-lui la moitié du nombre des racines, qui est cinq; le reste est trois. Cela est la racine du carré cherché; le carré lui-même est neuf.»

Quelques commentaires s'imposent:
(1) Dans les équations chez Al-Khwarizmi[11], les nombres qui y apparaissent (ces nombres que nous appelons aujourd'hui les "coefficients") n'expriment point une multiplication, mais une quantité de nombres: ce sont des **nombres nombrants**: ils indiquent une quantité d'une

---

[9] L'idée de racine apparaît donc reliée à celle de «quantité quelconque»; cette idée est ainsi conceptuellement compatible avec l'idée d'*arithme* diophantien (un arithme est pour Diophante «une quantité indéterminée d'unités»: cf. Radford, 1992a).

[10] Dans la traduction latine de Robert of Chester , le terme *espèces* (que nous avons traduit de *species*, d'après Rosen, p.8) apparaît comme *genera*: c'est ce que nous appelons aujourd'hui *équations*.

[11] Penser à l'équation de l'exemple (a') vu ci-dessus ou a cette autre: «Deux carrés et dix racines sont égaux à quarante-huit dirhams» (Rosen, p. 9)

certaine chose (quantité de racines, quantité de carrés, ...).[12]: C'est pour quoi on ne trouvera pas, dans les problèmes qu'Al-Khwarizmi présente, d'équation à "coefficients" irrationnels...
(2) L'exemple donné ci-dessus de l'espèce (c) permet de mieux comprendre l'idée que se faisait al-Khwarizmi du *Calcul* qu'il était en train de mettre en place: le fait que la résolution de l'équation soit triviale ne nuit en rien à sa nature d'équation. Chez Al-Khwarizmi, l'équation n'est pas seulement un outil -comme c'est le cas chez Diophante- mais elle dévient objet d'étude.

Les règles d'al-gabr et al-muquabala:
Le problème suivant, qui appartient au chapitre *Des six problèmes*, va nous permettre d'avoir un aperçu du type de problèmes qu'on envisage dans le cadre du *Traité Concis*.
Problème cinq:

> «J'ai partagé dix en deux parties; j'ai alors multiplié chacune d'elles par soi-même, et quand j'ai ajouté les produits ensemble, la somme était cinquante-huit dirhams.
>
> Calculs: suppose qu'une des deux parties est une chose, et l'autre dix sans la chose[13]. Multiplie dix sans la chose par lui-même; cela donne cent et un carrés sans vingt choses. Alors multiplie une chose par une chose; c'est un carré. Ajoute les deux ensemble. La somme est cent plus deux carrés sans vingt choses, et cela est égal à cinquante-huit dirhams. Complète maintenant cent et deux carrés sans les vingt choses en ajoutant vingt choses à cinquante-huit; et il vient cent plus deux carrés égaux à cinquante-huit et vingt choses. Réduis ceci à un carré, en prenant la moitié de tout ce que tu as. Cela donne alors: cinquante dirhams et un carré, qui est égal à vingt-neuf dirhams et dix choses. Alors réduit cela, en prenant vingt-neuf de cinquante; il en reste vingt et un et un carré, égal à dix choses. Prends la moitié du nombre des racines, ce qui est cinq; multiplie-le par lui-même, cela donne vingt-cinq; prends de là les vingt et un qui sont connectés avec le carré, le reste est quatre. Extrais la racine, c'est deux. Soustrais cela à la moitié des racines, c'est-à-dire de cinq, il en reste trois. Ceci est une des portions; l'autre est sept. Cette question te réfère à une des six cas, à savoir, "Des carrés et des nombres égal à des racines"» (D'après la traduction de Rosen, p. 39-40)

La solution au problème précédent permet de voir que la procédure de résolution repose sur la propriété d'analycité opératoire que nous nous sommes donnés comme critère pour reconnaître une procédure comme «algébrique»: on suppose qu'une des parties est une *chose*, et on traite la *chose* comme si c'était un nombre connu. D'autre part, on peut voir, dans ce problème, les deux règles sur lesquelles le Calcul d'Al-Khwarizmi est bâti: celle de l'al-gabr et celle de l'al-muquabala. La première -celle de l'al-gabr- permet de se débarrasser des racines et des carrés qui expriment une soustraction[14]. Le terme *al-gabr* signifie compléter, remplir, restaurer. On restaure donc, dans une équation, une certaine combinaison de nombres (nous dirions une certaine expression algébrique) en y ajoutant la quantité de nombres qui manquent. L'autre règle -celle d'*al-muquabala*, qui signifie confronter, mettre en opposition, permet d'opérer les nombres simples entre eux, de sorte de les regrouper dans une même expression (autrement dit, pour utiliser une expression moderne, de les mettre d'un seul côté de l'égalité). Mais l'al-

---

[12]Ainsi, «Deux carrés et dix racines sont égaux à quarante-huit dirhams» se traduit mal en langage moderne par: $2x^2 + 10x = 48$, où le coefficient exprime une multiplication: la traduction moderne saisit mal le sens original: «Deux carrés» veut dire un carré et un autre carré, donc plutôt $x^2 + x^2$. Les nombres 2 et 10 (ie. les coefficients), dans l'équation, sont donc des nombres nombrants.

[13]C'est-à-dire, dix moins la chose: ce que nous écririons 10-x.

[14]Youschkevitch (1976, p.35) dit que la règle d'al-gabr permet de nous débarrasser des termes affectés du signe -. Bien sûr, il n'y a pas de signe "-" chez Al-Khwarizmi: ce qu'il y a ce sont des termes qu'on retranche à d'autres termes...

muquabala concerne aussi les nombres nombrants quand il s'agit de réduire ou d'agrandir la quantité des carrés à un seul carré[15].

Souvent, les traductions d'Al-Khwarizmi ne permettent pas de saisir le sens profond de l'acte qui sous-tend la règle d'al-gabr. En effet, arrêtons-nous sur le passage suivant, pris du problème précédent:

> «Complète maintenant cent et deux carrés sans les vingt choses en ajoutant vingt choses à cinquante-huit; et il vient cent plus deux carrés égaux à cinquante-huit et vingt choses»

Nous avons traduit ce passage du texte de Rosen, qui dit textuellement:

> Take now the twenty negative things from the hundred and the two squares, and add them to fifty-eight; then a hundred, plus two squares, are equal to fifty-eight dirhems and twenty things.

On voit donc que nous n'avons pas suivi Rosen au pied de la lettre (nous n'avons pas traduit littéralement "Take now ... from..."). En effet, on ne peut pas **prendre** les «vingt choses» de «cent et deux carrés sans les vingt choses» et les ajouter à cinquante-huit, comme fait penser la traduction de Rosen, car on ne peut pas prendre les «vingt choses» de la première expression étant donné qu'elles n'y sont pas![16]

Pour pouvoir saisir le sens de la règle de l'al-gabr, il faut se référer au texte latin de Gerardo de Cremona:

> «Restaura ergo centum et duos census per res que fuerunt diminute, et adde eas quinquaginta octo». (Cremona, Édition Hughes, 1986, p. 249)

On voit donc qu'il s'agit, contrairement à ce que suggère la traduction de Rosen, d'une action qui est menée d'abord sur l'expression incomplète, de façon à la **restaurer** , puis sur l'autre expression.

La traduction à l'anglais de L. C. Karpinski (1915), basée sur la traduction au latin de Robert of Chester, dit ceci:

> «Complete the 100 plus $2x^2$ less 20x by adding the 20x to 58. This gives 100 units + $2x^2$ equal to 58 units and 20x.»

La traduction moderne de Karpinski perd le sens du rôle que jouent les vingt racines comme un terme qu'on a enlevé du terme cent et deux carrés et qui rend donc ce terme momentanément incomplet.

---

[15] C'est donc la règle de l'al-gabr celle qui concerne le calcul sur les nouveaux objets (la racine et le carré). C'est possible que ce soit la nouveauté qu'elle représente qui ait donné par la suite son nom à la nouvelle discipline, et que ce ne soit pas juste un hasard que le mot al-muquabala ait été abandonné...

[16] On peut aussi remarquer que dans la traduction de Rosen, le terme «the twenty negative things» n'a de sens qu'à l'intérieur d'un cadre conceptuel dans lequel le nombre négatif aurait été déjà développé. Et, chez Al-Khwarizmi, ce n'est pas le cas.

Les considérations précédentes nous mènent au résultat suivant:

Dans la soustraction algébrique, chez Al-Khwarizmi, le "tout" (c'est-à-dire le terme auquel on retranche ou on enlève une certaine partie) garde encore sa trace originale après la soustraction. C'est pourquoi il peut être restauré. Dans la conceptualisation moderne, quand on enlève 20 x de $100 + x^2$, on obtient une expression différente, $100 + x^2 - 20x$. On dirait une expression sans passé.
On voit donc que l'al-gabr est liée à une conceptualisation particulière de la soustraction: il s'agit d'une soustraction dans laquelle les termes qui interviennent (disons A et B, si nous désignos par A-B la soustraction en question) gardent encore son identité; c'est la permanence du terme A auquel on enlève B et la permanence du terme B qui donnent le sens à la règle d'al-gabr.

L'obtention de l'équation qui traduit l'énoncé d'un problème est une étape du processus de résolution. Cette étape pose des difficultés d'intensité différente. Le type de problème le plus simple serait celui pour lequel l'organisation des données du problème permettant d'arriver à une équation se trouve indiqué dans l'énoncé du problème. Un problème de ce type (dont un exemple le constitue le problème cinq d'Al-Khwarizmi, cité ci-dessus) permet en effet l'économie de la recherche heuristique de l'équation. Ce type de problème est tel que la "distance" entre son énoncé et une équation le traduisant est minimale[17]. Ce sont justement ces problèmes-là les plus répandus au commencement du développement de l'algèbre[18]. Mais, bien sûr, même si l'équation peut être facilement déduite de l'énoncé, il faut encore disposer d'un certain nombre de connaissances permettant de transformer l'équation en une équation de l'un des "six types" canoniques, donnés par Al-Khwarizmi (v.gr. des connaissances syntactiques et des connaissances sémantiques qui vont être à la base des calculs sur les expressions et qui vont évoluer au fur et à mesure que le nouveau langage algébrique et la "nouvelle matière" -pour reprendre l'expression de Diophante- se mettent en place, en passant, en particulier, d'un niveau rhétorique à un niveau symbolique).

§5 Synthèse...

Notre critère analytico-opératoire pour qu'une procédure de résolution de problèmes soit considérée comme relevant de l'«algèbre», nous a amené à classifier les procédures arithmétiques de fausse position qu'on trouve dans les tablettes babyloniennes VAT 8389 et VAT 8391 comme non-algébriques. De plus, les procédures qui relèvent de la géométrie du collage seraient aussi, d'après notre critère, des procédures non-algébriques. Cependant, nous avons vu que la méthode babylonienne de fausse position mentionnée au §2 (bien qu'il y aussi d'autres exemples: cf. Thureau-Dangin, 1938; Radford 1993a) semble avoir été historiquement un préalable conceptuel de la méthode analytico-opératoire de Diophante. La géométrie du collage apparaît plutôt comme relevant d'une "tradition" parallèle à celle de l'algèbre et qui n'arrive vraiment à se fondre avec celle-ci que dans l'oeuvre de Al-Khwarizmi, avec ses preuves géométriques (Cf. Høyrup, 1986).
Avec le *Traité Concis*, un nouveau programme de recherche commence: la recherche de nouveaux problèmes, des nouvelles méthodes, des nouveaux concepts. L'impossibilité

---

[17]Cette propriété qu'ont certains problèmes d'induire l'équation à partir de leur énoncé, a été mis en évidence dans (Radford, 1992b), où elle est désignée par la propriété de la direction vectorielle: la direction (énonciative ou pragmatique) de l'énoncé est la même que celle de l'équation. Énoncé et équation sont *parallèles*.

[18]Voici quelques autres exemples: «Il y a deux nombres, dont la différence est deux dirhams. J'ai divisé le petit par le grand et le quotient était la moitié d'un dirham.» (Rosen, p. 50) [En notations modernes: $x/(x+2) = 1/2$]. «J'ai partagé dix en deux parties; j'ai multiplié une de ces parties par dix et l'autre par soi-même, et les produits étaient les mêmes.» (Rosen, p. 51) [En notations modernes: $10x = (10 - x)^2$]

d'intégrer plus d'une inconnue analytique opératoire dans les calculs forcera pendant long temps les mathématiciens à se trouver des moyens pour résoudre des problèmes qui concernent plusieurs inconnues (c'est le cas des mathématiciens abbaquistes, c'est-à-dire des mathématiciens italiens du Haut Moyen Age). La géométrie fournira un vaste ensemble de représentations qui permettront (à travers en particulier la théorie des proportions) de pallier les limitations qu'impose l'algèbre à une inconnue: c'est le cas notamment de Fibonacci (cf. Radford, 1993b). L'étude de la résolution des équations de degré supérieur prendra ensuite la relève, avec Bombelli et Cardan, entre autres. Viète, à son tour, fournira une organisation de l'algèbre sur des nouvelles bases (Rojano & Sutherland, 1993; Charbonneau et Lefebvre, 1991), où la géométrie sera encore omniprésente. Au fur et à mesure que le langage algébrique se peuple de représentations symboliques propres, l'évacuation des représentations géométriques sera possible, ce qui donnera comme résultat, au temps d'Euler, une algèbre «arithmétisée», en donnant ainsi l'impression (fausse) que l'algèbre n'*est* qu'une arithmétique généralisée...

Références:

Barbin, E. 1993. La pensée mathématique dans l'histoire et dans la classe. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public de France*. 388: 136-156.

Bednarz, N., Radford, L., Janvier, B., Lepage, A. 1992. Arithmetical and Algebraic Thinking in problem-solving. Proceedings of the Sixteenth Conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education (PME), New Hampshire, Vol. 1, pp. 65-72.

Busard, H.L. 1968. L'algèbre au moyen âge: Le «Liber Mensurationum» d'Abû Bekr. *Journal des Savants*, Avril, -juin, 65-125.

Charbonneau, L., Lefebvre, J. 1991. Une lecture de Viète. Introduction à l'art analytique. Cinq Livres des Zététiques. CIRADE, Université du Québec à Montréal. 72 pages.

Filloy, E.; Rojano, T. 1984. "La aparición del lenguaje Aritmético-Algebraico". *L'Educazione Matematica*. Anno V. 3: 278-306.

Filloy, E.; Rojano, T. 1989. Solving equations: The transition from the arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9, 2, pp. 19-25.

Gandz, S. 1938. The origin and development of the quadratic equations in Babylonian, Greek and early Arabic algebra. *Osiris*, Vol. 3, pp. 405-557.

Høyrup, J.1986. Al-Kharizmi, Ibn Turk, and the Liber mensurationum: on the origins of Islamic Algebra. *Erdem* 2, pp. 445-484

Hughes, B. 1986. Gerard of Cremona's Translation of Al-Khwarizmi Al-jabr: A Critical Edition.. Vol XLVIII, pp. 211- 263

Karpinski, L.C. 1915. *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of Al-Khowarizmi*. New York: The Macmillan company.

Radford, L. 1992a "Diophante et l'Algèbre pré-symbolique. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec*, 31/32 (4/1), pp. 73-80. Reprint: *L'Ouvert*. IREM de Strasbourg, No. 68, pp. 1-13.

Radford, L. 1992b. Le raisonnement algébrique dans la résolution de problèmes écrits: un modèle d'interaction de représentations. *Actes du Colloque portant sur l'émergence de l'algèbre*. CIRADE, Université du Québec à Montréal, pp. 45-64.

Radford, L. 1993a. Le raisonnement algébrique. Une réflexion épistémologique. *Actes de Colloque "Eleve, école, Société."* Radford, L. et Mesquita, A. (Eds.) CIRADE. Université du Québec à Montréal. 33-45.

Radford, L. 1993b. *L'évolution des idées algébriques. Une étude historico-didactique.* Ecole des sciences de l'éducation. Université Laurentienne, 32 pages.

Rashed, R. 1985. *Entre l'Arithmétique et l'algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes.* Les belles lettres. Paris

Rojano, T., Southerland, R. 1993. La sintaxis Algebraica en el Proyecto Viético. *In*: *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Historia de las Ideas Algebráicas.* E. Filloy, L. Puig (eds.).Mexico: CINVESTAV, pp. 117-130.

Rosen, F. (éd.) 1831. *The algebra of Mohammed Ben Musa.* London: Oriental translation Fund.

Thomaidis, Y. 1993. Negative Numbers in the early 17th Century: An Approach for Didactic Reasons. *Science & Education.* Vol. 2, No. 1, pp. 69-86.

Thureau-Dangin, F. 1938a. *Textes mathématiques babyloniens.* Leyde, Brill. Ex Oriente Lux, I.

Thureau-Dangin, F. 1938b. La méthode de fausse position et l'origine de l'algèbre. *Revue d'assyriologie et d'archéologie orientale*, Vol. 35, pp. 71-77.

Ver Eeck, P. 1926. *Diophante d'Alexandrie. Les six livres arithmétiques et le Livre des nombres polygones.* Desclée de Brouwer. Liege. (Réimpressión: Albert Blanchard, Paris 1959).

Youschkevitch, A. 1976. *Les mathématiques arabes* (VIIIe - XVe siècles). Paris: Vrin.

À PROPOS DE LA CONTINUITÉ

- R. BEBBOUCHI -
Institut de Mathématiques
U.S.T.H.B., Alger - ALGÉRIE

Le mot vient du latin continuus (cum avec et tenere tenir), ce qui veut dire "qui n'est pas interrompu dans sa durée" (Encyclopédie Quillet 1983). On y trouve aussi les définitions suivantes :

- une grandeur continue est une grandeur qui peut varier pour une valeur aussi petite qu'on le désire comme les longueurs, les surfaces...

- l'espace géométrique, abstraction de l'espace physique, a contribué à forger la notion abstraite de continuité,

- <u>une ligne continue est formée d'une infinité de points juxtaposés sans discontinuité</u>,

- le continu en géométrie est intuitif,

- <u>les fonctions continues admettent une dérivée</u>.

Les deux phrases soulignées vont retenir notre attention.

1 - La continuité de la droite réelle :

En Algérie, au Collège d'Enseignement Moyen, dans le livre de l'enseignant de 6ème année, la leçon 14 a pour but d'expliquer la droite comme ensemble de points. On met des points colinéaires sur le tableau, ensuite des points entre eux et on utilise la règle.

question : sous une forte loupe, comment apparait une droite ?

question : comment peut-on comprendre que [0,1] et [1993,1993] sont des intervalles homéomorphes ?

Cette définition de droite comme ensemble de points tue la notion de coupure et constitue un obstacle sérieux.

a) La construction des nombres réels :

Dans sa théorie des proportions du livre V, Euclide avait tenté de donner un statut aux grandeurs incommensurables. Sur les nombres entiers, ont peut voir un historique dans le livre de G. Flegg [1]. Les Arabes calculaient constamment avec des nombres irrationnels (voir les travaux d'Abu Kâmil, d'Al-Karagî, de Thabit Ibn Qurra,...).

Par exemple, on trouve chez El-Karagî des résultats du type :

$(54)^{1/3} + 2^{1/3} = (128)^{1/3}$.

Les Arabes ont fait des nombres irrationnels un objet d'étude théorique et ont étendu la notion de nombre à l'ensemble des nombres réels positifs comme chez El-Farabi (X^{è} siècle) qui introduisait la notion de a^c dad samma, nombre sourd (El-Farabi sera traduit par Gérard de Crémonne au XIIè siècle).

La théorie des proportions a soulevé des passions : Omar Khayyam, An Nairizi,...Grégoire de Saint-Vincent..., et même de nos jours (n'oublions pas que cela a donné les fractions continues).

A la fin du XVIè siècle, Simon Stevin intervenait pour faire connaître aux quantités irrationnelles le statut du nombre. Le mot irrationnel le dérangait.

On n'a qu'à se rappeler l'histoire "bornée" de la quadrature du cercle qui tentait de donner à π le statut de racine d'une équation algébrique, histoire à laquelle mit fin Lindenman en 1882.

Il a fallu attendre 1863, après une tentative infructueuse en 1835 de Bolzano, pour que Weierstrass proposât une théorie des nombres réels (publiée par Kossak en 1872).

Weierstrass part de l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls dont il admet l'existence. Il considère les "parties exactes de l'unité" 1/n et définit les nombres rationnels positifs, combinaisons linéaires finies à coefficients exacts des 1/n. On a ainsi des agrégats :

$\{ 1/4, 1/4, 1/4, 1/4 \} = 1$; $\{ 3/10, 1/10, 1/10, 1/10 \} = 3/5$,...

On peut aussi considérer des agrégats ayant un nombre infini d'éléments.

Le nombre réel est alors la classe d'équivalence des agrégats pour la relation égalité, satisfaisant le critère :
"un nombre u a une valeur finie s'il existe un nombre v plus grand que u,v étant composé d'un nombre fini d'éléments".

Et on a R^+ avec sa structure algébrique.

En 1872, deux autres théories apparaissent :

- celle de G. Cantor et E. Heine : on prend des suites fondamentales, suites des nombres rationnels vérifiant le critère de Cauchy. Si (x_n) et (y_n) sont deux telles suites, de limites b et b', on a :

a) ¡ $\alpha \in Q^+$ $\exists$N entier; $\forall$ $n \geq N$, $y_n - x_n \geq \alpha$ alors $b' \geq b$.

b) ¡ $\alpha \in Q^+$ $\exists$N entier; $\forall$ $n \geq N$, $-\alpha \geq y_n - x_n$ alors $b \geq b'$.

c) $\forall \alpha \in Q^+$ $\exists$N entier; $\forall$ $n \geq N$, $| y_n - x_n | \leq \alpha$ alors $b \,\mathfrak{R}\, b'$

L'ensemble des suites fondamentales quotienté par la relation $\mathfrak{R}$ nous donne les nombres réels.

- celle de R. Dedekind, concue en 1858 et publiée en 1872 :
c'est avec les coupures (C_1, C_2) de Q, i.e. une partition de Q en deux classes C_1 et C_2, non vides et disjointes, telles que tout nombre de C_1 soit strictement inférieur à tout nombre de C_2.

Si l'une des deux classes admet soit un plus grand élément, soit un plus petit élément, la coupure détermine un nombre rationnel. Mais il existe des coupures n'ayant pas cette propriété et Dedekind exhibe l'exemple : C_1 est l'ensemble des rationnels x tels que x^2 soit inférieur ou égal a 2 et C_2 est l'ensemble des autres rationnels ; $a = \sqrt{2}$ crée la coupure (C_1, C_2) et est irrationnel.

Dedekind définit une relation d'ordre entre les coupures et vérifie que l'ensemble R des coupures est un corps totalement ordonné.

En 1869, on a aussi une construction de Charles Meray, assez proche de celle de Cantor.

b) **Réactions** :

On voit qu'avec ces constructions, on touche le domaine de l'infini, oh combien tabou ! En effet, pour le fini, on peut numéroter, repérer, comparer : c'est dénombrable. Pour l'infini, c'est une autre histoire.

Parmi les réactions violentes, on cite celle de Kronecker qui a traité Cantor de charlatan ; il ne voulait même pas entendre parler d'autre chose que les entiers naturels "créés par Dieu" et a déclaré, par provocation : " π n'existe pas" lorsqu'on lui apprit que Lindenman avait prouvé la transcendance de ce nombre.

Même Poincaré considérait la théorie des ensembles comme une "maladie".De nos jours, que d'étudiants n'arrivent pas à comprendre qu'entre deux rationnels, il existera toujours un irrationnel et qu'on ne peut pas exhiber deux rationnels qui se suivent immédiatement.

Par exemple, si on définit une application à valeurs différentes sur les rationnels et les irrationnels, l'étudiant est désarçonné. L'étudiant ne comprend pas qu'il y a encore des irrationnels dont on ne soupçonne pas la forme.

Rosza Peter (3) propose l'exercice suivant (voir aussi (2)) :
supposons que quelqu'un prétende avoir constitué une suite dénombrable qui comporte tous les nombres réels commençant par zéro, par exemple : 1er terme 0,1
2è terme 0,2020....
3è terme 0,3113111311113....
on peut toujours construire un nombre réel qui n'est pas dedans, par exemple 0,212..., le premier rang différent de celui du premier terme, le deuxième rang différent de sa place au 2^{è} terme, etc...

En conclusion, la continuité de R est un des miracles des mathématiques ; elle n'a rien d'intuitif et peut constituer un obstacle insurmontable pour l'étudiant.

2) **Les fonctions continues admettent une dérivée** :

Cette affirmation, quoique l'on pense, n'est pas rejetée par la majorité des personnes interrogées lors d'un sondage effectué sur des universitaires scientifiques. Il semble donc que cela constitue un obstacle lié au concept de continuité. Il pourrait résulter des faits suivants :

- on confond toujours avec la proposition qui dit qu'une fonction dérivable est continue (l'implication est prise comme équivalence),

- en général, les courbes étudiées sont dérivables et il est rare d'en connaître des contre-exemples,

- il est difficile d'imaginer une courbe continue sans tangente.

a) **Définition des objets de l'obstacle** :

Une fonction est une relation entre une variable x d'un ensemble donné E et une variable y d'un ensemble donné F telle que, pour tout x dans E, il existe un seul y dans F dans la relation considérée avec x.

La notion de fonction peut constituer un obstacle, surtout si on confond f et f(x) et combien d'auteurs se le permettent impunément (on dit bien l'exponentielle e^x !).
Ici nous considérons des fonctions à variable réelle et à valeurs réelles.

Soit f une fonction définie dans une partie de R contenant l'intervalle $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$, $\alpha > 0$. f est <u>continue</u> au point x_0 si :

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \eta>0,\ \forall\ x,\ |x-x_0| < \eta < \alpha$, alors $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$.

f est continue sur $[a,b]$ si f est continue en tout point de $[a,b]$.

Cette définition, qui remonte à Weierstrass, est encore sujet de discussion ; c'est didactiquement ingurgitable.

Il suffit pour cela de comparer les manuels en France de 1962 à nos jours : certains parlent d'intervalle pointé, d'autres font intervenir des artifices d'analyse numérique.

Sous les mêmes hypothèses que précédemment, f est dite <u>*dérivable*</u> en x_0 si :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} (f(x)-f(x_0)) / (x-x_0) = l = f'(x_0).$$

f est dérivable sur $]a,b[$ si f est dérivable en tout point de $]a,b[$.

IL EST FAUX DE DIRE QU'UNE FONCTION CONTINUE EN UN POINT ADMET NECESSAIREMENT UNE DÉRIVÉE EN CE POINT.

b) <u>C'est un obstacle épistémologique</u> :

Au XVIII^{è} siècle, il y avait trois notions de continuité :

- la fonction continue est figurée par une ligne tracée par un mouvement libre de la main (liberus manus dictu),
- la courbe continue est une courbe représentée par une courbe algébrique ou transcendante (Euler, Introductio in analysis infinitorum, 1748),
- la fonction continue est une fonction représentée par une série trigonométrique (Fourier, 1777).

D'autre part, il y avait aussi plusieurs notions de différentiabilité :

- limites ou fluxions (Newton, D'Alembert),
- infiniment petits (Leibniz, Carnot) : f' (x_0) est le résultat d'une manipulation habile du quotient dy/dx,dy et dx étant des infiniment petits,
- séries (Lagrange) : la dérivée est un coefficient spécifique du développement en série d'une fonction.

C'est alors qu'André-Marie Ampère, répétiteur à l'Ecole Polytechnique, publie un mémoire en 1806 où il énonce:

" toute fonction continue est différentiable excepté en des points isolés"

En fait, ce résultat a été interprété de la manière suivante par son chef, Sylvestre Lacroix (1810) et rapporté ainsi par Duhamel (1856) et Bertrand (1864). Gilbert (1872) va même essayer d'améliorer une preuve qu'en a donné Lamarle (1855).

Et pourtant, d'après Klauss Volkert ([4], 1988), le "théorème d'Ampère" n'était pas celui qu'on pense, mais une simple conséquence du théorème des accroissements finis.

Les premiers contre-exemples ont apparu au milieu du XIX^{è} siècle: Riemann (1861), Hankel (1870), Weierstrass (1872), Schwarz (1873), tous analytiques, ce qui n'a pas empêché l'obstacle de perdurer.

Hermite écrit en 1893 à Stieljes:

"Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable de fonctions qui n'ont pas de dérivée".

Il a fallu des exemples géométriques pour convaincre les plus sceptiques comme celui de Helge von Koch (1904): une courbe continue sans tangente obtenue par construction géométrique.

La courbe limite est l'exemple cherché.

Bolzano remplace dans une ligne polygonale tout segment par une autre ligne polygonale et ainsi de suite, jusqu'à obtenir une courbe continue sans tangente (1830). Cette contruction n'a pas été retenue par ses contemporains.

De ces exemples de fonctions continues sans dérivée, les mathématiciens en ont déduit des courbes qui remplissent une surface et qui donneront plus tard des fractals; une recherche active se fait dans cette direction.

Enfin, du point de vue expérimental, le mouvement brownien des particules va donner lieu à une illustration physique de ces "fonctions continues sans dérivée".

3.**Biliographie**:

(1) FLEGG G. numbers trough the ages,ed.MacMillan, 1989.
(2) LABORDE C. langue naturelle et écriture symbolique, vol. 1 et 2, thèse, Grenoble, 1982.
(3) ROZSA PETER jeux avec l'infini, Editions du seuil, 1977.
(4) VOLKERT K. Ampère et la différentiabilité des fonctions continues, Actes de l'université d'été sur l'histoire des mathématiques, la Rochelle, 1988.

L'ECONOMIE MATHEMATIQUE EN FRANCE A LA FIN DU XIX^e SIECLE : WALRAS ET SES DETRACTEURS*

Gilles FERRÉOL
(Université de Lille I, METIS/C.L.E.R.S.E.)

PROBLEMATIQUE

Peu d'économistes sérieux songeraient à notre époque à contester la fécondité de la formalisation mathématique dans leur discipline (M.Allais, 1954). Force est cependant de reconnaître que ce ne fut pas toujours le cas, notamment en France. Malgré le soutien de certains universitaires et de quelques disciples, Léon Walras -le fondateur de la célèbre Ecole de Lausanne- fut ainsi contraint à l'exil. Ses travaux donnèrent lieu à de nombreuses critiques et ne rencontrèrent le plus souvent que scepticisme ou réserves.

La "révolution marginaliste" allait pourtant s'imposer peu à peu. En témoigne l'intérêt suscité par ce type de modélisation tant chez les actuaires que chez les ingénieurs.

ELEMENTS DE BIOGRAPHIE

Marie-Esprit Léon Walras est né à Evreux le 16 décembre 1834. Sa mère, Louise-Aline de Sainte-Beuve, était la cousine du célèbre critique littéraire. Son père, Antoine-Auguste, fut enseignant puis proviseur de lycée avant d'être nommé recteur de l'Académie de Besançon. Deux de ses publications eurent un certain succès : *De la nature de la richesse et de l'origine de la valeur* (1831) et *Théorie de la richesse sociale ou Résumé des principes fondamentaux de l'économie politique* (1849).

Recalé au concours d'entrée à Polytechnique en 1853 et 1854, le jeune Léon souhaite embrasser une carrière d'écrivain ou de publiciste. Au soir d'une promenade dans la vallée du Gave, son père le convainc de se consacrer totalement à la continuation de son oeuvre. Après avoir été administrateur des Chemins de fer du Nord et s'être engagé dans le mouvement coopératif, il participe en 1860 au Congrès international de l'impôt et rencontre à cette occasion Louis Ruchonnet. Ce dernier, ministre de l'Instruction et des Cultes du canton de Vaud, le recommandera chaleureusement, le moment venu, auprès du jury chargé de pourvoir un poste de professeur d'économie politique à l'université de Lausanne.

---

* Communication présentée à l'*Université d'été européenne : "Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématiques"*, Montpellier, 19-23 juillet 1993.

QUATRE GRANDES PÉRIODES

"Comme Léon Walras l'a indiqué lui-même dans son autobiographie, sa vie se divise en quatre périodes :

La première est celle qu'on peut qualifier de préparation aux études économiques et s'étend jusqu'en 1871, date du début de son enseignement à Lausanne.:

La seconde est celle durant laquelle il consacre son activité à la création de ce qu'il appelle l'économie pure et va jusqu'en 1892.

Dans la troisième, qui s'étend jusqu'en 1904, L. Walras abandonne presque complétement l'étude de l'économie politique pour se consacrer principalement aux problèmes de politique économique et sociale.

Enfin, dans la quatrième période, qui va de 1904 à sa mort en 1910, Léon Walras, malade, fatigué par le travail et surtout écoeuré et découragé par les hostilités qu'il avait rencontrées en France, ne publie en 1907 qu'un article pour postuler le prix Nobel et ne prononce qu'un discours en 1909 lors de son jubilé, quelques mois avant sa mort survenue le 5 janvier 1910".

(*Source* : F.Oulès, *L'Ecole de Lausanne. Textes choisis de L. Walras et de V. Pareto présentés et commentés par*, Paris, Dalloz, 1950, p. 5).

Au coeur des proccupations : l'étude de la "richesse sociale". Celle-ci peut être envisagée dans une triple perspective :

Trois points de vue	Type d'approche	Caractéristiques associées
La scientificité	Economie politique pure	Théorie de la détermination des prix en concurrence pure et parfaite
L'utilité	Economie appliquée	Examen des conditions concrètes d'organisation de la production
La justice	Economie sociale	Analyse des règles de répartition

Malgré la valeur de ses publications et son désir constant de revenir en France, Walras n'a jamais pu s'établir dans son pays d'origine car toujours combattu par ceux qu'il nommait les "mandarins" de l'"école officielle", lesquels ont tout fait pour étouffer la diffusion de sa pensée dans l'Hexagone. Dans une lettre adressée à Georges Renard et datée d'avril 1903, notre auteur écrivait : "Il faut savoir ce que l'on veut. Si l'on veut récolter à bref délai, il faut planter des carottes et des salades ; et si l'on a l'ambition de planter des chênes, il faut être assez sage pour se dire : Mes arrière-neveux me devront cet ombrage".

UNE FORTE OPPOSITION

En voulant modifier en profondeur l'économie politique de son temps, Walras s'attira beaucoup d'ennemis et peu d'alliés. Parmi ces derniers, certains de ses amis devinrent des zélateurs empressés de théories qu'ils ne maîtrisaient pas totalement, renforçant du même coup la détermination des opposants. Ceux-ci, pour la plupart héritiers de J.-B. Say et de F. Bastiat, étaient regroupés autour du *Journal des Economistes* ; les plus influents, tels Emile Levasseur et Paul Leroy-Beaulieu, appartenaient à l'Académie des sciences morales.

Les critiques portent sur trois points (H. Dumez, 1985). On reproche à Walras :

- ses positions socialisantes ;

- sa volonté d'imposer une autre forme de scientificité ;

- son recours à l'abstraction et à la modélisation.

Intéressons-nous à ce dernier grief. Quelques "dérives", en effet, ont pu être notées. Dans le domaine du droit civil par exemple, Louis Grau et Emile Chenon utilisent le calcul intégral pour formaliser la question du concours entre les enfants légitimes et les enfants naturels appelés à une même succession. De même, dans le champ de la sociologie, Maurice Hauriou entreprend d'expliquer la société à l'aide des principes de la mécanique rationnelle et des lois de la thermodynamique. Les essais de sociométrie d'Auguste Chirac participent de la même intention. La tradition "humaniste" réagit alors violemment et accuse les marginalistes d'avoir ravalé l'individu au rang de "choses". Valette, Wolowski et, un peu plus tard, Ott font ainsi valoir que "les sentiments ne se mesurent pas" et que "la vie en collectivité présente souvent une indétermination qui s'oppose à l'emploi des procédés abstraits".

Les mathématiciens, pour leur part, se contentent d'un regard distrait, parfois bienveillant (H. Laurent) mais le plus souvent sceptique (J. Bertrand) sur les travaux de Cournot, Jevons ou Pareto : "Comment peut-on faire des raisonnements quantitatifs portant sur des éléments qui ne sont pas des quantités puisqu'ils ne sont pas mesurables ?". Paul Painlevé sera plus sévère: "J'ai l'impression de me trouver en face de quelqu'un qui tenterait d'entreprendre l'hydraulique d'un liquide visqueux". Henri Poincaré, au contraire, fera preuve d'une plus grande compréhension, à condition toutefois que certaines limites ne soient pas dépassées (cf. l'encadré de la p. 4). D'où la reconnaissance de Walras (lettre du 3 octobre 1901 rédigée à Brayères sur Clarens) : "Vous m'avez fait le plus vif plaisir en m'expliquant avec l'autorité qui vous appartient que j'étais fondé à représenter les satisfactions des individus par des fonctions, mêmes arbitraires, mais toujours croissantes (...). Vous m'avez donné ainsi une sécurité complète en ce qui concerne le point de départ de ma théorie. Si vous trouvez quelque chose à reprendre dans le développement, j'espère que vous serez assez bon pour me le dire (...). Quant aux hypothèses, il est bien certain qu'il y faut prendre garde quand on passe de l'abstraction à la réalité (...). Il y a des frottements et, d'autre part, les hommes ne sont ni parfaitement égoïstes, ni parfaitement clairvoyants. Il en résulte que l'on doit indiquer avec soin ces frottements et conclure à leur suppression aussi complète que possible en vue d'un maximum d'utilité (...). J'ai traité ces questions dans mes *Etudes d'économie sociale* et *d'économie politique appliquée*. Pour le cas où vous auriez la curiosité de voir quelle lumière la mathématique, jointe à la philosophie, répandent sur elles, je me permets de vous adresser le bon ci-contre avec lequel vous pourriez faire prendre les deux volumes chez mon éditeur".

H. POINCARÉ ET LA MESURE DE L'UTILITÉ

"Votre définition de la rareté" me paraît légitime. Voici comment je la justifierais.

La satisfaction peut-elle se mesurer ? Je puis dire que telle satisfaction est plus grande que telle autre, puisque je préfère l'une à l'autre. Mais je ne puis dire que telle satisfaction est deux ou trois fois plus grande que telle autre. Cela n'a aucun sens par soi-même et ne pourrait en acquérir un que par une convention arbitraire. La satisfaction est donc une grandeur, mais non une grandeur mesurable. Maintenant une grandeur non mesurable sera-t-elle par cela seul exclue de toute spéculation mathématique ? Nullement.

La température, par exemple, au moins jusqu'à l'avènement de la thermodynamique (...), était une grandeur non mesurable. C'est arbitrairement qu'on la mesurait par la dilatation du mercure, plutôt que par la dilatation de tout autre corps (...). De même ici, vous pouvez définir la satisfaction par une fonction arbitraire pourvu que cette fonction croisse toujours en même temps que la satisfaction qu'elle représente.

Dans vos prémisses vont donc figurer un certain nombre de fonctions arbitraires ; mais une fois que vous avez posé ces prémisses, vous avez le droit d'en tirer des conséquences par le calcul ; si, dans ces conséquences, les fonctions arbitraires figurent encore, ces conséquences ne seront pas fausses, mais elles seront dénuées de tout intérêt parce qu'elles seront subordonnées aux conventions faites au début. Vous devez donc vous efforcer d'*éliminer* ces fonctions arbitraires, et c'est ce que vous faites".

Au début de toute spéculation mathématique, il y a des hypothèses et, pour que cette spéculation soit fructueuse, il faut (comme dans les applications à la physique d'ailleurs) qu'on se rende compte de ces hypothèses. C'est si on oubliait cette condition qu'on franchirait les justes limites.

(*Source* : Lettre de H. Poincaré à L. Walras, 30 septembre 1901, in W. Jaffé, éd., *Correspondence of Léon Walras and related papers (vol. III : 1898-1909)*, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1965, p. 159).

LES ALLIÉS

Dans sa lutte contre l'orthodoxie, Walras peut tout d'abord compter sur le soutien de quelques *disciples*. Citons en premier lieu Albert Aupetit (1876-1943) dont l'*Essai sur la théorie générale de la monnaie* fut salué par J. Schumpeter comme une "oeuvre d'une étonnante qualité qui mérite toujours un examen attentif", en raison de l'introduction de fonctions de production à facteurs substituables et de l'utilisation systématique des multiplicateurs de Lagrange pour tout problème d'optimisation. Autres fidèles : Etienne Antonelli (1879-1971), reçu en 1919 au concours de l'Agrégation et futur député socialiste de la Haute-Savoie, et Hermann Laurent (1841-1908), titulaire de la chaire de mathématiques à l'Institut agronomique de Paris et examinateur à l'école Polytechnique.

Les *actuaires* prêtent également une oreille attentive à la théorie walrasienne. C'est en particulier le cas de Léon Pochet, Emile Dormoy, Septime Avigdor et Eugène Fontaneau. Leur apport est loin d'être négligeable (F. Etner, 1987) :

Auteurs	Contributions
L. Pochet	Géométrie des jeux de Bourse, fonction de gain
E. Dormoy	Calcul de coefficients d'élaboration pour chaque type de produit
S. Avigdor	Modèle d'équilibre général, interdépendance des marchés
E. Fontaneau	Procédures de tâtonnement

Même intérêt (malgré certaines réserves) du côté des *ingénieurs*, lesquels -depuis les célèbres mémoires de Dupuit en 1844 et 1849 sur l'utilité des canaux- cherchent à rationaliser les choix et la gestion des équipements collectifs (F. Divisia, 1951). Trois noms sont à mentionner, ceux d'Emile Cheysson (1836-1910), de Clément Colson (1853-1959) et de Marcel Lenoir (1881-1927) :

Auteurs	Contributions
E. Cheysson	Tarification optimale, mode de fixation des salaires
C. Colson	Concept de surplus, prise en compte de phénomènes de substitution capital/travail
M. Lenoir	Méthode des variations relatives, utilisation du diagramme d'Edgeworth-Pareto

D'autres auteurs, plus difficilement classables comme Gustave Fauveau (initiateur des modèles dynamiques en temps continu) et Louis Bachelier (l'un des premiers à avoir proposé une théorie des marchés boursiers efficients), ont été par ailleurs influencés par la lecture des *Eléments*.

UNE VICTOIRE POSTHUME

Les causes de l'échec de Walras, *en son temps*, ont été longuement discutées. Si les motifs d'ordre philosophique (l'opposition entre mathématique et liberté) et politique (l'engagement socialiste) occupent une place importante, la volonté d'imposer une autre forme de scientificité s'avère capitale et préfigure la victoire posthume du chef de file de l'Ecole marginaliste. Cette victoire, précise A. Zylberberg, "se dessine progressivement après la Grande Guerre et plus nettement à partir des années trente" car "elle suit la professionnalisation croissante du milieu des économistes", ceux-ci ayant de plus en plus "la conviction que leurs discours ne prennent un sens précis qu'à travers la formalisation mathématique" (A. Zylberberg, 1990, p. 155).

BIBLIOGRAPHIE

ALLAIS M. (1954), "Puissance et danger de l'utilisation de l'outil mathématique en économique", *Econometrica*, 22(1), janvier, pp. 58-71.

DIVISIA F. (1951), *Exposés d'économique. Tome I : Introduction générale. L'apport des ingénieurs-économistes français aux sciences économiques*, Paris, Dunod.

DUMEZ H. (1985), *L'Economiste, la science et le pouvoir : le cas Walras*, Paris, P.U.F.

ETNER F. (1987), *Histoire du calcul économique en France*, Paris, Economica.

ZYLBERBERG A. (1990), *L'Economie mathématique en France : 1870-1914*, Paris, Economica.

CONTINUITY AND VARIATION: THE TRANSFER FROM A GRAPHICAL TO AN ANALYTIC REPRESENTATION

Luis E. Moreno Armella
Departamento de Matemática Educativa,
CINVESTAV-IPN
México, D.F., México.

INTRODUCTION.

In this paper we want to show some of the relevant circumstances that made possible the transfer from elementary to higher mathematics. We will call "higher mathematics" the period that begins with the mathematical study of movement. That includes as a central part the origins and development of calculus. We hasten to say that we shall not follow a detailed historical path but, rather, give a perspective and, if possible, to offer an explanation in epistemological terms of some important "conceptual moments" that made possible that transfer.

Two circumstances were instrumental to this development: the identification of number to a geometrical continuum and the mathematical construction of variation.

In regards to the concept of number, it is important to consider the drastic conceptual change we can observe when comparing the Euclidean conception and the new concept of number introduced by Stevin.

It has been reported elsewhere (see [1], [2]) that the Euclidean number concept comes from the works of Pythagoras and Aristotle. There, are two facts that from our present viewpoint are astonishing: (i) *One* is not a number, and, (ii) *number* can only be applied to the study of discrete collections; in other words, there is no notion of continuity associated to the concept of number. It is because of these features, that we can consider, as a relevant problem *to try to find when number and (continuous) magnitude became integrated into the same concept.* Let us recall that Aristotle dismissed the Arrow Paradox by saying that time cannot be made of moments and lines cannot be made of points, --which is a way of saying that the category of Quantity is formed by means of two disjoint components: the discrete (number) and the continuous (magnitude).

They are reflected in mathematics as the study of magnitudes and numbers, ie: as the study of Geometry and Arithmetic. For Aristotle, continuity can be characterized as "never ending" divisibility, from which it is possible to conclude that the line cannot be composed from points. Lines and points belong to different mathematical realities.

The geometric continuum appears as an abstraction of physical continuum. Because of the characterization of continuity, as never ending divisibility, It is possible to conclude that the continuum is not made of indivisibles. On the other hand, number is the prototype of discreteness; number is a collection of units (and unity is not a number).

This scenario changed in a radical way with the work of Simon STEVIN. The Greek concept of number had come to being, as a result of an abstraction process applied to the material world. Stevin challenged the Greek viewpoint, in face of practical necessities. Nevertheless, Euclidean conceptions were so deeply rooted, that Stevin found it necessary to argue against this tradition both, from a practical viewpoint and what we consider as an epistemological viewpoint. It was not just a matter of saying that "one is a number" but of producing a substantiated conception of number to justify that assertion.

Representations and Mathematical Notions

One can observe that during the evolution of a discipline, conceptual nuclei are formed around which mathematical activity is carried out. For instance, analytical representations permitted the widening of the universe of curves to which tangents could be drawn. The associated operational field allowed the exploration of the "tangent object". This cognitive structure is what we call a conception of tangent. The associated concept lives in the formalized mathematical discourse. It is subjected mainly, to the appropriate syntactical rules.

The process by which a conception is refined, can be described in terms of Piagetian assimilations and accommodations (See [5] and [6] for a further discussion).

Human minds try to understand the world of their experiences through the construction of models. To have a model is a path to understanding. The interplay between representation and understanding has been a driving force in the historical development of mathematics. The Greek geometry is a good example: an adequate form of visual representation enables us to handle abstractions we have made from experience.

Representations carry with them a semantic dimension. When Analytic Geometry was created, the possibility of going from a symbolic representation (the algebraic equation) to a visual one (the graph) was established. The interplay between these two forms of representation leads to the construction of deeper meanings for the conceptions involved. Connections control meaning; so, the new space for doing geometry--the Cartesian plane--by allowing the encounter between the symbolic/algebraic and the visual/geometric conceptions, made possible the (new) geometric study of movement. This was instrumental for the emergence of Infinitesimal Calculus.

A new conception of number

In 1585, Simon STEVIN published a book, *L'Arithmetique,* that was called to produce an epistemic cut in mathematical knowledge: a book about the theoretical and practical aspect of arithmetic ([3]). In chapter X Stevin presents his (new) concept of number. For him, "number is that through which the quantitative aspects of each thing are revealed", (our translation). The category of Quantity had been separated into disjoint classes: discrete and continuous. Now, Stevin made no difference between the two. Number was there to represent the mathematical phenomenon of quantity. The decimal notation, comes to solve the problems posed by the tension between form and content. In fact, as there is no distinction inside the category of quantity, then there is no distinction between the object of study of arithmetic and that of geometry. The representational tool needed to cope with this new situation had to be flexible enough to deal with the problems of discrete quantity and simultaneously, with the problems of divisibility. To talk about parts of the unity, decimal notation was instrumental. The new representation was deeply linked to the new concept of number: This is, perhaps, one of the best examples of how an adequate symbolic representation becomes an instrument to explore with.

While Euclidean mathematics produced a concept of number by means of an empirical abstraction---in the sense of genetic epistemology---, Stevin's concept was the result of reflective abstraction. It is not possible now, to separate the concept and the symbolic representation. This makes clear the abstract nature of the new concept of number. Perhaps it could be said that, now, number "lives" in the mathematical discourse. In fact, it is interesting to compare, once more, the Greek conception of Number as a principle (the unity is the principle of number) and Stevin's conception of number. In Stevin's work the concept of number is justified not only because it could accomodate all the needed computation but also, because the symbolic character of his work was in line with the development of symbolic algebra. Stevin talks about "arithmetical numbers" and "geometrical numbers". According to him, if you don't know the numerical value of a geometrical number, it enters algebraic computations as an *indeterminate quantity.* This is not yet a genuine algebraic variable because of the homogeneous character implied by the geometric language used. And also, because the indeterminate quantity *is a number*, only that we don't know it. Perhaps we could say that this is exactly the role of the "unknown" in the period of the Italian efforts to solve third and fourth degree equations. In the latter case, however, we can see a transitional moment that gives rise to the departing point of the new algebraic language.

The algebraic concepts underwent a very subtle development from early sevententh century. It is plausible to say that the first conception of algebra was as a kind of generalized arithmetic. Another viewpoint is presented in Vieta's *Artem Analytecem Isagoge,* 1591. In this book, one of the cornerstones of the new algebraic thinking, we can read this: "The supreme

and everlasting law of equations or *proportions* (our italics), which is called the law of homogeneity because it is conceived with respect to homogeneous magnitudes , is this:
I. Only homogeneous magnitudes are to be compared with one another.
For it is impossible to know how heterogeneous magnitudes may be conjoined. And so, if a magnitude is added to a magnitude, it is heterogeneous with it. If a magnitude is multiplied by a magnitude, the product is heterogeneous in relation to both".

In Vieta's work, the term "magnitude" is used in a general sense; not only as a geometric magnitude. The magnitude one is looking for, when solving an equation, for instance, can be an arithmetical one ie: a number. In this respect, we want to cite J. Klein (see [2]): "What is characteristic of this 'general magnitude' is its indeterminateness, of which, as such, a concept can be formed only within the realm of symbolic procedure. [the Euclidean presentation] does not do two things which constitute the heart of symbolic procedure: It does *not* identify the object represented with the means of its representations, and it does *not* replace the real determinateness of an object with a *possibility* of making it determinate, such as would be expressed by a sign, which instead of *illustrating* a determinate object, would *signify* possible determinacy".

Perhaps the kernel of the meaning of this citation is the identification of the signifier with the signified. In this case, we can accept that the Euclidean presentation is not symbolic. This is a large step towards the constitution of a symbolic mathematics; nevertheless Vieta is still "linked" to the law of homogeneity. Anyway, we can assert that the symbolic character of Vieta's work is the result of a process of reflective abstraction. In a sense, we could say, following Klein, that the concepts of the new science are obtained by a "reflection on the total context of that concept" or, in other words, by a process that can be termed "symbol-generating abstraction". Vieta's work can be seen as, perhaps, the first work of this new discipline.

In his book *Rules for the Direction of the Mind,* Descartes considers the problem of multipling the product ab of the magnitudes a, and b, by a third magnitude c. He says that, for this to be possible, *the product ab has to be conceived as a line (our italics)*. This detachment of quantities from the geometrical constraints appears as Rule XVIII; this is possible because of the resultant abstract symbolism: the quantities involved in the operational activity are abstractions of the geometrical figures, not the figures themselves. The identification of a number with the symbol used to represent it, leads to a conceptualization of number as a mental entity, not anymore as the Greek Arithmos, used to count material things. In this way, Vieta's symbolic algebra, which still is arithmetical and geometric, becomes fully symbolic---through the loss of the dimensionality of the symbols used---in Descartes' hands. Before Vieta, the main activity was the search of a formula (a set of directions rules) to compute the roots of an equations with numerical coefficients. In a sense this activity can be seen as a generalized arithmetics: all the operations involved are done on the numerical coefficients, and, eventually, also the unknown has to be "operated". With Vieta's work, this changed radically. Now, the *operation* is the new object of study. In terms of genetic epistemology, we can say that we have entered an *inter-objectal* stage of development. As we have already remarked---but we find necessary to recall---the passage to this new stage is possible because a reflective abstraction process is present.

variable and variation

The symbolic language of algebra enabled the construction of *models at a higher level of representation.* With its own operational field, as symbols could be manipulated like given quantities, they could also be related through symbolic expressions. We believe this was instrumental for the conscious study of functions as models designed to study *states. The table of values* is a good example of this kind of model. Perhaps what is more important in this activity, was the use of literal symbols as something with the capacity to take numerical values and thus, to vary on a numerical substratum.

In this kind of historical cross-section we are trying to describe, we cannot ignore Oresme's work. Up to now we have roughly described the process that led to the construction of the algebraic language, and how this was instrumental to the study of numerical variation. Nevertheless, the study of variation in a geometrical context also played a very important role. The idea of a *flowing quantity* can be found in the already mentioned Oresme's work ([4]).

He introduced geometric figures to represent the behavior of a quality. According to Oresme, the study of a body can be realized from two viewpoints: from an extensional one, for instance, the weight of the body; and from an intensional viewpoint, for instance, the body's temperature. In this case, the measurement is punctual. Reading through the chapter "On the continuity of intensities" ([4]) we can find the Euclidean conception of number as Oresme says that any measurable thing *except number can be represented by a magnitude*. This also explains why, when talking about intensities he says that "the points of a line" are a necessary fiction, used to represent a place on the studied body. Each intensional measurement one makes on a body, is represented by means of a segment. The body itself is also represented by a segment. Oresme considered the whole set of intensities as the gate towards the study of variation. This set is called a *surface latitude,* and it contains all the information about tha variation of the intensity. But here appears a shift in his viewpoint as the surface latitude is used to study the variation of *form, rendering his work a qualitative one*. Let us consider his study of velocity. This concept is conceived of as a quality adquired by a moving body. Then the terms "uniform" and "Uniformly difformed" are introduced, to name a quality that does not change with time, in the first case, and, a variable latitude with a constant rate of change, in the second case. These are the main examples considered later, by Galileo, though from a different conceptual framework. It must be mentioned that Oresme considered another possibilities. For example, he considered "difformly difform" surface latitudes. There is a total autonomy of these studies from physical constraints; perhaps we could say all this work is done *to classify by means of the representing tool.*

Oresme's way of considering variation endows his representational model with the possibility of studying motion geometrically. This is the feature we want to stand out, as it is this feature through which we want to approach Galileo's work on motion. However, in the latter case, the conceptual framework, as we have already said, is very different. Let us consider an example taken from Galileo's "Two New Sciences" (See Struik [7], pp 208-209) :

Theorem I, Proposition I

The time in which any space is traversed by a body starting from rest and uniformly acelerated is equal to the time in which that same space would be traversed by the same body moving at a uniform speed whose value is the mean of the highest speed and the speed just before aceleration began.

There is a corresponding version of this theorem that can be found in Oresme's work, --- see Struik [7] ,pp 137. It appears as "conclusion 5", and the wording is the following:

"...It can be proved that a uniformly difform quality is equal to the medium degree, i.e., just as great as a uniform quality would be at the degree of the middle point, and this can be proved in the same way as for a surface".

The proof, consists in transforming the area of a triangle into that of a rectangle. Let us make a remark on this proposition: it is important that Galileo can represent the distance traversed by a body, *as an area. There is a correspondence between this fact and Descartes linearization of all magnitudes.*

The correspondence between physical facts and those predicted by the model, helps to configure, within the model, a certain set of normative criteria. This is in agreement with the Piagetian assertion about the common origin of an instrument of knowledge and its validation criteria.

We can summarize the foregoing discussion through the following sketch:

Phenomenon (motion)

↓

Representation (of phenomena)

↓

Extraction of operational rules from a particular physical context

↓

Generalization of operational rules

(loss of particular meanings, contextual dependent)

REFERENCES

1. Jones, C.V. One as a Number, unpublished Doctoral Dissertation, Toronto University, 1978.
2. Klein, J. Greek Mathematical Thought and the Origins of algebra, MIT Press, 1968.
3. Stevin, S. L'Arithmetique, Leyden, 1585.
4. Clagett, M. Oresme and the Medieval geometry of qualities and motion. Univ. Wisconsin Press, 1968.
5. Piaget, J., Garcia, R. Psychogenesis and the history of Science, Columbia Univ. Press, 1989, New York.
6. Piaget, J. The Development of Thought: Equilibration of Cognitive structures, Blackwell, Oxford, 1978.
7. Struik, D.J. (ed). A Source Book In Mathematics, 1200--1800 Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass. 1969.

CONSTRUCTION HISTORIQUE DES MATHÉMATIQUES

Compte-rendu d'exposé : THALES A 100 ANS !

Henry PLANE

Il n'y a pas grande recherche à effectuer pour constater que sous l'appellation de théorème de Thalès il y a, en France, maints énoncés et, en Europe, plusieurs sujets.

Triangle coupé par une parallèle à un des côtés ? Si Euclide l'envisage ainsi et démontre la propriété en s'appuyant sur des rapports d'aires, il n'est pas certain que Thalès ait abordé le sujet, ni celui des triangles semblables qui gravite autour.

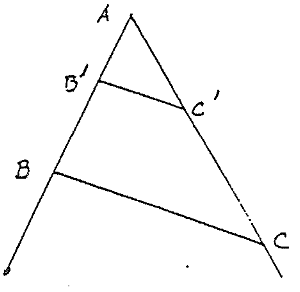
Usage pratique pour mesurer des distances lorsqu'on ne pouvait atteindre une des extrémités ou évidence de la ressemblance des figures ? Les vieux ouvrages n'aident guère à conclure. Et ce, tant des recettes des agrimanceurs romains que de la géométrie de Descartes. A ce sujet, Laplace, au début du 19ème siècle, n'écrit-il pas : "*La proportionalité est un postulat bien plus naturel que celui d'Euclide ?*".

Toujours est-il que, dans la figure classique, l'usage de l'égalité :

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB}$$

le dispute fort à celui de :

$$\frac{AC'}{AC} = \frac{AB'}{AB}$$



A travers des textes de Clavius, Lamy, Legendre, Peyrard, Clairaut et bien d'autres, les participants ont été conviés à un long parcours dans lequel la propriété, souvent placée parmi d'autres relations relatives au triangle, ne se détachait guère.

C'est avec Arnauld, au 17ème siècle, que les choses changent. Celui-ci introduit les "espaces parallèles" et énonce :"*Lorsque deux lignes sont également inclinées en deux différents "espaces parallèles", elles sont entre elles comme les perpendiculaires "de ces espaces"*". Énoncé accompagné de maints corollaires.

Alors, forme Arnauld, forme Euclide ?

Tout se trouve dans les divers "Éléments de géométrie" avec des différences selon les auteurs. Certains ignorent superbement une des deux positions, certains cherchent à les relier.

Mais Thalès dans tout cela ?

Nul n'en parle avant la fin du 19ème siècle soit pendant vingt cinq bons siècles. C'est maintenant que les livres scolaires français énoncent -sous une forme ou sous une autre- un théorème fondamental de Thalès. Français ? Dans les livres anglais ont lit : "Theorem of Thales : an angle inscribed in a semi circle "is a right angle". Et dans les livres allemands : "Satz des Thales : Jedes Dreieck über einem Durchmesser "in einem Halbkreis ist rechtwinklig"...

C'est un peu sur tout cela que l'exposé a voulu attirer l'attention et chercher quelques explications.Le tout est trop long pour figurer dans ce compte-rendu autrement que par un survol.

Le texte complet, avec reproduction des documents présentés à Montpellier, a été édité dans une brochure d'une trentaine de pages par l'IREM de Dijon (B.P. 138 - 21004 DIJON ; 20F port compris)

THE HISTORICAL CONSTRUCTION OF MATHEMATICAL KNOWLEDGE

Leo ROGERS,
Roehampton Institute
LONDON SW 15 5 PH

Is the historical reconstruction of mathematical knowledge possible ?

1. Learning Mathematics, Teaching Mathematics.

The paradigm still largely current in the teaching of mathematics, and criticised by Lakatos (1961), Dawson (1969), myself (1976) and others is of a Formalist methodology ; starting with a list *of definitions and axioms*, which are produced without much motivation or explanation and are artificial and complex. There are followed by carefully worded *lemmas* ant *theorems*, and for each theorem, a *proof.*

Students are still required to follow this path, and even though their questions may officialy be encouraged, these questions soon get lost in the intricacies and technical details of the exposition, and can often be dismissed as a lack of "mathematical maturity".

This may be regarded as a caricature of mathematics teaching, but the standard presentations often appear virtually meaningless to students who have no idea of either the teacher's reasons for such an approach, nor of the motivations of the mathematician and the context of the original problem-situation. Much of mathematics is still presented as an "end - product" and a "tool - bag" of techniques to be applied.

It is clamed that this deductive style is the essence of mathematics, and that while discovery and creation of new ideas may be mentioned in passing, these ideas are rarely put into context or explained, so that the presentation of any new ideas must be formulated in this "rigouros" manner to the student. (1)

Thirty years has passed since Lakatos'first critical attack, and still many institutions remain impervious to change. The tradition of the mathematically gifted is difficult to break, and the Formalist-deductive defences are strong. So much so, that while some changes have taken place at primary and secondary school and college level, these changes have been gained only after a great deal of effort, and they require a considerable amount of energy to maintain. (2)

The general popular conception of mathematics is still as it was.

2. Mathematical Activity

Even a cursory glance at attempts to define "Mathematics" show they are dependent on time, place, context and culture. Some classic definitions now appear entirely out of place, particularly since the rise of abstract approaches to mathematics and the broad generalisations developed since the latter part of the nineteenth century. Mathematics itself has not only developed as a subject area, but has taken on new roles and new practices.

The Intuitionists philosophy, Lakatos and later the ATM in England (3) began to describe mathematics as an aspect of *human activity*, thus avoiding some of the earlier pitfalls, but creating others. It is a truism to say, "Mathematics is what mathematicians do", but who the "mathematicians" are is not is clearly problematic.

This emphasis on the activity, has led to the interest in what we now call process ; and considerable efforts have gone into explicating this particular label for a complex of ideas like *mathematisation, generalisation and modelling*, together with many other aspects involving human communication like *language*, *visualisation*, and so on. (4) Since the late 1960, the literature in this area has been considerable.

We can detect in this literature, undercurrents of common belief such that in the process of learning mathematics, it is somehow created or re-created by the learner, and that some elements of this creative activity are claimed to be a common experience for children, pupils, students and mathematicians. A necessary consequence of this belief is that discussion and communication are vital to secure the growth of mathematical knowledge.

3. The Development of Mathematics and the relevance of History.

Before the mid 1960's there were a number of widely held assuptions about the relevance of the history of mathematics to mathematics, which we now realise had clear consequences for the methodology of teaching and learning of mathematics. Because of these assuptions, it was believed that mathematics develops quite differently from the sciences, having no recourse to heuristic or inductive reasoning, and having no relation with the contemporary social, philosophical or metaphysical contexts.

Crowe (1992) list these assuptions as :

a) Philosophers and teachers of mathematics maintained that mathematics has a deductive structure ; therefore the task of the historian of mathematics was to trace the development of these deductive chains for particular areas of mathematics. The only exception to this would be when a new set of axioms was announced, when the "deductive engine" would then be employed. Since mathematics was *purely rational*, the only criterion for judging new mathematical entities was whether they follow deductively from prior premises.

b) Mathematics is cumulative. The standard example is non-Euclidean geometry which does not contradict, and therefore does not replace Euclidean geometry. Mathematics is also improving. The poor mathematics of the past is replaced by more refined mathematics of the present.

c) Mathematics is free from metaphysics. Unlike science, the nature of the entities in mathematics is *a priori,* unquestioned and unquestionable.

d) Rigour, proof and certainty are independent of time. Once proved, a theorem remains true for ever.

e) There are no revolutions in mathematics. For example, Fourier (1822, p.7) "...this difficult science is formed slowly, but is preserves every principle it has once acquired : it grows and strengthens itself in the midst of many variations and errors of the human mind". Many other examples of this kind of certainly can be found in the statements of mathematicians almost up to the present.

Crowe's account of his research and the writing of his "History of Vector Analysis" (Crowe 1967) shows how every one of these assumptions (except perhaps the last) was shown to be unfounded. (5)

While we may admit that mathematics is a human activity, we also must recognise that the mathematics created by people has, in some sense, a life of its *own*.. The problem is that mathematics as a product human activity is identified as a *body of Knowledge* and then becomes alienated from the very activity which has been producing it. There is a stong sense in which humans work on known mathematics and consolidate it (Wilder, 1968), and this tension between the individual and the social is a strong theme in Wilder's book.

We can regard mathematics as a living, growing organism which acquires a certain autonomy from the activity thas has produced it. The mathematics originally produced and in a sense owned by individuals becomes the property of the mathematical community, and as a communal activity, it then develops its own laws of growth, its own dialectic, and *defines away its past.* (6)

Defining away its past means that in the contemporary scene, mathematics is supposed to be produced according to the Formalist paradigm as described in the assumptions above. We are so busy trying to show that mathematics is about *anything*, that we obliterate the something it was originally about. (7) However, if we want to look behind the Formalist curtain, we are immediately concerned with working with and reconstructing for ourselves part ot this dialectic of ideas.

What I want to claim is that reconstructing this dialectic, finding arguments, motivations, problem-situations, conjectures, justifications, and so on, can only be done through the study of the history of the subject itself, and by attempting some kind of reconstructions of these historical situations. Following Lakatos, the meaning of rational has changed from the strict deductive sense indicated above (3a), to a meaning which includes "heuristic". This reconstruction is necessarily speculative and inexact and of course depends on the interpretation of available data. (8) Furthermore, the particular interpretations of the available data depend upon the philosophical standpoint of the person doing the interpreting, as I describe below.

4. The Reconstruction of History.

The fundamental purpose of history, *the general study of change through time*, is highly relevant not only to the mathematics we study today, but also to the communication of mathematics at all levels.

In the study of the history of mathematics we are concerned with two general aspects of equal importance. First, the past itself - the documents, records, events, and so on, which together are called the "facts" - because they form the basis of the past theories from which today's theories and techniques are derived. In reading the documents we attempt to discover the state of the concepts involved, so the importance of the records concerns not only arranging them to determine a sequence of events, but studying them to discover the empirical facts about the problems, and the theoretical facts about the solutions to those problems. In this sense, concepts form part of the basic data of the history of mathematics. (9)(10)

Secondly, from the assembled facts we then have attemps to reconstruct and interpret the past. The importance of a particular event or concept, the raising of its status from a mere fact about the past to a fact of history, depends entirely on the interpretations we might put upon that fact. These interpretation range from the conscious accounts of events and attempts at reconstruction by expert historians of mathematics, through to the unconscious interpretations made by the working mathematician or the teacher communicating mathematics.

Any programme for the rational reconstruction of the history of mathematics has to consider the effect of the many different and possible ways in which the raw data (facts, opinions and inferences) may be collected, organised and interpreted, and the variety of sources from which this data may be obtained.

These approaches can be themselves orgainsed under four broad headings : empirical reconstruction ; conceptual reorganisation ; social, economic and cultural development ; and patterns of discovery.

a) Empirical Reconstruction.

For a long time, this is what most people understood by the history of mathematics ; the process of examining the sources, gathering together the facts, arranging them in chronological order, and setting out to give an impartial account of the historical progress of mathematical ideas. The attempts to reconstruct past mathematics by the examination of the documents, and to reveal the motivations for this mathematics by discovering the relevant problems of the time, are generally underlined by a belief in the "progress paradigm" referred to above ; that is, that the mathematics of the past is somehow less well developed, less complete and less correct than it is today. This kind of approach is often called "inductivist" or "internalist". It sets out to show the development of mathematics in history, the physical and mathematical problems tackled, the new mathematics resulting from research, and the application of this new mathematics to both physical and theoretical problems as an evolutionary progression, where mathematics is getting increasingly better, and by implication, the mathematics of the past is gradually discarded as unsuitable, flawed, or incorrect.

This approach must necessarily be selective, and so the attempt to give an impartial account of all the facts is clearly impossible. There have been many textbooks written on the history of mathematics with this underlying philosophy that show the authors bias, a particular example is the classic text of Cajori (1896) which sets out not only to give an inductivist account of the history of mathematics, but also to suggest that our teaching may mirror the historical progress.(11)

b) Conceptual Reorganisation.

This concerns both current mathematics and the interpretation put upon the past. Contemporary mathematics influences value-judgements about past mathematics by describing them in terms of current concepts, and by deciding, consciously or unconsciously, whether a particular piece of mathematics has relevance or merit, or whether a particular theorem is proved rigourosly or not. Judging the past in terms of the present is a danger common to all aspects of history, not only mathematics, but it is particularly dangerous in mathematics and difficult to avoid *because of the concept of abstract mathematical structure*.

The structures of mathematics raise deep philosophical and psychological questions which have relevance for the study of the history of mathematics because we are concerned with the central concepts by which structures are described, how they came into being and to what extent they may be complete or still evolving, and the contingency or the inevitability of their rules of operation. An example to cite here would be the dominance of the concept of the abstract group, and how it is possible to "see" group structures in the mathematics of the past. (12)

This is in clear contrast to the empirical-inductivist approach outlined above which merely discards past mathematics as imperfect and incomplete.

The outcome of the unthinking application of modern standards of rigour to history is the complete writing out of history from contemporary textbooks. This, in itself, can be taken as writing of mathematical history by implication. Not only does the textbook tend to reverse the historical order, beginning with the currently accepted definition and attempting to "criticise" these by raising unmotivated and sometimes incomprehensible objections, it also removes the background of mathematics, the important "memory" of the mathematical culture, which today is available only to a few.

With every phase in mathematical history comes a reformulation, a consolidation, a new beginning. This is often considered necessary purely from the practical point of view, the proliferation of writing is such that for sheer efficiency of communication, choices have to be made. Students are thus cut adrift from the background of mathematics and it is important that both teachers and students should be aware of these dangers.

c) Social, Economic and Cultural Development.

Here we look at history from the general standpoint of forces external to the theory and the structures of mathematics. This approach examines how social changes can determine the centres of mathematical development ; how various kinds of patronage encourage the free development, the priorities and the fashions of mathematics ; the influence of individuals on research programmes ; the technical and social problems considered amenable to mathematics ; and the demands of investors and the restrictions imposed by economic conditions. All of these aspects are embedded in a particular culture at a particular time. Theses influences are important, for while they may not decide the detail of mathematical theory, they often determine its general direction and its rate of development. (13)

Societies can also act as "carriers" of mathematical knowledge ; this is evident in many situations where different kinds of specialised mathematics is used, from shopkeeping to engineering. Theories themselves can have "social existence" in at least two ways ; one where the practitioners of the theory actively contribute to its development, and one where those who do not contribute directly recognise that the theory has a valuable contribution to make to their own field, or to mathematics in general.

Apart from people, some of the obvious carriers of mathematical knowledge are text books, journals, pamphets and various other ephemera ; but today we also have other media, film, video, the computer disc, and electronic mail.

It is possible that a theory can have *mathematical* existence, but if it is not accepted and used by the mathematical community, it is not *socially* esistent, and therefore may have little or no influence on the subsequent development of mathematics. (14)

d) Patterns of Discovery.

Investigation of patterns of discovery is the domain of the philosopher as well as the historian,, and in a sense the fact that historians may try to find out, as far as is possible, exactly what a particular mathematician discovered, or what concept they were struggling with, implies the possession of an underlying philosophy, a belief in some kind of logic of discovery. The difference between historian and philosopher lies in the emphasis of interest ; the philosopher is primarily concerned with the analysis of problem situations for the understanding of theoretical systems and critical arguments, while the historian's first concern is the reconstruction of those problem-situations. The philosopher uses the historical facts as his data, while the historian establishes those facts. Obviously neither activity excludes the other.

We are concerned here with the attempts to build a philosophy of mathematics by investigating the creative intellectual processes of individuals, and exploring the contributions history can make in the formulation of a logic of discovery of mathematics, and a psychology of invention. It is through history that this heuristic might be studied. This area also concerns the greatest single problem mathematics has ; that of *communicating its relevance to the culture at large and making itself intellectually accessible at all kinds of levels.* This cannot be done without a good philosophy of mathematics, which, in turn, must draw on history for much of its data.

It is important to distinguich between the hypothetical *reconstruction* of the problem-situation, which is a conjecture about the actual problem of the mathematician at the time, and the problem of *understanding the reconstruction.* Confusion of the meta-problems and meta-theories of the historians of mathematics and the problems and theories of the mathematicians in history can lead to a great deal of argument.

Bachelard (1969) defined an epistemological profile to be an analysis of an individuals understanding of a concept, and an epistemological obstacle as the concept or method held by the individual that prevents a breakthrough into a new epistemological state (for example, Hamilton and the discovery of quaternions). Bachelard's story of science recognises the need to explain the past in terms of its own concepts and acknowledges rejected results as permanently valid achievements. (15)

5. Hermeneutics, Mathematics and its History.

Classical hermeneutics arose in the nineteenth century as a theory resulting from the repeated efforts to improve the interpretations of ancient texts. Hermeneutics is concerned with the character of understanding, particularly as it is related to written text, but here we could extend the idea of text, into the more general sense used today. (16) In this sense, it can be concerned with a wide range of activities, from textual analysis to the nature of historical understanding and the philosophy of communication.

Hermeneutics has traditionally been used to distinguish between the human sciences and the natural sciences. Because of its attention to meanings, hermeneutics distinguishes the human sciences from those where the elimination of the human elements have become a working principle. In fact, the underlying belief that the human element can be eliminated, and is in fact irrelevant, is widespread above all, in mathematics.

However, the mathematical entities and the relations between them are embedded in a complex symbol system made by and for human beings, and the meanings of this symbol system must be understood by anyone who wants to do or to use mathematics.(17)

Since history is already an interpretative activity, and since in the history of mathematics we are continually investigating the meanings of the texts available to us, it seems clear that the certainty (in the absolute sense) of what the writer of the text is communicating is continually brought into question. A good example of this is seen in the publication of the "non-mathematical" ideas of Isaac Newton (Fauvel 1988) where the mathematical establishment in England steadfastly ignored his philosophical and metaphysical beliefs which may have led him to formulate the concept of "force". From a hermeneutic point of view, "F = ma" requires considerable interpretation. (Rogers 1990)

6. Relevance for Learning.

Both creation and discovery are the concerns of pedagogy. Heuristic is used to assist the creative development of mathematical concepts by encouraging in the learner a situation where they may be able to achieve their own conceptual reorganistions. Heuristic also encourages the discovery of mathematics by providing a set of maxims for the procedural analysis of analogous situations. The extensions and elaborations of Polya's broad plan by Burton (1984) and others is an example of attempts to put this heuristic into practice.

By studying the history of mathematics we can examine aspects of the processes whereby mathematics was developed, and also become aware of the important contexts ; psychological, social, cultural, economic, etc within which mathematics exists.

It must be said that while the classroom learning of mathematics cannot in any sense mirror history, we have many lessons to learn from the different historical viewpoints outlined above.

NOTES.

(1) The formalist approach to teaching seems to originate from Christan Wolff in the 18th centrury as quoted by Erich Wittman (1992) :

"In my lectures I have mainly paid attention to three things, 1. that I did not use any word which I had not explained before in order to avoid ambiguities or logical gaps, 2. that I did not use any theorem which I had not proved before, 3. that I continuously linked the definitions and the theorems to each other, thus forming an un-interrupted logical chain.

Everybody knows that these are the rules which are followed in mathematics.

He who compares the mathematical way of teaching with the logical approach treated in my book on reasoning will find that the mathematical way of teaching is nothing but a careful application of the rules of reasoning. Therefore it does not matter if one follows the mathematical way of thinking or the rules of reasoning as long as these are correct. As I have shown *that mathematical thinking reflects natural thinking and that logical reasoning is only a distinct elaboration of natural thinking, I can well claim that my teaching followed the natural modes of thinking"* (Wolff 1726/1973, 52-54). (The italics are mine).

Of course, there are serious flaws in this belief ; perhaps this official dogma is more of a "working principle" for many mathematics teachers, and recent critical views of this approach have been repeated and reviewed in the popular book by Davis and Hersh (1981), (274-284).

(2) Here I speak of changes that have taken place in England over the last twenty years or so, and imply that in spite of these changes, much of the style of school mathematics is heavily influenced by the Formalist paradigm. See, in particular, the work on Investigations by the ATM (from 1966), which led to the work of Burton (1984) and Mason, Burton and Stacey (1985), and others at the Open University on Problem Solving and Mathematical Thinking.

An attempt to institutionalise some of this approach has recently appeared in the English National Cirriculum under Attainment Target 1 ; "Using and Applying Mathematics".

(3) Inutitionism has its roots in Kantian philosophy, and the idea of a *priori* perceptions. While I do not make any claim that the more recent approaches of the Popper/Polya/Lakatos school are in the same tradition, the similarity lies in the more recent emphasis on the human individual taking a much more central role in the creation of mathematics, and the exploration of what that central role entails.

The introduction of the social and cultural context of the creation of mathematics is an entirely recent development.

(4) For example, for language investigations see Pimm, Laborde and others and for imagery and visualisation the work of Goldin, Dreyfus, and Tall reported in the recent Proceedings of the Psychology of Mathematics Education (PME) conferences and in Nesher and Kilpatrick (1990).

(5) I note that Crowe (1975) insists on using the wording "in mathematics". This means that we can allow that "revolutionary" changes may occur in symbolism, nomenclature, metamathematics, methodology and even in historiography, but all of these changes do not appear to change the mathematics itself.

It seems to me however, that this leads us to the problem of defining what mathematics is ; a path that contemporary philosophers decline to follow (see my remarks in section 2 above). The question of defining and identifying "revolutions" in mathematics is comprehensively addressed in Gilles 1992.

(6) Wilder's concept of "consolidation" describes the situation where successive mathematicians refine particular concepts, and text book writers re-organise whole areas of mathematics according to new categories of abstraction, or particular modes of presentation. It is interesting to consider that the act of identifying mathematics as a separate autonomous body of knowledge, seems to imply thati it is possible to propose a series of "laws" of evolution for the subject.

These and many other problems concerning the relationship between mathematics, its crators and society, have been addressed by Wilder, Bloor, Crowe, D'Ambrosio, Kitcher, and others (see bibliography).

(7) Rather tongue in cheek, (pas sérieux) this is a paraphrase of Russell (1956) "...mathematics is the subject in which we do not know what we are talking about, nor whether what we are saying in true."

(8) This is a substantial claim, but much of the groundwork has already been done. Notice that the claim is not that we cannot teach mathematics without knowing its history, but that the historical background provides ideas and information upon which we can base our teaching approaches. This avoids the requirement that every teacher of mathematics should be a historian of mathematics as well!

See, for example Freudenthal (1983), and the work of the IREMS in France is producing many commentaries and epistemological papers on the processes of historical discovery.

(9) Even "facts" are controversial. See, for example Hoyrup (1991) where the consideration of the same ancient cultural practices by academics of different disciplines can lead to very different interpretations of what was actually taking place at the time.

(10) "Concepts" are dangerous things. There is little agreement as to what a concept is, and many attempts to broaden out the idea by using such terms as ; concept networks, schemata, frameworks, and so on. These is also the elusive fluidity of "concept as object" and "concept as tool" described by Douady and Perrin-Glorian (1989).

(11) Cajori's book, A History of Elementary Mathematics whit hints on Methods of Teaching, came after his more substantial work on history of mathematics (1893), and shows the influence of Herbert Spenser and the ideas of the "biogenetic law" (ontogeny recapitulates phylogeny). This theme is repeated in other books on the teaching of mathematics from an historical point of view, for example see Branford (1908).

(12) May (1972) rated this approach to history as one of the "cardinal sins". See, for example, many of the historical notes to Bourbaki which imply that past events are direct antecedents of present theories, and Zeeman (1974).

(13) There are many examples : the development of skills, techniques and notations in mathematics brought about by the organisation of society into city-states and centres of trade ; the development of writing, communication and the invention of printing ; the development of technology ; the needs of war, and so on. See, for example, Bloor (1991) and Wilder (1981).

(14) The idea of mathematical exsistence means that an individual has constructed a theory which is consistent according to some declared criteria, but which is not generally accepted and incorporated into pratice by other mathematicians. This is theoretically possible, but it is difficult to find examples because we would be unlikely to know about them. Perhaps we could consider the circle squarers and angle trisectors (cranks, to some) as examples, while some extreme forms of intuitionism or constructivism may also be considered. For social existence, the mathematics does not necessarily need to be "alive" at the moment. It is sufficient that we have evidence that mathematical practices and theories have been used by a group of people at some time or other.

(15) Many examples can be cited in science. For example Phlogison Theory is a valid achievement, but a rejected result. Similar episodes in mathematics have simply been ignored.

(16) Text, in the contemporary sense, includes all forms of written recording like music and dance notation, other media like photographs, film and video, and other graphic forms like posters or works of art.

(17) For example, Cohen (1985) suggests four criteria for identifying whether a scientific revolution has occurred :

a) the testimony of contemporary witnesses (including scientists' assessment of their own work) ;
b) the ctitical examination of the documentary history of the subject ;
c) the judgement of competent historians, particularly historians of science and of philosophy ;
d) the general opinion of working scientists today.

Bibliography.

ATM (1966)
The Development of Mathematical Activity in Children : the Place of the Problem in this Development. ATM Derby.

ATM (1980)
Mathematical Investigation in the Classroom. ATM Derby.

Bachelard, G. (1969)
The philosophy of No. Tr. Waterston G.C. N.Y. Orion Press

Bloor, D. (1976/1991)
Knowledge and Social Imagery. London. Univ of Chicago Press.

Branford, B. (1908)
A Study of Mathematical Education Including the Teaching of Arithmetic. Oxford.

Burton, L. (1984)
Thinking Things Through. Blackwell, Oxford.

Cajori, F. (1893) and repr.
A History of Mathematics. Macmillan N.Y.

Cajori, F. (1896)
A History of Elementary Mathematics with Hints on Methods of Teaching.Macmillan N.Y. and London

Cohen, I.B. (1985)
Revolution in Science. Harvard Univ. Press.

Crowe, M.J. (1967)
A History of Vector Analysis : the evolution of the idea of a vectorial system. Notre Dame Univ. Press.

Crowe, M.J. (1975)
"Ten 'Laws' Concerning the patterens of Change in the History of Mathematics".
in Historia Mathematica 2 (2) 1975 (161-166)

Crowe, M.J. (1992)
"*Afterword (1992) : a revolution in the historiography of mathematics* ?" in Gilles (1992) op. cit. (306-316).

D'Ambrosio, U. (1985)
"*Ethnomathematics and its Place in the History and Pedagogy of Mathematics*" in For the Learning of Mathematics 5 (1) 1985 (44-48)

Davis, P.J. and Hersh, R. (1981)
The Mathematical Experience. Harvester Press. repr. Penguin 1990.

Dawson, S. (1969)
The Implications of the work of Popper, Polya and Lakatos for a Model of Mathematics Instruction.
Unpublished Dissertation. University of Alberta, Canada.

Douady, R. et Perrin-Glorian, J. (1989)
"*Un Processus d'Apprentissage du Concept d'Aire de Surface Plane*" in Educational Studies in Mathematics 20 (3) 1989 (387-424).

Fauvel, J. et al. (Eds) (1988)
"Let Newton Be !" Oxford University Press.

Fourier, J. (1822) Theorie Analytique de la Chaleur.
tr. Freeman, A. as "Analytical Theory of Heat" Dover 1955

Freudenthal, H. (1983)
Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Reidel.

Gilles, D. (1992) (Ed.)
Revolutions in Mathematics. Oxford. Clarendon Press.

Hoyrup, J. (1991)
Changing Trends in the Historiography of Mesopotamian Mathematics.
Privately circulated contribution to the conference on Contemporary Trends in the Historiography
of Sciences. Corfu May/June 1991.

Kitcher, P. (1983)
The Nature of Mathematical Knowledge. Oxford.

Lakatos, I. (1961)
Essays in the logic of Mathematical Discovery.
Ph. D. Dissertation. Cambridge.
First published as "*Proofs and Refutations*"
in British Journal for the Philosophy of Science (1962)
and later as
Lakatos, I. (1972) (Eds. Worall, J. and Zahar, E.)
Proofs and Refutations. Cambridge (1972)

Mason, J., Burton, L. and Stacey, K. (1985)
Thinking Mathematically Open University.

May, K. (1972)
Bibliographyt and Research Manual in the History of Mathematics. Toronto.

Nesher, P. and Kilpatrick, J. (1990)
Mathematics and Cognition. Cambridge University Press.

Rogers, L. (1975)
The History of Mathematics and its Implication for Teaching.
Unpublished Dissertation.
Leicester. School of Education.

Rogers, L. (1990)
"*The Great Ocean of Truth*" Essay review of Fauvel 1988 in Mathematics Teaching N°136
Sept. 1991 (48-49)

Russell, B. (1956)
"*Mathematics and the Metaphysicians*"
J.R. Newmann (Ed.) (1956) + repr.
The World of Mathematics 4 Vols. Vol 3 (1578-1590) Allen and Unwin

Seeger, F. and Steinbring, H. (1992)
The Dialogue Between Theory and Practice in Mathematics Education : Overcoming the Braodcast Metaphor.
Bielefeld. Institut fur Didaktik der Mathematik.

Wilder, R.L. (1968/1974)
The Evolution of Mathematical Concepts. Wiley.

Wilder, R.L. (1981)
Mathematics as a Cultural System. Pergamon.

Wittmann, E. CH (1992)
"*One source of the Broadcast Metaphor : Mathematical Formalism*".
in Seeger, F and Steinbring, H. 1992 op. cit. (p.116)

Wolff,Chr. (1973)
Ausfuhrliche Nachricht von seinen eigenen Schriften.
Kap.3 : Von der Lerhart des Autoris, 52-124. ges. Werke, 1. Abt. Deutsche Schriften Band 9.
Hildesheim/New York/Olms.

Zeeman, C. (1974)
"*Research, Ancient and Modern*".
in Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications (Bull. I.M.A.) 10 (7/8) August 1974 (272-281).

LA NOTION DU NOMBRE AVANT L'ETABLISSEMENT DE LA SCIENCE ANALYTIQUE[1]

Guillermina WALDEGG
CINVESTAV, Mexique

RESUME: A partir de l'établissement de la géométrie analytique et des méthodes du calcul, les domaines arithmétique et géométrique ont été identifiés -ceci représente une rupture avec les conceptions grecques de nombre et de grandeur-. Pour réussir cette identification, une structuration antérieure et indépendante de chaque domaine fut nécessaire. Dans ce processus, les travaux théoriques de Stevin, sur lesquels il fonde l'utilisation de sa notation décimale, n'ont pas été suffisamment valorisés. Nous voulons montrer que l'approche théorique de Stevin est une contribution décisive pour arriver à un concept analytique de nombre.

INTRODUCTION

Dans la deuxième moitié du 19ème siècle Weierstrass, Cantor et Dedekind ont proposé une construction du nombre réel en réaction à ce qui, à cette époque-là, était une identification excessive entre nombres réels et points sur la droite. Une telle identification avait produit beaucoup de résultats dans le domaine arithmétique qui se fondaient sur la seule évidence géométrique. Les arguments de ces trois mathématiciens sur la nécessité de distinguer les domaines arithmétique et géométrique sont bien connus, cependant nous voulons citer l'introduction de l'ouvrage de Dedekind qui précède sa construction des nombres réels:

> *...j'ai senti, plus dramatiquement que jamais le manque d'une fondamentation vraiment scientifique pour l'arithmétique. Quand je discute la notion d'approximation d'une quantité variable qui s'approche d'une valeur limite fixe, et spécialement quand je démontre le théorème qui établit que toute grandeur qui croît de façon continue mais qui ne dépasse aucune limite doit alors s'approcher d'une valeur limite, je doit recourir à l'évidence géométrique... Cette façon d'introduire le calcul différentiel ne peut pas être considérée scientifique.*[2]

Cette identification totale entre nombres réels et points sur la droite, contraste fortement avec la conceptualisation aristotélique et euclidienne de nombre et de grandeur qui établit une séparation claire entre les deux domaines.

Dans l'étude de l'évolution du concept de nombre réel, il est très important de préciser le moment où les deux domaines (arithmétique et géométrique) se confondent. Pour atteindre ce but, il fallait une structuration antérieure et indépendante de chaque domaine. Dans ce processus, les travaux de Stevin sont très significatifs.

Simon Stevin (1528-1620) est célèbre, dans l'histoire des mathématiques, grâce à l'introduction de la notation décimale dans la culture occidentale; cependant, les contributions théoriques sur lesquelles Stevin fonde l'utilisation de cette notation, n'ont pas été suffisamment valorisées. Nous voulons montrer que l'approche théorique de Stevin est une vraie rupture avec

---

1 Cette étude a été élaborée sous le patronnage de CONACYT
2 Dedekind, p. 1 (traduit de l'anglais par G.W.)

la conception grecque et que cette rupture a permis l'accès à un concept analytique de nombre.

Il faut remarquer trois points particulièrement importants à propos des travaux de Stevin[3] qui ressortent d'une définition de nombre différente de celle de la mathématique théorique grecque, utilisée encore au 16ème siècle.

. La difficulté entraînée par une notion de nombre lié aux quantités discrètes aussi bien qu'aux quantités continues.

. La façon d'exister du nombre lorsqu' il ne fait pas partie d'une structure axiomatique

. L'extension du domaine numérique comme résultat du nouveau concept de nombre.

1. LA DÉFINITION GRECQUE DE NOMBRE ET LA DÉFINITION DE STEVIN

Dans la mathématique théorique grecque[4], le nombre est défini dans la catégorie des quantités moyennant l'opposition entre quantités infiniment divisibles et quantités "finiment" divisibles.

Aristote [*Métaphysique 1020 a,5*] définit la quantité comme *"Ce qui est divisible par deux ou par plus de parties aliquotes"*. La division est l'opération qui permet l'identification des quantités, mais elle est aussi à la base de la classification: une quantité discrète ou nombre est une quantité qui peut être divisée seulement un nombre fini de fois (la limite de cette division est l'unité). La "quantité continue" ou grandeur est une quantité qui peut être divisée infiniment sans perdre son essence.

Les nombres et les grandeurs font des classes disjointes et indépendantes et, par conséquent, leurs études respectives sont d'autrui et irréductibles. D'après la tradition platonique, la géométrie étudie les grandeurs, l'arithmétique les nombres. Ces deux sciences n'ont en principe aucune liaison, à moins qu'il s'agisse de grandeurs conmensurables, où l'on peut utiliser indistinctement les résultats de l'arithmétique ou de la géométrie, parce que *"les grandeurs conmensurables peuvent être conçues comme des nombres"*".[5]

Euclide, lui aussi, maintient la séparation entre l'arithmétique et la géométrie proposée par Platon et Aristote. Dans *Les Eléments*, les *Livres 1* jusqu'au *6* et *11* jusqu'au *13* sont géométriques, tandis que les autres sont arithmétiques. Jamais, dans un même livre, les mots *nombre* et *grandeur* n'apparaissent ensemble, sauf dans le *Livre X*, où la *Proposition X5* fait appel à Aristote:

Proposition X5. Les grandeurs conmensurables ont la même raison que deux nombres.

Stevin, tout au contraire, cherche un seul traitement qui unifie les quantités continues et discrètes. Le nombre est associé à la quantité sans que l'opposition continu-discret fasse partie du concept.

---

[3] L'ouvrage mathématique de Simon Stevin qui contient la plupart de ses résultats théoriques est *L'Arithmétique* publié en 1585. La même année, Stevin avait publié un bref fascicule nommé *La Disme* sur la notation décimale et son arithmétique où était inclu le traitement des fractions décimales.

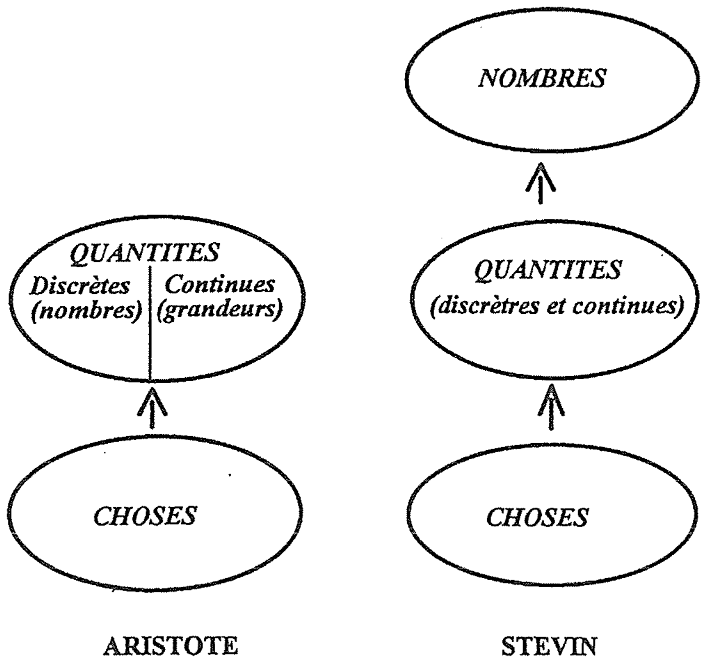
[4] Mathématique théorique grecque, se réfère ici aux *Eléments* d'Euclide.

[5] Aristote, *Analytiques Postérieurs*, 75b, 5

Stevin introduit, au début de son traité, la définition suivante:

Définition II: Nombre est cela, par lequel s'explique la quantité de chacune chose [6].

Cette définition représente un vrai saut conceptuel par rapport à la mathématique grecque. Pour Aristote, le nombre est une quantité (une classe d'elles) tandis que, d'après Stevin, le nombre est un moyen pour rendre la quantité évidente. Pour les deux auteurs la quantité est un concept abstrait dans un premier niveau de représentation, de certaines propriétés des objets matériels (son "être quantitatif"). Aristote situe le nombre et la grandeur dans ce premier niveau et Stevin passe à un deuxième niveau de représentation où le nombre "parle" du niveau précédent.



Stevin fait disparaître la dichotomie continu-discret de la quantité quand il nie la discontinuité du nombre comme une partie de son essence[7]. Le nombre, comme entité isolée, est "continu" dans le sens aristotélique[8] puisqu'il est possible de le diviser infiniment et en tout cas il hérite la condition de continuité ou discontinuité de la "chose" qu'il quantifie; par exemple, si l'on parle d'un cheval, "un" est discret, tandis que si l'on parle d'un mètre de tissu, "un" est continu. Ainsi, discret et continu ne sont plus des catégories ontologiques; la discussion sur ce point est circonscrite au domaine des mathématiques, où celles-ci sont des propriétés circonstancielles des objets quantifiés.

---

6 *Stevin,* Le premier livre d'Arithmétique, p. 1

7 *QUE NOMBRE N'EST POINT QUANTITÉ DISCONTINUE (en majuscules dans l'original)* Stevin, p.2

8 C'est-à-dire, infiniment divisible

2. UNE DÉFINITION DE NOMBRE LIÉE AUX QUANTITÉS CONTINUES ET DISCRÈTES

Dans les mathématiques grecques, le nombre est fondé sur la notion d'unité: le nombre est un ensemble d'unités[9] . Mis à part les difficultés qu'entraîne la définition grecque d'unité[10] , celle du nombre permet de penser à un "nombre pur", de telle sorte que les rapports entre les nombres peuvent être conçus indépendamment des quantités qu'ils représentent (10 est plus grand que 5 et il est son double, sans qu'il y ait besoin d'imaginer les quantités qu'ils représentent).

Le problème de l'absence d'une "unité naturelle" pour traiter les grandeurs émerge quand on veut étendre la définition de nombre à toutes les quantités. On est donc obligé d'assigner un nombre à la quantité moyennant une unité conventionnelle. Alors, les opérations que nous réalisons avec des nombres, sont-elles faites exclusivement avec des symboles, ou avec des "quantités nombrées", en identifiant ainsi *quantité* et *nombre*? Le principal obstacle que représente la confusion entre nombre et quantité nombrée pour le développement du concept est la difficulté de concevoir un "nombre pur", avec lequel on peut faire des opérations indépendamment des quantités auxquelles il se réfère. Stevin, lui même, définit "nombre pur" ou "nombre arithmétique"comme celui obtenu après avoir fait l'abstraction de la quantité qui est à son origine[11] . Une grande partie du travail de Stevin est consacrée à montrer que le domaine des nombres est homogène et que, par la suite, il est possible de faire des opérations sans se référer aux quantités d'où ils proviennent. Par exemple, le numéro 9, que l'on peut imaginer comme une quantité linéaire, peut être interprété aussi comme l'aire d'un carré.

Néanmoins, l'abstraction demandée par Stevin n'est pas suffisante pour éliminer les obstacles d'un concept de nombre où *nombre* et *quantité* apparemment se confondent. Il faut "quelque chose" qui joue le même role que l'unité dans le concept grec de nombre.

L'unité chez Stevin n'entraîne plus le caractère privilégié qu'elle a dans la mathématique grecque où elle est le principe générateur du nombre. De par ce fait, Stevin doit renoncer à la possibilité d'avoir un principe de génération absolu, de sorte qu'il est obligé de chercher une sustentation extralogique, externe à la mathématique dans le contexte physique: la quantité de "chaque chose". Cela nous renvoie au problème de la façon d'exister d'un concept quand il ne fait pas partie d'une structure axiomatique.

3. LA FAÇON D'EXISTENCE DU NOMBRE QUAND IL NE FAIT PAS PARTIE D'UNE STRUCTURE AXIOMATIQUE

Le concept du nombre chez Stevin est construit à partir de la reconnaissance d'un isomorphisme opératoire entre nombre et quantité; l'oeuvre de Stevin est nettement marquée par la prédominance du domaine opératoire où la réalité du nombre est fondée.

On trouve la première trace de conditionnement du nombre aux opérations que l'on peut réaliser dans un passage de *L'Arithmétique* où Stevin argumente en faveur de la division de l'unité:

> *L'unité est divisible en parties (vray est qu'ils le nient, mais mille leurs distinctions ne sont pas susfisantes, de pouvoir ainsi opprimer* ***la nature du nombre, qu'elle ne manifeste par force son essence, es Arithmétiques operations*** *de plusieurs Autheurs, comme entre autres par l'absolute partition de l'unité...).*[12]

---

[9] Nombre est une multitude composée par des unités *(Les Éléments, Def. VII-2)*

[10] Unité est cela d'après lequel chaque chose est nommé un *(Les Éléments, Def VII-1)*

[11] *Définition VI : Nombre Arithmétique est celui qu'on explique sans adjectif de grandeur,* Stevin, page 3

[12] *Stevin, page 2*

L'affirmation précédente confère au nombre une existence opératoire, c'est-à-dire, ce sont des opérations que l'on peut réaliser avec les nombres qui déterminent leur nature. Mais, sur quoi sont appuyées les opérations? Voici une possible argumentation de Stevin:

Par le nombre s'explique la quantité de "chacune chose"; par les opérations arithmétiques -en tant qu'elles expriment rapports et transformations parmi des nombres- s'expliquent les actions ou les transformations que l'on fait avec des choses (en tant que quantifiables)

Alors, les actions que l'on réalise sur les quantités soutiennent les opérations arithmétiques et celles-ci, à leur tour, constituent l'essence du nombre, de la même façon que les actions de mesurer, comparer, diviser, transformer, etc... donnent le sens à la quantité.

Un pas en avant vers l'agrandissement du domaine numérique, est la considération qui établit que les résultats des opérations algébriques que l'on fait avec les nombres sont, à leur tour, des nombres. Sur ce point, Stevin présente deux façons différentes d'argumenter. La première, fondée sur la pratique de mesurer, consiste à exhiber des grandeurs geométriques associées aux dits résultats. La deuxième façon d'argumenter, bien des fois utilisée par Stevin, présente un caractère extralogique qui, à l'époque lui fut durement reprochée[13]. Regardons cette deuxième manière d'arguer quand elle apparaît pour la première fois dans *L'Arithmétique* en appuyant l'affirmation "QUE L'UNITÉ EST NOMBRE"[14]:

La partie est de mesme matiere qu'est son entier,
L'unité est partie de multitude d'unitez,
Ergo l'unité est de mesme matiere qu'est la multitude d'unitez;
Mais la matiere de multitude d'unitez est nombre,
Doncques la matiere d'unité est nombre [15]

Cette argumentation présente une ambivalence dans son niveau d'abstraction. La première prémisse, "*La partie est de la même matière que son entier*", se rapporte aux objets materiels[16] tandis que la deuxième, "*L'unité est une partie d'une multitude d'unités*", a trait à des objets mathématiques et, par conséquent, abstraits. Le passage sans restriction d'un niveau à l'autre, rend évident le soutien normatif que la réalité physique rapporte au concept du nombre chez Stevin.

Stevin établit son concept du nombre sur les fondements des opérations que l'on peut réaliser avec lui, et à leur tour, les opérations sont construites sur les actions que l'on peut faire sur les objets. Les résultats de ces actions ne changent pas la quantité totale de matière qui intervient dans le processus. C'est la conservation dans le sens de Piaget. Ces résultats se reflètent, sur le plan des objets mathématiques, comme les opérations qui caractérisent, à leur tour, une loi de composition interne. Les trois niveaux par lesquels Stevin passe sont:

13 *Quelques historiens modernes, comme J. Klein, ont aussi envisagé ce point.*
14 Stevin, p. 1
15 Ibid.
16 Stevin renforce son argumentation en disant que *"c'est comme nier qu'une pièce de pain soit du pain"*

NIVEAU EMPIRIQUE	MATIÈRE	ACTIONS CONCRÈTES	CONSERVATION DE MATIÈRE
ABSTRACTION EMPIRIQUE	QUANTITE	ACTIONS INTERIORISEES	CONSERVATION DE QUANTITE
ABSTRACTION SYMBOLIQUE	NOMBRE	OPERATIONS ALGEBRIQUES	LOI DE COMPOSITION INTERNE DU DOMAINE NUMERIQUE

Alors, comme à partir du pain on obtient du pain, à partir du nombre on obtient des nombres. Une fois encore, les opérations avec des nombres déterminent les propriétés du domaine numérique.

La divisibilité de l'unité est construite sur la pratique de mesurer. Ceci permet d'associer un numéro à une grandeur. Stevin propose une structure théorique fondée sur la systématisation de cette pratique. Le point de cette proposition est le fait d'identifier une unité "naturelle" -numérique- et une unité "arbitraire" -la métrique-. A mon avis, Stevin fait cette identification sur la base de la "généralité de l'arbitraire" propre de l'élection de l'unité métrique. C'est-à-dire, le concept d'unité métrique est le résultat de l'abstraction d'une propriété commune à tous les objets physiques -sa singularité-, tandis que l'unité de mesure est l'abstraction d'une caractéristique commune à toute activité de mesure -l'élection arbitraire d'une grandeur comme étalon-.

Stevin ne parle pas en faveur d'une seule unité de mesure, en fait, il suggère de prendre l'unité utilisée dans chaque région et de la diviser toujours en dix:

> *...on partira toutes mesures, comme Longue, Humide, Seiche, Argent, &c. par la precedente dixiesme progrestion & chasque fameuse espece d'icelles se nommera* ***Commencement****; comme Marc,* ***Commencement*** *de pois... Livre,* ***Commencement*** *des autres pois communs; Livre de gros en Flandres, Livre Esterlain en Angleterre, Ducat en Hispaigne, &c.* ***Commencement*** *de monnoyes....*[17]

Stevin appelle **Commencement** à chaque unité de mesure quelle que soit sa nature ou dimension. A ce **Commencement** il va associer l'unité métrique.

> •*Définition II: Tout nombre entier proposé se dict Commencement, son signe est tel* ⓪ [18]

Si nous avons le numéro trois cent soixante quatre, nous écrirons 364 ⓪ .

Tout au long de *La Disme*, Stevin établit clairement l'équivalence entre chacune (et toutes) les unités métriques et l'unité, unique et naturelle, des nombres.

L'unité de Stevin n'est pas seulement le résultat d'une abstraction sur les objets en tant que quantités, mais essentiellement, d'une abstraction sur les actions coordonnées effectuées dans la pratique de mesurer ces objets.

La prédominance du domaine opératoire de Stevin est déterminante pour une reconsidération du nombre: nous pouvons conjecturer que c'est à partir du développement de la notation décimale réalisé par Stevin pour faciliter "les comptes des affaires des hommes"[19], et

---

[17] Stevin *: La Disme dans la Practique de l'Arithmétique, p. 212*

[18] Ibid., p.208

[19] Le titre de la *Disme* est : *La Disme, Enseignant facilement expédier par nombres entiers sans rompuz, tous comptes se rencontrans aux affaires des Hommes.*

moyennant lequel il établit un isomorphisme opératoire entre les nombres et les grandeurs, qu'il est obligé de fonder théoriquement son nouveau concept de nombre.

4. *L'ÉLARGISSEMENT DU DOMAINE NUMÉRIQUE À LA SUITE DU NOUVEAU CONCEPT DE NOMBRE*

Euclide dans *Les Eléments*, établit les propriétés suivantes d'une quantité nombrable qui soulignent la différence essentielle avec la quantité mesurable:

a) L'unité pour compter n'est pas divisible

b) L'unité pour compter n'est pas un nombre

c) La raison entre deux nombres n'est pas un nombre.

Ces propriétés confinent le domaine numérique à un sous-ensemble des nombres naturels qui ne comprend ni le zero ni le "un".

Le nombre chez Stevin concerne non seulement la quantité nombrable mais aussi bien la mesurable. Stevin doit attribuer, explicitement des propriétés différentes de celles du nombre grec:

a) L'unité (numérique ou géométrique) est un nombre[20]

b) L'unité est divisible indéfiniment

c) Les parties de l'unité sont, à leur tour, des nombres

A partir de ces trois prémisses Stevin obtient, d'une façon directe, l'élargissement du domaine numérique qui inclut alors l'unité et ses fractions. Néanmoins, ceci n'est pas le seul élargissement introduit par Stevin, puisqu'il enrichit le domaine avec les résultats d'extraction de racines en incorporant les nombres radicaux (rationnels et irrationnels) et enfin tous les résultats des opérations algébriques avec des nombres positifs.

RÉFÉRENCES

Aristote. *Oeuvres*. The Great Books of the Western Word (VIII). Chicago: Encyclopaedia Britannica (1978).

Euclide. *The Elements,* dans Heath, Sir Thomas: *Euclid, The Thirteen Books of the Elements*. New York: Dover Publications Inc., (1956)

Dedekind, R. (1901). *Essays on the Theory of Numbers*. N. York: Dover Publications, Inc. (1963)

Jones, Ch. V. (1978). *On the Concept of One as a Number*, Doctoral Dissertation, University of Toronto

---

[20] *"QUE L'UNITÉ EST NOMBRE"* (en majuscules dans l'original) Stevin, p.1

Jones, Ch. V. (1987). "La influencia de Aristóteles en el fundamento de los Elementos de Euclides". México: *Mathesis* II, (4), 375-387.

Klein, J. (1966). *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, Cambridge: Cambridge University Press

Stevin, Simon (1585). *L'Arithmétique et la Practique d'Arithmétique* dans *Les Oeuvres Mathématiques de Simon Stevin* (1634), ed. Albert GIRARD, A. Leyde

GEOMETRIE NON EUCLIDIENNE ET NAISSANCE DE L'AXIOMATIQUE MODERNE

Jean-Claude PONT

> Les recherches métaphysiques n'ont point à se justifier par leur utilité ni par leur agrément; elles sont comme le sport d'un esprit vigoureux. "Si pénibles et si fatigantes que puissent paraître ces recherches, il en est de certains esprits comme de certains corps qui, pourvus d'une santé vigoureuse et florissante, ont besoin d'exercices violents et trouvent plaisir à des travaux qui paraissent à la généralité des hommes pénibles et accablants." (E. Bréhier, citant Hume, Histoire de la philosophie, t.2, p.357)

> La philosophie arrive à défaire le travail de l'habitude. Elle rend manifeste la nature volontaire, et l'origine consciente de certaines perceptions passées à l'état d'inconscience et d'automatismes (Maine de Biran).

Note liminaire

J'ai tenu à conserver à cet exposé l'allure d'une conversation détendue, non académique, comme il sied à un cours d'été. Je n'ai pas cherché non plus à éliminer les répétitions qui se présentent naturellement dans un exposé oral et didactique.

Origine du propos

J'aimerais vous entretenir de questions qui ne sont pas, en règle générale, abordées dans la formation du futur professeur de mathématiques et qui me semblent pourtant essentielles; c'est là, à mon sens, le reproche majeur qu'il faut adresser à la corporation. Les observations sur lesquelles se fonde ce propos proviennent de mon passé d'étudiant, de ma pratique de professeur de lycée, de discussions avec des collègues, de mon expérience de père de famille; elles ont aussi leur origine dans mon travail d'historien et d'épistémologue des mathématiques. Il s'agit donc d'un exposé non académique, plutôt égocentrique et lié à un vécu.

Le constat de départ est le suivant : à de rares exceptions près et à quelque niveau qu'ils travaillent, les enseignants ne traitent guère des enjeux et de la finalité de la matière dispensée. Les blocages et difficultés que j'ai éprouvés dans l'acquisition de concepts nouveaux - je m'en suis aperçu plus tard et j'ai fait depuis la même observation chez nombre de mes élèves - résidaient dans un manque d'informations ressortissant précisément à ces catégories. L'analyse de la genèse et du développement des théories mathématiques fournit des indications qui sont susceptibles d'éclairer l'enseignant sur les obstacles rencontrés par ses élèves: les exemples sont multiples et je citerai dans le champ élémentaire : le nombres négatifs, les nombres complexes, le calcul littéral, la géométrie élémentaire.

J'ai choisi de parler de l'axiomatique parce que son histoire est exemplaire pour la perspective dans laquelle je me place ici. La méthode axiomatique, sa genèse et sa place dans l'enseignement permettent de mettre en scène quelques problèmes importants touchant la didactique de cette discipline.

Dans la vie des hommes, lorsque des idées naissent, c'est le plus souvent par nécessité: comme le notait déjà un auteur de la fin du 5e siècle avant JC dans un admirable texte que nous a conservé le commentateur Diodore de Sicile : la loi générale est que l'homme n'apprend rien que par nécessité. Ayant appris, il oublie en général les conditions qui l'ont contraint d'apprendre: la nécessité qui avait mené vers une certaine théorie a disparu. Si l'analyse des motivations fondatrices n'a pas été envisagée, l'enseignant s'expose au danger de présenter des choses qui ont perdu leur sens. Il arrive aussi que la nécessité historique, qui a présidé à la mise en place d'un corps de doctrine ne coïncide plus avec les raisons de son exploitation pédagogique; c'est flagrant dans le cas de la méthode axiomatique.

Il y a différents ordres de raisons qui justifient l'introduction de concepts et de théories dans l'enseignement :
- pragmatiques, liées à des applications pratiques;
- didactiques, soit que l'on songe à des développements théoriques, soit que l'on ait en vue leur aspect formateur (apprentissage de la pensée déductive etc.);
- historiques: fruits d'une nécessité relative, ils sont parfois maintenus en vie artificiellement, par la seule force de l'habitude. Certains continuent néanmoins à jouer un rôle intéressant dans le cursus. Pour d'autres, c'est de l'acharnement thérapeutique. On enseigne alors dans la joie et l'allégresse des pratiques dont plus personne ne connaît l'origine, la situation historique qui en légitimait l'introduction. Le meilleur exemple est peut-être constitué par les constructions géométriques, monstre sacré de l'enseignement de la géométrie jusque vers les années 1965 (note 1).

Les considérations qui précèdent s'appliquent particulièrement bien à la méthode axiomatique, qui a fécondé - ou envahi, selon le point de vue - toutes les mathématiques. Il convient de noter que notre long commerce avec elle nous fait oublier qu'elle a une histoire, qu'il a fallu quelque cinq millénaires de réflexion et de labeur pour y accéder. Les nécessités à la base de son introduction se sont estompées, elle est devenue une habitude plutôt que le fruit d'un choix délibéré. Les raisons, dispensées avec parcimonie, pour justifier la présence de la méthode axiomatique - qui n'est rien moins que naturelle - dans les programmes et sa place dans la pratique du mathématicien, ont de lointains rapports avec celles qui ont gouverné son émergence, dans l'épaisseur de l'Histoire, et ce qui était alors obligation est devenu norme. Si le jeune se soumet volontiers une nécessité justifiée, il se cabre devant l'arbitraire et le principe d'autorité. De surcroît il est loisible de penser qu'il rencontre dans son apprentissage des difficultés voisines de celles qui ont freiné la marche de l'Humanité. La connaissance de la situation historique peut aider le maître à faire passer le message. Un peu comme si, à l'image de ce que l'on a cru vrai pour le monde animal, l'ontogenèse récapitulait la phylogenèse.

On aurait tort d'imaginer un savant du 19e, un beau matin se levant et s'excla-mant : je suis en forme, le moment est venu, créons l'axiomatique moderne. Non! Les choses se passent d'une manière plus prosaïque! J'aimerais montrer dans cet exposé de quelle façon, pour répondre à quelle nécessité, pour dissiper quels ennuis épistémologiques l'axiomatique moderne est née, entre 1830 et 1900. La pratique de l'axiomatique, familière à tout mathématicien, ne met pas en évidence les problèmes philosophiques sous-jacents, qui sont pourtant à la base même de cette méthode et c'est d'eux que je vous entretiendrai d'abord.
Préalablement, il convient d'indiquer les principales caractéristiques épistémologiques et métaphysiques de l'axiomatique, son objet, sa nature. La méthode axiomatique constitue une manière particulière de parler des entités mathématiques et de leurs relations. Elle fournit une réponse singulière aux deux problèmes centraux de l'épistémologie de la géométrie :
a) le premier a trait au statut ontologique des entités; celles-ci, au lieu de voir leur existence donnée dans une intuition au contour mal dessiné ou d'être construites selon des règles ad hoc, sont définies implicitement, par l'intermédiaire des propositions qu'elles sont sensées satisfaire;
b) le second concerne le problème de la vérité : les axiomes sont des propositions arbitraires, assujetties seulement à la consistance logique.

Vérité

On ne le dit guère en nos milieux tant la chose va de soi, mais la condition du travail de scientifique et d'enseignant, la pierre de touche de toutes nos démarches, c'est la vérité. Le critère le plus immédiat du vrai est l'évidence; est vrai ce qui résulte de l'accord de deux idées, ou de l'accord d'une idée et d'un fait. Quand les idées se rapportent à des êtres et qu'elles expriment certaines de leurs propriétés se pose de suite la question du statut ontologique de ces êtres, de leur mode d'existence. Les modes d'existence ressortissent en gros à deux catégories, avec toutes sortes de nuances :

- la catégorie du sensible, les êtres étant des copies de choses du monde extérieur;
- la catégorie de l'intellect, les êtres étant soit fournis par l'intuition comme des "semences de vérités jetées par la Nature en nos âmes", soit engendrés par une définition formelle.

Pour les représentants des tendances dites constructivistes, les concepts fondamentaux des mathématiques sont crées par les définitions plutôt que donnés en soi (pour plus de détails, voir par exemple Jean Largeault, L'intuitionisme, QSJ, PUF, p.23).

L'attitude la plus habituelle devant le problème de la vérité est celle de l'homme d'action : est vrai ce qui nous semble tel. On a de la vérité une vision claire et immédiate; l'adéquation à l'univers est bien la preuve que cela marche, alors, pourquoi se demander pourquoi? Il arrive que l'idée soit une copie conforme, modulo la déformation sensorielle, du phénomène (exemple : pierre qui tombe). Un examen sommaire nous invite à croire qu'il en va de même pour la géométrie. La suite de cet exposé devrait montrer que cela n'est pas si simple.

Pour des raisons de curiosité intellectuelle, mais aussi parce qu'on est d'autant plus à l'aise que l'on comprend l'origine et la nature des objets avec lesquels on travaille, il est bon de dépasser cette douce quiétude. L'analyse profonde des choses qui vont de soi livre souvent des résultats inattendus, parfois désécurisants, la croyance dans l'évidence est un oreiller bien agréable. Il sort toujours de ces remises en question une vision plus précise et plus lucide du champ dans lequel on oeuvre. Tout enseignant devrait, me semble-t-il, s'adonner une fois ou l'autre à cette réflexion de saine hygiène.

Notre enquête tourne donc autour de notions telles le vrai ou l'existence, qui appartiennent de plein droit à l'épistémologie et à la métaphysique; on quitte le plan rassurant de la technique mathématique, pour se déplacer vers un domaine devant lequel le mathématicien se sent désarmé.

Existence

L'épistémologie des mathématiques a mis bien du temps à jeter un peu de lumière sur ces questions obscures et décisives. Il n'est pas exagéré d'affirmer que la plupart des grandes révolutions mathématiques ont gravité autour de problèmes épistémologiques, essentiellement des problèmes d'existence, et que les blocages qui ont obstrué pendant longtemps l'accès aux contrées nouvelles sont de type épistémologique. Citons quelques responsables de ces blocages, en vrac : nombres négatifs, nombres complexes, quaternions, théorie des ensembles, géométrie non euclidienne, existence de fonctions continues à nulle part dérivables etc. En ce qui regarde l'existence, on trouve chez les mathématiciens tout le spectre des nuances. J'en donne ici quelques exemples, simplement pour fixer les idées.

Pour les représentants des tendances dites constructivistes, les concepts fondamentaux des mathématiques sont crées par les définitions plutôt que donnés en soi (Largeault p.23).

Pour d'autres, la logique ne peut jamais être un principe d'être, elle ne peut pas servir à créer de objets ni des états de choses mathématiques là où il n'y en a pas. La déduction logique ne contient aucune réalité; du moins si elle en recouvre une, celle-ci est indépendante de la déduction et vient d'une autre source. (Largeault p.31)

Chez Aristote, les objets de la science viennent avant la science. Ils existent en puissance dans le sensibles "dont ils ne sont pas séparables ontologiquement, bien qu'ils puissent en être isolés par l'abstraction et conçus par l'intellect"; ils renvoient donc à une "nature".

L'une des positions extrêmes est celle que l'on qualifie de platonicienne; aux yeux de ses partisans, les entités mathématiques existent en dehors de l'esprit qui les pense, un peu à la manière de la grenouille étudiée par le zoologue.

Une variante de cette attitude est celle de certains néo-platoniciens. Pour Proclus, par exemple, les apparences mathématiques sont des productions originales de l'esprit. Les définitions que le géomètre imagine, il ne les fait pas dériver des objets sensibles; au contraire, ce sont plutôt les objets qui sont créés par ces concepts. Ces objets sont des créations de l'esprit qui, pour ainsi

dire, enfantant les formes, répand sa progéniture immatérielle dans les régions sombres et agitées de la matière.
Dans la première épistémologie de la géométrie, la question de savoir si les entités existent en soi ou seulement en vertu de nos conceptualisations n'occasionnait pas de difficulté : le géomètre tenait en effet vérité et existence pour objectives.
Les deux textes suivants, empruntés à des mathématiciens connus et de la même génération, montrent le contraste entre deux positions extrêmes relativement au problème des fondements.
Béla Kerekjarto, Les Fondements de la géométrie (1937, p.9) :

> Tout système, clos et non-contradictoire, prend le caractère géométrique du fait même que les éléments, les relations fondamentales et les axiomes répondent immédiatement aux objets de notre intuition et aux rapports intuitifs existant entre eux. (...). Les axiomes fondamentaux doivent être des "vérités" comprises sans effort par un public dépourvu de formation mathématique.

Henry George Forder, The Foundations of Euclidean Geometry, (1927, p.5) :

> In our deductions it is not necessary, though it may be helpful, to have in mind *any* interpretation. We may pretend we are just playing a game, deducing in accordance with logical laws propositions containing terms which do not have assigned definite meanings, from Axioms of the same sort. This is the formalist view. The game willl be worth our playing if it has an interpretation which is interesting in itself.

Les brèves citations qui suivent sont de la plume de grands mathématiciens; elles illustrent avec bonheur la variété des réponses à ces questions épistémologiques :
Charles Hermite (1822-1901) : en mathématiques on est davantage serviteur que maître; autrement dit, le géomètre n'a guère de liberté face aux entités que lui fournit l'intuition.
Pour Georg Cantor (1845-1918), l'essence des mathématiques réside dans leur liberté, celle-ci n'étant limitée que par des exigences de cohérence.
L'importante querelle qui, au début de notre siècle, divisa les mathématiciens en deux clans, et que l'on baptisa la crise des fondements, est l'un des meilleurs révélateurs qui soit. La pomme de la discorde - l'axiome du choix - était une proposition d'apparence innocente, utilisée souvent à leur insu par les géomètres. Jacques Hadamard (1865-1963), dans sa préface à un livre de Gonseth (Les fondements desd mathématiques, Paris, 1926, p. VI) notait à ce propos :

> Ce n'est pas sans un vif étonnement que plusieurs d'entre nous se sont trouvé sur des points d'évidence, en somme, des opinions complètement divergentes, les uns "idéalistes", pour lesquels "l'axiome du choix" était aussi clair que l'égalité de deux choses égales à une même troisième ou le principe d'identité, les autres "empiristes", pour lesquels la chose était parfaitement claire et immédiatement jugée ... en sens contraire, rien ne leur paraissant imposer à la raison humaine l'axiome en question. Pour ma part, j'ai fait à ce moment-là d'extraordinaires retours sur tout ce que l'on m'avait appris, dans ma jeunesse, de Philosopohie et, particulièrement, de Métaphysique.

Géométrie

C'est la géométrie qui est la terre natale de la première axiomatique des Grecs et de l'axiomatique moderne des années 1880.
La technique des harpédonaptes (tendeurs de cordes) des civilisations anciennes est bien connue. Elle nous montre des constructeurs utilisant cordes et pieux pour délimiter l'assiette d'un édifice et pour aider à son érection; ces instruments sont clairement engagés dans des opérations que l'on qualifierait de géométriques : Il s'agit d'une sorte de géométrie physique. Mais ses limites apparaissent dès lors que s'intellectualisent les questions; comment, en effet, y parler de parallèles, comment envisager un théorème relatif à des droites concourantes, à une tangente? La prochaine étape dans la marche de la géométrie exige une révolution intellectuelle qui culminera dans les "Eléments" d'Euclide. Dans la phase que je vient d'évoquer, on ne pose guère que les problèmes qui s'expriment dans la langue physique existante : on explore un

champ lié à certaines pratiques et l'on y est plus ou moins habile. Mais dès qu'on la développe, la géométrie physique demande à ce que l'on travaille avec des entités qui n'existent plus dans la Nature. Par exemple, la notion de parallèle est non seulement incompatible avec le cosmos fini des aristotéliciens, mais échappe à toute possibilité de vérification expérimentale, de construction. A strictement parler elle est par essence étrangère à toute géométrie physique.
Pour fixer les idées, examinons les diverses façons qui permettraient d'avoir une quelconque idée intuitive du point. D'ordinaire on imagine une boule dans le monde des choses et on fait tendre son rayon vers zéro : le point est la limite obtenue. Mais qu'est-ce que cette limite? Si on envisage la question en se plaçant sur le territoire du bon sens, la limite est une chose mal définie et vague, qui en fait n'existe pas; si, au contraire, on prend le mot dans son sens mathématique, il faut aussitôt quitter le monde extérieur; on ne peut en effet pas définir une limite sans un appareillage conceptuel élaboré et purement intellectuel. Plaçons-nous ensuite dans le monde mathématique et admettons d'abord - mais sur quelle base? - qu'il existe une sphère dont on ait une idée intuitive; dira-ton que l'on fait tendre son rayon vers zéro, et l'on définit le point à partir d'un nombre? La seconde possibilité est de faire tendre le segment qui représente le rayon vers ... un point! C'est inextricable.
En d'autres termes: la pratique des harpédonaptes et les *Eléments* d'Euclide appartiennent à deux univers différents réunis par une frêle passerelle; l'image qui convient mieux ici est celle de deux continents, primitivement réunis, qui se détachent l'un de l'autre sous l'action de forces internes à l'oeuvre dans les profondeurs.
Dans les "Eléments", les deux caractéristiques du nouveau monde sont explicitées, en tout cas clairement visibles : les entités géométriques sont de pure raison et le mode de présentation appartient à la famille axiomatique (voir note 2). Ce qu'on lit dans cet ouvrage c'est l'acte de naissance de la cassure; on le lit dans la définition des entités, dans la volonté de ne pas recourir à des arguments qui ressortiraient à la géométrie physique, quand bien même cela aurait été plus simple. On observe, remarquons-le, une évolution semblable dans l'édification de la physique: les idées de base de la mécanique force, vitesse, travail sont au début de grossières copies d'impressions quotidiennes, puis leur intégration à un système déductif nécessite une épuration, une idéalisation, mais cette idéalisation est déformante. C'est cette déformation qui est à l'origine des intuitions fausses que l'apprenti physicien éprouve quand il manipule ces concepts et c'est encore cette déformation qui est responsable des confusions du philosophe quand il parle de physique alors que l'accès à la description mathématique lui est interdite.
Mais Euclide n'a pas la technique de son épistémologie et l'oeuvre pèche principalement, dans la perspective où nous nous plaçons ici, par des recours inconscients à l'intuition spatiale, en fait aux figures.
Chez lui, les deux continents paraissent encore — mais c'est déjà une illusion — assez proches l'un de l'autre pour que des échanges visuels aient lieu. Les habitants de la nouvelle terre garderont à l'esprit les coutumes anciennes, même s'ils croient s'en être libérés. Les objets fondamentaux ne sont pas encore les êtres de raison fixés par une définition implicite comme chez David Hilbert (1862-1943) (voir note 2), tout en n'étant déjà plus les cordes et les pieux des harpédonaptes. On y voit des traits modernes mêlés à un ensemble de caractères archaïques témoins de l'origine matérielle de la géométrie. Dans ces conditions, doit-on s'étonner qu'en l'absence de toute critique épistémologique, de toute étude historico-critique, élevé dans l'esprit des deux continents confondus, le professeur de géométrie soit la victime de l'illusion ancienne où la théorie parle de mondes distincts et la pratique agit dans des univers confondus?
Voici deux images destinées à préciser ce point de vue. Avant l'avènement de l'axiomatique moderne, le géomètre est comparable au nageur débutant, qui flotte par moment, mais qui, l'espace d'un instant, pose son pied sur le fond, juste de quoi restaurer un équilibre devenu précaire. Ou encore à celle du cétacé qui évolue librement sous l'eau à condition de regagner la surface à intervalles réguliers.
Là réside l'ambiguïté fondamentale: faire comme si la géométrie était une construction abstraite tout en recourant, chaque fois que nécessaire, à la géométrie physique, à l'intuition spatiale diraient certains. Cette ambiguïté est ominprésente dans l'enseignememnt de la géométrie élémentaire et elle empoisonne les relations maître-élève. La situation est rarement rationalisée par l'enseignant; quand il demande une démonstration à ses élèves le niveau de rigueur exigé est arbitraire : il leur refuse ce qu'il se permet par ailleurs. Il pense comme si la géométrie était abstraite et il se comporte comme si c'était une science physique.

L'épistémologue français Robert Blanché a trouvé l'expression juste lorsqu'il écrit dans L'axiomatique (PUF, Paris, 1970, p.14) :

> On voit alors se dissocier les deux aspects de la vérité géométrique, jusque-là intimement mêlés dans une union étonnante. Un théorème de géométrie était à la fois un renseignement sur les choses et une construction de l'esprit, une loi physique et une pièce d'un système logique, une vérité de fait et une vérité de raison.

Fondement de la certitude

Pour assurer sa démarche le géomètre doit disposer de propositions garanties comme vraies. Mais où trouver cette garantie? Traditionnellement on a cru la voir dans leur caractère d'évidence : être évident c'était apparaître comme une vrai par une sorte d'intuition immédiate, indiscutable, irrésistible. Cette croyance, qui est d'ordre psychologique et métaphysique, est subordonnée à l'idée d'une intersubjectivité : tous les hommes normaux ont la même intuition spatiale, laquelle s'appliquerait encore aux nouvelles entités de la géométrie abstraite.
Lorsqu'il s'agit de géométrie abstraite, à quelle aune mesurer cette évidence. Ces entités n'existant à nulle part, comment parler de leurs propriétés? Admettre que ce sont des "semences de vérités" jetées en nos esprits, que l'âme à un instinct géométrique? Ce cercle que vous supposez exister qu'est-il s'il n'est plus ce cerceau épuré et dépouillé de ses qualités sensibles?
Si on considère la géométrie comme réalisée dans le monde des choses on a des ennuis tout aussi graves : affirmer l'égalité des angles droits est un acte de foi fondé sur un malentendu et admettre l'existence de parallèles une absurdité. D'un côté comme de l'autre, c'est mal barré.
L'exemple suivant illustre bien ces propos. Il s'agit du théorème 2 du livre 1 des "Eléments" d'Euclide. Après avoir enseigné au théorème 1 la construction (est-il besoin de rappeler que, dans notre langage, les constructions s'exécutent "règle et compas") du triangle équilatéral, l'auteur grec se propose de nous apprendre à reporter des segments; plus précisément, il propose de "placer en un point donné, une droite égale à une droite donnée." Demandons-nous comment on procèderait à cette construction dans la géométrie physique. Voici : ayant adopté une ouverture de compas égale à celle du segment BC, on place la pointe fixe de l'instrument en A et on décrit un cercle dont le rayon est l'ouverture choisie; le point L, intersection du cercle et de la droite donnée est la solution cherchée. Au premier abord, on ne saisit pas pourquoi cette construction ne satisferait pas Euclide et en quoi elle serait en contradiction avec ses canons. Souvenons-nous pourtant que, chez lui, il n'est pas question d'instrument mais d'application de postulats. Les postulats qui, pour l'essentiel décrètent l'existence de la droite et du cercle, ne sont qu'imparfaitement traduits par la règle et le compas; ils en fournissent au mieux une expression métaphorique. Ainsi, il faut fermer le compas avant de le déplacer dans le plan. Comment faire admettre la chose à des élèves qui ignorent ces subtilités épistémologiques? D'autant qu'Euclide a bien eu recours au mouvement (dans la démonstration du théorème I.4 relatif à un cas d'égalité de triangles; de même, la congruence est introduite par un axiome qui nécessite que l'on fasse coïncider deux figures). La solution qu'il propose est tout autre et révèle bien l'esprit des "Eléments". En lisant la succession des opérations il s'agit d'avoir présent à l'esprit que chaque étape, aussi évidente soit-elle, est justifiée minutieusement (pour le détail, voir Vitrac, p.197, réf. en note 2). On construit dans l'ordre : le triangle équilatéral ABD, le cercle de centre B et de rayon BC, qui donne le point G; le cercle de centre D et de rayon DG, qui donne L, point cherché.

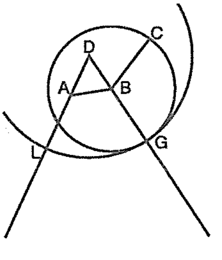
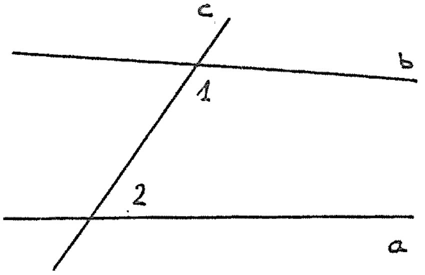


Figure 1

Le passage d'une géométrie à l'autre s'accompagne d'un changement du statut de la vérité, mais cela se fait en catimini et en partie à l'insu des protagonistes. C'est là le lieu du malentendu fondamental et je ne suis pas sûr qu'il soit complètement dissipé aujourd'hui, même chez ceux qui ont charge d'enseigner la géométrie. Leurs exigences de rigueur fluctuent au gré des situations et semblent arbitraires au patient.
En ce qui regarde le problème du statut de la vérité et de l'existence, on rencontre une situation comparable dans d'autres domaines des mathématiques. Considérons par exemple la théorie des groupes et plaçons-nous d'abord dans une perspective purement formelle. Les signes qui fixent les êtres sont vides de réalité objective, ils ne représentent rien au-delà d'eux-mêmes. Quand on écrit : a G , qu'est-ce que a? Qu'est-ce à dire : un groupe, ça existe? Ca doit bien exister puisque des livres entiers sont remplis de leurs propriétés! Qu'est-ce à dire, telle propriété est vraie? Existence et vérité : langage de l'être, langage des propositions, on est en pleine métaphysique.
Il arrive aussi qu'un système formel admette une réalisation dans le monde des objets mathématiques. Il semble alors que le degré d'existence des entités qui le forment soit supérieur à celui des simples signes. Pour d'aucuns, le nombre, l'espace, ont une réalité en soi et sont le produit de notre intuition, leur existence rend vraie les propriétés qu'on leur découvre. C'est la vérité sémantique par opposition à la vérité syntaxique.

La théorie des parallèles

L'histoire de la théorie des parallèles est un excellent révélateur de ces ambiguïtés, de ces confusions et de cette épistémologie débile. Il n'est pas exagéré de dire que si tant de bons ou de très bons mathématiciens se sont achoppés à cette question et si certains d'entre eux ne surent pas reconnaître ce qu'ils avaient si bien découvert (par exemple Saccheri, Lambert, Legendre, Fourier), il faut en chercher la raison dans une dans une approche inadéquate des idées de vérité et d'existence.
Epistémologiquement parlant, la théorie des parallèles est un lieu privilégié; à nulle part on ne ressent aussi bien la nécessité à la fois d'une épistémologie différente et d'une conception nouvelle de l'axiomatique. Je présente ici quelques épisodes de cette histoire; ils ont été choisis parce qu'ils illustrent avec bonheur les considérations précédentes, non pour leur intérêt mathématique intrinsèque.
Voici pour commencer l'énoncé du postulat des parallèles - proposition que je noterai P - tel qu'on le trouve chez Euclide : Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits (voir note 2).



P

$\alpha + \beta < 180^\circ \Rightarrow a \nparallel b$

Fig. 2
Les angles 1 et 2 font ensemble moins de 180o;
les droites a et b se coupent

Je rappelle que les géomètres ont volontiers substitué à l'énoncé de P la forme équivalente aussi dite axiome de Playfair : par un point extérieur à une droite on peut faire passer exactement une droite qui lui est parallèle.
Dès Euclide, ou en tout cas chez ses successeurs, on tint cette proposition pour insuffisamment évidente, d'où une profusion déraisonnable d'essais de démonstrations, dont la réunion offre le visage d'un authentique bazar. Interrogeons-nous sur le sens de cette phrase : le postulat des

parallèles est évident. Dans le monde des choses, ou, si on préfère, dans la géométrie physique, nous l'avons vu, l'idée de droites parallèles n'a pas de sens : sa vérification défie toute expérience. On se voit mal, à la vérité, chevauchant un rayon de lumière pour examiner si on rencontrera, par hasard et un beau jour, tel autre rayon de lumière, parti dont ne sait où, dirigé par on ne sait qui, peut-être par une autre lancier. Si on les considère ensuite comme des entités abstraites conçues par l'entendement, on peut envisager ces parallèles librement et les doter de propriétés diverses et contradictoires. On saisit bien comment, dans cette perspective, le statut d'évidence perd sa signification. Mais cette simple observation a échappé deux millénaires durant aux meilleurs esprits, qui ont tenté en vain de démontrer la proposition litigieuse, écrivant par la même occasion des pages qui comptent parfois parmi les plus cocasses de l'histoire des mathématiques tout entière. De la crise épistémologique enfantée par cette quête devait sortir la nécessité d'une axiomatisation de la géométrie et en même temps les premières caractérisations précises de l'axiomatique.

On sait que la géométrie non euclidienne (aussi qualifiée d'hyperbolique) est le système de propositions que l'on obtient en raisonnant à partir de la négation du postulat des parallèles et des autres postulats posés par Euclide. Ainsi et curieusement, raisonner par l'absurde pour établir P revient à faire de la géométrie non euclidienne. Toutefois, ceux qui procèdent de la sorte sont à la recherche d'une proposition reconnue comme absurde et qui mettra un terme à la chaîne des déductions. Le point crucial de ce processus réside dans le statut même de l'absurde. Pour la première épistémologie de la géométrie, l'absurdité résidera le plus souvent dans un conflit avec des propositions que l'on considère comme vraies intuitivement, comme vraies par leur évidence même; on se heurte alors aux difficultés évoquées plus haut.

Etant donné que le théorème sur la somme des angles du triangle se démontre d'ordinaire par un recours direct à l'unicité de la parallèle, on s'attend à ce que la négation de cette unicité conduise à une proposition autre. Et en effet, on établit ceci : la négation de P entraîne que, dans chaque triangle, la somme des angles est inférieure à deux droits; il s'ensuit l'existence pour chaque triangle d'un nombre réel, le déficit, défini comme la différence entre deux droits et la somme de ses angles. Il est facile de voir que ce déficit est une fonction additive dans le sens suivant : si on partage un triangle en deux par une ligne passant par l'un de ses sommets, le déficit du triangle donné est égal à la somme des déficits des deux petits triangles (voir figure 3). Un corollaire intuitif immédiat est que le déficit est proportionnel à l'aire du triangle, ce qui à son tour implique l'existence d'un triangle plus grand que tous les autres, le déficit étant borné.

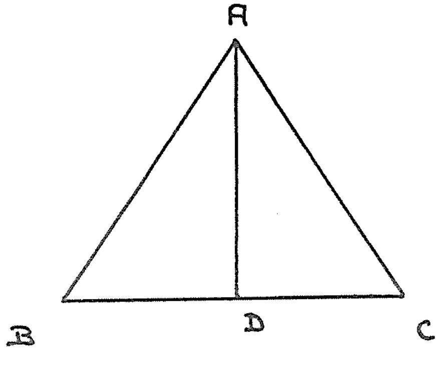


Figure 3

triangle ABD = triangle ADC
aire (ABC) = 2. aire (ABD)
d(ABC) = d(ABD) + d(ADC) = 2. d(ABD)

Une telle conséquence a bien sûr été tenue pour absurde et par la même occasion on a cru avoir démontré P. Or où réside cette absurdité? Dans la géométrie physique on n'en sait trop rien, puisque nous habitons un petit canton de l'univers; pareil dans la géométrie abstraite : pourquoi cette proposition qui est vraie sur la sphère ne le serait-elle pas dans le plan conceptuel du géomètre. La meilleure preuve de cette impossibilité où nous sommes de trancher se trouve dans l'ignorance où sont les astronomes aujourd'hui de la structure géométrique de l'univers, respectivement dans la possibilité avérée d'une géométrie hyperbolique cohérente.

Voici un autre exemple du même type, d'ailleurs lié au précédent. La comparaison amorcée tout à l'heure avec la géométrie sphérique laisse déjà entrevoir l'existence, dans l'hypothèse hyperbolique, d'une unité absolue de mesure pour les longueurs, quelque chose de comparable au rayon pour la sphère. Ce pressentiment est confirmé par l'analyse simple de la variation de longueur d'un côté dans un quadrilatère de Lambert (voir figure 4 : les angles vont en décroissant à partir de l'angle 1 et semblablement les côtés).

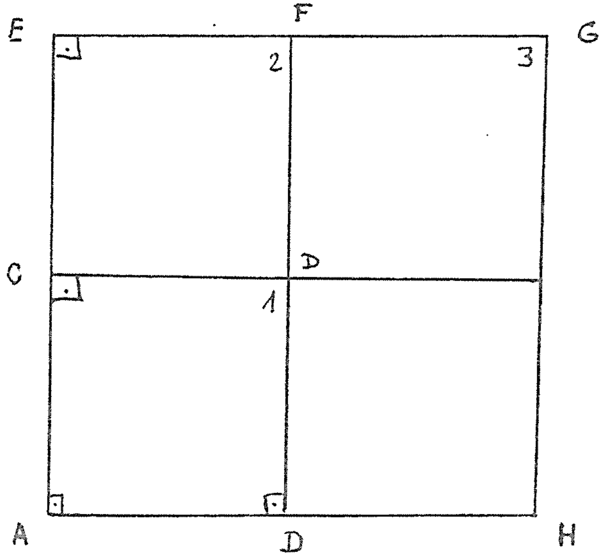


Figure 4

A propos de ces absurdités, l'attitude des savants varie de l'un à l'autre, ce qui apporte la preuve de l'aspect psychologique de la chose. Les plus lucides rechignent à trouver dans ce genre de propositions une absurdité et le plus lucide d'entre eux, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), n'hésite pas à les tenir pour possible, mais simplement en désaccord avec nos habitudes; la lettre que Gauss adresse à Wolfgang Bolyai(1775-1856) le 16 décembre 1799 ne laisse pas d'être claire :

> Je suis parvenu à plusieurs résultats que d'aucuns auraient tenu pour une démonstration mais qui à mes yeux ne démontre strictement RIEN. Ainsi, si l'on pouvait établir l'existence d'un triangle rectiligne dont l'aire est supérieure à chaque aire donnée, alors je serais en mesure de démontrer toute la géométrie d'une manière complètement rigoureuse. La plupart admettraient cette proposition comme un axiome; moi pas. Il serait bien possible que si distants les sommets soient-ils les uns des autres, l'aire demeure en-deça d'une certaine limite. J'ai plusieurs propositions de ce type, mais je ne trouve en aucune quelque chose de satisfaisant.

Que les meilleurs mathématiciens aient erré en cette matière en dit assez long sur sa complexité et l'on est souvent effaré par le contraste entre la virtuosité de leur technique et la pauvreté de leur épistémologie.

Pour donner une idée de la confusion qui règne, je présente deux démonstrations erronées. La première est du mathématicien genevois Louis Bertrand et remonte aux années 1780; elle a été citée et commentée à maintes reprises. Le grand analyste Adrien Marie Legendre (1752-1833), à qui on doit le traité de géométrie le plus célèbre du 19e, après l'avoir "améliorée", la prônait encore à la fin de sa carrière. Bertrand compare d'abord du point de vue de l'extension, un angle et une bande. Etant donné qu'un nombre fini d'angles égaux (n si l'angle est de 360 : n) suffit à paver le plan, alors qu'il faut une infinité de bandes, on en déduit que l'angle est plus grand que la bande. Raisonnons par l'absurde et supposons maintenant que dans la situation de la figure suivante la droite a ne coupe pas b (il suffit de considérer le cas particulier où l'un des angles est droit) (figure 5). Dans ce cas il faudrait admettre que l'angle 1 soit entièrement contenu dans la bande b, c; en contradiction avec ce qui a été dit de leur extension respective. Dans la première épistémologie, celle de l'évidence, on est bien emprunté pour évaluer un tel raisonnement. Que tant de bons mathématiciens l'aient présenté comme le nec plus ultra dit assez l'état de confusion auquel je faisais allusion!

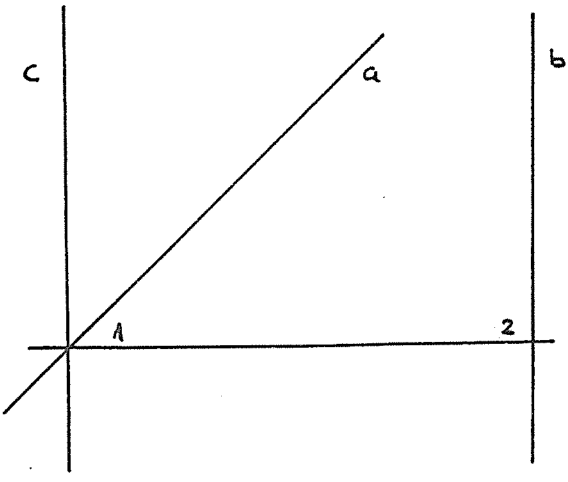


Figure 5

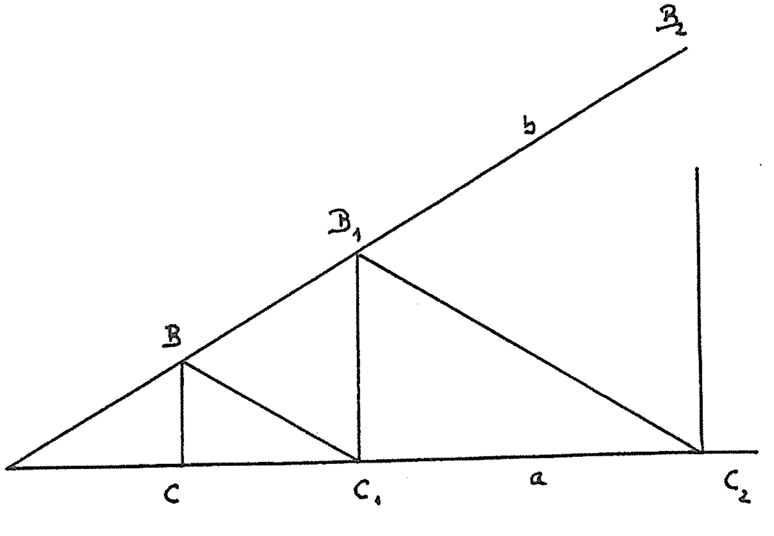


Figure 6

La seconde remonte à Legendre et met parfaitement en lumière les difficultés que l'on a de fonder la géométrie sur une prétendue intuition spatiale. Soit un angle aigu de sommet A (figure 6), de côtés a, b. Sur l'un de ses côtés on prend B, puis la projection C de B sur l'autre côté; puis C1 tel que AC = CC1; on appelle B1 l'intersection de la perpendiculaire à a par C1 avec b. On répète la construction autant de fois que nécessaire. Notons d(ABC) le déficit du triangle ABC et posons d(ABC) = d. Grâce à l'égalité des triangles ABC et BCC1, et ainsi de suite, et en utilisant le théorème d'additivité du déficit on écrit :

d(AB1C1) > 2d; d(AB2C2) > 4d etc. On aboutirait alors, après un nombre suffisant d'étapes et si l'on admet d = 0, à un triangle ABnCn dont le déficit surpasserait deux droits, ce qui est impossible.
L'erreur de la démonstration réside dans la croyance tacite en l'existence, tenue pour évidente, d'un Bn pour chaque Cn. Cette proposition n'étant pas un postulat, il y a lieu de la démontrer; or on peut établir que cette démonstration exige P.

Dès l'instant où, par méthode ou par conviction, les évidences se relativisent il n'y a plus de fondements absolus, même pour une discipline comme la géométrie, modèle de certitude. Y a -t-il moyen de sortir du dilemne? Examinons l'affaire de plus près. Une évidence concerne une propriété dont on peut dire avec certitude qu'elle est vraie d'une certaine entité, point, droite s'il s'agit de la géométrie. Cette certitude suppose une connaissance sûre de l'être concerné, elle suppose aussi l'intersubjectivité : dans tous les esprits normaux, il y a isomorphisme entre les intuitions relatives aux êtres mathématiques. Ce qui a été dit plus haut montre assez, je crois, qu'il y a là un double acte de foi, dont la gratuité étonne. Pour sortir de ce mauvais pas, les mathématiciens de la fin du 19e, parmi eux Giuseppe Peano (1858-1932) (pour l'arithmétique) et Hilbert (pour la géométrie) ont imaginé un moyen original. Puisque c'est la "substance" de l'être qui est à l'origine de l'obstacle, il convient de l'en débarasser. Solution radicale qui a consisté à dépouiller l'être mathématique de toute intuition, de toute individualité; il se volatilise, se dissout en un tissu de relations. C'est dans ce sens qu'Hilbert commence ses Grundlagen par la phrase "Nous pensons trois espèces de choses que nous appellerons point, droite, plan ..." ou que Bachelard écrit : "L'essence est contemporaine de la relation." (Le nouvel esprit scientifique, 1934 p.22). Gain considérable : les mêmes propositions s'appliquent à des entités que l'ancienne ontologie aurait tenues pour essentiellement différentes. Henri Poincaré (1854-1912) a admirablement exprimé cette nouvelle manière d'envisager l'être mathématique quand il écrivait : la mathématique c'est l'art de donner le même nom à des choses différentes.

Notes

1. Je n'en conteste pas l'intérêt didactique comme moyen de mieux pénétrer dans l'édifice de la géométrie, mais je m'élève contre leur effet pernicieux au plan psychologique, les élèves ayant l'impression d'interdits rituels, fondés dans le seul arbitraire de l'enseignant, lui-même perdu en conjectures quant à la signification profonde de ces exercices.
2. Les Postulats (ou Demandes) chez Euclide (traduction B. Vitrac, Euclide, Les Eléments, Paris (PUF), vol. 1, pp.167-175, 1990

1. Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.
2. Et de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée.
3. Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle.
4. Et que tous les angles droits soient égaux entre eux.
5. (voir énoncé p. 10).

Voici un exemple des axiomes de Hilbert (D. Hilbert, Les fondements de la géométrie (trad. P. Rossier), Paris (Dunod), 1971, p.14); il s'agit d'axiomes de l'ordre (groupe II), dont le but est de définir la préposition "entre".

II.1 Si un point B est entre un point A et un point C, les points A, B, C appartiennent à une droite et B est aussi entre C et A.
II.2 Deux points A et C étant donnés, il existe au moins un point B appartenant à la droite AC tel que C soit entre A et B.

En accord avec ce point de vue, l'arithmétique abstraite est entièrement coupée des notions fondamentales issues de l'expérience dans laquelle elle trouve son origine et elle est dès lors réduite à une espèce de jeu mécanique joué d'après un ensemble de règles qui, séparées de leur origine, donnent l'apparence d'être parfaitement arbitraires (Hobson, t,1, p.9)

Idées diverses

Sur les principes, voir Vitrac, pp.117ff
Vitrac p.121 Que faut-il entendre par "existence"?
Par là s'explique le caractère absolument premier des principes, car ils ont l'origine à l'extérieur.
80. Flye Sainte-Marie texte de Voelke, p.5 : "c'est effectivement ce qui a lieu, mais ce n'est qu'avec le secours de la théorie des parallèle qu'on sait le démontrer". p.7 : "Mais ce que je veux prouver, c'est que cette certitude ne peut pas se baser sur le raisonnement."
Quoique les ressources du raisonnement soient impuissantes à établir en toute rigueur la théorie des parallèles, l'exactitude de cette théorie ne fait cependant l'objet d'aucun doute.

Existence : sortir de, naître de; n'appartient pas au vocabulaire du latin classique. Pris dans le sens d'une sortie, d'un au-dehors. Mode d'être d'un être qui reçoit son être d'un autre être que lui. Le mot existance souligne la dépendance dans laquelle se trouve l'exsistant à l'égard de l'être dont il tire son origine. Les Anciens n'avaient pas de mot pour dire l'existence. Couramment, synonyme d'être (avoir une réalité)

Zeitler
Probématique ABC
A. Système axiomatique = règles désignant la marche des "pièces"
B. Système formel = règles à partir desquelles on peut jouer sans pièces
C. Modèle mathématique = on joue avec des pièces et leur forme est variable.
Système axiomatique autonome : A, B, C, axiomes choisis librement
C, A, B système hétéronome, on part d'objets "réels"
Un autre exemple est fourni par la présentation traditionnelle des nombres complexes avec partie imaginaire et réelle, un signe + dans a + bi, dont nul ne pouvait dire la signification.

Commençons par dégager de quelques exemples simples les problèmes épistémologiques sous-jacents et par là vous montrer des aspects inhabituels de choses bien connues.

Or on est droit de penser que l'enfant, dans son apprentissage, rencontre des problèmes voisins de ceux qui ont bloqué la marche de l'Humanité.

Mais toujours on doit faire l'hypothèse de ce que la philosophie des sciences nomme l'intersubjectivité.

La géométrie non euclidienne vers 1825, et avec elle l'axiomatique moderne dans les années 1880, est née en réponse à ces difficultés épistémologiques

THEME 2

TOPIC 2

Introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques

Introducing a historical perspective into the teaching of mathematics

ATELIERS - WORSHOPS

Table ronde 1 - Panel 1

Volume Calculations in the Manner of 17th Century

Peter BERO, Bratislava

1. Archimedes

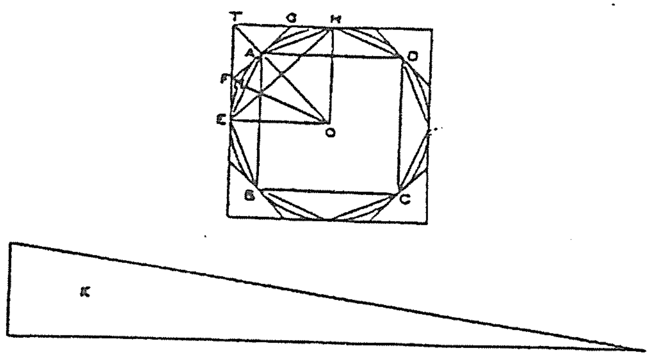
Searching for the areas of simple curvilinear figures ancient Greeks used the method of exhaustion invented by Eudoxus. The gist of the method is the so-called Eudoxus principle (Euclid X.1 ; Edwards, 1979) :

Two unequal magnitudes being set out, if from the greater there be subtracted a magnitude greater than its half, and from that which is left a magnitude greater than its half,and if this process be repeated continually, there will be left some magnitude which will be less than the lesser magnitude set out.

Eudoxus determined the area of a curvilinear figure in terms of a sequence of polygonal figures that exhaust the evaluated area, and the principle helped him to cope with this sequence where the concept of infinity intervenes.

Archimedes extended the method of exhaustion to that of compression. Unlike Eudoxus, having dealt only with inscribed polygons, Archimedes employs both inscribed and circumscribed polygons. Then the unknown area is compressed between the areas of inscribed and circumscribed polygonal figures. We illustrate Archimedes' approach by his proof of Proposition 1 from the Measurement of a Circle :

The area of any circle is equal to a right-angled triangle in which one of the sides about the right angle is equal to the radius, and the other to the circumference of the circle.



Proof : Let ABCD be the given circle. K the triangle described. Then, if the circle is not equal to K, it must be either greater or less.

I. If possible, let the circle be greater than K.

Inscribe a square ABCD, bisect the arcs AB, BC, CD, DA, then bisect (if necessary) the halves, and so on, until the sides of the inscribed polygon whose angular points are the points of division subtend segments whose sum is less than the excess of the area of the circle ovec K.

Thus the area of the polygon is greater than K.

Let AE be any side of it, and ON the perpendicular on AE from the centre O.

Then ON is less than the radius of the circle and therefore less than one of the sides about the right angle in K. Also the perimeter of the polygon is less than circumference of the circle, i.e. less than the other side about the right angle in K.

Therefore the area of the polygon is less than K ; which is inconsistent with the hypothesis.

Thus the area of the circle is not greater than K.

Then Archimedes proved in a similar way that the area of the circle is not less than K. From both parts of the proof he concluded that, the area of a circle is equal to the area of the triangle K.

This shows that Archimedes' considerations meet the usual criteria of mathematical proof today. (If we neglect for example things like not consequent distinguishing between the area of a figure and the figure itself). Archimedes applied the method of exhaustion to a member of rather sophisticated cases and he did so with great accuracy typical of him, which may have been the reason, why the further progress of calculus was held up. As we assume, that further development could only proceed either by surpassing Archimedes, or, new ideas would have to arise. And since nobody surpassed Archimedes, the waiting for a new idea took place.

2.Kepler

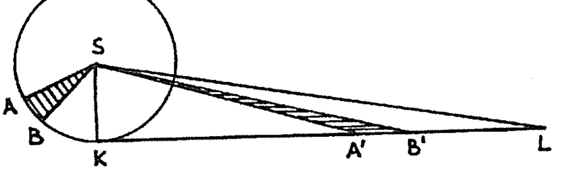
Johannes Kepler was born on 27th December 1571 in the small German town of Weil der Stadt. He lived at a time when astronomers were making attempts to work out a model of the solar system. And he was one of those who dedicated their whole lives to this mystery.

The essential part of Keplers discoveries was made at the time of his stay in Prague (1600-1612), where he was invited by Tycho Brahe, the famous royal astronomer of emperor Rudolf II. This Danish astronomer had a passion for sophisticated instruments and used them to make measurements of the sky which were very good and very accurate by the standards of the period. And it was precisely the results of the observation Brahe had collected that were invaluable to Kepler, for he himself had never been a good observer.

On the account of Tycho Brahe's twenty years of observations of the sky Kepler calculated the orbit of Mars. To his astonishment he found out that it is not a perfect, divine movement along a circle, but that the course is an ellipse with the sun in one of its foci. He also found that this rule was valid for other planets as well - and today we speak about the first of Kepler's laws of planetary motion. Then this exceedingly diligent arithmetician arrived upon the second law, according to which the area of the figure created during period t by the segment sun - planet (the sun is understood as a fixed point) is ct, where c is constant. Both rules were published in the year 1609.

Kepler arrived at these discoveries through an enormous amount of astronomic calculations. And just these, for us unimaginable calculations gave Kepler not only a great arithmetic routine, but trained his feeling for estimations, for tables of figures which approximate the continuous motions and for interpolation and extrapolation. He learned to see continuous movement through the sequences of numerical values.

Kepler excellently used these abilities in a non astronomical field, in geometry. Let us present his way of evaluation of the area of a circle (Kepler, 1987).



Kepler wrote : "*I divide the circumference into as many parts as there are points on it, which is an infinite mumber. We consider each of them to be the base of an isosceles triangle with altitude r*". I will present the further Kepler's considerations slightly condensed : If we unfold the circumference into the line segment KL then the (infinitely small) arc AB will be unfolded into the line segment A'B' and the segment ABS will be transformed into the triangle A'B'C' of the same area. All of these triangles will form the right-angled triangle KLS with the area KL.KS/2 equal to the area of the circle. It is $S = \frac{1}{2}.2\pi r.r = \pi r^2$ in our symbols.

3.Remarks to both approaches

Archimedes gave the rigorous proof for the area of a circle in the manner which he applied to a wide range of problems. The proof is a typical reductio ad absurdum argument. The assumptions that the area of the circle is greater, or less than the area of the given triangle, entail a contradiction and therefore the areas must equal. This approach can be applied generally, but requires one thing : One has to know the result to be proved. In the case of a circle it was not a problem, because the formula has been known before Archimedes, but for other evaluations Archimedes used the technique which he called "mechanical method". To this, rather sophisticated, method (Edwards, 1979, Bero, 1989) Archimedes attributes the discovery on heuristic grounds of many of his results, prior to providing them with rigorous proofs. But Archimedes did never mention his method when providing the proofs and his treatise entitled The Method was only discovered in 1906. Why so ? Archimedes shared the Greek "horror of the infinite" and the mechanical method required for example to consider plane figures as consisting of a set of line segments, which he could not "afford" at all. The motivation of the origin of the method of exhaustion stemmed, in our opinion, from the effort to avoid the concept of infinity. Here, Eudoxus replaced an infinite process, by a finite process which could be repeated infinitely.

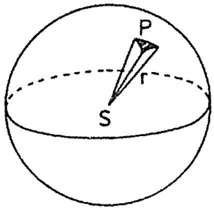
On the contrary, the awe of the infinity hab been long forgotten in Kepler's time. It was to the great merit of scholastic philosophers who had finally overcome the Greek "horror of the infinite" and had prepared a fruitful foundation for Kepler.

Kepler's evaluation, as opposed to that of Archimedes, is hardly acceptable as a mathematical proof. (On the other hand, Kepler's approach provides us with a very good insight into the crux of the formula for the area of a circle, which cannot be said about Archimedes's proof at all). Nevertheless, this is not the reason for its underestimation it. Not in the least. Kepler was completely aware of this and simply said : it's as simple as that, and if you don't like it, you can do it in the way Archimedes had done. Kepler was familiar with Archimedes' ideas and he even described his evaluation of the area of a circle as the idea which lay behind Archimedes's proof.

Whatever the origin, Kepler developed the idea into a special method of his own. This was published in 1615 when he issued his book Nova stereometria doliorum vinariorum (New Stereometry of Wine Barrels), and this only mathematical book of his represents an important milestone in the development of calculus. He presented here almost 90 evaluations of the volumes of the solids of revolution.

4. Kepler's method

What do we refer to as Kepler's method ? It might make the point clearer if we illustrate this in terms of a particular task. For example, the volume of sphere. Kepler imagined the sphere to be decomposed into large number of pyramids, each having its vertex at the centre and its base on the surface of the sphere, with the height equal to the radius of the sphere. Slightly changing the shape of these pyramids and arranging them together, he got a new, large pyramid with the base and the height equal to the surface area and to the radius of the sphere respectively. This gives $V = 1/3.S.r = 4\ \pi r^3/3$ in modern-days terms.



Generally, Kepler dissected a given geometrical figure into an infinite number of very small particles, which after "suitable reshaping" he put together in an "advantageous fashion" to get another geometrical figure, the volume or area of which was known to him. As the fundamental priciple he assumed that the volume and area of the former must equal the volume and area of the latter.

Importunately arising question for us is the question of the nature of these "very small particles". We can only hypothesize Kepler's point of veiw here, because he did not account for the issue.

Edwards (1979) thinks that Kepler regarded these "small particles" to be infinitesimal figures. We would argue that Kepler did not think so. For example, when he derived the formula for the volume of a torus by dissecting the torus into infinitely many thin slices, he distinguished the thickness of slices at the opposite sides of them (Kepler). This would not have been necessary if he had taken them as infinitesimals.

Kepler's method seems to be, and is in fact, very universal, but there are at least two stumbling-blocks. Both the suitable reshaping of particles and putting the particles together in the appropriate fashion require a first-rate, refined intuition. And this is, what he had reaped when doing his vast astronomical calculations we mentioned above. And this is what we, the owners of tables, calculators and computers, lack (Bero, 1993).

5. Cavalieri

Another step in the history was taken by Bonaventura Cavalieri. His method was based on the principle that is known as Cavalieri's theorem (Edwards, 1979) :

If two solids have equal altitudes, and if sections made by planes parallel to the bases and at equal distances from them are always in a given ratio, then the volumes of the solids are also in this ratio.

While Kepler had aimed at getting results, afforded himself an almost "free play" with infinity, leaving a logical precision to those who cannot forget of Archimedes, Cavalieri attempted an infinitesimal technique with a better developed logical base. He considered geometrical figures created by the use of indivisibles whose nature, however, still remains unclear. Sometimes he considered geometrical figures as formed by the movement of an indivisible, and sometimes just as if consisting of an indefinitely large number of indivisibles.

Cavalieri's indivisibles were always of lower dimension than the geometrical figure formed by them. Here he differs significantly from Kepler, whose indivisibles are of the same dimension as the figure created by them.

6. Teaching

The methods described above are of great importance for the historical development of calculus. But can they also be of any significance for the teaching process ? We can hardly think of Archimedes's method of compression in these terms, but to us Kepler's method seems to be simple enough for the pupils at secondary level. We believe that considerations of this kind can serve as very useful propedeutics for the calculus. Experimental teaching in this fashion, as described in Bero, 1993, provides children with a feeling for limit processes and builds their intuition with respect to infinity in general, which are the abilities that are so indispensable for understanding the calculus. It was rather interesting, from theoretical point of view, how easily pupils adopted Kepler's way of thinking, and how naturally they turned to that of Cavalieri whenever it was advantageous (without having any knowledge his method). The results showed that for children both Kepler's and Cavalieri's methods are very challenging and inspiring.

References

Bero, P. (1989), Matematici, ja a ty, Mladé leta, Bratislava, (in Slovak)

Bero, P. (1993), Historical Approach in the Teaching of Mathematics, For the Learning of Mathematics, to appear

Edwards, C.H., (1979), The Historical Development of the Calculus, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin

Kepler, J. (1987), Neue stereometrie der Fasser, Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften, Leipzig, Geest Portig.

INTRODUCTION AUX AIRES ET VOLUMES DANS UNE PERSPECTIVE HISTORIQUE

Anne Chevalier (GEM-Louvain la Neuve)

L'atelier présentait une des propositions du groupe A.H.A.[1], dont l'objectif est de construire pour les élèves des deux dernières années de l'enseignement secondaire de toutes sections une Approche Heuritique de l'Analyse, c'est-à-dire un enseignement basé sur des situations-problèmes qui amènent à théoriser.

Nous avons choisi de subdiviser l'approche du calcul intégral en deux parties. La première, présentée ci-dessous, suit un parcours inspiré de l'histoire et s'attarde à quelques questions-clé de la problématique des aires et des volumes ainsi qu'aux avantages et inconvénients de différentes méthodes. La seconde, qui n'est pas décrite dans cet article, propose trois approches du théorème fondamental. Il nous semble important d'amener nos élèves à réaliser que ce théorème, qui permet de résoudre de façon relativement simple une quantité extraordinaire de problèmes les plus divers, est l'aboutissement de vingt siècles de recherche sur des cas d'espèce.

Faire travailler nos élèves sur des calculs d'aire de surfaces à contour curviligne ou de volume de solides quelconques à partir des moyens familiers dont ils disposent nous donne l'occasion de les confronter à des problèmes qui ont été au coeur de l'évolution de l'analyse parce qu'ils ont posé de façon pertinente les questions relatives au comportement des suites infinies et au traitement des quantités infiniment petites.

Introduction : les méthodes de calcul d'aires et de volumes rencontrées dans l'histoire

On ne compte pas les différentes approches qui ont été proposées depuis l'antiquité pour calculer l'aire d'une surface à contour curviligne ou le volume d'un cône. En particulier l'aire du disque a suscité un nombre considérable de traités. Cet objet tout à fait exceptionnel par sa simplicité et sa symétrie pose en plus de la question de la méthode d'approche de l'aire celle de la nature du résultat. C'est toute la problématique des nombres irrationnels qui surgit parallèlement au problème géométrique.

Les approches sont nombreuses et pourtant la méthodologie mise en oeuvre se ramène toujours à deux principes.

a) Remplissage par des surfaces (ou des volumes)

On décompose la figure en figures rectilignes de manière à pouvoir s'approcher d'aussi près qu'on veut de la figure étudiée, et cela généralement de l'une des deux façons suivantes :

---

1 dont les membres sont Pierre Bolly, Anne Chevalier, Mariza Grand Henri, Christiane Hauchart, Dany Legrand, Nicolas Rouche, Maggy Schneider.

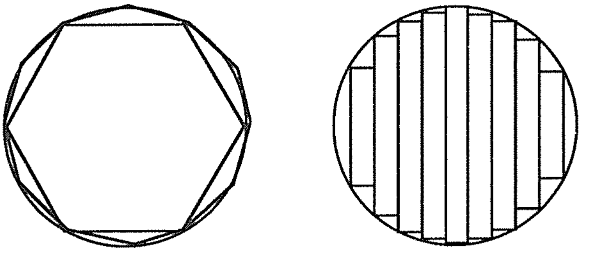


fig.1

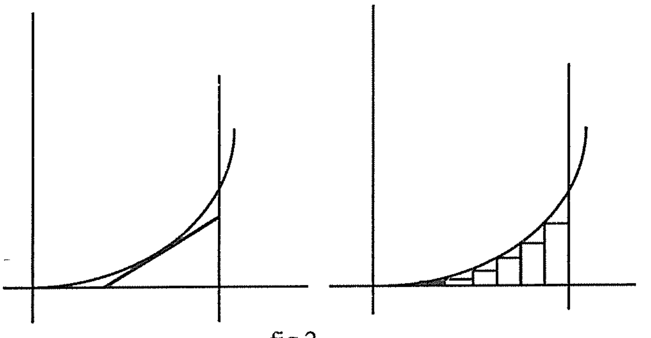


fig.2

Dans les situations présentées à gauche des figures 1 et 2, on commence par remplir la figure par le plus gros polygone facile d'accès et de configuration proche de la figure étudiée. Ensuite, on cherche à remplir les morceaux restants. Le processus se répète à l'infini et les morceaux ajoutés sont de plus en plus petits mais restent, à toutes les étapes, des surfaces[1]. Il s'agira pour calculer l'aire d'étudier la convergence de la série obtenue en faisant la somme des aires des polygones ainsi inscrits à la figure. Un inconvénient de ce procédé de remplissage est qu'il est spécifique à chaque figure. Il arrive, comme pour le disque, que le processus itératif présente certaines régularités et se prête facilement aux calculs. Mais c'est loin d'être une généralité.

Par contre, le remplissage par des rectangles, moins naturel à première vue pour le disque, facilite grandement les calculs lorsqu'on travaille dans un repère cartésien et permet une plus grande généralisation des procédés de calcul pour certaines familles de courbes[2].

Remarquons que l'approche de l'aire par des rectangles ne pose pas les mêmes questions que l'approche par des polygones. En effet, il ne s'agit pas ici de remplir les morceaux restants par des petits rectangles (ce qui est imaginable techniquement mais rendrait les calculs très compliqués) mais bien d'envisager un remplissage par un nombre de plus en plus grand de rectangles. Cela signifie qu'à chaque étape on efface le découpage précédent et on recommence avec un autre plus dense. La limite envisagée n'est plus celle d'une série mais celle d'une suite. Quel sens peut-on donner à la limite de cette suite ? La seule chose qu'on puisse affirmer est qu'avec un nombre très élevé de rectangles on doit faire la somme des aires d'un très grand nombre de rectangles très minces ?

---

1 contrairement à ce que les élèves imaginent régulièrement, à savoir que les rectangles deviennent des segments.

2 voir également p.6

b) Découpage d'une surface en indivisibles

La méthode du calcul des aires et des volumes par les indivisibles est liée au nom de Cavalieri (1598 - 1647), sans pour autant qu'il soit le premier à avoir utilisé les indivisibles dans des raisonnements. Déjà Archimède avait mis au point une méthode pour calculer l'aire d'un segment de parabole à partir de la considération des segments qu'on peut y découper.

Bonaventura Cavalieri propose dans sa "Geometria indivisibilibus ...", publiée en 1635, une nouvelle décomposition des surfaces et des volumes, qui se définit ainsi :

"Si, par les tangentes opposées d'une figure plane sont menés deux plans parallèles soit perpendiculaires, soit inclinés par rapport au plan de la figure, et si l'un d'eux glisse vers l'autre, en restant toujours parallèle à celui-ci jusqu'à ce qu'il coïncide avec celui-ci, toutes les lignes qui, prises l'une après l'autre, forment l'intersection entre le plan mobile et la figure donnée, prises toutes ensemble, sont appelées "toutes les lignes de la figure, prises avec l'une d'elles comme règle..."[1]

On peut obtenir "tous les plans d'un solide" par une construction analogue. Il est important de signaler que Cavalieri n'identifie pas les figures planes ou solides aux agrégats (ou collection) de leurs lignes ou de leurs plans. Il introduit un outil dont il a besoin pour étudier les aires des surfaces et les volumes des solides. Ainsi donc, on peut comparer des collections de lignes, les additionner ou les soustraire, les multiplier par un entier et exprimer des rapports entre elles. Voici comment il exprime la relation fondamentale entre les surfaces et les collections de lignes : si deux figures sont comprises entre deux mêmes tangentes parallèles et si les sections faites de lignes ou de plans parallèles aux bases et à égale distance de celles-ci sont toujours dans le même rapport, alors les figures sont aussi dans ce rapport. (figure 3)

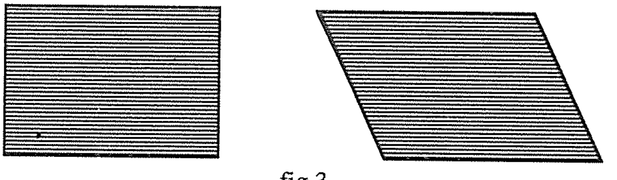


fig.3

On peut résumer la pensée de Cavalieri à l'aide d'un extrait de lettre adressée à Galilée : *"Je n'ai pas osé dire que le continu est composé d'indivisibles mais j'ai montré qu'il y a entre les continus la même proportion qu'entre les collections d'indivisibles."*

Dans la progression proposée aux élèves, nous avons voulu les confronter à ces deux méthodes de calcul d'aires et de volumes. Nous vous proposons ci-dessous quelques problèmes tels que nous les abordons avec les élèves.[2]

1 . Des surfaces courbes approchées par des surfaces rectilignes

1.1 L'aire d'un segment de parabole à la manière d'Archimède

Les paraboles sont bien connues. On les obtient, entre autres, comme graphes d'une fonction du deuxième degré. La figure 4 montre la parabole d'équation $y = x^2$.

---

1 Cavalieri, Geometria, livre II, déf.1.

2 Nous avons extrait les questions et les solutions du chapitre 7 du document AHA.

Elles admettent un axe de symétrie orthogonale ou *diamètre* de la parabole. Lorsqu'une droite coupe une parabole en deux points, on délimite ainsi une surface appelée *segment de parabole* (figure 5).

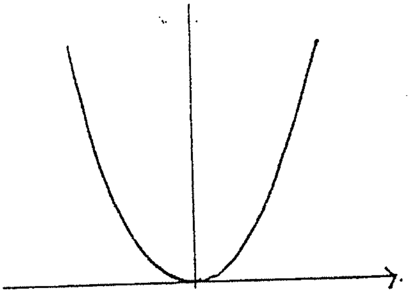


fig.4

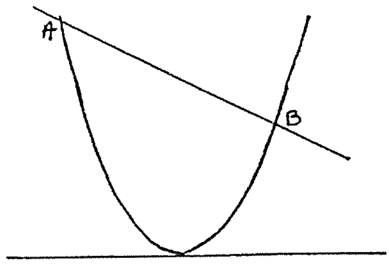


fig.5

Comment déterminer l'aire d'une telle surface ?

Nous exposons ci-dessous un procédé de remplissage du segment de parabole comme celui mis en oeuvre par Archimède (IIIe siècle avant Jésus-Christ) dans une des démonstrations de son traité intitulé "La quadrature de la parabole" (Le terme quadrature est utilisé pour exprimer le rapport entre l'aire de deux surfaces. Ici, il s'agit de comparer l'aire du segment de parabole à celle d'un triangle particulier inscrit à celui-ci)

Si on trace la tangente à la parabole parallèle à la droite sécante AB qui délimite le segment de parabole, le point de tangence C est le point de la courbe le plus éloigné de la droite (expliquez pourquoi) et est appelé *sommet* du segment de parabole (figure 6). La hauteur du segment de parabole est le segment de droite issu du sommet et perpendiculaire à la base. Le triangle ABC est le plus grand triangle qu'on peut inscrire au segment de parabole et il a même base et même hauteur que celui-ci. Il détermine deux nouveaux segments de parabole de base AC et BC et dans lesquels on peut inscrire deux triangles ADC et CEB en suivant le même principe.

Si on poursuit ainsi cette construction, on remplit de mieux en mieux le segment de parabole initial.

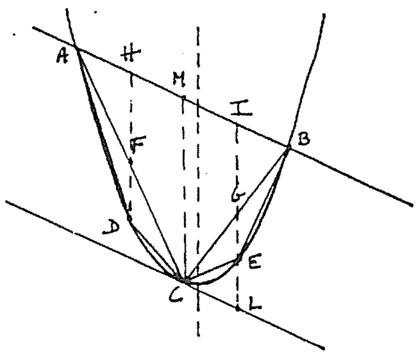


fig.6

Vers quoi tend la somme des aires de tous ces triangles ?

Si on travaille à partir de la parabole d'équation $y = x^2$ sectionnée par une droite AB passant par le point A de coordonnées (a, a^2) et le point B de coordonnées (b, b^2), on détermine aisément que le point C de la parabole qui admet comme tangente une droite parallèle à AB a pour coordonnées $(\frac{a+b}{2}, (\frac{a+b}{2})^2)$.

L'abscisse du point C est à mi-chemin entre l'abscisse a et l'abscisse b. Et donc, par le théorème de Thalès, le point M est à mi-chemin entre A et B.

Ce que nous venons de démontrer est une propriété générale. Appelons AB la *base* du segment de parabole et C son *sommet* : c'est le point de l'arc de parabole le plus éloigné de la base. Nous venons de démontrer ceci : *toute parallèle au diamètre d'une parabole, issue d'un sommet d'un segment de cette parabole, coupe la base du segment en son milieu.*

En fait, nous n'avons démontré cela que pour la parabole $y = x^2$, mais l'extension à toutes les paraboles ne pose pas de problème.

De cette propriété générale résulte que F est le milieu de AC et que G est le milieu de CB. Par le théorème de Thalès, on déduit de là que H est le milieu de AM et I le milieu de MB.

Ensuite G est le milieu de LI. Cela résulte de l'isométrie des deux triangles GIB et GCL.

A partir des coordonnées de G et de L, on montre que E est le milieu de GL. Nous pouvons maintenant comparer le triangle BEC au triangle BMC. La figure 7 reproduit une partie de la figure 6.

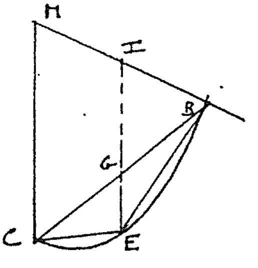


fig.7

Joignons les points C et I. Le triangle CIB vaut deux fois CEB (entendez : l'aire de CIB vaut deux fois celle de CEB) : en effet, CIB se décompose en CIG qui vaut deux fois CEG et IGB qui vaut deux fois GEB. Et puisque CMB vaut deux fois CIB, on a bien que CEB vaut le quart de MCB.

On conclut de même, en retournant à la figure 6, que ADC vaut le quart de AMC. Donc ADC et CEB valent ensemble le quart de ACB. Le polygone ADCEB vaut $1 + \frac{1}{4}$ de ACB.

Lorsqu'on inscrit un triangle dans chacun des quatre segments de parabole déterminés par le polygone ADCEB, on reproduit le phénomène qui vient d'être décrit. Les deux triangles de bases CE et EB valent le quart de CEB. Les deux triangles de bases AD et DC valent le quart de ADC. Les quatre triangles ajoutés pris ensemble valent le quart de deux triangles ajoutés à l'étape précédente. L'aire du nouveau polygone ainsi décrit vaut

$$\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) \times \text{aire ACB.}$$

Si on poursuit le procédé jusqu'à la $n^{\text{ème}}$ étape, on obtient pour l'aire du polygone

$$\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) \times \text{aire ACB.}$$

Le terme entre parenthèses est le début d'une série géométrique dont le premier terme vaut 1 et la raison $\frac{1}{4}$. Il vaut

$$\frac{1\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right).$$

Et maintenant, revenons à l'aire du segment de parabole. Elle est inférieure à 4/3 de l'aire de ACB et la différence avec 4/3 sera d'autant moins grande que le nombre de triangles ajoutés sera élevé. Peut-on en conclure pour autant que l'aire du segment vaut exactement 4/3? Nous reviendrons sur cette question un peu plus loin.

1.2 L'aire d'un segment de cubique

Après avoir travaillé les problèmes d'aires liés à la courbe $y = x^2$, il est assez naturel d'étudier les problèmes analogues pour $y = x^3$, $y = x^4$, etc. Commençons par une situation assez simple.

1.2.1 *La figure* 8 *montre la surface délimitée par la courbe* $y = |x|^3$ *(les courbes du troisième degré sont appelées* cubiques) *et la droite* $y = 1$. *Comment évaluer l'aire de ce segment de cubique?*

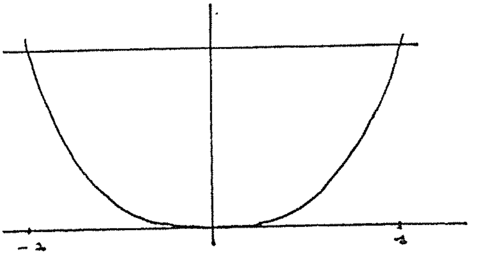


fig.8

On peut essayer d'imiter la quadrature de la parabole. Mais déjà celle-ci n'était pas simple à traiter et si on s'y risque on peut se rendre compte rapidement que le succès du procédé décrit plus haut est tout à fait spécifique à la parabole. En effet, toutes les propriétés des milieux rencontrées ne se retrouvent plus pour les autres courbes. L'histoire du calcul des aires et des volumes montre que les méthodes qui ont fait du chemin sont celles qui sont généralisables à une classe d'objets la plus large possible. Mais que faire d'autre pour la cubique ?

Repartons en quelque sorte à zéro. Mesurer une aire, c'est voir en quelque sorte combien de fois l'unité de surface est contenue dans la surface. Dans ce qui suit, nous allons rencontrer une autre méthode de calcul d'aire d'une surface, approchée par des sommes d'aires de rectangles, qui a pris naissance en même temps que la géométrie analytique, c'est-à-dire la description des courbes par leur équation et leur représentation dans un système d'axes. Les coordonnées (x,y) de chacun des points de la courbe amènent à privilièger naturellement les directions des axes et donc à remplir de rectangles si les axes sont perpendiculaires. Dans une telle situation, on est amené à s'intéresser à l'aire de la surface délimitée par les axes, la courbe et une droite quelconque parallèle à l'axe oy, c'est-à-dire à l'aire sous une courbe.

Notre problème est ainsi ramené à trouver l'aire de la surface OAB.

Inscrivons à cette surface n rectangles (figure 9) (on peut commencer par choisir n = 10 par exemple). La somme des aires de ces rectangles nous fournira une valeur approchée par défaut de l'aire recherchée. Si de plus, on circonscrit n rectangles à cette surface (figure 10), la somme des aires de ceux-ci nous fournira une valeur approchée par excès. Cette façon de faire aura pour avantage de nous donner un encadrement de l'aire cherchée.

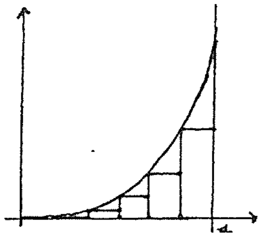


fig.9

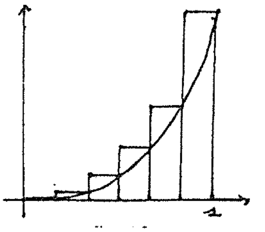


fig.10

Calculons ces deux valeurs. La somme des aires s'écrit pour les n rectangles inscrits

$$S_{\mathrm{i}} = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \left(\frac{2}{n}\right)^3 + \left(\frac{3}{n}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^3\right]$$
$$= \frac{1}{n^4}(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3),$$

et

$$S_{\mathrm{c}} = \frac{1}{n^4}(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3).$$

Pour calculer S_{i} et S_{c}, le plus simple est de se souvenir de la formule

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

$$S_{\mathrm{i}} = \frac{1}{n^4}\frac{(n-1)^2 n^2}{4} = \frac{(n-1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2},$$

et

$$S_{\mathrm{c}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}.$$

On a donc, pour l'aire S cherchée

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{2n} < S < \frac{1}{4} + \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{2n}\ .$$

1.2.2 *Quelle est la valeur exacte de l'aire S?*

On conçoit qu'il puisse y avoir plusieurs opinions quant à l'aire exacte de S.

On peut par exemple penser qu'elle vaut 1/4, parce que les termes $\frac{1}{4n^2} - \frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{4n^2} + \frac{1}{2n}$ tendent vers 0 quand n tend vers l'infini ; ou encore parce que les rectangles inscrits deviennent si fins qu'ils se changent en segments et que ces segments remplissent toute la surface.

On peut aussi remarquer que la différence entre la valeur approchée par excès et la valeur approchée par défaut correspond exactement au plus grand rectangle circonscrit. L'aire de celui-ci peut être rendue aussi petite qu'on veut puisque la base de longueur 1/n peut être choisie aussi petite qu'on veut.

On peut aussi penser que 1/4 est une valeur approximative de l'aire, puisque quelque grand que soit n, les termes $\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{2n}$ ne sont jamais nuls. Quant aux rectangles, ils ne se réduisent jamais à des segments, puisque pour cela, il faudrait que chaque intervalle de subdivision se réduise à un point, ce qui n'arrive jamais.

On peut aussi croire que l'aire vaut 1/4 plus ou moins une toute petite quantité incalculable.

Toutes ces considérations sont plausibles, mais seulement plausibles. Pour trancher, il nous faut un raisonnement convaincant.

Si l'aire n'est pas égale à 1/4, peut-elle être strictement inférieure à 1/4, par exemple égale à

$$0{,}2499 = \frac{1}{4}-\frac{1}{10^4}\ ?$$

Si nous subdivisons l'intervalle en 5 000 segments, la somme des aires des rectangles inscrits à la surface vaut

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{10\,000}+\frac{1}{10^8}>\frac{1}{4}-\frac{1}{10\,000}.$$

Donc l'aire ne peut être égale à 0,2499.

Ceci nous inspire un raisonnement général.

1) Supposons que l'aire S soit plus petite que 1/4 et que la différence soit plus grande que $1/10^m$ (avec m aussi grand qu'on veut) ($1/4 - S > 1/10^m$ ou encore $S < 1/4 - 1/10^m$) . Ce n'est pas possible car la somme des rectangles inscrits, si on en prend $\frac{10^m}{2}$, vaut

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{10^m}+\frac{1}{10^{2m}}>\frac{1}{4}-\frac{1}{10^m}>S.$$

2) Supposons que l'aire S soit plus grande que 1/4 et que la différence soit plus grande que $1/10^m$ ($S - 1/4 > 1/10^m$ ou $1/4 + 1/10^m < S$). Ce n'est pas possible, car la somme des rectangles circonscrits, si on en prend $\frac{1}{10^{2m}}$, vaut

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{10^{2m}}+\frac{1}{10^{4m}}<\frac{1}{4}+\frac{1}{10^m}<S.$$

Et puisque l'aire en question ne peut être ni strictement plus petite que 1/4, ni strictement plus grande, il faut bien qu'elle soit égale à 1/4.

On a convenu de noter ce résultat ainsi :

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{2}{n}\right)^3+\left(\frac{3}{n}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^3\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{2n}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{2}{n}\right)^3+\left(\frac{3}{n}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{n}\right)^3\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{2n}\right] \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

On peut noter ce calcul = $\int_0^1 x^3 dx$. Cette notation est due à Leibniz ; elle représente ici la limite des sommes des aires des rectangles. Cette limite s'appelle l'intégrale de x^3 sur l'intervalle [0,1].

1.3 Retour à la quadrature de la parabole

Dans l'exercice précédent, nous avons encadré l'aire de la surface recherchée par une suite de valeurs approchées par défaut et une suite de valeurs approchées par excès. Et nous avons constaté que ces deux suites admettent la même limite, à savoir l'aire recherchée.

En ce qui concerne l'aire du segment de parabole, nous avons construit une suite de valeurs approchées par défaut

$$\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$$

L'aire du segment de parabole ne peut donc pas être supérieure à 4/3 de l'aire du triangle ABC. Peut-elle être inférieure ? Supposons $S = 4/3 - \varepsilon$. On peut toujours choisir le nombre d'étapes n de remplissage du segment de parabole tel que

$$\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) > \frac{4}{3} - \varepsilon$$

et donc le polygone inscrit a une aire supérieure à celle du segment de parabole, ce qui est impossible. L'aire du segment de parabole ne peut être ni supérieure, ni inférieure aux 4/3 de l'aire du triangle ABC. Elle vaut donc exactement 4/3 de l'aire du triangle ABC.

Tout comme pour l'aire de la surface sous x^3, on peut observer qu'en faisant un passage à la limite sur la suite des aires des polygones inscrits, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) = \frac{4}{3}.$$

qui correspond exactement à l'aire recherchée.

2. Découpage de solides en surfaces

2.1 Le volume d'un prisme

Le volume d'un prisme droit vaut le produit de sa base par sa hauteur. Cette formule reste-t-elle vraie pour un prisme penché, ...vraiment penché ?

Examinons cette question à la lumière d'un raisonnement décrit par Alexis-Claude Clairaut (1713-1765), mathématicien français connu du grand public surtout pour ses précisions relatives au retour de la comète de Halley en 1759 et qui exprime, dans un langage simple, une règle qui permet de comparer des volumes, déjà énoncée et mise à l'épreuve par le mathématicien italien Cavalieri au XVII^e siècle.

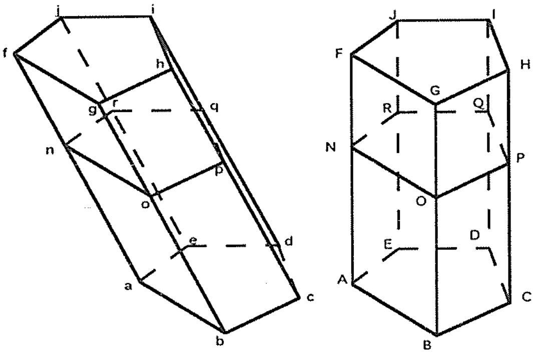


fig.11

"*Formation des prismes obliques.*

On conçoit les prismes obliques formés par une base abcde, qui se meut parallèlement à elle-même, et de telle façon que ses angles suivent des lignes parallèles af, bg, ch, etc., qui s'élèvent hors du plan de base, et qui ne lui sont point perpendiculaires.

Les prismes obliques sont égaux aux prismes droits lorsqu'ils ont même base et même hauteur.

L'analogie qu'il y a entre cette formation et la formation des prismes droits, dont nous avons parlé, (...) donne facilement la mesure de la solidité[1] des prismes obliques; car si on imagine à côté d'un prisme oblique abcdefghij (Fig.7), un prisme droit ABCDEFGHIJ, qui ait la même base, et que ces deux prismes soient renfermés entre deux plans parallèles, on verra que la solidité de ces deux corps sera absolument la même.

Car, si par un point quelconque P de la hauteur, on fait passer un plan parallèle à la base, les sections NOPQR, nopqr, que ce plan formera dans chacun des deux prismes, pourront être regardées comme les bases égales ABCDE, abcde, arrivées en NOPQR, nopqr, par le mouvement qui forme ces deux prismes; et ainsi, ces deux sections seront des polygones égaux.

Or, si toutes les tranches imaginables qu'on peut former dans ces deux prismes par des mêmes plans coupants sont égales, il faudra que les assemblages de ces tranches, c'est-à-dire les prismes, soient égaux aussi.

On énonce ordinairement ainsi cette proprosition : les prismes obliques sont égaux aux prismes droits lorsqu'ils ont même base et même hauteur. On appelle la hauteur d'un prisme la perpendiculaire abaissée du plan supérieur sur l'inférieur ou son prolongement."[2]

2.2 <u>D'une pyramide à toutes les autres et au cône.</u>

Venons-en maintenant aux pyramides.

a) On peut décomposer un cube en six pyramides identiques. Comment ? Déduisez-en le volume d'une de ces pyramides.

b) Exploitez cette situation pour trouver le volume d'une pyramide quelconque, en utilisant le principe de Cavalieri décrit par Clairaut.

Pour cela, imaginez la juxtaposition de deux pyramides, l'une quelconque et l'autre, une pyramide droite, de même hauteur que la première, et semblable à une des six pyramides

---

1 Le terme solidité signifie volume (d'un solide). (Note ajoutée au texte de Clairaut).

2 A.C. Clairaut, Eléments de Géométrie, tome II, p.56 et 57.

logées dans un cube. Placez-les de telle façon que leurs bases soient dans un même plan et sectionnez ensuite ces deux pyramides par un plan parallèle aux bases. Comparez les aires des surfaces ainsi obtenues. Que peut-on en déduire à propos des volumes ?

c) Utilisez un procédé analogue pour calculer le volume d'un cône quelconque (en le comparant avec une pyramide de même hauteur).

En joignant le centre O d'un cube de côté c à chacun de ses sommets, on détermine six pyramides de même sommet O et dont les bases respectives sont les six faces du cube (voir figure 12).

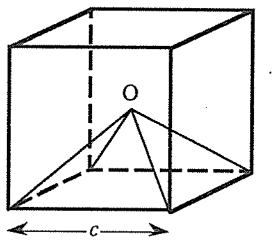


fig.12

Etant identiques, elles ont toutes un volume V égal au sixième de celui du cube, c'est-à-dire égal au tiers du produit de leur base c^2 par leur hauteur $c/2$:

$$V = \frac{c^3}{6} = \frac{1}{3}c^2\frac{c}{2} = \frac{1}{3}c^2\,h.$$

Considérons à présent une pyramide quelconque de hauteur h et de base B'. Posons à côté d'elle, sur un plan, une des six pyramides extraites d'un cube de côté $c = 2h$. Appelons B la base de cette pyramide.

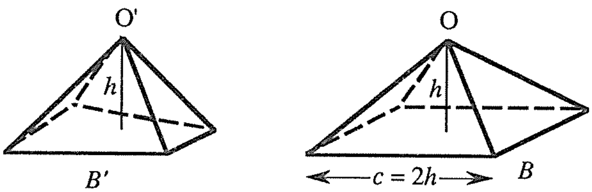


fig.13

Coupons les deux pyramides, à une hauteur quelconque, par un plan parallèle au plan de leurs bases. On détermine ainsi les sections d'aires S' et S. Ces aires sont entre elles comme celles de B et B' des bases des pyramides : elles ont entre elles un rapport constant indépendant de la hauteur.

Par conséquent, en vertu du principe de Cavalieri, les volumes V et V' de ces pyramides sont dans ce même rapport constant, qui est celui de leurs bases :

$$\frac{V'}{V} = \frac{B'}{B} = \frac{B'}{c^2}.$$

D'où le volume V' de la nouvelle pyramide vaut

$$V' = \frac{VB'}{c^2} = \frac{1}{3}\frac{c^2\,hB'}{c^2} = \frac{1}{3}hB'.$$

Remarquons que, dans ce raisonnement, on n'a pas besoin que la base B' soit carrée, ni que la pyramide de volume V' soit droite : seuls comptent l'aire de cette base et la distance h du sommet O au plan de la base.

D'où la propriété : *Une pyramide quelconque a pour volume le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

Un cône droit ou oblique se distingue d'une pyramide par sa base circulaire. Cela mis à part, on peut comparer un cône, à une pyramide quelconque de même hauteur h et dont la base a même aire B. En effet, sectionnons ces deux solides à une hauteur quelconque par un plan parallèle au plan de leurs bases : les sections obtenues ont même aire S. Par conséquent, en vertu du principe de Cavalieri, le volume du cône égale celui de la pyramide, soit le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

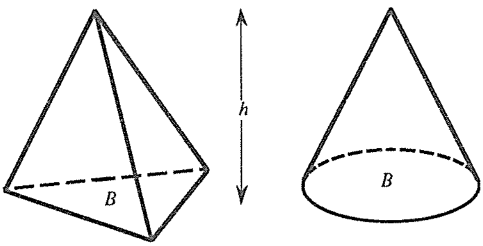


fig.14

En guise de conclusion

Donner un sens à la notion de limite

Il est relativement aisé de donner une idée intuitive de limite en s'intéressant au comportement de suites ou de fonctions. Par contre il y un pas à franchir si nous voulons faire réfléchir nos élèves sur la nature des limites et plus encore sur la formalisation nécessaire à son utilisation dans la construction de la théorie en analyse.

Les deux problèmes décrits plus haut vont dans ce sens. En effet, l'existence de l'aire de chacune des deux surfaces envisagées ne fait de doute pour personne. De plus, la nature des figures nécessite un processus infini pour en approcher l'aire. Il est donc naturel de se poser la question de la limite de la suite ou de la série ainsi construite dont le terme général fournit dans les deux cas une idée approximative de l'aire. Comment démontrer que cette estimation est bien l'aire de la figure ? Nous démontrons alors que l'aire ne peut être ni supérieure, ni inférieure à la valeur estimée S. Il s'agit en fait de montrer que si on se donne une valeur quelconque inférieure (S - ε) ou supérieure (S + ε) à la valeur estimée, il est toujours possible de trouver dans la suite des aires des surfaces inscrites ou circonscrites, une valeur qui vient s'intercaler entre S et S - ε ou S et S + ε. Autrement dit, il n'est pas possible de venir intercaler un nombre entre les éléments de la suite et S ou encore on peut s'approcher de S à l'aide des éléments de la suite d'aussi près qu'on veut.

La question des dimensions

Les problèmes posés ci-dessus nous donnent également l'occasion de poser la question de la nature des objets qu'on fabrique et qu'on manipule. Que deviennent les triangles ou les rectangles quand on poursuit le processus à l'infini ? Se réduisent-ils à un point ou un segment ou bien restent-ils de la même nature que les objets de départ, à savoir des surfaces ? Et les découpages dans les prismes à la manière de Cavalieri, fournissent-ils des surfaces ou des volumes ? Comment recomposer ensuite le volume ? Peut-on imaginer qu'il s'agisse d'un empilement au sens où on voit une pile de feuilles ? Ou bien s'agit-il d'objets d'une autre nature ? Le procédé de comptage est-il encore valide ? Ou faut-il le contourner ? Toutes ces des questions ramènent à celle qui a fait l'objet de nombreux débats dans l'histoire : la droite est-elle constituée de points ?

L'idée n'est pas de résoudre ces questions au niveau de l'enseignement secondaire mais bien d'animer dans les classes des débats qui donnent du sens au concept de limite.

Bibliographie

A.H.A, dix chapitres sur l'enseignement de l'analyse proposés dans une version photocopiée, édition expérimentale diponible sur demande au secrétariat du Département de Mathématique, 2 chemin du cyclotron , 1348 Louvain-la -Neuve.

ANDERSEN K., *Cavalieri's Method of Indivisibles*, Archive for History of Exact Sciences, volume 31 n°4, 1985.

ARCHIMEDE, *La quadrature de la parabole, La méthode*, traduction CH. Mugler, Les Belles Lettres, Paris, 1971.

BOYER C.B., *The History of the Calculus and its conceptual Development*, Dover, N.Y., 1949.

HEATH T.L., *The Work of Archimedes*, Dover, New York, 1912.

Adresse de l'auteur : Anne Chevalier
rue de l'Eau Vive, 15
B. 1420 Braine-l'Alleud

DES PROBLEMES D'EXTREMA CHEZ FERMAT A LA NOTION DE DERIVEE

Mireille CLAPIE et Maryvonne SPIESSER

Les textes de Fermat sur les problèmes d'extrema que nous avons présenté dans notre atelier ont été proposés à des élèves de 1ére A1 en introduction à la notion de nombre dérivé. En fait nous aurions tout aussi bien pu les leur proposer après la présentation du concept de dérivée. Notre objectif premier était de confronter les élèves à des documents historiques, de façon à susciter des réactions de leur part et à ouvrir une réflexion sur les mathématiques : leur évolution, leur forme, leur statut,...L'effectif de la classe était assez faible et les élèves pour la plupart très curieux et particulièrement bien disposés envers ce type d'activité.

Des points importants se sont dégagés :

-difficulté de lecture d'un texte ancien.
-regard porté sur un grand mathématicien de notre région et réaction vive de certains après la lecture du premier texte : Fermat nous assène ses résultats avec une certitude choquante car il ne démontre rien. On fait un peu le rapprochement avec la réaction agressive de Descartes.
- prise de conscience du fait que les mathématiques ont évolué au cours des siècles.

Nous reproduisons ci-dessous le déroulement de l'activité, entrecoupé des réflexions d'un élève recueillies à la fin de l'année scolaire (d'autres incursions dans l'histoire ont illustré certains cours). Le texte de ces activités ainsi que les documents de Fermat sur lesquels elles s'appuient sont renvoyés à la fin de l'exposé.

L'enseignement des mathématiques, à mon avis, donne souvent l'impression que l'on sait ou que l'on ne sait pas. Il n'y a pas de place pour le doute. Il faut comprendre instantanément.

Pour un élève, voir qu'un [illegible] comme Pythagore ou un égyptien ont pu éprouver les mêmes difficultés que lui et ont eu parfois à les dépasser est assez motivant.
Cela rassure en montrant que ce qui paraît nous dépasser nous, élèves, certains grands mathématiciens ont également eu des difficultés à l'admettre.

1) Méthode *de minimis et maximis.*

Le premier texte étudié date de la fin de l'année 1637 (Voir le document 1). C'est la première exposition que Fermat fit de sa méthode du minimum et du maximum. Contrairement à la réflexion que vient de nous livrer l'élève, Fermat rejette toute forme de doute. Par contre il entraîne celui des élèves, tout comme il a provoqué une réplique cinglante de Descartes.

Ce premier document a beaucoup dérouté les élèves. Le langage est hermétique, le texte est très éloigné de leurs "normes" habituelles de lecture. ("il complique tout", "il ne démontre rien, il met tout à sa sauce", ...)

En effet, le style didactique, péremptoire, d'un Fermat qui nous affirme que "le résultat se trouvera être ...", apparent fruit d'un hazard, d'un mystère dont il ne nous donne pas la clé, a pu donner lieu à certaines réactions violentes en classe. Parfois aussi, des affrontements ont eu lieu entre élèves à propos de notions mathématiques.

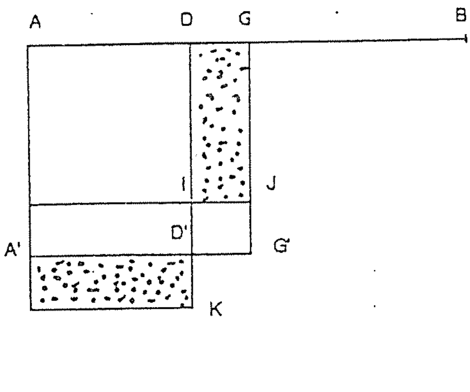
Avant la lecture du texte de Fermat, des problèmes d'extrema ont été posés aux élèves sous forme d'exercices cherchés par petits groupes. Ce sont les questions I et II de l'activité reproduite à la fin de l'article.
Le premier exercice (I) correspond à l'exemple donné par Fermat pour illustrer sa méthode. C'est une question bien connue depuis l'antiquité grecque, que nous trouvons ainsi énoncée et démontrée géométriquement dans la *Collection mathématique* de Pappus d'Alexandrie (IVème siècle après J.C.). Pappus reprend lui-même des questions posées par Apollonius (IIéme siècle av. J.C.) dans un ouvrage perdu.

PROPOSITION 13- *Si l'on a une droite AB, et si on la coupe en deux parties égales au point G, ce point G est celui qui, parmi tous les points qu'on prendra, découpe le plus grand rectangle compris sous les droites AG, GB.*

En effet, si l'on prend le point D, il se fait que le rectangle compris sous les droites AD, DB, conjointement avec le carré de la droite GD, équivaut au carré de la droite AG, c'est à dire au rectangle compris sous les droites AG, GB ; de sorte que le rectangle compris sous les droites AG, GB est plus grand que le rectangle [compris sous les droites AD,DB]. Et de même pour les autres points.

Pappus d'Alexandrie, Livre VII, XIII

En d'autres termes...



aire AG ' = aire AD' + aire DJ + aire IG' (1)
= aire AD' + aire A'K + aire IG'
= aire AK + aire IG'
Soit $AG^2 = AD \times DB + DG^2$
D'où $AD \times DB \leq AG^2$
et AD x DB est maximum lorsque DG = 0, soit lorsque D est en G milieu de [AB].

DK = DB; AD = DI; AG = AA'

C'est un problème du second degré et les élèves possèdent les outils nécessaires pour le résoudre. En posant AE = x, on est en effet amené à rechercher le maximum de - x(b-x). Ce n'est pas le cas pour l'exercice II qui est du troisième degré et qu'on leur suggère de résoudre par tâtonnement. La méthode de Fermat qui est opérante dans le premier cas semble également faire ses preuves dans le second cas. (voir III, questions 1 à 4).

2) Sur la même méthode.

Le second texte distribué date de 1638. Fermat y applique sa méthode à l'exercice cherché précédemment par tâtonnement. Les résultats coïncident, on la trouve efficace, et même si son exposition choque certains, elle "remonte dans l'estime". (voir document 2 et activité, III, 5)

Il m'a paru intéressant de voir qu'il est d'autres méthodes que les nôtres, avec un autre vocabulaire, Fermat explique les mêmes choses. Cela permet, à mon avis, de mettre à distance la forme des mathématiques, souvent, nous avons l'impression que l'on nous impose des conventions. Pourquoi telle méthode et pas telle autre? La forme mathématique elle aussi paraît souvent intransigeante.

La présence du texte, le fait de lire un auteur qui dit « moi, Fermat, j'affirme que... » introduit un contraste vis à vis du professeur comme dans d'autres matières, il efface l'impression d'une objectivité de la part de l'enseignant qui entraîne souvent la méfiance de l'élève.

3) Nombre dérivé

La suite de l'activité (IV et V) est une mathématisation du problème permettant au professeur d'introduire la notion de nombre dérivé et de relier cette notion aux calculs de Fermat.

4) Une nouvelle exposition de la méthode

Le paragraphe VI introduit un troisième texte écrit autour de 1640. L'exemple que Fermat propose est celui du document 1 mais il ne le traite pas dans le même esprit et on remarquera que la notion d'adégalité a disparu. Il se base ici sur le fait que de part et d'autre de l'extremum l'équation du second degré a deux solutions a et e dont la différence "s'évanouit tout à fait pour la division correspondant au produit maximum". On note donc une évolution par rapport aux deux textes précédents. Le différend avec Descartes, que l'exposition de 1637 souleva, incita probablement Fermat à analyser plus profondément sa méthode. Les élèves ont été sensibles à cette protestation de Descartes qui correspond un peu à leur propre attitude.

5) La querelle entre Descartes et Fermat : morceaux choisis

Descartes à Mydorge, Mars 1638
Oeuvres de Fermat, compl. tome IV, p. 26

La règle de Monsieur Fermat pour trouver maximam et minimam est imparfaite, et je le pourrais montrer par une infinité d'autres exemples, mais la chose n'en vaut pas la peine.

Descartes à Mersenne, Janvier 1638
Oeuvres de Fermat, II p. 129

Si cet auteur s'est étonné de ce que je n'ai point mis de telles règles en ma Géométrie, j'ai beaucoup plus de raison de m'étonner de ce qu'il a voulu entrer en lice avec de si mauvaises armes. Mais je lui veux bien donner le temps de remonter à cheval.

Fermat à Mersenne, Février 1638
Oeuvres de Fermat, II p. 132

J'ai appris [...] qu'il [Descartes] avait trouvé à dire à mes méthodes de maximis et minimis et de tangentibus [...]. Peut-être que les ayant proposées nûment et sans démonstration, elles n'ont pas été entendues, ou qu'elles ont paru trop aisées à Monsieur Descartes, qui a fait tant de chemin et a pris une voie si pénible pour ces tangentes dans sa Géométrie.

Roberval à Mersenne, Avril 1638
Oeuvres de Fermat, tome IV p. 30

Monsieur Descartes ne peut éviter l'un des deux, savoir, ou qu'il ignore la Méthode, [...] ou bien qu'il ne procède pas de bonne foi, si n'ignorant pas l'excellence de la Méthode, il raisonne mal exprès pour avoir occasion de blâmer l'auteur.

Fermat à Mersenne, Avril 1638
Oeuvres de Fermat, tome II p. 136

Quand vous voudrez que ma petite guerre contre Monsieur Descartes cesse, je n'en serai pas marri, et si vous me procurez l'honneur de sa connaissance, je ne vous en serai pas peu obligé.

Descartes à Mersenne, Mai 1638
Oeuvres de Fermat, tome II p. 144

Il fait paraître qu'il n'a trouvé sa règle qu'à tâtons, ou du moins qu'il n'en a pas conçu clairement les principes.

Descartes à Mersenne, Juin 1638
Oeuvres de Fermat, tome IV p. 58.

Pour Monsieur Fermat, son procédé me confirme entièrement en l'opinion que j'ai eue dès le commencement que lui et ceux de Paris avaient conspiré ensemble, pour tâcher de décréditer mes Ecrits le plus qu'ils pourraient.

Descartes à Fermat, Juillet 1638
Oeuvres de Fermat, tome II p. 163

Je n'ai pas eu moins de joie de recevoir la lettre par laquelle vous me faites la faveur de me promettre votre amitié, que si elle me venait de la part d'une maîtresse dont j'aurais passionnément désiré les bonnes grâces [...]

Et voyant la dernière façon dont vous usez pour trouver les tangentes des lignes courbes, je n'ai autre chose à y répondre, sinon qu'elle est très bonne et que, si vous l'eussiez expliquée au commencement en cette façon, je n'y eusse point du tout contredit.

Descartes à Mersenne, Août 1638
Oeuvres de Fermat, tome IV p. 62

Je dirai seulement qu'il lui eût été, ce me semble, plus avantageux de ne point du tout parler de cette tangente, à cause que le grand bruit qu'il en fait donne sujet à un chacun de penser qu'il a eu beaucoup de peine à la trouver...

Deux mois après cette première incursion dans l'œuvre de Fermat, nous y sommes revenus à propos de la notion de tangente en étudiant la suite du premier document de 1637 qui concerne la recherche de la tangente en un point d'une parabole. Cette invention des tangentes est en effet le premier des "plus beaux usages" que le mathématicien toulousain fait de sa méthode du minimum et du maximum. Nous joignons le texte de Fermat et l'activité proposée sur ce sujet en fin d'article. Une étude détaillée a été publiée à l'I.R.E.M. de Toulouse dans une brochure intitulée *Des problèmes d'extrema chez Fermat à la notion de dérivée* (M. Clapié, M. Spiesser), à laquelle nous renvoyons pour une analyse plus fine et notamment une critique des activités telles qu'elles ont été rédigées. Avant de conclure avec des remarques plus générales de notre élève, nous ajouterons seulement que cette présentation n'est certes pas destinée à une meilleure compréhension de la notion mathématique appréhendée (contrairement à d'autres activités intégrant l'histoire que nous avons pu mener parallèlement). Par contre elle a provoqué un questionnement des élèves sur les mathématiques et sur leur évolution. Elle a ébranlé l'idée d'une science simmuable et figée.

L'étude, durant l'année de première, de textes portant sur les Mathématiques, directement, comme ceux de Fermat traitant la recherche du maximum et du minimum, ou plus indirectement, comme un extrait d'un dialogue socratique de Platon mettant en scène Socrate et un jeune esclave, de même que des introductions historiques sur certains aspects mathématiques, m'ont paru profitables pour plusieurs raisons.
Elles m'ont amené à une prise de conscience d'une autre dimension des Mathématiques, qui peuvent rejoindre sur certains points et certaines problématiques d'autres disciplines, mais aussi à une mise à distance du savoir mathématique en tant qu'objet figé, fermé à toute discussion, bien intouchable, et par là même ont permis une démystification de l'erreur.
Tout d'abord, l'étude de tels textes m'a permis de mieux saisir que pour les Mathématiques aussi il y a eu tout un cheminement de la pensée. Souvent, l'enseignement des Mathématiques donne l'impression à l'élève que le professeur sort des règles, des calculs de son chapeau, tel un magicien, qu'il les invente devant nous. Beaucoup sont alors découragés, pensant que de toute manière ils n'arriveront jamais à comprendre le pourquoi de ces règles mathématiques dont l'application paraît une évidence aux yeux du professeur.

Si il faut bien avouer que l'étude de plusieurs textes de Fermat ne m'a presque rien apporté sur le plan de la connaissance mathématique elle-même, elle m'a tout de même permis de voir d'où viennent les connaissances que l'on nous administre. En effet, l'ignorance de la genèse, et l'ignorance de la finalité, sont deux éléments majeurs du malaise que ressentent beaucoup d'élèves vis à vis des mathématiques. Le travail effectué ressemblait alors à une certaine aliénation.

1°A1 FERMAT Recherche de maximum et minimum

Tous les documents reproduits sont issus des oeuvres de Pierre de Fermat publiées par Paul Tannery et Charles Henry - Gauthier - Villars, PARIS 1891.

I - *Problème* : Soit [AC] un segment de longueur b ; on veut déterminer un point E de [AC] pour lequel le produit AE x EC est maximum ?

* Repérer les données, les inconnues.
* Mettre le problème en relation avec le cours.
* Traduire.
* Conclure.

II - *Problème* : Soit [AC] un segment de longueur b ; on veut déterminer un point B de [AC] pour lequel le produit AB^2 x BC est maximum.

* Avec les mêmes moyens que dans le problème précédent, peut-on déterminer B ?

* En utilisant des valeurs numériques essayer de localiser B.

III - *Documents 1 et 2*

1° - Lire le texte de Fermat : "méthode pour la recherche du maximum et du minimum".

2° - Relever les expressions ou les mots qui vous sont étrangers. Essayer de leur donner un sens.

3° - Reprendre toutes les phases du calcul et les mettre en relation avec les étapes de la "méthode".

4° - Utiliser la méthode de Fermat pour déterminer le point B du problème II. Trouvez-vous ce que vous aviez prévu ?

5° - Lire le document 2 : "Sur la même méthode". Etes-vous convaincu ? (par la méthode).

IV - *Reprenons le problème I*

Soit E' un point tel que AE' = a + e et f la fonction telle que f (a) = AE x EC.
f (a+e) = AE' x E'C.

A) 1° - Ecrire f (a+e) - f (a) suivant les puissances décroissantes de e.

2° - Quel est le signe de cette différence lorsque E est le point où le produit est maximum ?

B) 1° - Exprimer $\frac{f(a+e)-f(a)}{e}$. A quel moment de sa méthode Fermat utilise-t-il cette expression dans le document 1 ?

2° - Quelle est la limite de $\frac{f(a+e)-f(a)}{e}$.quand e tend vers 0 ?

V - *Reprenons le problème II avec* :

AE' = a + e et la fonction g telle que g (a) = AB^2XBC et g (a+e) = AE'^2XE'C.

1° - Calculer g (a+e) puis $\frac{g(a+e)-g(a)}{e}$

2° - Quelle est la limite de $\frac{g(a+e)-g(a)}{e}$ quand e tend vers 0 ?

3° - Pour quelle valeur de a exprimée en fonction de b cette limite est-elle nulle ? Conclure.

VI - 1° - Représenter la fonction f : $a \rightarrow -a^2 + ab$, $a \in [0,b]$

2° - Soit la droite y = z". Déterminer les points d'insertion de cette droite avec la courbe représentative de f. Appeler a et e les abscisses des points d'intersection de la droite avec la courbe représentative de f. Envisager plusieurs positions de cette droite y = z".

3° - Lire le document 3 en vous aidant du travail précédent. La quantité e est-elle la même que dans les documents 1 et 2 ?

4° - En quoi la démarche de Fermat est-elle différente ? Ce document apporte-t-il plus de crédibilité à la méthodes ? Pourquoi ?

5° - Relever dans ce texte toutes les expressions qui font appel à la notion de limite.

DOCUMENT I
Oeuvres de Fermat, tome III p.121-122
1637-38

MÉTHODE

POUR LA

RECHERCHE DU MAXIMUM ET DU MINIMUM.

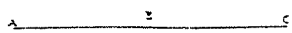
Toute la théorie de la recherche du maximum et du minimum suppose la position de deux inconnues et la seule règle que voici :

Soit a une inconnue quelconque de la question (qu'elle ait une, deux ou trois dimensions, suivant qu'il convient d'après l'énoncé). On exprimera la quantité maxima ou minima en a, au moyen de termes qui pourront être de degrés quelconques. On substituera ensuite $a+e$ à l'inconnue primitive a, et on exprimera ainsi la quantité maxima ou minima en termes où entreront a et e à des degrés quelconques. On *adégalera*, pour parler comme Diophante, les deux expressions de la quantité maxima ou minima, et on retranchera les termes communs de part et d'autre. Cela fait, il se trouvera que de part et d'autre tous les termes seront affectés de e ou d'une de ses puissances. On divisera tous les termes par e, ou par une puissance de e d'un degré plus élevé, de façon que dans l'un au moins des termes de l'un quelconque des membres e disparaisse entièrement. On supprimera ensuite tous les termes où entrera encore e ou l'une de ses puissances et l'on égalera les autres, ou bien, si dans l'un des membres il ne reste rien, on égalera, ce qui revient au même, les termes en plus aux termes en moins. La résolution de cette dernière équation donnera la valeur de a, qui conduira au maximum ou au minimum, en reprenant sa première expression.

Voici un exemple :

Soit à partager la droite AC (*fig.* 91) *en* E, *en sorte que* AE × EC *soit maximum.*

Fig. 91.



Posons $AC = b$; soit a un des segments, l'autre sera $b-a$, et le produit dont on doit trouver le maximum : $ba - a^2$. Soit maintenant $a+e$ le premier segment de b, le second sera $b-a-e$, et le produit des segments : $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$:

Il doit être *adégalé au précédent* : $ba - a^2$:

Supprimant les termes communs : $be \backsim 2ae + e^2$;

Divisant tous les termes : $b \backsim 2a + e$;

Supprimez e : $b = 2a$.

Pour résoudre le problème il faut donc prendre la moitié de b.

Il est impossible de donner une méthode plus générale.

DOCUMENT II
Oeuvres de Fermat, tome III, p. 126
1638

SUR LA MÊME MÉTHODE.

Je veux, au moyen de ma méthode, *partager la ligne donnée* AC (*fig.* 94) *au point* B, *en sorte que* $AB^2 \times BC$ *soit le maximum* de tous les solides que l'on peut former de la même façon en partageant la ligne AC.

Fig. 94.

Posons, en notations algébriques, $AC = b$, l'inconnue $AB = a$; on aura $BC = b - a$ et le solide $a^2 b - a^3$ doit satisfaire à la condition proposée.

Prenons maintenant $a + e$ au lieu de a, on aura pour le solide

$$(a+e)^2(b-e-a) = ba^2 + be^2 + 2bae - a^3 - 3ae^2 - 3a^2e - e^3$$

Je le compare au premier solide; $a^2b - a^3$, comme s'ils étaient égaux, quoiqu'en fait ils ne le soient point. C'est cette comparaison que j'appelle *adégalité*, pour parler comme Diophante, car on peut ainsi traduire le mot grec παρισότης dont il se sert.

Je retranche ensuite de part et d'autre les termes communs, c'est-à-dire $ba^2 - a^3$. Cela fait, dans un membre il ne reste rien, dans l'autre on a $be^2 + 2bae - 3ae^2 - 3a^2e - e^3$. Il faut donc comparer les termes en plus et ceux en moins; on a ainsi une seconde *adégalité* entre $be^2 + 2bae$ d'une part, $3ae^2 + 3a^2e + e^3$ de l'autre. Divisons tous les termes par e, l'*adégalité* aura lieu entre $be + 2ba$ et $3ae + 3a^2 + e^2$. Après cette division, si tous les termes peuvent encore être divisés par e, il faut réitérer la division, jusqu'à ce qu'on ait un terme qui ne se prête plus à cette division par e, ou, pour employer le langage de Viète, qui ne soit plus affecté de e. Mais, dans l'exemple proposé, nous trouvons que la division ne peut être réitérée. Il faut donc s'arrêter là.

Maintenant je supprime tous les termes affectés de e; il me reste d'une part $2ba$, de l'autre $3a^2$, membres entre lesquels il faut établir, non plus comme auparavant, une comparaison feinte ou une *adégalité*, mais bien une véritable équation. Je divise de part et d'autre par a; j'ai donc $2b = 3a$ ou $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$.

DOCUMENT III
Oeuvres de Fermat, tome III, p. 131-132
1640-1642

Soit, par exemple, proposé de *partager la droite b en sorte que le produit de ses segments soit maximum*. Le point satisfaisant à cette question est évidemment le milieu de la droite donnée, et le produit maximum est égal à $\frac{b^2}{4}$; aucune autre division de cette droite ne donnera un produit égal à $\frac{b^2}{4}$.

Mais si l'on propose de partager la même droite b en sorte que le produit des segments soit égal à z'' (cette aire étant d'ailleurs à supposer plus petite que $\frac{b^2}{4}$), on aura deux points satisfaisant à la question, et ils se trouveront situés de part et d'autre du point correspondant au produit maximum.

Soit en effet a un des segments de la droite b, on aura $ba - a^2 = z''$, équation ambiguë, puisque pour la droite a on peut prendre chacune des deux racines. Soit donc l'équation corrélative $be - e^2 = z''$. Comparons ces deux équations d'après la méthode de Viète :

$$ba - be = a^2 - e^2.$$

Divisant de part et d'autre par $a - e$, il viendra

$$b = a + e;$$

les longueurs a et e seront d'ailleurs inégales.

Si, au lieu de l'aire z'', on en prend une autre plus grande, quoique toujours inférieure à $\frac{b^2}{4}$, les droites a et e différeront moins entre elles que les précédentes, les points de division se rapprochant davantage du point constitutif du produit maximum. Plus le produit des segments augmentera, plus au contraire diminuera la différence entre a et e, jusqu'à ce qu'elle s'évanouisse tout à fait pour la division correspondant au produit maximum; dans ce cas, il n'y a qu'une solution unique et singulière, les deux quantités a et e devenant égales.

Or la méthode de Viète, appliquée aux deux équations corrélatives ci-dessus, nous a conduit à l'égalité $b = a + e$; donc, si $e = a$ (ce qui arrivera constamment pour le point constitutif du maximum ou du minimum), on aura, dans le cas proposé, $b = 2a$, c'est-à-dire que, si l'on prend le milieu de la droite b, le produit des segments sera maximum.

Activité proposée aux élèves de 1ère A1

Fermat : Application de la méthode du maximum et du minimum à la tangente à la parabole

I - *Activités préparatoires*

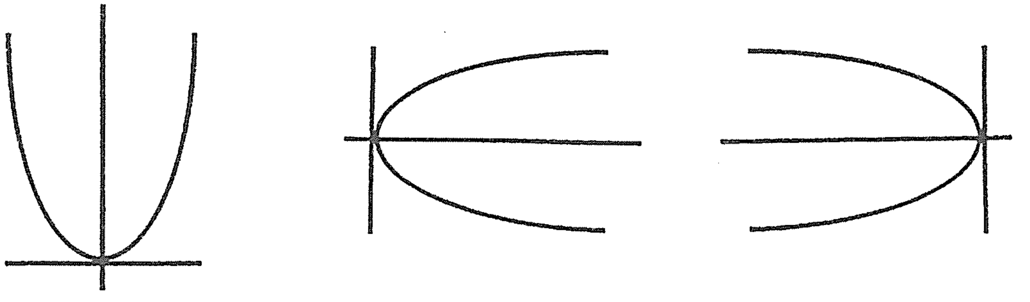
1° - soit f : $R \to R$
$x \to x^2$.

Dans un repère (o, i·, j-), placer des points M (x_0 ; x_0^2) et E (0 ; - x_0^2) en utilisant le plus grand nombre possible de valeurs x_0 de la variable x. Chaque fois, construire la droite (ME).
On fera un tableau en donnant les coordonnées de M et de E correspondant à chacune des valeurs x_0.

Regarder votre graphique de très loin. Que constatez-vous ? Pouvez-vous énoncer une propriété de la tangente à la parabole d'équation $y = x^2$?

2°- On va essayer de démontrer cette propriété. Ecrire l'équation générale de la tangente à la parabole $y = x^2$ au point d'abscisse x_0.
Déterminer le point d'intersection de cette tangente avec (o,j). Que constate-t-on ? Cette propriété est-elle vraie pour toute parabole ?
Considérer g : $x \to ax^2$ et démontrer la propriété dans ce cas.
Lorsque l'on considérera les paraboles correspondants aux fonctions h : $x \to ax^2+bx+c$, la propriété restera-t-elle vraie ? Pourquoi ?

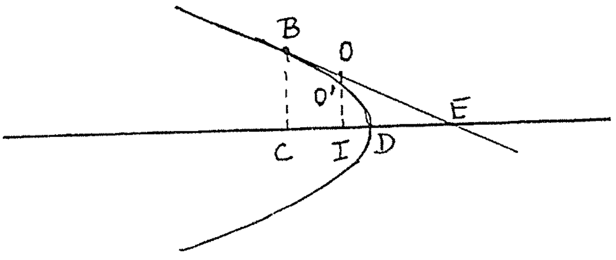
3° - Trouver une relation entre x et y dans chacun des cas suivants :



II - *Lecture du document*

Lire le document en soulignant ce que vous ne comprenez pas.
Comment Fermat définit-il une parabole ? Comment appelons-nous ce que lui appelle "diamètre" ? Quelle explication pouvez-vous en donner ?
Reprendre la démonstration pas à pas.
Déterminer les propriétés géométriques que la figure vous suggère. Ecrire les relations entre les coordonnées des points B et O'situés sur la parabole : CD = ?   DI = ?
Quels sont les propriétés de la relation "<" utilisées au cours du calcul ?

CI = e
CD = d
CE = a
DI = ?
IE = ?



III - *Commentaires*

* Interpréter "l'adégalité" : A quel moment Fermat l'utilise-t-il ? Ceci vous parait-il acceptable ?

* La méthode du maximum et du minimum est-elle utilisée de la même façon que dans les textes vus précédemment ? (Par exemple dans celui où il cherche le point B du segment [AC] tel que $AB^2 \times BC$ soit maximum) ?

* Le résultat démontré par Fermat est-il facilement utilisable ? Pensez-vous vous l'approprier ?

* Peut-on établir un résultat équivalent pour la tangente à la courbe représentative d'une autre fonction ? Pour l'hyperbole ($g : x \rightarrow \frac{1}{x}$) ? pour une autre courbe ?

METHODE POUR LA RECHERCHE DU MAXIMUM ET DU MINIMUM

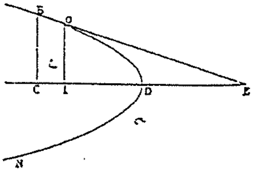
(suite du document 1)

Oeuvres de fermat, tome III, p. 122-123.

Nous ramenons à la méthode précédente l'invention des tangentes en des points donnés à des courbes quelconques.

Soit donnée, par exemple, la parabole BDN (*fig.* 92), de sommet D,

Fig. 92.



de diamètre DC; soit donné sur elle le point B, par lequel il faut mener la droite BE tangente à la parabole et rencontrant le diamètre en E.

Si l'on prend sur la droite BE un point quelconque O, dont on mène l'ordonnée OI, en même temps que l'ordonnée BC du point B, on aura : $\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$, puisque le point O est extérieur à la parabole. Mais $\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CE^2}{IE^2}$, à cause de la similitude des triangles. Donc $\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}$.

Or le point B est donné, donc l'ordonnée BC, donc le point C, donc CD. Soit donc $CD = d$, donnée. Posons $CE = a$ et $CI = e$; on aura $\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2+e^2-2ae}$.

Faisons le produit des moyens et des extrêmes :

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e.$$

Adégalons donc, d'après la méthode précédente; on aura, en retranchant les termes communs :

$$de^2 - 2dae \backsim - a^2e,$$

ou, ce qui revient au même :

$$de^2 + a^2e \backsim 2dae.$$

Divisez tous les termes par e :

$$de + a^2 \backsim 2da.$$

Supprimez de : il reste $a^2 = 2da$, donc : $a = 2d$.

Nous prouvons ainsi que CE est double de CD, ce qui est conforme à la vérité.

Cette méthode ne trompe jamais, et peut s'étendre à nombre de questions très belles; grâce à elle, nous avons trouvé les centres de gravité de figures terminées par des lignes droites et courbes, aussi bien que ceux de solides et nombre d'autres choses dont nous pourrons traiter ailleurs, si nous en avons le loisir.

Quant à la quadrature des aires limitées par des lignes courbes et droites, ainsi qu'au rapport que les solides qu'elles engendrent ont aux cônes de même base et même hauteur, nous en avons déjà longuement traité avec M. de Roberval.

Dismissis Incruciationibus

Montpellier Workshop summary by Paul Garcia

The original purpose of this workshop was to introduce to secondary school teachers the idea of using history in English A level mathematics syllabuses, and in particular in the new Nuffield Advanced Mathematics course.

There were three themes:

1. The intellectual struggle of mathematics; that is, mathematics is a creative process and ideas emerge after long and difficult periods of gestation.
2. The personalities of mathematicians; mathematicians, even geniuses, are still human and subject to the same kinds of personality problems as ordinary mortals.
3. The continuing development of mathematics; even today, the utility of ideas causes disputes between mathematicians.

Section 1
The first theme was to show how those concepts which we regard as being elementary may not always have been so obvious, even to the great geniuses of mathematical history. The struggle to develop ideas is rarely, if ever, made clear to students. They assume from standard text-book presentations of mathematical topics that the development of the idea was straightforward and obvious. This often causes the student to believe that he or she is stupid for not being able to immediately comprehend the subject. Teachers are also guilty of not taking into account that many concepts are difficult when encountered for the first time. To illustrate my point, I outlined the history of the development of complex numbers, beginning with Cardan's method for solving $x(x-10)=40$ in chapter 37 of the Ars Magna, printed in 1545, from which the title of the workshop, Dismissis Incruciationibus, is taken.
To begin, I put up a slide with a number of quotes from mathematicians on the subject of complex numbers:

"....... as subtle as it is useless" **Cardan**, 1545

"...useless and sophistic" **Bombelli**, 1572

"......imaginary" **Descartes**, 1637 (La Geometrie)

".....a sort of amphibian, halfway between existence and non-existence" **Leibniz**

"....absurd, void of meaning, self-contradictory...but of great utility"
De Morgan, 1831

The booklet accompanying the workshop contains some writing by Albert Girard (1595 - 1623) from his 1629 work 'L'invention nouvelle dans l'algebre'. Participants were asked to read this and try to interpret into modern language and notation precisely what Girard was describing, and how it leads to complex numbers.

I then outlined how Newton (1642-1727) did not regard complex numbers as significant because of their lack of physical reality, and how D'Alembert (1717-1783) tried to prove Girard's fundamental theorem, and was only able to prove the form of a root, but not its existence, but managed to write a dissertation on complex numbers almost as a by-product. Euler later provided a better algebraic proof of Girard's theorem, and showed that if a root x+iy exists, then x-iy is also a root (and started to use the symbol i, later made popular by Gauss).
A third piece of writing, from 1806 by Argand, taken from the IREM papers, is used to show the emergence of the geometric representation for complex numbers, first written about by Wessel (1745-1818) in 1797

The fact that as late as 1831 De Morgan made the remark quoted above shows that complex numbers were not an obvious or even acceptable extension of the number system for nearly 300 years.

Section 2

The second theme I illustrated by means of the famous dispute between Leibniz and Newton over the invention of the calculus. I used three extracts, lasting a total of about 30 minutes, from a BBC Radio production called 'The Virgin Fathers of the Calculus', a dramatised history of the dispute. Accompanying the extracts is a complete transcript of the whole (50 minute) broadcast, and a separate leaflet containing short biographies of the protagonists and a chronology of events during dispute (prepared as part of the Nuffield materials and intended to be a supplement to the main course and the History of Mathematics option).
Between the first and second extracts I asked participants to look at copies of a letter from Newton (found in the workshop handbook pages 11 and 12) describing his method of series and a copy of his unsolvable anagram, both referred to in the broadcast. I also showed a slide showing the problem Newton described in the letter in modern notation.
At the end of the extracts I used two slides to show Leibniz's Transmutation Rule, and asked participants to try to translate it into modern notation.
There are other materials in the handbook to which I did not refer, but were provided for teachers interested in pursuing some of the ideas with students.

Section 3

The third theme was illustrated by the recent development of chaos theory, and in particular the invention of fractals by Benoit Mandelbrot. I outlined the history of the subject from the discovery of chaotic effects by Edward Lorenz in 1960 to the discovery of the Mandelbrot set, and asked participants to look at some articles and correspondence (pages 25 - 26 in the handbook) published in the New Scientist magazine in 1990 in which the utility of fractals is attacked by a mathematician, Stephen Krantz, and defended by Mandelbrot himself. The handbook also contains some further material to which I did not refer.

Paul Garcia
Summer 1993

The Virgin Fathers of the Calculus

broadcast transcript

(start of first extract)

When two scientists laid claim to the same discovery that contest for paternity of the brain child is often both bitter and deceitful. The history of science is liberally peppered with such priority disputes borne from the very nature of scientific enterprise. Of all priority disputes through the ages none compares in ferocity or duration to the famous 17th century conflict between Isaac Newton and Godfried Wilhelm Leibnitz as to who should take credit for the calculus.

Professor Lewis Wolpert of University College London presents The Virgin Fathers Of The Calculus, a documentary drama with David Kelsey as Isaac Newton and Albert Welling as Godfried Wilhelm Leibnitz.

Isaac Newton was a genius, undoubtedly the greatest British scientist there has ever been. Born in Lincolnshire prematurely one hour after midnight on Christmas Day 1642, the 17th century metaphysicals would have remarked on the fullness of the moon. His mother Hannah didn't expect her child to live and her feeling that his survival was a miracle was communicated to him at an early age. Newton's father, a Yeoman who couldn't sign his name, had died three months before he was born and when the child was 3 his mother remarried.

At the age of 30 Hannah left Newton in the care of his maternal grandmother and moved a mile and a half away to live with the Reverend Barnabus Smith. It was a marriage of financial convenience but child and mother remained largely separated until, when Newton was 11, Barnabus Smith died and Hannah returned. Newton's mother, biographers agree, was the central figure of his life and his separation from her, albeit temporary, proved a traumatic event from which he never recovered. His fixation upon her was absolute and her original departure generated a mixture of anguish, aggression and fear that never left him.

At Trinity College Cambridge, the 20 year old Newton confessed his guilt as sin number 13 in the Fitzwilliam notebook; "Threatening my step-father and mother Smith to burn them and the house over them".

Throughout his life, whenever Newton's work was challenged, he reacted with the same inner fury generated by this first searing deprivation. He saw all his later inventions as part of his spiritual self and the mere threat of them being questioned would overwhelm and discolour his every move and response.

Godfried Wilhelm Leibnitz, just three years younger than Newton, was also a genius. An astonishing polymath, he made major contributions to many branches of science, mathematics and philosophy. It is said that Leibnitz was capable of thinking for several days at a stretch remaining in one chair. An indefatigable worker and a statesman of considerable influence, he travelled Europe winter and summer and corresponded with over 600 fellow scholars. In 17th century science he was a giant amongst giants.

Whilst Newton's formative and creative years were financially secured by Hannah's second marriage, Leibnitz always needed to earn his living in the service of wealthy patrons. He was trained in law and spent much of his life researching the family history of his rich and famous employers. At the age of 27 while working in Paris for the Archbishop of Mainz his patron died. In a sense between jobs, Leibnitz now pursued his hobby, an interest in science. He invented a calculating machine and came to London to present it at Europe's newest and most important centre for the announcement of scientific advances and the free exchange of ideas.

The Royal Society had been born in the middle of the 17th century and Charles II granted his first royal charter on July 15th 1662. The first Secretary of the Society was Henry Oldenburg who, like Leibnitz, was of North German origin. But whilst his calculator was not the success he had hoped for, Leibnitz returned home satisfied that he had made important contact with Oldenburg and Fellows of the Society.

> "March 8th, 1673. As soon as I arrived safely at Paris it was among my first tasks to write you a grateful letter and take the first step towards a correspondence. You may certainly and safely promise on my behalf that I will strive to prevent such great and illustrious men of the Royal Society from regretting their kind reception of so insignificant a person, though one inspired by the best intentions."

Shortly afterwards, the ambitious and diplomatic Leibnitz was delighted when he learned that he had been elected to the Royal Society. His correspondence with Oldenburg now became more mathematical. He was essentially an amateur mathematician and was keen to know just what had been discovered by the British, particularly as it affected his own work. Leibnitz in the early 1670's was working on problems that would lead to his original discovery of the calculus. However, and this is the core of the dispute, Isaac Newton had already made the discovery for himself. In the plague years of 1664, 1665 the 24 year old Newton, whilst thinking of gravity and optics, had developed what he called his Theory of Fluxions, essentially the calculus. Before the 1670's, Newton had written his book on analysis which contains the idea of fluxions. His friend, the mathematician John Collins, had urged him to publish but Newton was reluctant. He kept fluxions to himself, didn't publish, and Leibnitz was therefore pursuing something that was to all intents essentially unknown.

The year is 1676 and Isaac Newton is by now the 34 year old Lucasian professor of mathematics in Cambridge. He is himself a member of the Royal Society with a rapidly advancing reputation. When Leibnitz writes to Oldenburg describing some of his own achievements and asking some mathematical questions, Oldenburg passes the questions on to Newton. With Newton's reply a correspondence begins between himself and Leibnitz using Oldenburg as an intermediary.

> "June 13th, 1676. Most Worthy Sir, Though the modesty of Mr Leibnitz pays great tribute to our countrymen for a certain theory of infinite series, I have no doubt that he has discovered a similar, if not even better, method than our own. But since, however, he very much wants to know what has been discovered in this subject by the English and since I myself fell upon this theory some years ago, I have sent you some of those things which occur to me in order to satisfy his wishes. At any rate, in part."

> "Godfried Wilhelm Leibnitz to the illustrious Henry Oldenburg. Your letter contains more numerous and more remarkable ideas about analysis than many thick volumes published on these matters. For this reason, I thank you as well as the very distinguished men, Newton and colleagues, for wanting me to partake of so many excellent speculations. Newton's discoveries are worthy of his genius. His method of obtaining the roots of equations and the areas of figures by means of infinite series is quite different from mine so that one may wonder at the diversity of paths by which one can reach the same conclusion."

To Newton this was covering old ground. He had moved on from optics and the calculus and his great mind was now working on different problems. In 1672 he had demonstrated his theory of colours to the Royal Society and made his first famous enemy, Robert Hook. When Newton was elected to the Society, Hook was already established as its most outstanding inventor and experimenter but when he challenged Newton's work on colour the response was both fierce and long-lasting.

Newton threatened to resign from the Society and was to challenge Hook's work for ever more. This gives us a clue as to why Newton was reluctant to publish some of his discoveries. Perhaps he saw himself as constantly under the surveillance of rivals whose only intention was to find fault in his work. More pertinent, it is well-known that Newton was deeply religious and very involved in biblical interpretation. As an alchemist and hypochondriac his search to discover the elixir of life was based upon his own understanding of the scriptures. There is evidence that he saw himself as God's prophet, potentially immortal and personally responsible for the re-discovery of the laws of nature which were embedded in the Bible. If that was so, there was not only little incentive for him to publish his work, it would also follow that those who challenged him could be construed of being possessed by evil.

When Newton received Leibnitz's second letter requesting yet more information on matters relating to the calculus, his response was already less generous.

> "Cambridge, 24th October 1676. Dear Oldenburg, To Mr Leibnitz's ingenious letter I have returned an answer which I doubt is too tedious. I could wish I had left out some things since to avoid greater tediousness I left out something else on which they have some dependence but I had rather you should have it anyway than write it over again. Sir, I am in great haste, Yours, Isaac Newton. PS. I hope this will so far satisfy Mr Leibnitz that it will not be necessary for me to write any more on this subject. Having other things in my head it proves an unwelcome interruption."

Included with this letter to Oldenburg, Newton enclosed a separate letter intended for despatch to Leibnitz.

> "Most Worthy Sir, I can hardly tell with what pleasure I have read the letter of the very distinguished Leibnitz. His method is certainly very elegant and it would have sufficiently revealed the genius of its author even if he had written nothing else and what he has scattered elsewhere is most worthy of his reputation. It leads us also to hope for very great things from him."

Newton then gave a long and detailed response to Leibnitz's questions but when it came to his fluxions he held back, concealing his discovery in a tantalising and unsolvable anagram.

> "Nobody if he possessed my basis could draw tangents any other way unless he were deliberately wandering from the straight path and the same is true in questions of maxima and minima and in some others too. The foundation of these operations is evident enough but because I can not proceed with explanation of it now, I have preferred to conceal it thus; 5 a's, 2 c's, 2 d's, 6 e's, 3 f's, g 9 i's, 3 l's, 11 m's, 5 o's, 2 q's, r, 3 s's, 5 t's, 3 u's, 5 v's, w, x, y."

Newton's anagram concealed the sentence; '*Given any equation involving flowing quantities to find the fluxions and vice versa*'. In fact, this was a hidden claim for priority for his discovery of fluxions to be revealed and decoded at a later date when and if necessary. This was common practice in the 17th century when printers were reluctant to accept books on mathematics because of difficulties with type-setting and a limited potential readership. So, when a mathematician discovered something he would often register his claim for priority in a letter pending possible publication at a later date.

When mathematicians wrote to one another swapping ideas or communicating results, they seldom gave away valuable information without receiving something in return. Their most prized possessions, that is any original discovery, would be referred to but disguised beyond value or clue to the recipient. In this way, Leibnitz would have been neither surprised nor offended by Newton's use of cryptography.
(end of first extract)

But there is another more telling reason for this lack of surprise. Before Leibnitz even received Newton's letter, he had made a brief visit to London en route to Hanover. Surprisingly, he didn't visit Newton. However, in October 1676, he visited John Collins who showed him Newton's unpublished book on analysis containing the theory of fluxions. This wouldn't have helped Leibnitz in any way since he had already made the decisive steps towards his own invention of the calculus the previous year.

> "June 21st, 1677. Leibnitz presents compliments to Henry Oldenburg. Most Honourable Sir, I have received your long-awaited letter together with its enclosure of Newton's truly excellent letter. I shall read it more than once with the care and attention which it certainly deserves. I am enormously pleased that he has described by what path he happened on some of his really very elegant theorems."

Leibnitz went on to describe some of the details of his differential calculus in terms which Newton must have clearly understood. But just then, Henry Oldenburg, the fulcrum for the entire correspondence, died, bringing the period of exchanging letters via the secretary of the Royal Society to an end. However, with reference to the upcoming dispute it is crucial to recognise that from this moment in 1677 both Newton and Leibnitz knew that the other had discovered a method of calculus. From now on their relative behaviour should be measured in the light of this knowledge.

Leibnitz continued his mathematical work and 8 years later in 1684 published a short paper describing the calculus in a new scientific journal based in Leipzig. This was the very first public appearance of the calculus. In spite of the brevity of the article, the power of this new mathematical technique was rapidly recognised particularly on the Continent. The importance of the discovery can not be over-emphasised. It provides the mathematical technique for describing change. If, for example, one has a curve which describes the movement of an object then the calculus enables one to calculate the speed and acceleration of that object at any instant. It also allows one to find the maximum and minimum speeds and accelerations. It's power to deal with change, whether it be a moving object, a shifting population, the flow of water, or a chemical reaction, is enormous. Its discovery brought about a revolution in mathematics and it is still fundamental to modern mathematics and engineering.

Newton responded to the Leibnitz paper three years later when, in 1687, he inserted a small paragraph about his theory of fluxions in his great Principia. He was now publicly staking his claim for priority.

> "Ten years ago in letters exchanged between myself and that most skilled geometer G. W. Leibnitz, I indicated that I possessed a method of determining maxima, of drawing tangents and performing similar operations, which served for irrational terms just as well as for rational ones. I concealed my method in transposed letters which, when correctly arranged, expressed this sentence: 'Given any equation involving flowing quantities to find the fluxions and vice versa.' That famous person replied that he too had come across a method of this kind and imparted a method to me which hardly differed from mine except in words and notation."

How Newton must now have regretted not publishing his theory of fluxions 22 years earlier. However, if he was not prepared to take a more active role in staking his claim for priority, others were. Fatio de Duiller was a volatile young Swiss and a brilliant mathematician in his own right. He became an ardent admirer of Newton who was to treat him with a rare kindness and affection. Fatio resented the idea that Leibnitz should be thought of as having invented the calculus. In 1691 he wrote to the great Dutch scientist, Huygens:

> "18th December, 1691. Marvellous Sir, It seems to me according to all that I have seen so far that Mr Newton is undoubtedly the first author of the differential calculus and that he knew it as well or better than Mr Leibnitz knows it now. It appears that the latter gained an inkling of the subject only when Mr Newton wrote to him so I can not be sufficiently surprised that Mr Leibnitz does not mention anything about it."

Leibnitz, who was now historian to the House of Hanover, knew nothing of this and wrote to Newton in order to renew contact.

> "To the Celebrated Isaac Newton, March 7th, 1693. Godfried Wilhelm Leibnitz, sends cordial greetings. How great the debt owed to you by our knowledge of

mathematics and of all nature. I have acknowledged this in public whenever occasion offered. You have given an astonishing development to the geometry by your series but when you published your work, The Principia, you showed that even what is still not understood by others is an open book to you. I write this rather that you should not understand my devotion to you, a devotion that has lost nothing by the silence of so many years. Heaven forbid that with empty and worse than empty letters I should interrupt the devoted studies by which you increase the patrimony of mankind. Farewell."

"October 16th, 1693. Dear Leibnitz, I did not reply at once on receipt of your letter because it slipped my hands and was long mislaid among my papers. This vexed me since I value your friendship very highly and have for many years considered you one of the leading geometers of this century. Although I do my best to avoid philosophical and mathematical correspondences, I was however afraid that our friendship might be diminished by silence and this at the very moment with the letters I once wrote you in which I concealed my method of fluxions in the form of an anagram are about to be published. I hope indeed that I have written nothing to displease you and if there is anything that you think deserves censure please let me know of it by letter since I value friends more highly than mathematical discoveries."

Among the leaders in the enthusiastic further development of the calculus were the two Swiss brother mathematicians, Jacob and Johann Bernoulli, both colleagues of Leibnitz. The brothers initially worked together and Johann reported that on reading Leibnitz's paper it was only a matter of a few days to unravel all its secrets. In 1696 Johann Bernoulli, in order to show the power of the calculus, put forward a mathematical challenge to the ablest mathematicians in the world. The problem was to determine the line of the quickest descent of a body falling to some point not directly below it. Newton with his theory of fluxions solved it in an evening. Only four other mathematicians solved the problem, Leibnitz was one of them:-

"It is surely worthy of remark that t hey only solve the problem whom I guessed would be capable of solving it as being those alone who had penetrated sufficiently deeply into the mystery of our calculus."

"Our Calculus". Fatio was shocked and insulted and so probably was Newton with whom he shared an intimate relationship. When Fatio published a book in which his position with respect to Newton and Leibnitz was made very explicit, it is hard to believe that Newton did less than influence what he wrote.

"I recognise that Newton was the first and by many years the most senior inventor of the calculus. As to whether Leibnitz its second inventor borrowed anything from him I prefer to let those judge enough also see Newton's letters and other manuscript papers, not myself. Neither the silence of the more modest Newton nor the eager zeal of Leibnitz in ubiquitously attributing the invention of this calculus to himself will impose on any who have perused those documents."

The dispute over who had invented the calculus now entered a new phase, concealed deception giving way to open conflict. Leibnitz was stunned by Fatio's comments and published an article.

"One can readily conceal under a desire for justice sentiments which when plainly acknowledged would disgust us. Fatio fabricates suspicions that another person has won fame not by the straight road but by devious practices. In truth, the more I understand the defects of the mind the less I grow angry at any aspect of human behaviour. When I published the elements of my calculus in 1684 there was assuredly nothing known to me of Newton's discoveries in this area beyond what he had formally signified to me by letter. In fact, I did not know until recently that he practised a calculus so similar to mine."

Now Newton's supporters gathered force. The dominance of Continental mathematicians in the use and development of the calculus was obvious and Newton's contributions were being ignored. John Kiell, an ardent Newtonian working at Oxford University, now took up the cudgel and launched his attack upon Leibnitz. Perhaps he wished to impress Newton.

In a paper in the Philosophical Transactions of the Royal Society which appeared in 1710, he gratuitously inserted a statement that:

> "All these things evolve from the nowadays highly celebrated arithmetic of fluxions which Mr Newton beyond any shadow of a doubt first discovered, as anyone reading his letters will readily ascertain. And yet, the same arithmetic was afterwards published by Mr Leibnitz having changed the name and the symbolism."

Leibnitz now found himself under attack in a journal of the Royal Society of which both he and Kiell were members. This was an insult that could not be ignored. He wrote at once to the Secretary of the Society, Hans Sloan.

> "Berlin March 4th, 1711. Dear Secretary Sloan, I wish that an examination of the Philosophical Transactions did not compel me to make a complaint against your countrymen for the second time. Some while ago, Fatio de Duiller attacked me in a published paper for having attributed to myself another's discovery. I taught his to know better. As I understand things, Newton a truly excellent person disapproved of this misplaced zeal on behalf of your nation and himself. And yet, Mr Kiell in this very volume has seen fit to renew this most impertinent accusation when he writes that I have published the arithmetic of fluxions invented by Newton after altering the name and style of the notation. Whoever has read and believed this could not but suspect that I have given out another's discovery disguised by substitute names and symbolism. But no-one knows better than Newton himself how false this is. However, though I do not take Mr Kiell to be a slanderer I am driven to seek a remedy from your distinguished Royal Society for I think you yourself will judge it equitable that Mr Kiell should testify publicly that he did not mean to charge me with that which his words seem to imply. For the rest, farewell and thrive."

Kiell did not hesitate to reply and his letter was read out at a meeting of the Royal Society on 24th May, 1711. The Society decided to transmit it to Leibnitz without further apology.

> May 1711 a letter from John Keel, MA, FRS of Christchurch Oxford to the very famous and learned Hans Sloan MD, Secretary of the Royal Society.
>
> "Famous Sir, Be so good as to receive what I have thought fit to reply. I perceive that this remarkable person has complained bitterly about me as though I had done him an injury transferring to another the glory of things discovered by himself. Though I confess that this complaint troubles me exceedingly, for I would not wish men to have formed the opinion that out of a desire to broadcast slanders, I would disparage anyone who is skilled in mathematics not to say a person who is most distinguished in that way. Nothing certainly is further from my nature than to deprecate anything in another man's work. Surely the merits of Leibnitz in the world of learning are very great. This I freely acknowledge, nor can anyone who has read his contributions deny that he is most learned in the more obscure parts of mathematics. But since he possesses so many unchallengeable riches of his own, I fail to see why he wishes to load himself with spoils stolen from others. Accordingly, when I perceive that his associates were so partial towards him that they heaped undeserved praise upon him, I supposed it no misplaced zeal on behalf of our nation to endeavour to make safe and preserve for Newton what is really his own.

Hear, hear! Hear, hear!

"For as it was proper of those of Leipzig to pin on Leibnitz others' garlands, so it is proper for Britain's to restore to Newton what was snatched from him without accusations of slander."

"Hamburg, December 29th, 1711. Godfried Wilhelm Leibnitz presents a grand salute to the very celebrated Mr Hans Sloan, Secretary of the Royal Society. What Mr John Kiell wrote to you recently attacks my sincerity more openly than he did before. No fair minded or sensible person will think it right that I at my age and with such a full testimony of my life should state an apologetic case for it, appearing like a suitor before a Court of Law, against a man who is learned indeed but an upstart with little deep knowledge of what has gone before and without any authority from the person chiefly concerned. Thus I throw myself upon your sense of justice. Farewell."

By now, Newton was President of the Royal Society, Master of the Royal Mint, had been knighted and was famous throughout Europe. He addressed the Royal Society at its meeting of the 14th February, 1712.

"Gentlemen. The letter of Mr Leibnitz which was read before you when I was last here, relating to myself and Mr Kiell, I have considered and can acquaint you that I did not see the relevant papers 'til last summer and therefore had no hand in beginning this controversy. The controversy is between the author of those papers and Mr Kiell and I have as much reason to desire that Mr Leibnitz would set the matter right without engaging me in a dispute as Mr Leibnitz has to complain of Mr Kiell for questioning his candour and to desire that I would set the matter right without engaging him in a controversy with Mr Kiell. And if that author in giving an account of my book of quadratures gave every man his own as Mr Leibnitz affirms, he has taxed me with borrowing from other men and thereby has opposed my candour as much as Mr Kiell has opposed the candour of Mr Leibnitz. Mr Leibnitz and his friends allow that I was the inventor of the method of fluxions..

Hear, hear! Hear, hear!

"and claim that he was the inventor of the differential method.

Rubbish!

"Both may be true because the same thing is often invented by several men."

(start of second extract)

The Royal Society decided to appoint a Committee to look into the dispute and in a very short time, just fifty days, a report was ready. Most astonishing for its audacity was the choice of its writer.

"Gentlemen. We have consulted the letters and the letter books in the custody of the Royal Society and those found among the papers of Mr John Collins dated between the years 1669 and 1677 inclusive and have extracted from them what relates to the matter referred to us. All which extracts herewith delivered to you we believe to be genuine and authentic and by these letters and papers we find:

"First, that Mr Leibnitz was in London in the beginning of the year 1673 and went thence to Paris where he kept a correspondence with Mr Collins by means of Mr Oldenburg 'til about September 1676 and then returned by London and Amsterdam to Hanover, and that Mr Collins was very free in communicating to him what he had received from Mr Newton.

"Secondly, that by Mr Newton's letter of the 13th June, 1676, it appears that he had the method of fluxions about five years before the writing of that letter.

"Thirdly, that the differential method is one and the same with the method of fluxions excepting the name and the mode of notations.

"Therefore, we take the proper question to be not who invented this or that method, but who was the first inventor of the method, and we believe that those who have reputed Mr Leibnitz the first inventor knew little or nothing of his correspondence with Mr Collins and Mr Oldenburg long before nor of Mr Newton's having the method above fifty years before Mr Leibnitz published. For which reasons, we reckon Mr Newton the first inventor and are of the opinion that Mr Kiell in asserting the same has been no ways injurious to Mr Leibnitz."

The report's vigour in damning Leibnitz was hardly surprising since Newton wrote it. The Committee was entirely under his influence. Described officially as an impartial Committee of gentlemen from several nations, it was packed full of Newton's supporters, all their names being kept secret until many years later.

Meanwhile, Leibnitz although officially still working on his history of the House of Hanover knew nothing about it. He was now temporarily living in Vienna where his influence with, amongst others, the Tsar Peter the Great had led the emperor to appointing him an Imperial Privy Councillor. The Elector of Hanover wanted him back but Leibnitz was enjoying his work and was trying to establish in Vienna a new Society of Sciences to rival the Royal Society.

That Society now published its so-called impartial report on the dispute as an official document. Johann Bernoulli was very sympathetic and wrote to Leibnitz:

"Basle, May 27th, 1713. My Dear Leibnitz, this hardly civilised way of doing things displeases me particularly. You are at once accused before a tribunal consisting as it seems of the participants and witnesses themselves. Then documents against you are produced, sentence is passed, you lose the case and you are condemned. But I am driven to break off for the present. I do indeed beg you to use what I now write properly and not to involve me with Newton and his people for I am reluctant to be involved in these disputes or to appear ungrateful to Newton who has heaped many testimonies of his goodwill upon me. Farewell."

"Vienna, June 17th, 1713. My Dear Bernoulli, I have not yet seen the little English book directed against me and those idiotic arguments which they have brought forward deserve to be lashed by satirical wit. They would maintain Newton in possession of his own invented calculus. He knew fluxions but not the calculus of fluxions which as you rightly judge he put together at a later stage after my own was already published. Thus, I have myself done him more than justice and this is the price I pay for my kindness."

Leibnitz now had to defend himself. His response was to publish an anonymous pamphlet known today as the Charter Volans or 'flying sheet'. Taking the offensive, he suggested that Newton's fluxions had only been developed after he had seen Leibnitz's calculus. Now, Newton was accused of being the second inventor and the plagiarist.

"29th July, 1713. As Leibnitz is now living in Vienna he has not yet, because of the distance between the places, seen the little volume lately published in England in which certain people endeavour to claim the first discovery of the differential calculus for Newton. But when he learnt later that his own simplicity had been turned against him and that certain persons in England with an unnatural xenophobia had gone so far that they meant not merely to impress Newton among the discoverers but to exclude himself from their number, he decided to consider the question more carefully.

"Because his business prevented him from looking sufficiently deeply into the matter at the time, he consulted a leading mathematician most skilled in matters and free

> from bias. After considering everything, this leading mathematician declared himself as follows: "*It is clear that the way of doing the calculus was not known to Newton until long after it was familiar to others.*"

The leading mathematician Leibnitz anonymously referred to was of course his colleague Johann Bernoulli, and shortly afterwards, when writing to Bernoulli he expressed what he really felt.

> "Vienna, August 8th, 1713. Paying no attention to Kiell and others of Newton's toadies, I am compelled to blame Newton himself for insincerity and acts contrary to the dictates of conscience, for he himself cannot but know that infinitesimal analysis could not have been furnished by him to me. And yet he caresses and indulges the ignorant triflers who assert such things. I understand that in England there are amongst the learned those who do not approve this procedure, which is an affront to grave and good men and your guess just about hits the nail on the head, that is, that those who have little love for the House of Hanover have also meant to wound me. An English friend has even written to me that it seems that certain persons have acted not as mathematicians and Fellows of the Royal Society against a Fellow but as Tories against a Whig. But I shall, I believe, get out such a little paper as will make them smart for their nonsense. For the rest, farewell and flourish.
>
> ""November the 22nd, 1713. Like you, I think that Mr Newton will sometimes smart for so easily lending his ear to flatterers. Meanwhile, it will be wise for you to concentrate on your reply. Finish it in good time and lay it before the public lest they should have reason to rejoice in the delay. Especially it seems that Kiell deserves to be publicly satirised because he has been the most eager of Newton's toadies and the most unjust to foreigners, but I fear that you will have no leisure for this affair before you see your own fireside."
>
> *(end of second extract)*

On August 1st, 1714, Queen Anne died and that month Leibnitz's employer, the Elector of Hanover, became George I of England. Leibnitz wanted to get closer to the dispute, raced back from Vienna to petition for the job as histiographer of England, his reward for forty years faithful service to the Hanoverian Court. George, however, was still displeased with him for his two year sojourn in Vienna and ordered Leibnitz to remain in Hanover and not to undertake any further long journeys until the books of his family's history were complete. Indeed, there is evidence that the new King had a somewhat brutish streak in his nature and sought amusement at the prospect of two heroes from either side of his realm in open dispute.

The situation looked more hopeful for Leibnitz to win towards the end of 1715. He learned he was about to gain a much needed advocate. The Abbe Conte, a Venetian aristocrat and a previous colleague, wrote him a letter telling him he was travelling to London and promising to support his cause. On his arrival, Conte, somewhat playfully but with the support of the King, adopted the role of an intermediary. For the first time Newton was drawn into the open and his direct letter to Leibnitz via Conte was duly despatched.

> "London, 26th February, 1716. Sir, You know that the report of the Royal Society contains the ancient letters and papers preserved in the archives and letter books relating to the dispute between Mr Leibnitz and Dr Kiell and that they were collected and published by a Committee of gentlemen from several nations appointed by the Royal Society for that purpose. Mr Leibnitz has hitherto avoided returning an answer to the same which is because the book is matter of fact and incapable of any such answer. To avoid answering it he pretended the first year that he had not seen this book nor had leisure to examine it. He then desired an eminent mathematician or pretended mathematician to insert a defamatory letter and published this in Germany without the name of the author, or printer, or city where it was printed. The whole of this has since been translated into French and inserted into another abusive letter, I suspect by the same author.

"Hitherto, Mr Leibnitz avoided returning an answer to the Royal Society report by pretending that he had not seen it. And now he avoids it by telling you that the English shall not have the pleasure to see him return an answer to their slender reasoning as he calls it and by endeavouring to engage me in dispute about philosophy and about solving of problems both of which are nothing to the question. I have left off mathematics twenty years ago and look upon solving of problems as a very unfit argument to decide who was the best mathematician or invented anything above fifty years ago. He complains of the Committee of the Royal Society as if they had acted impartially in omitting what he made against me. But he fails in proving the accusation."

By this time Conte, the impartial intermediary, was behaving more like a double agent seeking pleasure from the dispute and enjoying the consequent gossip over supper with the King and his Court. A few years later Newton was to find out the role played by this petty Venetian iago and take his customary revenge. Leibnitz meanwhile still saw him as an intermediary who was on his side.

(start of third extract)

Sir, it is probably out of love of truth that you have taken upon yourself a kind of challenge on the part of Mr Newton. I have never wanted to enter the fray with the lost children which has been unleashed against me. But since he wants now to be involved himself, I am very pleased to give him satisfaction. I was surprised at the beginning of the dispute to learn that I was accused of being the aggressor for I have never talked to Mr Newton except in a very civil manner. I never had any knowledge of the numerous Committee of gentlemen of several nations relating to the dispute for I was not informed of it in any way and I still do not know the names of all its members, particularly not those from the British Isles.

"With reference to their report I notice that all the remarks favoured Mr Newton and that there was an attempt to disparage me by unfounded suspicions which were sometimes ridiculous. To respond to the accusations against me point by point would require another report at least as large as the original. It would be necessary to enter into great detail concerning a number of minutiae that occurred thirty or forty years ago and which I scarcely remember. I would have to look through all my old letters of which several have been lost.

"So, all in all.and taking into account so many signs of ill-will, I feel it unworthy to enter into discussion with people who treat me so badly. I have no desire to make a public spectacle and I wish to use my time so precious to me in a more profitable way. Mr Newton accuses me of being a plagiarist, but where have I done so?."

Newton continued to wait for Leibnitz's detailed response to the accusations of the Royal Society report but Leibnitz never gave Newton an answer. On November 29th, 1716, Newton received a letter from Conte who was visiting Germany with George I.

"Mr Newton, Sorry that I have not been able to write to you until now. I have been ill since I arrived here and am still not well. I have seen neither the King nor the Court and I have been obliged to lie in my rooms for the past twenty days.

(In French) - "Mr Leibnitz is dead and the dispute is finished."

Leibnitz died alone. On the day of his funeral the King went hunting nearby, leaving a servant as the sole mourner. He was buried in an unmarked pauper's grave and for several years Newton ungallantly pursued him beyond it.. His great wrath, pouring forth in some five hundred folios, each devoted to self-vindicating re-draughts of the Royal Society report and wider attacks on his arch rival.

And so, two of the greatest geniuses of the European world not only of their own time but of its whole long history, had spent thousands of hours deceiving and belabouring one another. The calculus was indeed a great prize, seemingly too great to be shared by two such characters. They never met but they had some things in common. Neither married, they would both die childless and it is widely suspected that they also shared a lifetime of absolute celibacy.

In the age of reason, Newton and Leibnitz behaved like two endangered fathers, each jealously fighting, not for the custody of a human being, but for the exclusive possession of his brain child. In that respect, Newton had the victory. And today he still holds the credit for the discovery.

And yet, just as fame can be fickle, so this story has a final ironic twist in its tail. In 20th century mathematics it is the Leibnitz notation and symbolism which forms the basis of the calculus. Newton's fluxions are now no more than a brilliant historical relic.

(end of third extract)

Isaac Newton was played by David Kelsey and Godfried Wilhelm Leibnitz by Albert Welling.

Steve Hodson played Fatio de Duiller, Fraser Carr - George Chaney, Michael Deacon - John Kiell, Steven Thorne - Johann Bernoulli and Olivier Pierre, the Abbe Conte.

The Virgin Fathers of the Calculus was written and created by Stuart Kerr and Professor Lewis Wolpert. It was presented by Lewis Wolpert and the producer was Stuart Kerr.

Biographical Information

Newton was born on Christmas Day in 1642. His family were farmers; they lived in the village of Woolsthorpe, just south of Grantham, in Lincolnshire. He was born prematurely, and was a very weak and sickly child. His mother did not expect him to survive (his father, another Isaac, had already died before he was born). When Newton was three years old, his mother, Hannah Ayscough, married the Reverend Barnabas Smith from the neighbouring parish of North Witham and moved to live with her new husband. She left the infant Isaac in the care of his grandmother.

Although Newton was very bitter about being abandoned by his mother in this fashion, it was from the proceeds of his mother's second marriage (the good Reverend died when Newton was eleven years old) that he acquired an income of about £80 a year (worth a lot more in the late seventeenth century - you could try to work out how much that might be now). It was this income that meant he never had to worry about earning a living, and so was able to devote himself to his studies.

He attended Grantham Grammar School and then went on to Trinity College, Cambridge.

His teacher at Cambridge was Isaac Barrow, the first Lucasian Professor of Mathematics. He resigned in 1669 so that Newton could take over the post!

It was Barrow's lectures on geometry and in particular on methods he had devised for finding areas and tangents that undoubtedly provided the foundation for Newton's inventions of integral and differential calculus. His first paper on fluxions was written in 1666 and he extended the work in a paper called *De methodis fluxionum* written in 1670 - 71. However, he was a secretive kind of person, and kept his discoveries to himself. By not publishing his work, it left the way open for others to dispute whether or not he had priority over the invention of the calculus.

(More on this later).

Newton did not devote his whole life to mathematics. He was also an avid theologian, and spent lots of time trying to prove that the prophecies of Daniel and the poetry of the Apocalypse made sense. He reagard this work as far more serious than his mathematical work, although he was very jealous of his mathematical discoveries.

The peak of Newton's mathematical career was the publication in 1687 (at the expense of Edmund Halley) of a book called *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, detailing all of his important mathematical and scientific discoveries. After that, things went downhill. In 1693, recovering from a serious illness, he discovered that his calculus was being used on the Continent, and that its invention was being attributed to Leibniz. In1699 he was made Master of the Royal Mint and subsequently spent a lot of time trying to prove that Leibniz was a plagiarist. He continued the attack even after Leibniz had died!

Biographical Information

Leibniz was born on 21st June 1646 in Leipzig. His father was a Professor of Moral Philosophy at the University, so his early life was spent in a very intellectual atmosphere. Indeed, he entered the University of Leipzig in 1661 (how old was he?) to study Law. He spent a term at Jena, where he came under the influence of Edward Weigel, the mathematics professor, and so became interested in mathematics. In November 1666 he was awarded his doctorate in Law.

Although his family were well-to-do, Leibniz had no guaranteed income and had to work all his life. Between 1672 and 1675 he worked in Paris as a diplomatic attaché for the Elector of Palatine. During this period, he visited London (in Spring 1673) where he met some English mathematicians and was told of Mercator's quadrature of the hyperbola - something which Newton had used in developing the calculus. This introduced Leibniz to the method of infinite series, a technique he improved. He also presented a calculating machine he had invented to the Royal Society and was elected a foreign member of the Society as a result. He also met Christian Huygens in Paris, who encouraged him in his mathematical work.

He was remarkable thinker, who could reputedly sit and think for days on end without moving. He had a grand plan, sadly never realised through pressure of more menial work (namely writing up the history of the House of Hanover), to develop an *universal calculus* which could be used to solve any kind of problem and reveal all possible truths.

He was also a prodigious writer, corresponding with over 600 people on a variety of topics.

In 1676 he left Paris for a new job with the Duke of Brunswick. In 1677 he published his own version of the calculus. Although Leibniz tried not to become embroiled in the dispute which then began over who had first invented calculus, he was inexorably sucked into it.

Between 1677 and 1704 the calculus Leibniz had published was developed by many Continental mathematicians (principally the Bernoulli brothers) into a really powerful and useful mathematical tool. In England, by contrast, Newton's secretiveness meant that calculus was largely unknown.

In 1714 Leibniz' employer, the Elector George Louis left Hanover to become the first German King of England. He refused to allow Leibniz to join him in London and insisted that he remain in Hanover to finsh the family history.

Leibniz died two years later in 1716, and was buried in a pauper's grave.

The twist in the tale, is that although Newton spent vast amounts of time and energy claiming precedence for the invention of the calculus, it is Leibniz' notation which we use today.

The Dispute - a chronology

1664	Newton discovers binomial theorem for any rational index
1664/5	Newton, sheltering in Woolsthorpe from the Bubonic Plague, invents the method of fluxions
1665	A paper dated 20th May shows Newton had developed enough calculus to be able to find tangent and curvature at any point of any continuous curve
1666	Leibniz sets out his master plan to create a general method by which all truths may be found by calculation
1669	Newton writes *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, describing infinite series calculated using the Binomial Theorem (but not published until 1711) which circulates among friends
1671	Newton introduces use of 'pricked letters' to represent fluxions ($\dot{x}$ & $\dot{y}$) in *Method of Fluxions* (Written in latin)
1672	Leibniz goes to Paris and meets Huygens
1673	Leibniz visits London and learns of method of infinite series
1673	Leibniz reads a letter by Amos Dettonville about sines in quarter circle and reports a great light burst upon him: he realises that the determination of the tangent to a curve depends on the ratio of the differences in the ordinates and abscissae.
1675	Leibniz discovers fundamental theorem of calculus
1675	Between 25th October & 11th November Leibniz develops the main ideas of his calculus
1675	Leibniz introduces the integral sign, $\int$.(29th October)
1676	Newton describes Binomial Theorem in letters to Henry Oldenburg. The first, dated 13th June, is intended for Leibniz. The second, dated 24th October, describes the processes which led him to the discovery.
1676	Newton writes a third account of his calculus called *De quadratura curvarum*. Again not published.
1676	Leibniz realises he has possession of a method of great importance because of its generality
1676	Newton uses an unsolvable anagram to make a prior claim on the calculus in a letter to Leibniz via Henry Oldenburg
1676	In October Leibniz makes a flying visit to John Collins in London and is shown a copy of Newton's paper outlining the method of fluxions
1677	11th July: Leibniz writes up his calculus with most of the problems ironed out
1677	Newton & Leibniz are by now both aware of each other's work, largely as a result of correspondence through Henry Oldenburg
1678	Leibniz publishes an explanation of the integral calculus in the *Acta Eruditorum*.
1684	Leibniz publishes his differential calculus in the *Acta Eruditorum* as method for finding tangents, maxima and minima
1686	Leibniz publishes an article describing his integral calculus
1687	*Principia* published, including a description of the method of fluxions, and referring to earlier correspondence with Leibniz
1690	The Bernoulli brothers start spreading Leibniz' calculus among mathematicians on the Continent

1691	Nicolas Fatio de Duiller writes to Huygens claiming priority for Newton and accusing Leibniz of plagiarism. Leibniz knows nothing of this!
1693	Newton hears that the invention of calculus is being attributed to Leibniz
1696	The Bernoulli brothers set the brachistochrone problem for mathematicians in Europe to solve
1696	Newton solves brachistochrone problem after dinner on 29th January
1699	Nicolas Fatio de Duiller implies in paper to the Royal Society that Leibniz may have stolen his calculus from Newton.
1703	Newton elected President of the Royal Society
1704	Leibniz complains in the Acta Eruditorum about de Duiller's imputation of plagiarism but insists he has priority of publication
1705	Newton knighted by Queen Anne
1710	John Keill vigorously supports Newton's claims against those of Leibniz in Royal Society paper
1711	*De analysi* published
1711	Leibniz writes to the Royal Society and complains about Keill's remarks (his *second* complaint)
1711	John Keill responds on May 11th in a letter read out to the Royal Society, but fails to apologise. In fact, he makes further accusations about Leibniz' integrity
1711	December 12th: Leibniz writes again to the Royal Society to complain about John Keill's further remarks
1712	A Royal Society commission reports on the dispute and concludes that Newton had priority of invention(which Leibniz didn't argue about; he was only claiming prior publication and refuting charges of plagiarism). Newton actually wrote the report!
1713	Johann Bernoulli writes to Leibniz expressing sympathy but asks not be involved in the dispute
1713	Leibniz writes the *Charter Volans* anonymously, accusing Newton of not discovering the calculus until after he had seen Leibniz method.
1715	Abbé de Conte travels to London and tries to mediate in the dispute. Newton rejects the attempt.
1716	Leibniz sets problem of finding orthogonal trajectories of any one-parameter family of curves. Solved by Newton after work (before supper)
1716	Leibniz dies and is buried in an unmarked pauper's grave
1726	Newton deletes all references to Leibniz in the third edition of the *Principia.*
1727	Newton dies and is buried in Westminster Abbey

What they discovered

At the time Newton & Leibniz were working, mathematicians were concerned with methods of finding tangents to curves and areas enclosed by curves. Several geometrical methods had already been invented, but these lacked generality[1]. That is, each curve required a slightly different method. The power of calculus is that it is perfectly general and can be applied to *any* curve.

Newton's approach was a physical one; his variables changed with time. Flowing quantities were *fluents* and the rate at which they flowed was the *fluxion*. The first step he took was to extend the well-known Binomial Theorem used for expanding expressions of the form

$$(1 + x)^n$$

where n is an integer to the case where n is any rational number.
He was able to use this result to find the area under any curve of the form

$$y = (1 - x^2)^{m/n}$$

Find out how Newton did this

Other problems Newton investigated using his fluxions were the quantification of "y^e^...crookednesse in lines", or *curvature* as we now call it, and the calculation of the length of curves, known as *rectification.*
Find out how Newton solved these problems.

Leibniz was concerned with the same problems, but his approach was less physical than Newton's. He did not think of quantities flowing, but began by considering differences. In 1672 Huygens asked him to calculate

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{r(r+1)}$$

Leibniz altered the form of the problem so that he could use a method involving difference sequences.
Find out how he did this.

He was led to the conclusion that summing sequences and finding their difference sequences were inverse operations, and subsequently realised that the determination of areas under curves and of tangents are inverse operations.
Leibnix used a rule he called the *transmutation rule* to find areas under curves.
Find out how Leibniz rule worked.

---

[1] e.g Van Heurat's method for parabolas and hyperbolas

Nuffield Advanced Mathematics

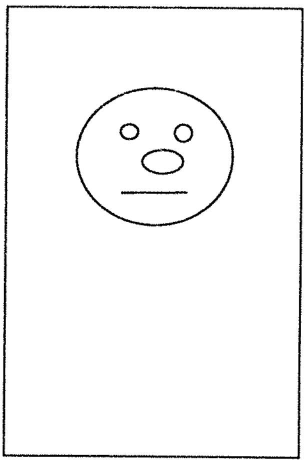
History of Mathematics

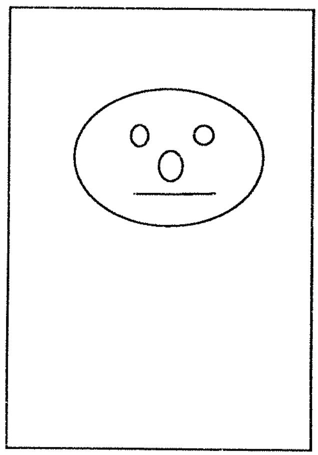
Background Information Sheet

Newton
(1642 - 1727)

&

Leibniz
(1646 - 1716)





prepared by Paul Garcia
Harlow College

BIBLIOGRAPHY

Let Newton Be	Fauvel et al	Oxford University Press	019 853937 1
Mathematics Mathematicians 1	Dedron & Itard	Open University Press	033 500246 3
History of Mathematics	C B Boyer	Wiley	047 109373 4
Men of Mathematics 1	E T Bell	Pelican	
Newton and Leibniz	Open University Unit AM289 C3	Open University Press	033 505002 6

WORKSHOP HANDBOOK

- Complex Numbers

* Cardano's method.
* Girard on equations : Extract from D.J. STRUIK, 'Sources from 1200 to 1800'.
* Argand on complex numbers :Fauvel et. al. 'Using history in the mathematics classroom - the IREM papers', Publ. Mathématical Association.

- Leibnitz & Newton

* Newton's infinite series from open University course AM 289, Unit C3.
* Newton's anagram : Fauvel et.al.'Let Newton be', Publ. Oxford University.
* Royal Society report : Fauvel et.al., 'Let Newton be', Publ. Oxford University.
* Newton on algebra : Fauvel et.al.'Using history in the Mathematics Classroom - the IREM papers', Publ. Mathematical Association.
* Newton on Equations : Fauvel et.al."Using history in the Mathematics Classroom" the IREM papers', Publ. Mathematical Association.
* Heuraet on rectification : J.Van Maanen 'Van Heuraet's letter on the rectification of curves', Publ. Wiskunding Genootschap, Amsterdam.

- Chais & Fractals

* Twisting the fractal knife : New Scientist 29/09/1990.
* Maudelbrot's letter : New Scientist 14/09/1991.
* New Wave Mathematics : New Scientist 03/08/1991.
* The Lorenzian Waterwheel : J. Glick 'chaos', Publ. Cardinal.
* Divergent Weather : J. Glick 'chaos', Publ. Cardinal.

Etude de notions mathématiques à partir d'une approche historique et philosophique

----

Jacqueline GUICHARD (IREM POITIERS)
Jean-Pierre SICRE (IREM POITIERS)

Contenu de l'atelier:

- Présentation d'un travail interdisciplinaire mathématiques - philosophie sur l'infini en TA2 et en TD.
- Etude d'une séquence pédagogique, avec des textes utilisés par les élèves.

Déroulement :

- Première partie : Présentation générale du travail interdisciplinaire
A l'origine de ce travail, plusieurs désirs: décloisonner les disciplines, mettre en relation différents champs du savoir, renouveler chez les élèves comme chez leurs enseignants l'intérêt pour la réflexion et la recherche.
De façon plus immédiate, des objectifs plus concrets nous guidaient: en TA2,la constitution d'un dossier en vue de l'épreuve orale de mathématiques et en Terminale D, la préparation de "la question au choix", au programme du second groupe d'épreuves de philosophie.
La réflexion sur l'infini a été choisie car ce concept est riche d'une double histoire philosophique et mathématique, dans sa constitution, ses développements et ses problèmes.
Les objectifs du professeur de mathématiques ont été plus précisement d'intoduire des éléments d'histoire des mathématiques, d'ouvrir sur la relation mathématiques-philosophie, de faire réfléchir les élèves sur ce qui n'est souvent pour eux qu'un symbole (∞), de les aider dans leur compréhension des limites, et en Terminale D, d'introduire aux leçons sur le calcul intégral.
Le professeur de philosophie a plus particulièrement insisté sur l'histoire de la philosophie et de la raison, les liens mathématiques-philosophie et bien sur, l'épistémologie des mathématiques: le concept de nombre en TA2, la crise des irrationnels (TA2, Term D) ont été particulièrement soulignés.En outre, le problème de l'infini avait été rencontré à diverses occasions (Descartes,3ème Méditation métaphysique, la preuve ontologique de St Anselme de Canterbury en TA, le problème du temps à propos d'un texte de Bergson (la perception du changement) en TA2 et Term D).

On trouvera en annexe 1, le plan de travail.

- Deuxième partie :

Le travail avec les élèves a été introduit par un questionnaire. Celui-ci a été proposé dans l'ensemble de l'académie et à divers niveaux (de la sixième à la terminale). Le questionnaire et quelques résultats se trouvent en annexe 2.
Nous avons proposé aux participants de l'atelier un travail de groupe avec les consignes suivantes :

a) Quel intérêt y a -t-il à proposer un questionnaire de ce genre aux élèves ?

b) Quelles informations peut-on retirer des résultats quant aux représentations des élèves, quant aux activités à mettre en place ?

- Troisième partie :

Les supports de cette partie ont été deux textes extraits de Mathématiques au fil des âges (Gauthier-Villars) : "les objections de Galilée " tiré de *Discours concernant deux sciences nouvelles* et "Cantor : puissance d'un ensemble " tiré de *Contribution à l'étude des multiplicités.*
Le travail de groupe était guidé par la question : Quelles consignes de lecture donneriez-vous aux élèves ?
Cette activité nous a permis de réfléchir entre autre à l'utilisation d'un texte en classe et aux consignes de lecture à proposer aux élèves .

- Quatrième partie :

Nous avons présenté certains dossiers élèves de terminale A2. Nous avons pu ainsi donner certains éléments d'évaluation de ce type de travail et échanger sur des activités élèves plus brèves, plus partielles qui porteraient sur le même thème.

On pourra trouver une analyse plus détaillée de ce travail interdiciplinaire dans la brochure : "Limites et infini au lycée" publiée par l'IREM de Poitiers en Mai 1993.

ANNEXE 1 :

PLAN de TRAVAIL

Premiere période : Le paradoxe de Zénon

I - Retour au questionnaire, discussion avec les élèves autour de leurs réponses à la première question.

II - Ce que dit le paradoxe
(rapprochement avec l'argument de la dichotomie)

III - Les réfutations de Zénon:
a) Les réfutations naïves : liées à la vitesse.
b) Les réfutations savantes : elles sont liées à la nature du continu .Travail sur Aristote et ses mises au point.

IV - Les adversaires de Zénon:
a) Pythagore.
b) La crise des irrationnels.

V - Conclusion:
Réflexions sur la continuité et sur la crise dans l'histoire des mathématiques.

Deuxième période:

A - Développements classiques (XVII ème)

I - Introduction historique :
a) Rappel du travail effectué.
Aristote et la méthode d'exhaustion d'Archimède.
b) Les transformations théologiques et métaphysiques de l'infini.
Discussion des réponses à la question 3 du questionnaire.
c) La naissance de la physique(mouvement, vitesse, courbes....)

II - La fécondité, deux exemples :
a) Les infiniment petits de Cavalieri : exemple de la cycloïde
(roulette de Pascal).

b) L'invention du calcul infinitésimal de Leibniz, le triangle caractéristique, les différentielles et le lien avec la tangente.

III - La rigueur :
a) Les objections faites à Cavalieri, les réponses et les mises au point de Galilée (le tout et la partie) , discussion des réponses à la question 3 du questionnaire.
b) Les objections et les critiques faites à Leibniz, les objections de Berkeley, les enjeux , les réponses de Leibniz et les conclusions à ce débat.
c) Les "solutions" du XIXème à ces problèmes furent abordées très rapidement : le concept de limite (Cauchy, Weierstrass) .

B - Développements de l'époque contemporaine (XIXème - XXème)

I - La théorie des ensembles de Cantor :
a) Les nombres transfinis.
b) Les appuis métaphysiques.

II - Présentation rapide de l'analyse non standard.
Discussion des questions 8 et 9.

ANNEXE 2 :

LE QUESTIONNAIRE

Les réponses devront être justifiées et si possible commentées

1 Achille fait une course avec la tortue.
Achille est le plus rapide, il laisse donc à la tortue 10 mètres d'avance. Rattrapera-t-il la tortue?
Non: quand Achille arrive au point de départ de la tortue, la tortue a parcouru 1m. Quand Achille a parcouru ce mètre, la tortue, elle, a avancé de 10 centimètres. La tortue sera donc toujours en avance sur Achille.
Vos commentaires

2 A quel moment et à quel sujet l'expérience (ou l'idée) de quelque chose lié à l'infini vous a posé problème?

3 Quand en avez vous entendu parler pour la première fois en mathématiques?
Sur quel point précis cette notion vous pose t-elle le plus de difficultés(en maths)?

4 Que signifie infini? Trouvez des synonymes.

5 La notion d'infini a-t-elle le même sens dans les disciplines? (mathématiques, philosophie, physique, dessin....)

6 Y-a-t-il autant de nombres entiers que de nombres pairs?

7 *"Le tout est plus grand que la partie"* (axiome d'Euclide)
-Que veut dire cette expression?
-La trouvez vous justifiée?

8 L'infini est-il un nombre?

9 Existe-t-il des nombres infinis?Citez éventuellement des exemples.

10 Que devient une quantité qui grandit sans arrêt?

11 Une quantité positive qui diminue sans arrêt devient-elle aussi proche de 0 que l'on veut?

LES RESULTATS (extraits)

question 1 Achille fait une course.......

	2nde	1A1	1S	TC	TD	TA1	TA2-3
accepte le raisonnement	50%	43%	22%	5%	22%	24%	34%
accepte le raisonnement mais en refuse la portée pratique	20%	17%	19%	45%	30%	12%	14%
refuse le raisonnemnt	25%	22%	26%	50%	22%	52%	27%

Les arguments avancés pour refuser le raisonnement sont généralement:"cela dépend de la distance" ou "Il faut tenir compte de la vitesse" ou "Achille court plus vite".

question 2 A quel moment et à quel sujet l'expérience de quelque chose lié à l'infini vous a posé problème

	2nde	1A1	1S	TC	TD	TA1	TA2-3
univers	30%	20%	19%	58%	26%	25%	25%
limite	0%	12%	11%	10%	22%	21%	14%
suite des entiers	16%	5%	0%	0%	14%	9%	0%

Les autre réponses trouvées sont:notion inimaginable,indéfinissable.

question 6 Y-a-t-il autant de nombres entiers que de nombres pairs?

	2nde	1A1	1S	TC	TD	TA1	TA2-3
oui	20%	32%	50%	23%	12%	15%	25%
non	60%	56%	30%	76%	64%	71%	52%

question 9 Existe-t-il des nombres infinis?

	2nde	1A1	1S	TC	TD	TA1	TA2-3
oui	65%	44%	45%	58%	34%	46%	29%
non	35%	44%	44%	32%	42%	36%	47%

Parmi les nombres "infinis" cités on trouve des rationnels,des irrationnels et des grandes nombres.

question 11 Une quantité positive qui diminue sans arrêt devient-elle aussi proche de 0 que l'on veut?

	2nde	1A1	1S	TC	TD	TA1	TA2-3
oui	55%	53%	60%	42%	60%	79%	56%
non	30%	22%	22%	28%	23%	9%	0%

LA NAISSANCE DE LA PERSPECTIVE AU XVÈME SIÈCLE

IREM PARIS 7, Groupe M:A.T.H.
Philippe Brin, Michèle Grégoire, Maryvonne Hallez

Une approche pluridisciplinaire en classe de cinquième, de première S et de première E.

Les élèves d'une classe de 1°S et d'une classe de 1°E de deux lycées de la région parisienne ont travaillé avec leurs professeurs de mathématiques, de français, d'histoire-géographie, de dessin et de construction, sur le thème de la naissance de la perspective dans la peinture italienne au XVème siècle.

Ils ont été tout d'abord sensibilisés aux diverses façons de représenter l'espace au cours d'une conférence de Philippe Comar, professeur aux Beaux-Arts. La question centrale était: peut-on représenter ce que l'on voit, sur une surface plane ?

Une visite au musée du Louvre a été l'occasion de découvrir sur quelques tableaux de Cimabue, Giotto, Fra Angelico, Uccello,..., l'apparition de la perspective ou plus exactement d'une mise en espace des volumes.

Le problème ainsi posé, il nous était alors possible d'étudier avec les élèves les règles élaborées par les artistes du XVème siècle. Il est en effet possible de suivre l'évolution de ces règles en s'intéressant à la construction de l'apparence d'un dallage à mailles carrées. Nous leur avons donc présenté les diverses méthodes utilisées au XIVème siècle et au début du XVème. Cette présentation s'est faite à partir de la lecture du texte d'Alberti (*De Pictura* 1435, livre I, §§ 19 et 20) dans lequel l'auteur fournit une méthode qu'il qualifie d'excellente. Par ailleurs, un problème (annexe 1) leur a permis d'étudier l'aspect mathématique de ces constructions. Un second problème a été proposé aux élèves à propos d'un théorème de Guidobaldo del Monte daté de 1600 qui permet de donner un réel fondement à la théorie de la perspective géométrique (annexe 3).

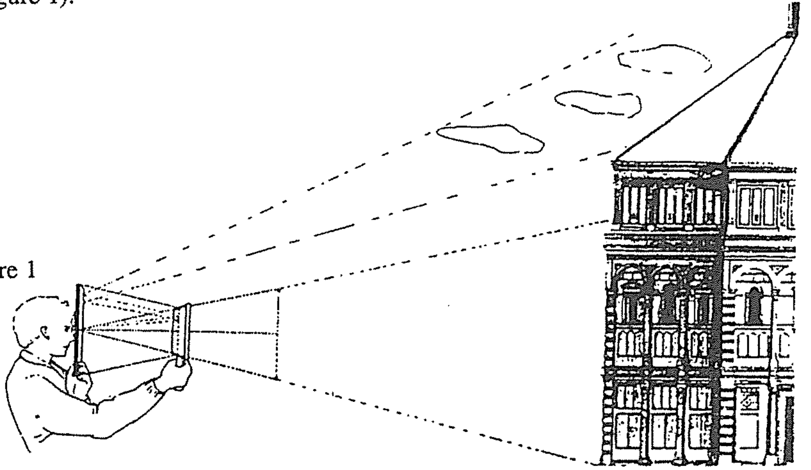
Dans un troisième temps, Jean-Pierre Le Goff et Didier Bessot de l'IREM de Caen, ont présenté aux élèves les méthodes utilisées par Piero della Francesca pour effectuer des représentations en perspective géométrique. Ces méthodes étant relativement simples à utiliser, les élèves ont pu réaliser des représentations de figures planes, de volumes, certains étant parfois très complexes.

Lors d'un voyage à Florence, les élèves purent apprécier les œuvres des peintres italiens du Quattrocento ainsi que celles de quelques-uns de leurs prédécesseurs ou successeurs. Par groupes de trois ou quatre, ils étaient chargés d'étudier l'œuvre d'un artiste et de mettre en évidence ses aspects particuliers concernant la perspective. A leur retour, ce travail a été poursuivi avec l'aide de leurs professeurs de français, d'histoire.et de dessin. Les élèves de 1°E ont, pour leur part, plus insisté sur l'aspect technique de la perspective et ont continué leur recherche avec leur professeur de construction.

Une exposition, réalisée par les élèves, sous la direction de la graphiste Joëlle Brover, a permis de présenter le travail des élèves au cours de l'année. Elle tente de retracer brièvement l'histoire de la perspective et de présenter les travaux des principaux acteurs de cette histoire. Elle est aussi le reflet du regard nouveau des élèves sur la peinture de la Renaissance italienne.

Dans le même temps, des élèves de 5° du collège Paul Bert ont travaillé sur le Moyen-âge et la Renaissance. Ils ont étudié quelques règles de la perspective centrale ainsi que l'expérience de Brunelleschi évoquée sur la figure 1, à partir de laquelle on peut percevoir les prémisses des modes de représentation futurs. Sur cette figure, on peut voir un personnage, Brunelleschi, qui regarde le Baptistère de Florence à travers un trou percé dans un tableau. Sur ce tableau, il a représenté ce même Baptistère, et il se trouve à l'endroit exact d'où il a exécuté sa peinture. le tableau est percé au niveau du point de fuite. A cette occasion, les élèves ont fabriqué des "tavolette" (petits tableaux) sur lesquelles était représenté le Baptistère de Florence. Chaque tavoletta était percée au point de fuite principal, et les élèves ont pu vérifier, lors de leur voyage à Florence, le bien-fondé de la méthode de Brunelleschi. En effet, ils se sont placés face au Baptistère à un endroit déterminé, ont regardé par le trou percé dans la tavoletta placée à l'envers et ont mis un miroir entre le tableau et le Baptistère. Ils ont alors pu constater que le Baptistère réel et le reflet du tableau dans le miroir ne faisaient qu'une seule et même image (voir la figure 1).

Figure 1



Expérience de Brunelleschi (~1420)

Par ailleurs, les élèves ont réalisé une fenêtre grâce à laquelle ils ont pu reproduire l'expérience de la "fenêtre de Dürer". Ils avaient eu la même sensibilisation que les élèves de 1° lors d'une conférence de Philippe Comar et d'une visite-conférence au musée du Louvre. En outre ils ont travaillé avec leurs professeurs, sur la légende de la vraie croix, thème développé par Piero della Francesca dans les fresques de l'église Saint François d'Arezzo. Suivant les traces de Piero dans sa ville natale de Borgo San Sepolcro, ils ont étudié les œuvres de Piero exposées au musée civique de Borgo. Des tavolette ainsi que la "fenêtre de Dürer" ont été jointes à l'exposition "Perspectives de Florence" des élèves de 1°.

Rapide histoire de l'apparition de la perspective.

Parmi les premiers exemples d'apparition de la perspective figure la représentation d'un carrelage. Au XIIIème siècle et jusqu'à la fin du XVème, les artistes et mathématiciens admettront la convergence des perpendiculaires au tableau en un point unique. Le problème posé était donc la détermination de la position des parallèles au plan du tableau.

Les premières règles consistaient à considérer la suite des écartements successifs des parallèles comme une suite géométrique. Le coefficient de cette suite était le plus généralement 2/3[1] (cf figure 2)

[1] A ce propos voir l'annexe 1 (la règle des deux tiers), l'annexe 4 (exercice 1) et l'annexe 5 (1° question).

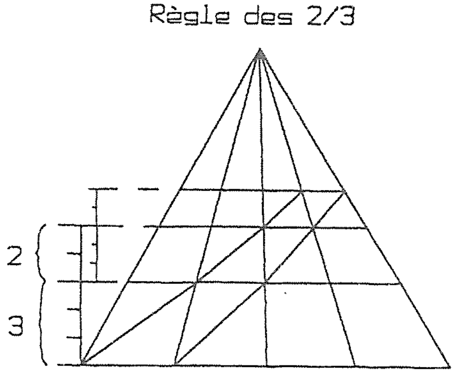


figure 2

Ce mode de représentation ne conserve pas l'alignement des diagonales, ce qui, pour notre regard du XXème siècle, provoque une aberration par rapport à notre vision habituelle, celle de la photographie (fig.2). Quelle que soit la suite géométrique choisie, ce "défaut" demeure, mais il est possible d'obtenir des courbures différentes suivant le choix de l'écartement initial. Certaines courbes sont concaves, convexes, et parfois, on peut observer un changement de courbure, par exemple, lorsque l'écartement initial est très légèrement supérieur à 1/5 de la distance de la première parallèle au point de fuite principal.

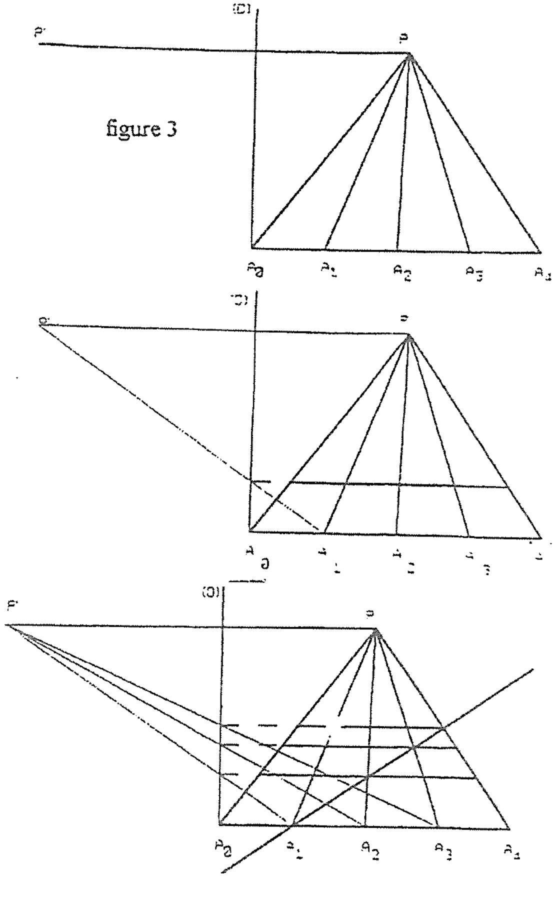


figure 3

Ces méthodes furent critiquées par Alberti dans son ouvrage **De Pictura**, *"Ceux qui feraient ainsi,..., je déclare qu'ils se trompent,..."*. Au paragraphe 20 du livre I,, il va donner une méthode pour construire les parallèles au tableau., mais auparavant, il est intéressant de remarquer qu'Alberti va fixer les conditions de représentation de l'espace et définir les conventions qui sont encore les nôtres. Au paragraphe 12, il écrit: *"La peinture sera donc une section de la pyramide visuelle selon une distance donnée, le centre étant placé et les lumières fixées; cette section est représentée avec art sur une surface donnée au moyen de lignes et de couleurs;"*. Cette définition permettra de justifier sa construction et toutes les règles à venir.

Voyons à présent quelles sont les règles fournies par Alberti. Il trace la ligne de terre et les perpendiculaires au tableau qui convergent en un point, le point de fuite principal, situé à une hauteur d'homme. Il place ensuite une droite (D), perpendiculaire à la ligne de terre et place un point à la même hauteur que le point de fuite dont la distance à cette perpendiculaire est égale à la distance de l'œil au tableau. De ce point, il trace les droites passant par les pieds des perpendiculaires au tableau et obtient ainsi, aux intersections avec la droite (D), les "hauteurs" des parallèles successives.(cf figure 3). Alberti n'apporte aucune "preuve" de sa construction, mais justifie celle-ci par le fait que, dans sa représentation, les diagonales sont alignées. *(" J'aurai la preuve* *que celles-ci ont été correctement tracées si une même ligne sert de diamètre aux rectangles juxtaposés").*

En 1470, dans son ouvrage *De Prospectiva Pingendi*, Piero della Francesca reprend la méthode d'Alberti et démontre le caractère légitime de celle-ci à la proposition XIII du livre I. La démonstration proposée repose sur une utilisation répétée du théorème de Thalès. Nous avons demandé aux élèves de redémontrer cette proposition[2]
L'ouvrage de Piero della Francesca contient un grand nombre de démonstrations concernant les propriétés de la perspective géométrique. Nous citerons seulement celles qui ont fait l'objet d'un travail avec nos élèves. Tout d'abord, Piero della Francesca étudie les rapports de réduction des lignes parallèles au tableau et montre que ceux-ci ne sont ni en progression géométrique ni arithmétique mais en progression que nous qualifions aujourd'hui d'harmonique. En fait il fournit deux exemples (deux suites de nombres pouvant être proportionnelles à des réductions successives) et précise qu'il ne peut fournir de méthode générale. La démonstration de cette propriété à été proposée aux élèves de 1° en devoir (annexe 1). La proposition XVIII du livre I permet d'effectuer la construction en perspective d'un point quelconque situé dans un carré à partir de la représentation de ce carré sans utiliser la distance à laquelle se trouve l'observateur (cf.figure 4)[3]

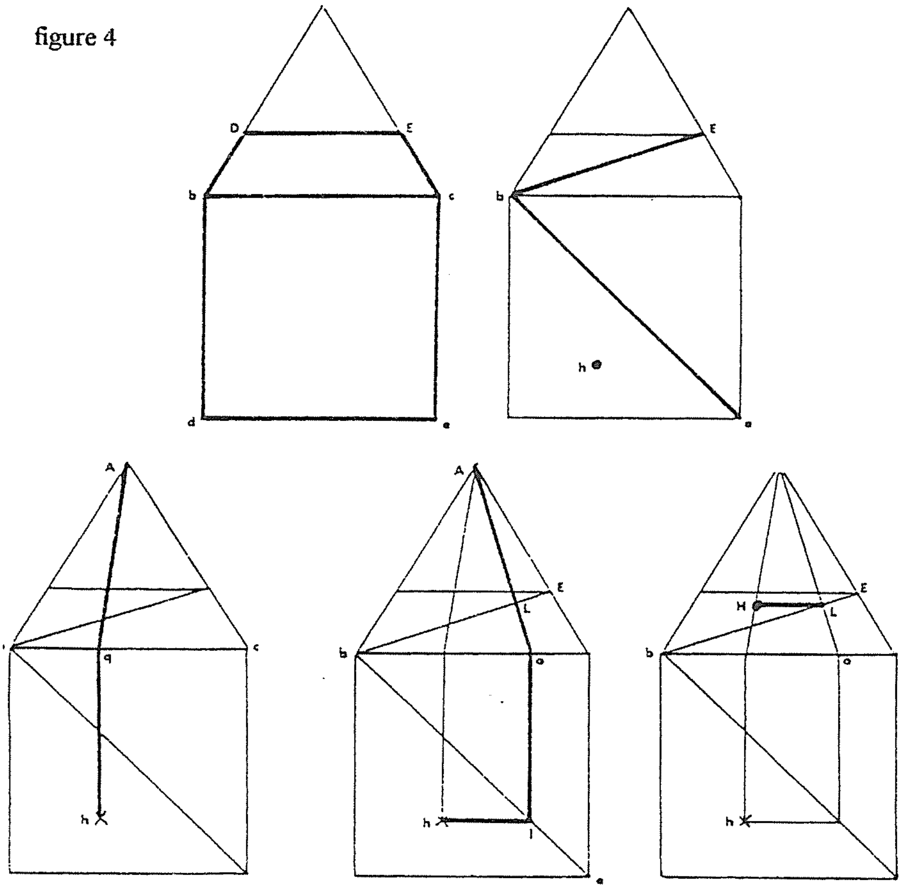
Sa construction repose sur l'utilisation de la diagonale du carré et de son image. De là, il sera possible de déduire l'apparence d'une figure plane quelconque, puis celle d'une figure en trois dimensions.Au début du XVIème siècle, un chanoine de Toul, Jean Pélerin dit Viator proposera une méthode reposant uniquement sur la notion de point de distance. La démonstration de son équivalence avec celle d'Alberti paraîtra en 1582 dans un traité de Vignola-Danti (annexe 2).

---

[2] Cette activité est présentée dans le numéro 7 de la revue Mnémosyne, IREM Paris 7.
[3] Voir l'annexe 1 (la juste proportion) et l'annexe 5 (4° question).

Figures tirées de Bessot D. et Le Goff J.P. Mais où est donc passée la troisième dimension?[4]

figure 4



Les étapes de la construction par la méthode de Piero della Francesca, de l'apparence d'un point donné dans un carré d'apparence connue.

Pour conclure, en ayant conscience du caractère très succint de ce propos, il nous a paru important de citer les travaux de Guidobaldo del Monte et notamment la proposition 32 de son traité, **Perspectivae Libri Sex** (1600). *"Si l'oeil voit des lignes parallèles, qui, prolongées, rencontrent la section, les lignes apparentes dans la section se rencontreront en un point unique, aussi haut que l'oeil au-dessus d'un plan parallèle aux lignes parallèles."* Cette proposition est la première à démontrer la convergence des apparences de droites parallèles, elles-mêmes non parallèles au tableau. Elle nous a permis de mettre un point final au travail effectué avec les élèves en justifiant les constructions proposées antérieurement (annexe 3).

En complément des problèmes faits par les élèves de premières, nous vous proposons quelques activités menées en classes de cinquième et de seconde (annexes 4 et 5).

---

[4] Histoire de Problèmes Histoire de Mathématiques, IREM, Ellipses, 1993.

ANNEXE 1

PERSPECTIVE D'UN CARRELAGE AU SOL

On admet la propriété utilisée déjà par de nombreux peintres du Trecento (14ème siècle), que les perpendiculaires au tableau aient des apparences concourantes en un point dit "point de fuite principal". Ainsi, un sol carrelé, formé de dalles carrées dont un côté est parallèle, et l'autre perpendiculaire à la ligne de terre, est représenté de telle sorte que les apparences des perpendiculaires à la ligne de terre concourent en un point F de la ligne d'horizon. On se propose d'étudier comment espacer les parallèles à la ligne de terre, c'est à dire comment "raccourcir" les dimensions du carré sur la direction des apparences des perpendiculaires au tableau.

1. La règle des deux tiers: Au Trecento et jusque vers les années 1435, les peintres avaient l'habitude d'utiliser un coefficient de raccourcissement de $\frac{2}{3}$
Effectuez une telle construction d'un dallage à 16 carrés de côté 1. Tracez les diagonales du damier obtenu. Que remarquez-vous?

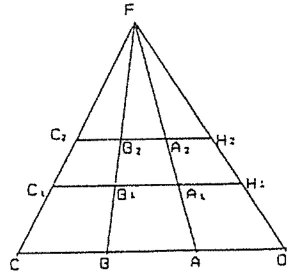
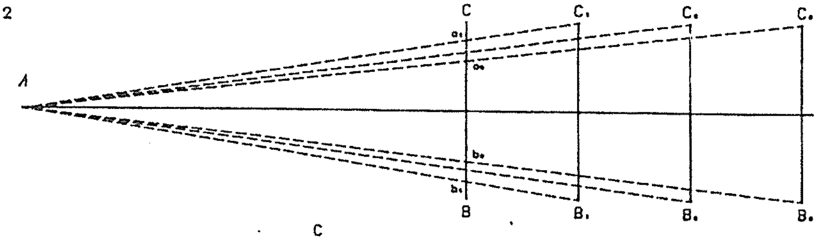


fig. 1 OH_1 est quelconque, $OH_1 < OA$,

$$H_1H_2 = \frac{2}{3}\, OH_1 \; ; \qquad H_2H_3 = \frac{2}{3}\, H_1H_2$$

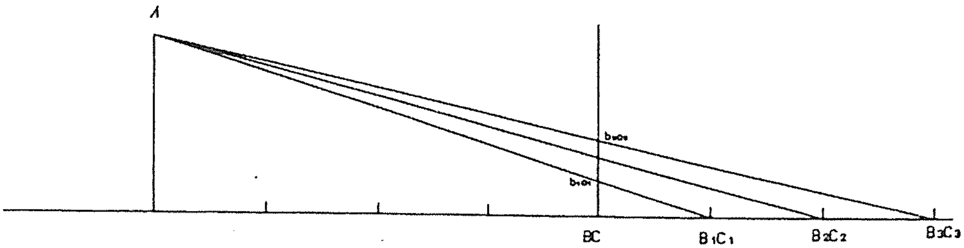
2. La juste Proportion : Piero della Francesca, dans son traité manuscrit datant d'environ 1470, *De prospectiva pingendi*, critique l'usage de cette proportion des $\frac{2}{3}$, et propose d'autres valeurs pour les coefficients de réduction. (cf. le texte ci-joint - traduction de J. P. Le Goff - et les figures 2 et 3 . Ces figures reproduisent celles qui accompagnent le texte. Ces vues de dessus et de profil sont les seules représentations qu'on trouve dans le manuscrit de Piero della Francesca)

plan fig.2



C

profil fig.3



Jusqu'ici j'ai parlé de proportion des lignes et des surfaces non dégradées (non mises en perspective), et j'ai dit comment les diagonales partagent les surfaces carrées en deux parties égales, et pourquoi toutes les divisions effectuées dans ces surfaces par des lignes parallèles sont en proportion. Maintenant, parce que je veux parler des lignes et des surfaces dégradées (mises en perspective), il est nécessaire de démontrer cette proportion, car quand je dis proportionnellement, il faut savoir de quelle proportion je parle car les proportions sont innombrables; et celle-ci n'est ni double[1] *comme l'est 2 -4 - 8, ni sesquialtère*[2] *comme 4 - 6 - 9, ni sesquitierce comme 9 - 12 - 16, ni triple ni quadruple*[3]*, mais je dis que c'est une proportion dégradée*[4]*, non pas encore comme 4 - 8 - 12 - 15, ni même comme 6 - 9 - 11 - 12* [5] *, mais qui s'établit selon la distance de l'oeil au support où l'on reporte les choses dégradées*[6] *et la distance de ce support à la chose vue.*

A savoir : soient quatre lignes parallèles, chacune est à une brasse de l'autre, et elles sont chacune longues d'une brasse; elles sont en outre entre deux lignes parallèles, et de la première ligne qui est le support, à l'oeil, il y a quatre brasses; je dis que de la seconde à la première, il y a un rapport sesquiquarte [7] *, que de la troisième à la seconde, dans le support, il y a un rapport sesquiquinte, que de la quatrième à la troisième, dans le support, il y a un rapport sesquisixte. Pour être mieux entendu, la proportion entre ces quatre lignes est celle qui est entre les quatre nombres suivants : 105 - 84 - 70 - 60; mais si nous modifions la distance de l'oeil au support, alors la proportion change, i-e : si tu recules de deux brasses, de sorte qu'il y en ait six de l'oeil au support, ces quatre lignes changeront de proportion, et seront tout comme ces quatre nombres: 84 - 72 - 63 -,56, en proportion différente des premiers nombres envisagés parce que, dans cette proportion, la distance à l'oeil du premier support n'est plus la même que la distance (de l'oeil) à la chose vue dans le second support. Donc en changeant le support, on change la proportion. Et toujours la proportion de la seconde ligne à la première est celle qui est entre (la distance) de l'oeil au support - qui est la première ligne -, et (la distance) de la seconde ligne à l'oeil, i-e: la proportion qu'il y a de la ligne qui part de l'oeil et aboutit à la seconde ligne; et du fait qu'on ne peut démontrer de façon manifeste, par des nombres, les modifications de ces proportions, je les démontrerai avec les lignes dans la dégradation (l'apparence ou l'image perspective) des surfaces.*

---

1 Ce texte a été lu en classe et des éclaircissements ont été donnés au fur et à mesure, que je résume dans cette note et les suivantes ; 2-4-8 est une *proportion double* puisque $\frac{4}{2} = \frac{8}{4} = 2$

2 4-6-9 est une *proportion sesquialtère* puisque $\frac{6}{4} = \frac{9}{6} = 1 + \frac{1}{2}$

3 9-12-16 est une *proportion sesquitierce* puisque $\frac{12}{9} = \frac{16}{12} = 1 + \frac{1}{3}$ Une proportion *triple* ou *quadruple* correspond à un rapport commun égal à 3 ou à 4.

4 *proportion dégradée*: les termes consécutifs n'ont pas de rapport constant

5 *4-8-12-15* : $\frac{8}{4} = 1 + 1$ $\frac{12}{8} = 1 + \frac{1}{2}$ $\frac{15}{12} = 1 + \frac{1}{4}$.

6-9-11-12 : 9 - 6 = 3, 11 - 9 = 2, 12 - 11 = 1

6 i. e. mises en perspective

7 *sesquiquarte* : le rapport de la première ligne à la seconde est égal à $1 + \frac{1}{4}$. *sesquiquinte* :le même type de rapport vaut $1 + \frac{1}{5}$. *sesquisixte* :le même type de rapport vaut $1 + \frac{1}{6}$.

Compléter la figure 4 ci-dessous, construite en perspective cavalière, dans laquelle le point A représente l'oeil du peintre ou de l'observateur, T , le plan du tableau, G le plan du sol (dit souvent géométral) sur lequel est inscrit un carrelage $BCB_1C_1B_2C_2$ ... représenté en $BCb_1c_1b_2\,c_2$ ... sur le tableau.

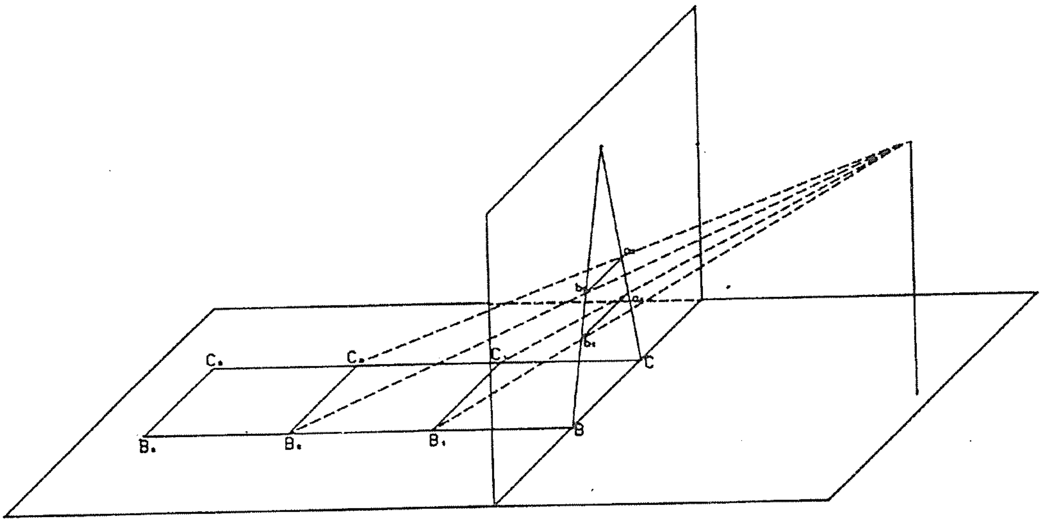


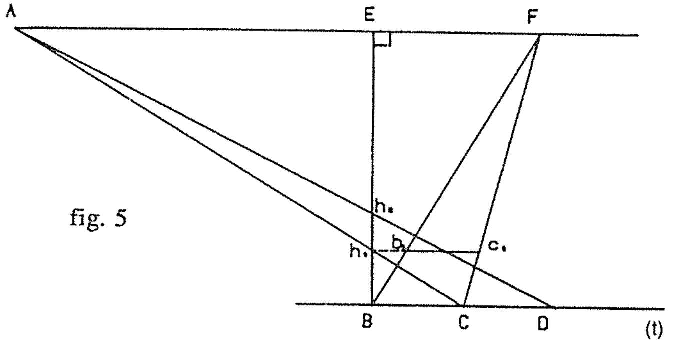
fig. 4

a) Sur la figure 4 placer les points b'_1 , c'_1 ,b'_2 , c'_2 intervenant dans la figure 2. Montrer que $b_1c_1 = b'_1c'_1$ et $b_2\,c_2 = b'_2\,c'_2$ etc.

b) Montrer, en utilisant la figure 2, que si la distance de l'oeil au tableau est de 4, on retrouve pour ces rapports les proportions proposées par Piero : $\dfrac{BC}{b1c1} = \dfrac{105}{84}$, $\dfrac{b1c1}{b2c2} = \dfrac{84}{70}$ etc . Calculer ces rapports pour une valeur d quelconque de la distance de l'oeil au tableau.

*3. **La construction légitime*** : Dans son traité *de Pictura* de 1435, Alberti avait déjà critiqué l'usage de la règle des deux tiers, et proposé une méthode de construction de l'apparence d'un dallage, qui a été expliquée en classe. Il la considère légitimée par le fait que les diagonales sont en lignes droites.

fig. 5



a) Soit F un point quelconque sur (AE) Soit d = AE , la distance de l'oeil au tableau. Montrer que par la construction d'Alberti, amorcée sur la figure 5, on retrouve la même valeur du rapport $\frac{BC}{b1c1}$ qu'avec la méthode de Piero.

(On peut calculer $\frac{FB}{Fb_1}$ *et* $\frac{EB}{Eh_1}$)

N.B. Piero della Francesca démontre d'ailleurs par ce type de remarque que la méthode d'Alberti donne la bonne construction d'un dallage. (cf. prop. XIII du Livre I du *De prospectiva pingendi*)

b) Montrer de même qu'en poursuivant la construction, on retrouve les mêmes valeurs des rapports $\frac{b_1c_1}{b_2c_2}, \frac{b_2c_2}{b_3c_3}$, ... que ceux obtenus ci-dessus.

c) Conjecturer la valeur de $\frac{b_nc_n}{b_{n+1}c_{n+1}}$, et la démontrer .

ANNEXE 2

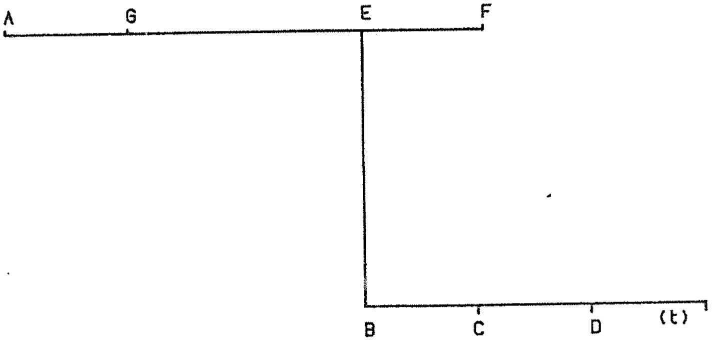
Equivalence des constructions d'Alberti et de Viator

ou équivalence de la construction "légitime"et de la méthode du tiers point

La démonstration en a été faite par Danti en 1582 et publiée dans un traité reprenant les travaux de l'architecte Vignole.

Soit A, B, C trois points équidistants sur la ligne de terre (t), amorçant le dessin d'un carrelage, F un point de la ligne d'horizon (d), parallèle à (t). Effectuer les deux constructions suivantes avec des couleurs différentes.

fig. 6



1. Construction d'Alberti : Soit E le projeté orthogonal de C sur la ligne d'horizon (d), H un point de (d), non situé sur [EF) . (N.B. la distance EH représente la distance de l'oeil au tableau). Soit I_1 l'intersection de (HB) et (EA), et I_2 l'intersection de (EA) et (HC). I_1 donne la position de la première transversale du carrelage, parallèle à la ligne de terre, I_2 celle de la deuxième.

2. Construction de Viator : (D'après le *De artificiali perspectiva* , publié à Toul en 1505 par Jean Pélerin - dit Viator -) Soit G le point de [FH) tel que FG = EH. Soit C_1 l'intersection de (FC) et de (GB), C_2 l'intersection de (FC) et de (GA), B_1 l'intersection de (FB) et de (GA). La première transversale du carrelage obtenue par cette méthode est (B_1C_1)

Que remarquez-vous quant aux deux constructions ?

Démonstration de la coïncidence des deux constructions

1) Démontrez que (B_1C_1) est parallèle à (t).

2) Démontrez que (I_1C_1) est parallèle à (t). Que peut-on dire des points B_1 , C_1 et I_1 ?

3) Poursuivre ce processus en construisant B_2 et démontrer de même que B_2 , C_2 et I_2 sont alignés. Expliquez l'étape suivante.

4) Que remarque-t-on quant aux diagonales de la représentation du carrelage ?

ANNEXE 3

Lecture de la Proposition XXXII du premier livre de perspective de Guidobaldo del Monte

1. Enoncer en termes modernes le théorème de la proposition XXXII. Faire une figure reprenant la figure qui accompagne le texte, avec le mode de représentation habituel (perspective cavalière).

2. Rédiger une démonstration moderne de ce théorème.

3. Transposer en termes modernes l'énoncé du corollaire 1.

4. X désigne le point de concours des apparences des perpendiculaires au tableau. On choisit une direction de diagonales d'un carrelage dont les mailles carrées sont formées de parallèles et de perpendiculaires aa plan du tableau; où se trouve le point de concours Y des apparences de ces diagonales ? Préciser la distance XY. Où concourent les apparences de l'autre direction de diagonales?

figure 7

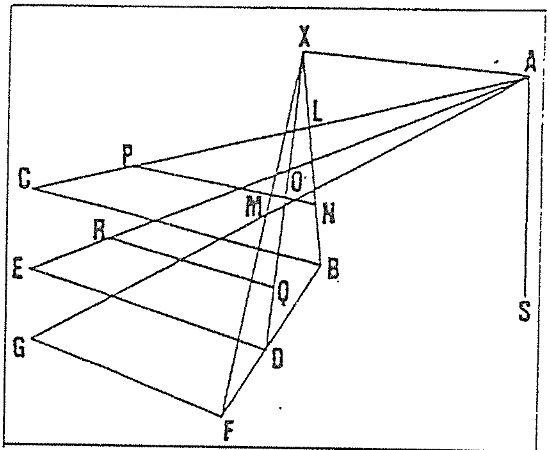


Fig 4. Perspective de droites parallèles . Les images se coupent au point de concours X.
Nota. C'est deux figures sont extraites de Perspective Libri Sex.

Guidobaldo del Monte *Perspectivae Libri Sex*, Livre I , proposition XXXII (traduction de C. Guipaud)

Si l'oeil voit des lignes parallèles qui, prolongées, rencontrent la section, les lignes apparentes dans la section se rencontreront en un point unique , aussi haut que l'oeil au dessus d'un plan parallèle aux lignes parallèles.

Soit A l'oeil, et soit SA sa hauteur sur un plan parallèle aux lignes BC, DE, FG, parallèles entre elles; ces lignes sont certainement dans un même plan et rencontrent la section BXF aux points B, D, F. Je dis que les lignes apparentes dans la section se coupent en un point unique , aussi haut que l'oeil au-dessus du plan auquel appartiennent les lignes parallèles.

On mène du point A la ligne AX, parallèle aux lignes BC, DE, FG et soit X le point dans la section; on joint BX, DX, FX et AC, AE, AG. Puisque AX et BC sont parallèles, les lignes XB et AC qui les relient apprtiennent au même plan auquel appartiennent AX et BC; pour cette raison, le rayon visuel CA coupe la ligne BX; il la coupe en L. De la même façon, on montrera que AE coupe DX en O et que GA coupe FX en M. Mais alors, puisque les points B, X appartiennent à la section , la ligne BX appartiendra à la section; d'où BC apparaîtra en BL dans la section; et pour la même raison, DE apparaîtra en DO et GF en FM; et puisque BL, DO, FM font partie de BX, DX, FX, les lignes BL, DO, FM appartiendront à des lignes qui concourent en un point unique.

Puisque d'autre part, AX est parallèle aux lignes BC, DE, FG, AX sera parallèle aussi au plan qui contient les parallèles; pour cette raison, le point X est aussi haut que l'oeil au dessus *du plan auquel appartiennent les parallèles; pour cette raison, le point X est aussi haut que l'oeil A au dessus du plan auquel appartiennent les parallèles; alors les lignes BL, DO, FM se coupent en un point unique, aussi haut que l'oeil au dessus du plan auquel appartiennent les parallèles. C'est ce qu'il fallait démontrer.*

Si on avait eu des lignes parallèles NP, QR, FG n'appartenant pas toutes au même plan, on aurait également montré que les lignes apparentes dans la même section concourent au même point X.

En effet les lignes apparentes sont NL, QO, FM, lesquelles concourent en X. La même chose se vérifiera dans les tous autres cas.

Mais puisque, par la suite, il faudra nommer souvent le point en lequel concourent les lignes dans la section, un tel point, comme par exemple X, sera appellé ***point de concours*** *et par cela, on devra entendre le point de concours des lignes BC, DE, FG, et des autres lignes parallèles à celle-ci. En effet, bien que les lignes BL, DO, FM se coupent en X, les lignes BC, DE, FG sont cependant parallèles, elles qui dans la section semblent pour l'oeil se couper en X.*

On doit dire aussi pour cela pour une seule ligne, de telle façon que si on considère par exemple seulement la ligne BC, le point X sera absolument le point de concours de la ligne BC, puisque BC apparaît dans la section comme s'il tendait vers le point X . Si on avait mené d'autres lignes parallèles à BC, le même point X serait aussi, de la même façon, le point de concours de toutes les lignes.

Corollaire 1: *Il résulte de cela que le point de la section par lequel passe la ligne conduite par l'oeil et équidistante aux lignes parallèles est un point de concours.*

EXERCICE 5

Construction d'un cube en perspective : Méthode de Piero della Francesca

Sur la figure ci-jointe. le carré $\alpha,\beta,\gamma,\delta$. est la vue de "dessus" d'un cube de 7cm de côté qu'il s'agit de représenter en perspective.

1°) Représenter par la "méthode de Piero" (cf exercice 4) l'image a,b,c d du carré $\alpha,\beta,\gamma,\delta$.

2°) Pour figurer le cube en "volume", on utilise la méthode suivante:

Principe: Les segments comme [HK], situés à la verticale de la ligne de terre(D) sont "vus" en grandeur réelle donc [HK] a une longueur de 7cm égale au côté du cube.

Les verticales (parallèles à [HK] tracées entre les 2 droites OH et OK donnent les "réductions des verticales en fonction de leur éloignement "en profondeur".

Construction d'un point:
A partir du point a obtenu au 1°), tracer:

-la projection a_1 de a sur FH parallèlement à (D)

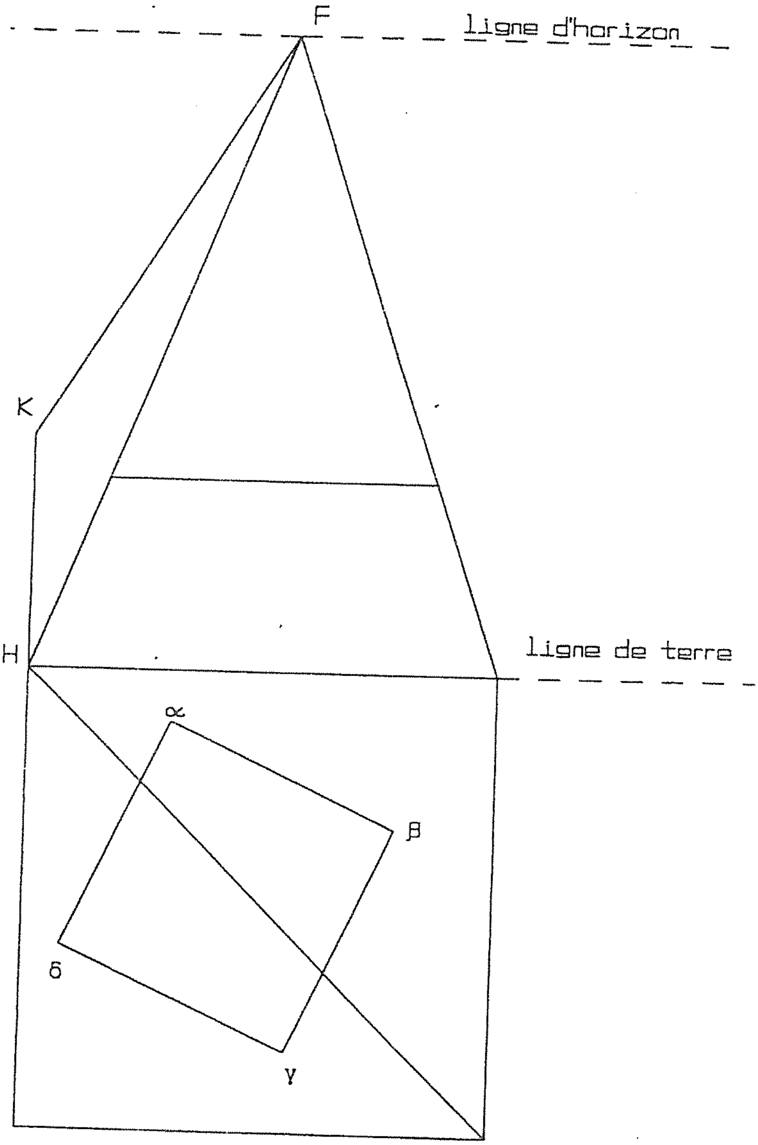
-la projection a_2 de a_1 sur FK parallèlement à HK

-le point A est l'intersection de la parallèle à HK passant par a et de la parallèle à (D) passant par a_2.

3°) Représenter avec la même méthode les points B,C et D.

4°) Terminer la représentation du cube, en dessinant en "traits pleins" les arêtes visibles et en "pointillés" les arêtes cachées.

5°) Vérifier sur le dessin que toutes les droites parallèles entre elles (et non verticales) de la représentation, se coupent en un même point situé sur la ligne d'horizon.



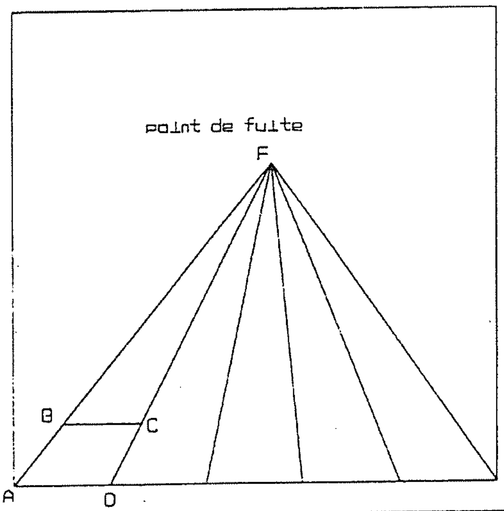
Vérification: Soit G le point d'intersection de AC avec la ligne d'horizon.

Placer l'œil à la verticale de F et à la distance FG pour vérifier que la figure représentée a bien l'apparence d'un cube en trois dimensions.

EXERCICE N°3

Méthode de Piero della Francesca

Compléter le "dallage" en vous servant de l'apparence ABCD d'un carré de base et de l'alignement de diagonales.

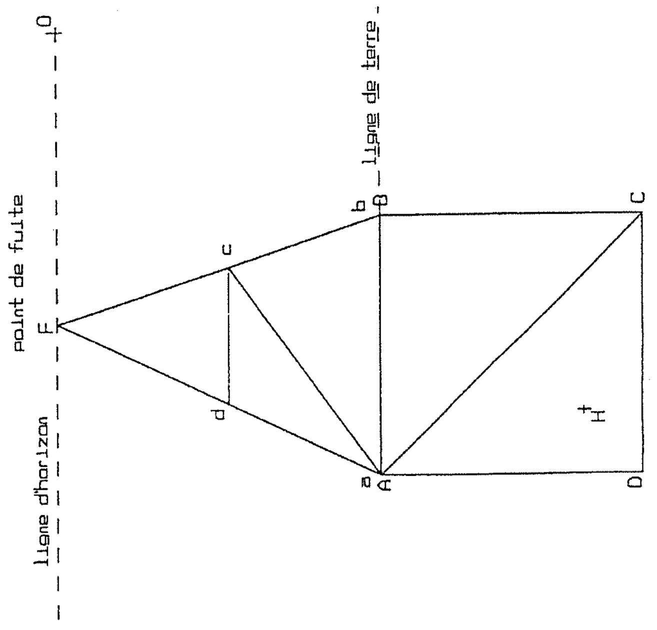


EXERCICE N°4

Etant donné un carré ABCD et son image perspective abcd, construire l'image perspective h du point H.

Méthode: a) Projeter le point H sur (AB) parallèlement à (AD), puis sur (AC) parallèlement à (CD).

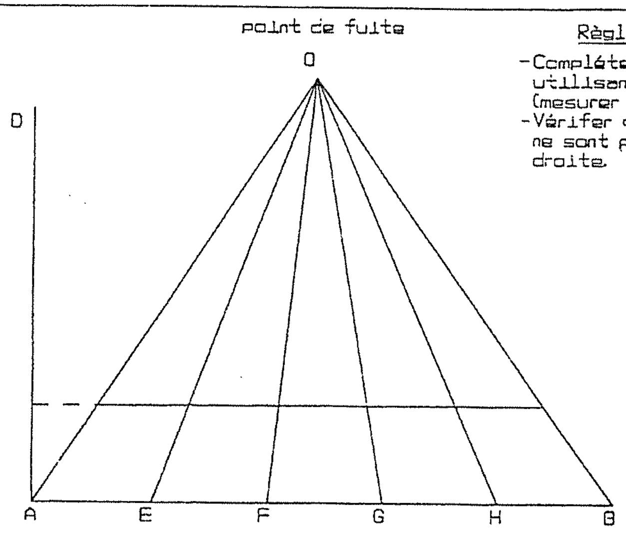
b) Déterminer les images perspectives de ces projetés et en déduire le point h.



ANNEXE 4

CONSTRUCTIONS DE CARRELAGES EN CLASSE DE SECONDE

EXERCICE N°1



Règle des 2/3

- Compléter le "dallage" en utilisant la règle des 2/3 (mesurer sur le côté AD)
- Vérifer que les diagonales ne sont pas sur une même droite.

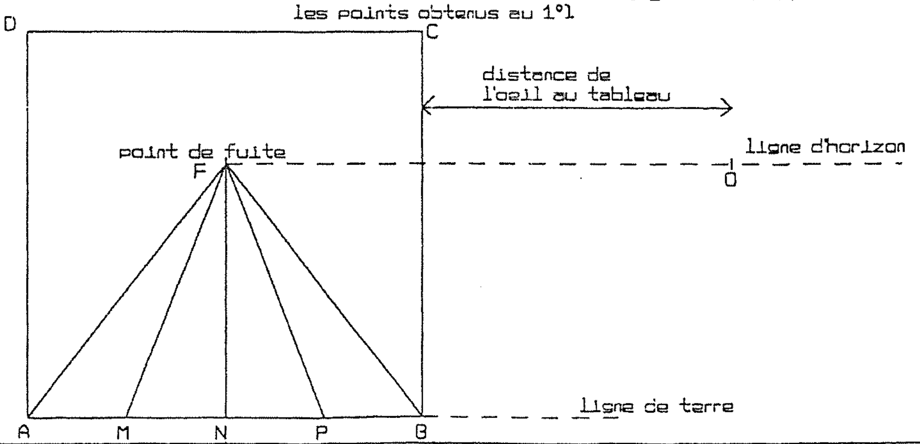
EXERCICE N°2

Règle d'Alberti

Compléter le "dallage" à l'aide de la méthode suivante:

1°) Joindre les points A.M.N.P.B au point O et marquer les points d'intersection des droites obtenues avec la droite (BC).

2°) Tracer les parallèles à la ligne de terre passant par les points obtenus au 1°)



ANNEXE 5

ACTIVITÉS EN 5E

Un objectif important des activités mathématiques en 5e fut de faire naître l'émerveillement par l'obtention d'un même dessin par trois voies radicalement différentes : un tracé empirique, un tracé géométrique selon des règles strictes, une utilisation des proportions numériques. Ce résultat surprenant fut mis en scène lors de l'exposition des travaux réalisés dans les disciplines artistique, historique et mathématique : par les trois méthodes, on obtient un dessin de l'"apparence perspective" d'un carré quadrillé légitimée par la règle énoncée par Alberti : alignement des diagonales du quadrillage.

1- Réalisation d'un quadrillage aux deux-tiers pouvant être considéré comme l'apparence perspective d'un carré, à l'aide des questions suivantes:

a) Ecris sous forme d'une seule fraction $1+\frac{2}{3}$, $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}$, $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}$

b) Calculez $\frac{5}{3} de 27 mm$; $\frac{19}{9} de 27 mm$; $\frac{65}{27} de 27 mm$

c) Dans un repère xoy orthogonal dont l'unité sur [ox) est de 2 cm et celle sur [oy) de 27 mm, trace les droites horizontales d'ordonnées respectives 1, $1+\frac{2}{3}$, $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}$, $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}$

d) Du point S de coordonnées 3 et 5 trace la verticale puis les obliques passant par les points de [ox) d'abscisses 0, 1, 2, 4, 5, 6.

e) On appelle O le point de coordonnées 0 et 6, A et B les points d'intersection de la droite horizontale d'ordonnée $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}$ respectivement avec (SO) et (SC). Trace les diagonales obliques, penchées vers la droite, de chacun des petits trapèzes du trapèze OABC.

f) Si on considère OABC comme la mise en perspective d'un carré construit sur [OC], as-tu des remarques à faire sur cette perspective ?

Remarque: L'objectif est de montrer que les diagonales du quadrillage ne sont pas alignées.

2- Lecture du texte d'Alberti sur l'apparence perspective d'un quadrillage.

a) Les diagonales du quadrillage sont-elles alignées ?

b) Quel est le point dont Alberti parle ligne 18 ?

3 - Les figures du scénario de la construction de l'image perspective d'un point, tirées du traité de Piero furent données aux élèves qui eurent en charge d'en rédiger les explications. (Cf. fig. 4 du texte de présentation)

4 - Le calcul de la "bonne proportion" fut dégagé du texte de Piero (Cf. annexe 1) dont la lecture fut aidée des questions suivantes :

a) Explique les lignes 10 à 12.

b) Simplifie les fractions suivantes : $\frac{8}{4}$; $\frac{12}{8}$; $\frac{15}{12}$

c) Ecris sous la forme : $1+\frac{1}{p}$ avec p entier $\frac{105}{84}$; $\frac{84}{70}$; $\frac{70}{60}$; $\frac{84}{72}$; $\frac{72}{63}$; $\frac{63}{56}$

d) Réalise le dessin à l'aide des proportions.

Alberti *De la peinture* (De Pictura) Livre I, traduction de J. L. Schefer

je parlerai donc, en omettant toute autre chose, de ce que je fais lorsque je peins. Je trace d'abord sur la surface à peindre un quadrilatère de la grandeur que je veux, fait d'angles droits, et qui est pour moi une fenêtre ouverte par laquelle on puisse regarder l'histoire[1], et là je détermine la taille que je veux donner aux hommes dans ma peinture. Je divise la hauteur de cet homme en trois parties et ces parties sont pour moi proportionnelles à cette mesure qu'on nomme vulgairement bras[2]. Car, comme on le voit par la symétrie[3] des membres de l'homme, la longueur la plus commune du corps d'un homme est de trois bras. À l'aide de cette mesure, je divise la ligne de base du rectangle que j'ai tracé en autant de parties qu'elle peut en contenir, et cette ligne de base du rectangle est pour moi proportionnelle à la quantité transversale[4] la plus proche sur le sol et qui lui est parallèle. Je pose ensuite un seul point, en un lieu où il soit visible à l'intérieur du rectangle. Comme ce point occupe pour moi le lieu même vers lequel se dirige le rayon central, je l'appelle point central. Ce point est convenablement situé s'il ne se trouve pas, par rapport à la ligne de base, plus haut que l'homme que l'on veut peindre. De cette façon, ceux qui regardent et les objets peints sembleront se trouver sur un sol plat. Le point central posé, je tire des lignes droites de ce point à chacune des divisions de

1. Il s'agit d'un des concepts majeurs du De Pictura. Ni le terme d'histoire, ni celui d'anecdote ou de sujet ne convient tout à fait. L'historia est l'objet même de la peinture qui résulte d'une invention (le sujet, qui peut faire l'objet d'une narration ou d'une description) et d'une composition achevée (agencement des formes, des parties, des corps). On ne peut cependant exclure cette acception simple : le programme « réaliste » d'Alberti exige que la peinture montre et raconte. Dans sa définition la plus formelle, l'historia est un agencement de parties (de corps, de personnages, de choses) doté de sens.

2. Bras : mesure florentine (0,58 mètre).

3. Voir note 1, p. 107.

4. C'est-à-dire proportionnelle à la ligne B de la figure 10 b qui, à ce stade de la construction, n'a pas encore été positionnée. La ligne de base sera proportionnelle à toutes les lignes transversales à venir.

la ligne de base, et ces lignes me montrent comment les quantités transversales successives changent d'aspect presque jusqu'à une distance infinie.

Pour ce faire, certains traceraient à travers le rectangle une ligne parallèle à la ligne de base et diviseraient en trois parties l'intervalle qui se trouve entre les deux lignes. Puis, à cette seconde ligne parallèle à la ligne de base, ils ajouteraient une autre ligne parallèle, placée de telle façon que l'intervalle divisé en trois parties qui sépare la ligne de base de la seconde ligne soit plus grand d'une partie que celui qui sépare la seconde ligne de cette troisième ; et ils ajouteraient ainsi d'autres lignes pour que l'intervalle qui suit un autre intervalle entre les lignes soit toujours, pour employer le terme des mathématiciens, *superbipartiens*[0]. Ceux qui feraient ainsi, même s'ils affirmaient suivre la meilleure voie en peinture, je déclare qu'ils se trompent beaucoup car, ayant posé au hasard la première ligne parallèle, quand bien même les autres lignes parallèles se suivraient selon un même rapport de diminution, le fait est qu'ils n'ont pas le moyen d'obtenir un lieu précis pour la pointe [de la pyramide] qui permet de bien voir. C'est ainsi que l'on fait facilement de lourdes erreurs en peinture. Ajoute à cela que leur façon de procéder serait mauvaise chaque fois qu'ils placeraient le point central plus haut ou plus bas que la hauteur d'un homme peint. D'ailleurs, aucune chose peinte ne peut paraître égale à une chose vraie, si ce n'est à une distance spécifique : c'est ce qu'aucune personne instruite ne niera. Nous en expliquerons la raison si jamais nous mettons par écrit ces démonstrations que nos amis, émerveillés de nous les voir faire, appelaient miracles de la peinture[1]. Et ce que je viens de dire se rapporte justement à cette partie là. Revenons donc à notre objet.

0. Chaque intervalle est fait de deux des trois parties du précédent.

20. J'ai d'ailleurs trouvé cette excellente méthode : dans tous les cas je poursuis cette même division entre le point central et la ligne de base en tirant des droites de ce point jusqu'à chacune des divisions de la ligne de base. Mais pour la succession des quantités transversales, je procède de cette manière-ci. Je prends une petite surface[2] sur laquelle je trace une seule ligne droite. Je la divise en autant de parties que la ligne de base du rectangle est divisée. Je pose ensuite un point unique au-dessus de cette ligne, à la verticale d'une de ses extrémités, aussi élevé que l'est dans le rectangle le point central au-dessus de la ligne de base. De ce point, je trace des droites jusqu'à chacune des divisions de la ligne. Je fixe alors la distance que je désire avoir entre l'œil de celui qui regarde et la peinture, puis, ayant ainsi fixé l'emplacement de la section, au moyen de ce que les mathématiciens appellent une ligne perpendiculaire, je produis l'intersection de toutes les lignes qu'elle rencontre. Une ligne perpendiculaire est celle qui, divisant une autre ligne droite, possède partout autour d'elle des angles droits. Ainsi cette ligne perpendiculaire me donnera par ses points d'intersection les limites de chaque écartement qui doit se trouver entre les lignes transversales parallèles du dallage. Je peux de cette façon tracer toutes les rangées transversales de carreaux du dallage. On appelle parallèle l'intervalle séparant deux des lignes parallèles dont nous avons parlé plus haut. J'aurai la preuve que celles-ci ont été correctement tracées si une même ligne droite prolongée sur le dallage peint sert de diamètre[1] aux rectangles juxtaposés. Pour les mathématiciens, le diamètre d'un rectangle est la ligne droite, tirée d'angle à angle opposé, qui divise le rectangle en deux parties de façon à faire deux triangles.

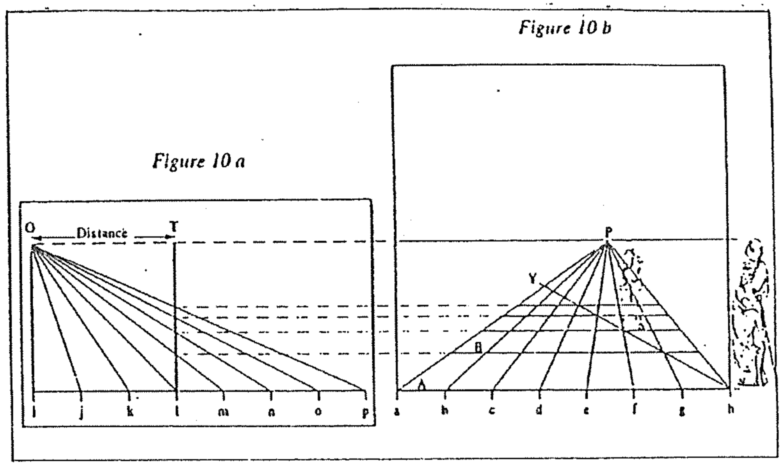
Fig 10 a. i à p

Fig. 10 a. 4

Fig 10 a, ligne T

Fig. 10 b. 1

Après avoir achevé tout cela avec soin, je trace encore une ligne transversale parallèle aux autres lignes inférieures, qui coupe les deux côtés du grand rectangle et passe



par le point de centre. Cette ligne me sert de limite et de borne : aucune quantité ne doit la dépasser, sauf celles qui sont plus hautes que l'œil de celui qui regarde. Et cette ligne, parce qu'elle passe par le point central, est nommée ligne centrale. De la sorte, les hommes peints qui se tiendront sur la dernière rangée de carreaux seront beaucoup plus petits que ceux qui se tiendront sur les plus proches. Il en est évidemment ainsi, la nature elle-même le montre. En effet, quand des hommes déambulent dans les églises, nous voyons leur tête se mouvoir à peu près à la même hauteur, alors que les pieds de ceux qui sont les plus éloignés arrivent à peu près à hauteur des genoux de ceux qui sont devant.

Fig 10 b. F

1. Il s'agit d'une diagonale

2. C'est-à-dire une feuille séparée qui sera ensuite juxtaposée au rectangle préparatoire où ont été tracées les lignes orthogonales (fig. 10 a).

Bibliographie

Alberti L. B. *De la Peinture*, 1435, trad. J.L. Schefer, ed. Macula Dédale, Paris 1992

Bessot D., Le Goff J. P. *Mais où est donc passée la troisième dimension ?* in *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*, par la Commission Inter- IREM Epistémologie et Histoire des mathématiques, éditions ELLIPSES, Paris , 1993.

Bessot D., Hellegouarc'h Y., Le Goff J. P. (sous la direction de) *Destin de l'Art, Desseins de la Science* , Actes du colloque A.D.E.R.H.E.M.oct. 86, Université de Caen, 1991

Brin P. Grégoire M. *La perspective à la Renaissance: Comment représenter un carrelage ?* , Mnémosyne N° 7, avril 94 , IREM Paris-7, Université Denis Diderot , 2 place Jussieu 75005 Paris

Comar P. *La perspective en jeu* , Découvertes Gallimard n° 138.

Flocon A., Taton R. *La perspective* , P.U.F., coll. Que sais-je? n° 1050.

Gilbert T. *La perspective en questions,* Ciaco Ed., Louvain-la-Neuve, 1987

IREM de Basse-Normandie, *Les cahiers de la perspective*, Université de Caen, (6 numéros parus)

Panofsky E. *La perspective comme forme symbolique* , Minuit, Paris, 1975

Thuillier P. *Espace et perspective au Quatrocento*, in *La Recherche* n° 160, nov 1984

USING HISTORICAL ARITHMETIC BOOKS IN TEACHING MATHEMATICS TO LOW-ATTAINERS

Marjolein KOOL,
Jonkheer Ramweg 28b,
NL-3998 JR SCHALKWIJK
PAYS-BAS

What can the history of mathematics mean to you when you are teaching mathematics to pupils from 12 to 16 years whose intellectual capabilities range from below average to average ?

During eleven years I was a mathematics teacher at a Dutch MAVO-school. Many of my pupils had learning problems. They couldn't concentrate very well, were not interested in school and certainly not in mathematics. For many of my pupils mathematics was an obscure system of tricks invented by some sadist who definitely wanted to poison their youth. How could the history of mathematics change their opinion ? A "photo of Pythagoras" should only act as a target to work off their frustrations : "Aha, he is the one !" Whereafter they all would draw beards, moustaches and worse on his noble face. I am not talking about this creative activity when I claim that the history of mathematics can colour your lessons.

In each mathematics lesson my pupils asked me at least once : "Why should we learn this ? What can we do with this ?" At the moment they could see how they could apply the learned algorithms and solution methods they became (a little bit) interested in mathematics. Practical problems and practical situations were a good means to motivate them. They drew graphics of their heartbeat during a sports tournament and measured packings from all sorts of products in the supermarket. They enjoyed it and at the same time they did a lot of mathematics.

In this period I started my research on 16th century Dutch arithmetic books. I read many old arithmetical manuscripts and printed books and I discovered many problems that seemed very suitable for the use in the modern mathematics lesson. I even found practical experiments in my sources. For instance a method to calculate the height of a tower with the help of a mirror. I tried out some of these problems in my classes and it was a big success. My pupils were amazed when they discovered that 400 or more years ago people struggled with comparable problems as they were doing nowadays.

Besides translations and transcriptions I gave my pupils photocopies of the original Dutch handwriting, they tried to decipher and to imitate it. They liked it very much and they felt as if they could shake hands with their ancestors. I asked my pupils to compare their own solution methods with the old ones and they were surprised by the similarities as well as by the differences. For instance it seemed incredible to them that you can solve mathematical problems without mathematical symbols or notation. My pupils were not interesed in names, dates or portraits of dead mathematicians. They wanted to see the problems on which their historical colleagues had worked.

Each 6 or 8 weeks I treated my pupils to a historical problem. Perhaps I could have tried to do it more often but then I had the risk that the novelty value would wear off. And besides that you must realize that using historical sources means work ! It is more than making a photocopy of your source and giving it to your pupils. Finding a suitable piece of historical material is only step one Next you must ask yourself : Where can I use it, with which pupils on which moment ? Which aid can I give to my pupils to solve the problem ? Do I want my pupils to solve it in a specific way ? Can I connect more questions to the given problem ? Do I confront my pupils only with the historical problem or with the historical solutionmethod too ? Shall I ask my pupils to study the historical solution method to see why it works and to compare it with their own modern solution method ? Using historical sources in the classroom needs a lot of preparation. I believe and I have experienced that it is all worth while.

During the summer university in Montpellier the participants of my workshop have prepared pieces of 16th century arithmetic books for the use in the classroom. They worked on problems, had vivid discussions in small groupes and produced interesting material and practical ideas. It was a pleasure (and very easy) for me to do this workshop with such hard working people. Their enthusiasm and dedication has convinced me again. The best way to let your pupils experience that mathematics is the result of people working on problems, is to let them work on these problems. Let them jump into the original sources and they will work with red cheeks. This is the way in which the history of mathematics may colour my lessons.

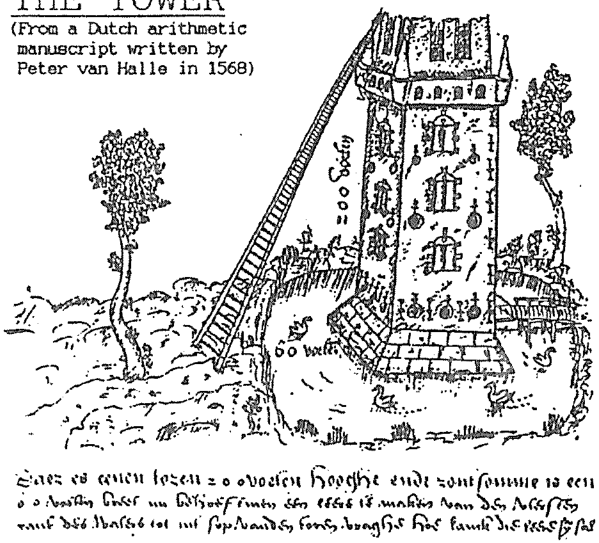
On the next pages you can find the material that I have used during my workshop.

USING HISTORICAL ARITHMETIC BOOKS IN TEACHING MATHEMATICS TO LOW-ATTAINERS

Montpellier, 19-23 July 1993, workshop by Marjolein Kool

THE TOWER

(From a Dutch arithmetic manuscript written by Peter van Halle in 1568)



Daer es eenen toren 200 voeten hooghe ende rontsomme is een 60 voeten breet. Nu behoeft eenen een leere te maken van den veersten cant des waters tot int sop van den toren. Vraghe hoe lanck die leere sijn sal.

TRANSLATION:
There is a tower 200 feet high and around the tower is a canal with a breadth of 60 feet. Now somebody needs to make a ladder over the water to the top of the tower. The question is: how long should that ladder be?

If you find a historical problem that seems suitable for the use in the classroom, you must try to answer the following questions:

1. *Context: Which pupils would you confront with this problem, of which age and which level? Which mathematical subject would you like to practice with this problem? What will be your aim and what prevous knowledge do you expect?*

2. *Aid: If your pupils are not able to solve the problem, or if you want them to solve the problem in a particular way, which questions would you ask to help them or to send them in a particular direction?*

3. *Application or extension: Can you suggest a further task connected with the preceding problem that can be used as an extra exercise of application?*

To show you what I mean, I have worked out the problem of the tower:

1. Context: In the second form my pupils (about 14 years old) learned the Pythagorean theorem. After they have had some experience with problems about triangles and applications in modern situations I gave them this 16th century problem.

2. Aid: To solve problems with the Pythagorean theorem my pupils have learned to use a diagram. To remind them to do this and to help them with the problem of the tower I ask them:
Fill in the diagram first:

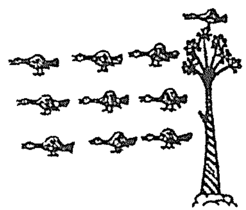
	x	x^2	
Breadth of the canal			
Height of the tower			+
Length of the ladder			

3. Application or extension:
On the backside of the tower (not visible in the picture) there is another ladder over the canal with a length of 80 feet. This one reaches just to the window-sill of the first window in the tower. What is the distance between the window-sill and the waterlevel?

GOD BLESS YOU 1

This problem and the next one are variations of the same problem.

(From the Columbia-Algorismus, an Italian codex from the 14th century, once part of the library from B.Boncompagni, now in the Columbia University Library in New York. Ed. Kurt Vogel, 1977.)

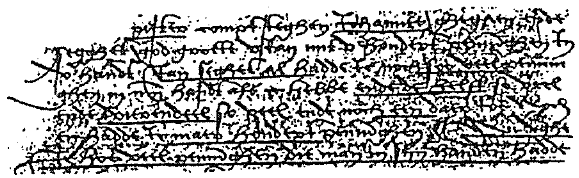


There was a pigeon sitting on a tree. Some other pigeons passed this tree and our first pigeon said: "God bless you, you twenty-five pigeons!". "No", said the other pigeons, "our number is not twenty-five! If you take our number twice and add the half of our number and also the fourth part of our number and a fourth then you will have twenty-five together." Question: How many pigeons passed the tree with our first pigeon?

* *As you can see, the picture shows the right answer. How, do you expect, will pupils react to this picture? How would you use the picture in your lesson?*

GOD BLESS YOU 2

(From a Dutch arithmetic manuscript written by Christianus van Varenbraken in 1532. Ed.Marjolein Kool, 1988.)



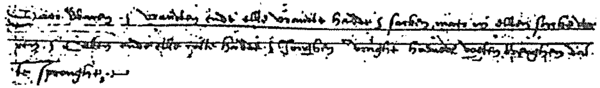
Pieter compt teghen Johannes ghegaen ende segghet god groete v Jan mit v hondert penninghen in v handt. Jan seghet: al hadde ic noch soo veel penninghen in mijn handt als ic hebbe ende de helft so veel ende tvierendeel so veel ende noch een daer toe, noch en hadde ic maer hondert penninghen. Nu vraghe ic hoeveel penninghen die man in sijn handen hadde.

TRANSLATION:
Pieter met Johannes and said: "God bless you, Jan, with your 100 pennies in your hand." Jan said: "If I should take the amount of my pennies twice and add the half of my pennies and also the fourth of my pennies and one penny, then I should have 100 pennies." The question is: How many pennies has Jan?

Picture from: Adam Riese, "Rechenung auff der linihen vnd federn...", 1522. ed. Stefan Deschauer, 1992.

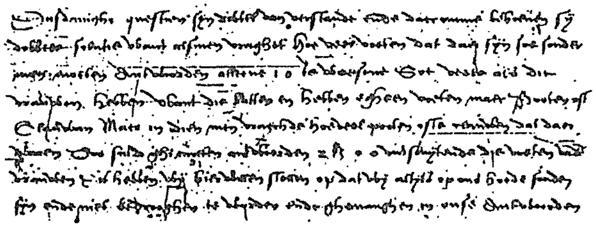
5 WOMEN

(From a Dutch arithmetic manuscript written by Peter van Halle in 1568)



Daer waren 5 vrauwen ende elke vrauwe hadde 5 sacken maer in elken sacke waren 5 catten ende elke catte hadde 5 jonghen. Vraghe hoeveel voeten brenghen dat te spronghe?

TRANSLATION:
There were 5 women and each woman had 5 bags. In each bag were 5 cats and each cat had 5 young ones. Question: How many feet were there?



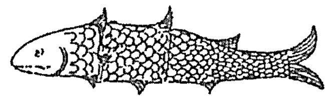
Dusdanighe questien sijn dobbel van verstande ende daeromme behoeven sij dobbele solutie, want alsmen vraghet hoeveel voeten dat daer sijn, soe soudemen moeten antwoorden: alleene 10, te weetene soe veele als die vrauwen hebben, want die katten en hebben egheen voeten maer pooten oft clauwen. Maer indien men vraechde hoeveel pooten ofte clauwen dat daer waren soo suldi ghi moeten antwoorden 2500 vutwijsende die voeten vanden vrauwen. Dit hebben wij hier willen stellen opdat wij altijts op ons hoede souden sijn ende niet bedrooghen te worden ende ghevanghen in onse antwoorden.

TRANSLATION:
Such questions have a double interpretation and that is why they need a double solution. If you ask how many feet there are, you must say: only 10, because women have feet and cats don't. They have paws or claws. And if you ask how many paws or claws there are, you must say 2500 excluding the feet of the women. We have written this here to teach that we must always have our wits about us so that we are not misled and become trapped in our answering.

* *The answer 2500 is wrong. How would you use that in the classroom?*

THE FISH

(From an Italian arithmetic manuscript written by Paolo Dagomari in the 14th century. Ed.G.Arrighi, 1964.)



There is a big fish swimming in a lake. Its head is one-third of the whole. Its trunk is one-fourth of the whole and its tail is 9 feet. How long is this fish?

Om te vijnden hooghde met een speghele.

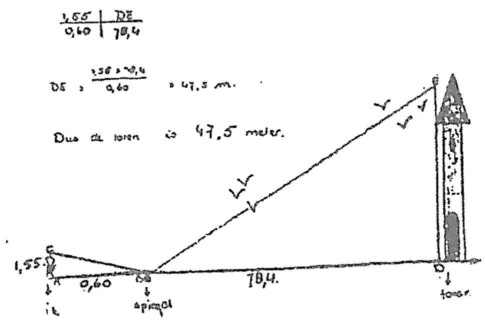
TO FIND THE HEIGHT WITH A MIRROR

How can you find the height of a tower if you don't have the opportunity to climb to the top? Master Adriaen vander Gucht describes in his arithmetic book of 1569 how you can do that.

Legt een platte speghele op de eerde/ zo dat ghi ziet de hooghde/ en multipliceert de distancie van u voeten tot u ooghen mette distancie vanden speghele totter toren die diuideert met de distancie va[n] u tot de speghele

Place a mirror on the ground. Look into it and try to see the top of the tower. Multiply the distance between your feet and your eyes by the distance between the mirror and the tower and divide the result by the distance between you and the mirror.

1. Go outside and look for a tower or another high building or tree in the neighbourhood. Try to calculate the height of this object with the method of Master Adriaen.
2. Why does he use the distance between your feet and your eyes and not your complete height?
3. Make a sketch of the situation.
4. Prove that there are two similar triangles.
5. How would you calculate the height of your object?
6. What is the difference between your calculationmethod and the method of Master Adriaen?



Marlies Franken (15)

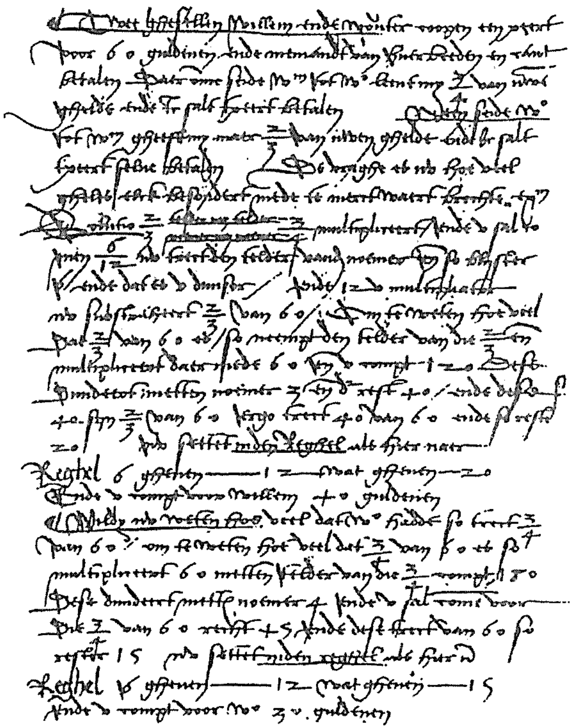
In this previous example, I let you work on a problem from the 16th century. As you have experienced, I gave you more than just the problem. I also showed you the 16th century solutionmethod and asked you to compare the old solutionmethod with the modern one. It shows you that sometimes you can do more with the historical sources than just cutting out problems.

You can use historical sources on different levels:
1. *Give the problem to solve it in a modern way.*
2. *Give the problem and the historical solutionmethod to solve it in two ways.*
3. *Like 2 with an extra question: try to understand and explain the old solutionmethod describe differences between the old and the modern method.*

* *Look at the following example, on which level would you use this material?*
Prepare a worksheet for pupils based on this material.

TO BUY A HORSE

From a Dutch arithmetic manuscript written in 1532 by Christianus van Varenbraken.



TRANSLATION:

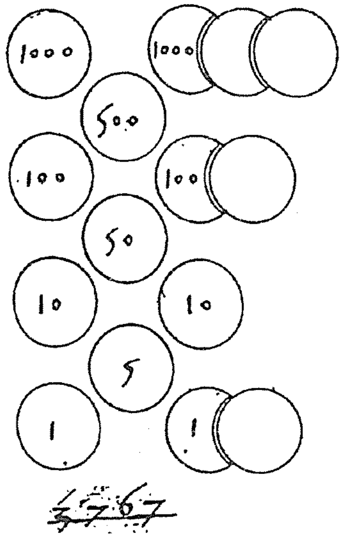
Two friends, Willem and Wouter, want to buy a horse for 60 guilders. But Willem doesn't have enough money to buy the horse on his own and Wouter doesn't either. Willem says to Wouter: "Give me 3/4 of your money and I can buy the horse." "No", Wouter says to Willem, "give me 2/3 of your money and I will buy the horse." The question is: How much money do these friends have?

Solution: Multiply 2/3 by 3/4 and you will find 6/12. Subtract the numerator from the denominator and you will find 6. That is your divisor and 12 is your multiplier. Take 2/3 of 60 by multiplying the numerator of 2/3 by 60. That gives 120. And dividing this by the denominator 3, you will find 40. So 40 is 2/3 of 60. Subtract 40 from 60, you will find 20. Place this in the rule.
RULE: If 6 give ——— 12 ——— what will give 20?
(Multiply 12 with 20 and divide the product by 6)
And you will find for Willem 40 guilders*.
If you want to know how much Wouter has, you must take 3/4 of 60 by multiplying 60 by the numerator of 3/4, that gives 180 and dividing this by the denominator 4, and you will find: 3/4 of 60 is 45. Subtract 45 from 60 and you will find 15. Put this in the rule.
RULE: If 6 give ——— 12 ——— what will give 15?
(Multiply 12 with 15 and divide the product by 6)
And you will find for Wouter 30 guilders*.

*) The author has mixed up the names of Wouter and Willem in the solution of this problem.
The correct final result is:
Wouter has 40 guilders and Willem has 30 guilders.

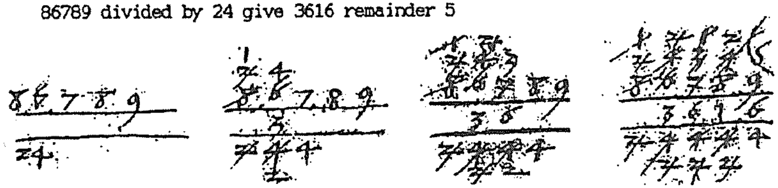
TO CALCULATE WITH COINS

In the Dutch arithmetic manuscript of Christianus van Varenbraken written in 1532, the medieval method of calculating with coins is explained. It worked as follows: Before you start you lay down a vertical line of coins. These are your "layers". They indicate the value of the coins that are placed on the right side of the layers. The first layer indicates 1, the second 10, the third 100, etc. The fields between the layers stand for 5, 50, 500 etc. In this way you can indicate numbers and calculate. (In original there were no numbers on coins)



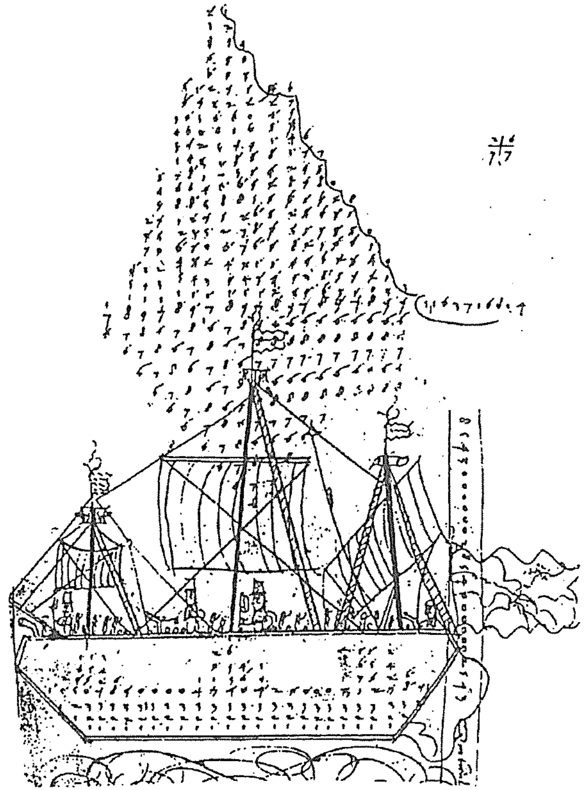
DIVISIONS

EXAMPLE 1
This division is from a Dutch arithmetic manuscript written in 1532 by Christianus van Varenbraken.
You can see here in four steps:
86789 divided by 24 give 3616 remainder 5



EXAMPLE 2 AND 3

These two divisions are from a Dutch arithmetic manuscript written by Cornelis Pijck in 1584.

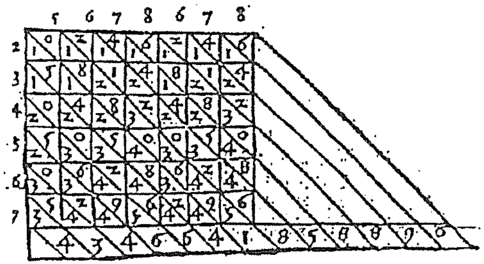


THREE MULTIPLICATIONS

EXAMPLE 1

This multiplication is from a Dutch arithmetic book written by Adriaen vander Gucht in 1569.

You can see here: 765432 × 5678678 = 4346641858896



EXAMPLE 2

Multiplication of Russian Peasants

Multiply 37 x 47

	37	47
/	18	94
	9	188
/	4	376
/	2	752
	1	1504

37 x 47 = 1504 + 188 + 47

EXAMPLE 3

Egyptian multiplication

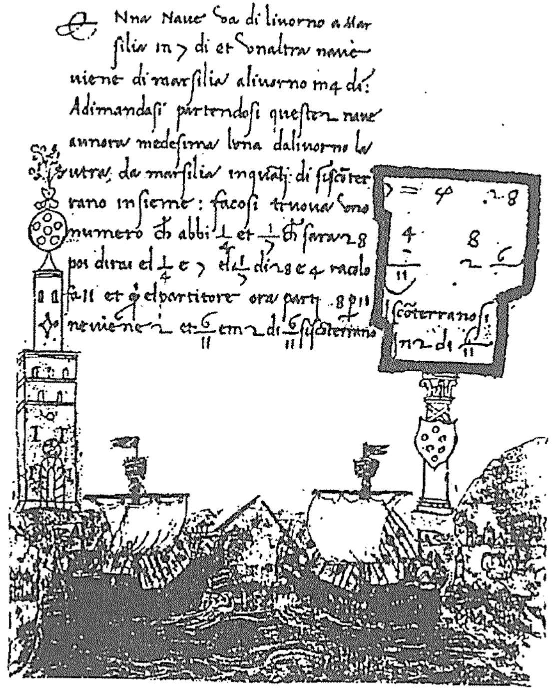
Multiply 37 x 47

	1	47
/	2	94
	4	188
/	8	376
/	16	752
	32	1504

37 x 47 = 1504 + 188 + 47

TWO SHIPS

From: Filippo Calandri, Trattato di aritmetica, Florence, 1491. Ed. G. Arrighi. Florence. 1969.

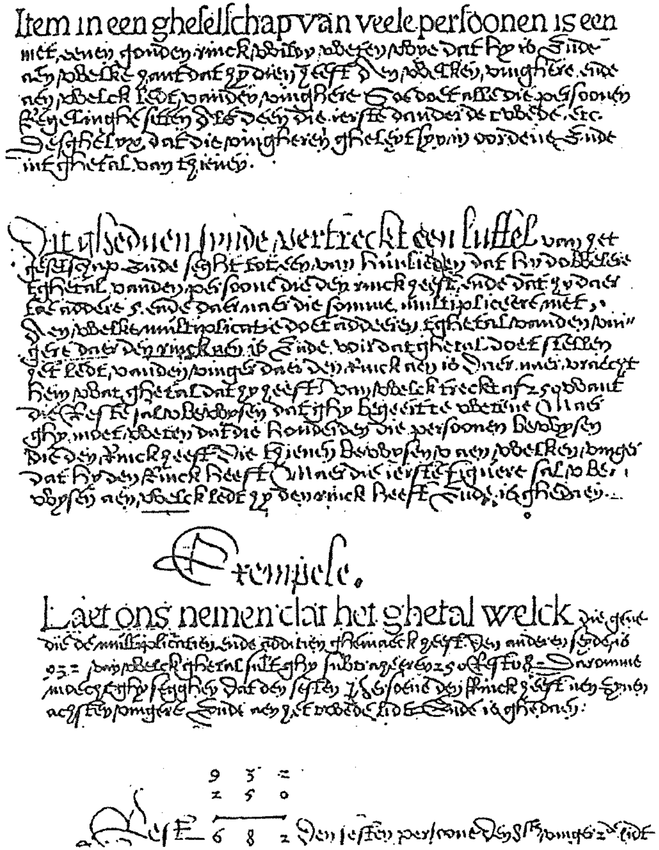


A ship goes from Marseille to Liverno in 7 days and another ship goes from Liverno to Marseille in 4 days. After how many days will they pass eachother?

Solution: In 28 days the first ship can do the travel 4 times. The other ship can do it 7 times in 28 days. 11 times in 28 days make one time in 2 days 6/11.

THE RING

(From a Dutch arithmetic manuscript written by Peter van Halle in 1568)


Item in een gheselschap van veele persoonen is een

Dit alsdoen sijnde vertreckt een luttel

Exempel.

Laet ons nemen dat het ghetal welck

932
250
682

TRANSLATION

In a group of many people there is a golden ring. If you want to know who this ring has and on which hand and on which finger and on which part of his finger, you must let the people sit on a line. The first one is the first, the next second etc. Look if the fingers are all in the right order and in the amount of ten.

If you have done this, you must leave the group for a little while and when you come back you must ask one of the people in the group to double the number of the person that has the ring and to add 5 to the result and to multiply this with 5, then add the number of the finger on which the ring is and then place the number of the part of the finger before this result (on the right hand). Then ask this person for the final result. Subtract 250, because the remainder will show you what you want to know. And you must know that the hundreds show the number of the person that has the ring, the tens show on which finger he has the ring and the first figure shows the part of the finger on which the ring is.

Example: Imagine that the person of the group gives you as a final result 932. Subtract 250 from this number. You will find 682. That is why you may say that the sixth person has the ring, on his eight finger, on the second part.

	932	
	250	
Remainder	682	the sixth person, eighth finger, second part

LITERATURE

Where can you find historical problems to use in the classroom if you don't have access to the original sources?

Arrighi, G., Trattato d'arithmetica. Pisa, 1964.
(Italian edition of a 14th-century arithmetic manuscript by Paolo Dagomari).

Arrighi, G., Trattato di aritmetica. Florence, 1969.
(Italian edition of the arithmetic manuscript by Filipo Calandri from 1491).

Deschauer, Stefan, Das zweite Rechenbuch von Adam Ries.Braunschweig, 1992.
(German edition of arithmetic book from 1522).

Elfering, Kurt, Arithmetica. München, 1964.
(Italian edition of the arithmetic manuscript by Piero Borghi from 1484).

Flegg, Graham, Nicolas Chuquet : renaissance mathematician. Dordrecht, 1985.
(Study with English translation of the mathematical manuscript from 1484).

Kool, Marjolein, Christianus van Varenbrakens "Die Edel Conste Arithmetica". Brussels, 1988.
(Dutch edition of an arithmetic manuscript from 1532).

The Mathematical Gazette. Vol. 76, number 475, March 1992.
(Several articles with historical problems and advices for the use in the classroom).

Tropfke, Johannes, Geschichte der Elementarmathematik. New York, 1980. p.513-660 "Das angewandte Rechnen".
(A big German collection of practical and recreational problems).

Vogel, Kurt, Ein italienisches Rechenbuch aus dem 14. Jahrhundert. München, 1977.
(Italian text with German introduction).

Vogel, Kurt, Die Practica des Algorismus Ratisbonensis. München, 1954.
(edition of Latin arithmetic manuscript from 1450).

NAVIGATION AND SURVEYING : TEACHING GEOMETRY THROUGH THE USE OF OLD INSTRUMENTS

Peter Ransom
Prudhoe Country High School, Moor Road, Prudhoe, NE42 5LJ, U.K.

The workshop included an exhibition of twelve Al boards which illustrated various aspects of old instruments. These boards were set up in the lunch interval, so that early arrivers at the workshop (or late leavers !) could occupy themselves by looking at this material. This exhibition featured one board on the use and development of the cross staff ; one board on the quadrant ; eight boards on sundials in Northumbria ; one board on international sundials ; and one board on using sundials in schools.

Outside the workshop room a table was set in the sun with a vertical shadow stick erected on the top. As participants arrived they were invited to mark with a cross and their initials were they thought the tip of the shadow would be at the end of the session. This was the basis for the first activity on the sun activity worksheet (see appendix : worksheets 1a and 1b). A small prize was offered (a bottle of wine), which was won at the end of the session by Caterina Vicentini, with a banana as a booby prize ! (winner will remain anonymous : is that O.K. Fred ?).

The workshop started with an introduction about the school where I teach. Prudhoe Country High School is a 13 - 18 mixed comprehensive of about 850 pupils in Northumberland, U.K., and most of the work has ben used with Y10 (14/15 years old) or Y12 (16/17 years old). Why use old instruments when teaching geometry ? I do not use them all the time, but try to use them when the time is relevant, or when I feel that pupils would benefit from a different stimulus. I enjoy working with my hands, and it gives me great pleasure to try to recreate these old instruments from, sometimes unclear, diagrams and all those bits of odds and ends that I tend to strore in the garage (which can be useful refuge in times of stress !) knowing that one day they will come in useful. I an also interested in local history and if I can raise awareness of the impact history has had on mathematics (or vice versa), then perhaps my pupils will see the place of mathematics in other subjects more clearly (as advocated in our National Curriculum), and enhance its cross-curricular use. Geometry is not just theoretical : if pupils can see its practical uses then it takes on a more important role for them. The practical aspect of mathematics has been encouraged in the U.K. since the publication of the Cockcroft report over a decade ago, and the work outlined on the worksheets, and done in this workshop gives everybody the opportunity to do some practical work.

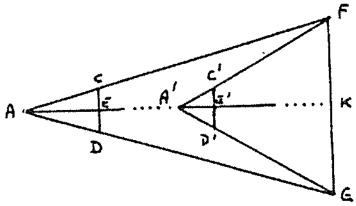
The first instrument we looked at was the cross staff, or Jacob's staff. This was reputedly invented by a Jewish astronomer, Levi Gerson (1288-1324), and was used by Regiomontanus for astronomical observations. During the sixteenth century it was adopted for surveying and astronomical use. Edmond Gunter wrote a book "The description and use of the sector, crosse-staffe & other instruments..." (second edition) in 1636, and some of the pages from this book were used in the exhibition. For a description of its use, and diagrams, see worksheets 3a and 3b in the appendix. Staff and transom can both be marked with scales for distance and angle measurement, and marking the staff and/or transom provides an opportunity for some trigonometry. Michael Coignet in 1581 described the cross staff in the form it was to retain until it became obsolete in the mid eighteenth century. It survived longer as a navigational instrument than as a surveying instrument. He described it as a staff of square cross section, about 1 metre to 1m 30cm in length with transoms whose lengths were in the ratio 1:4:8, or 4cm, 16cm, 32cm. Wood (ebony) was generally used, being easily worked and durable under many conditions. Pictures of instruments in the Science Museum, London formed part of the exhibition in the workshop room.

Four other posters, produced by the Wipple Museum on Practical Mathematics in the Age of Discoveries (featuring Astronomy, Navigation, Surveying and Cartography) were on show as the cross staff features in all these activities.

The cross staff works on the idea that the cross, or transom, subtends a certain angle at the eye depending on its distance from the eye. It has been assumed that this principle has been in use for a long time using different, but simple apparatus. Workshop participants worked through the introductory exercise (appendix 2a and 2b) using the width of a hand, and the similarity or results was remarkable. The accuracy was given to anything between one and four significant figures, and discussion on the degree of accuracy was spontaneous.

We then took the replica cross staff outside to use. In the absence of an uncrossable river, or dangerous enemies we imagined a suitable obstacle between ourselves and two of the posts supporting the walkway cover. A volunteer, Norman, followed the instructions as on worksheets 3a and 3b and declared the required distance as 7.05 metres. On measuring the actual distance we it to be 7.08 metres. A result within 1/2% ! Participants were amazed that what seemed to be a very crude way of measuring a distance could be so accurate. On returning to the workroom, people discussed other similar instruments based on the same principle, and it is hoped that these ideas will find their way into the mathematics classroom.

We spent a few minutes looking at the geometry of how the instrument works, and the proof of the method on worksheets 3a and 3b is shown here :



$AA' = AK - A'K$

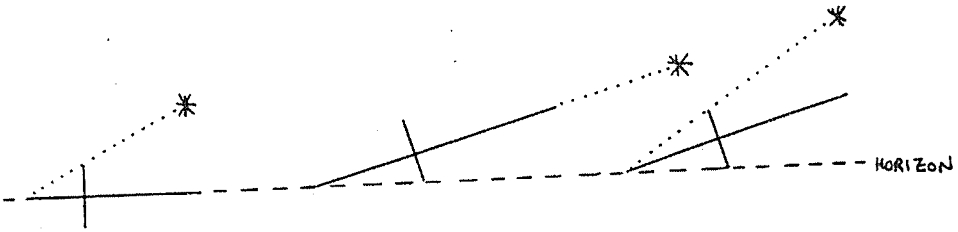
$\triangle \begin{matrix} AFG \\ ACD \end{matrix}$ are similar so $\dfrac{AK}{AE} = \dfrac{FG}{CD} \Rightarrow AK = \dfrac{AE.FG}{CD}$

$\triangle \begin{matrix} A'FG \\ A'C'D' \end{matrix}$ are similar so $\dfrac{A'K}{A'E'} = \dfrac{FG}{C'D'} \Rightarrow A'K = \dfrac{A'E'.FG}{C'D'}$

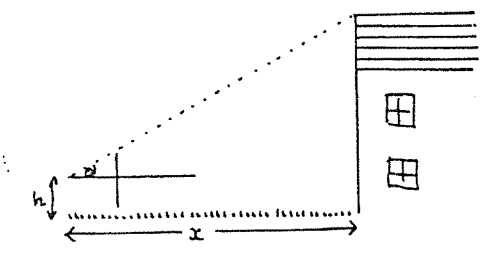
$\therefore AA' = \dfrac{AE.FG}{CD} - \dfrac{A'E'.FG}{C'D'} = \dfrac{FG}{CD}(AE - A'E') \quad \because C'D' = CD$

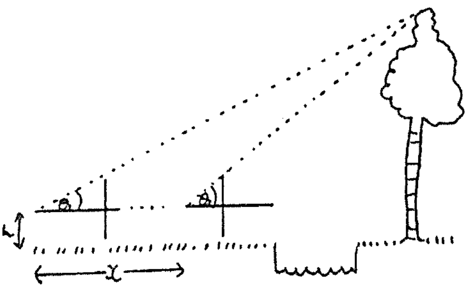
$= \dfrac{FG}{CD}.CD \qquad \therefore \underline{\underline{AA' = FG}}$

To measure angles, the cross staff can be used in three ways, as illustrated here



This is then the basis for measuring the angles necessary to find heights of buildings or inaccessible trees ! These heights can either be found by scale drawing or trigonometry, depending on the ability of the pupils, as illustrated in the following diagrams :





The second instrument used in the workshop was the sundial. Appendix 2 gives some of the historical background to the sundial. Brief notes on three of Montpellier's dials were given on the blackboards, and these are listed here :

1. Le Peyrou

A large analemmic sundial in the form of an ellipse, major axis 5.36m, minor axis 3.88m. The gnomon is provided by a person standing at the appropriate mark for the time of year. Erected in 1926.

2. Faculty of Medicine

A vertical south facing dial. Made of limestone (?) with an iron gnomon. Height 1.5m, width 1.4m (estimated). This dial is next to the cathedral.

3. Saint-Pierre Cathedral

Go through the faculty of medicine (noting a bust of Cardan) and observe a vertical west facing dial, estimated to be 2 metres square. Too worn to make out any markings.

Information about further dials at the Rectorat, the Hotel of Rodez of Benavent, and the Station Oenologique de l'Hérault was provided at a later date by Marie-Jeanne Plane ; further investigation leads me to believe there may also dials at the Maison Gasquet (once used as a hospital for the sick) and on the Lycee, formerly a Jesuit college.

Participants then made an equatorial dial, as shown in the worksheets 4a and 4b in the appendix. The use of equipment provided by Helix, the geometrical instrument makers, for this workshop was appreciated, and participants were allowed to take the equipment home with them. We then went outside to test the sundials, and use some portable dials, based on old instruments, that can be purchased in France.

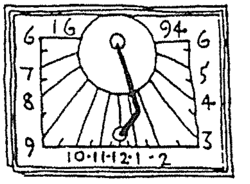
A simple sextant made from a Helix angle measurer was demonstrated, and the angle of elevation of the sun taken. The simple use of this instrument was appreciated when we tried to use a real sextant to 'shoot the sun'. This was achieved by using a false horizon, because of the absence of the real one due to surrounding buildings.

Reading the time from a sundial involves estimation, graph work and simple calculations to take into account the longitude of the position of the dial, so not only geometrical work but many other basic mathematical skills are involved, as was appreciated in the workshop.

Unfortunately we ran out of time at this point, but there are many other instruments that it is hoped teachers will utilise in the classroom. It is hoped that participants and their pupils get as much pleasure out of doing similar work in the classroom as I have with my pupils.

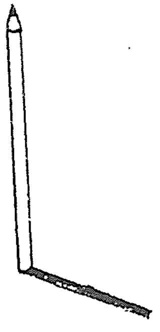
REFERENCES

Make A Sundial	British Sundial Society
Surveying Instruments, history and classroom use	E.R. Kiely
History of Mathematics	D.E. Smith
Sundials, their theory and construction	A.E. Waugh



TEACHING GEOMETRY THROUGH THE USE OF OLD INSTRUMENTS

Some sun activities for the 1st European Summer University
Montpellier 19-23 July 1993



The first thing you need to experience is how the sun appears to move. Make a pointer (a pencil stuck on a piece of Blu-tack, a bent piece of card, etc.), and place it on a piece of paper in a sunny position. Mark where the tip of the shadow lies. Now put a mark where you think the tip of the shadow will be an hour later. Most people are quite surprised when they see how far the shadow has rotated. If a group of you do this, you can make it into a competition by seeing who is closest at the end of a given period.

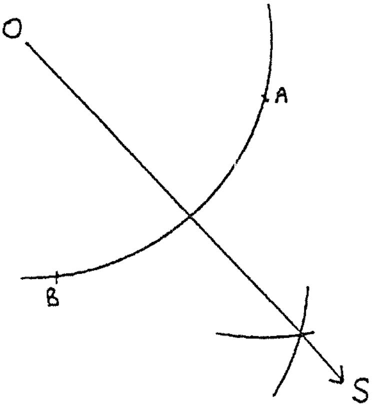
Use this idea to find due south, a follows :

1. At some point in the morning (couple of hours before noon) mark the tip of the shadow on the paper at A, say.

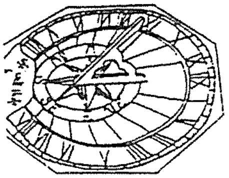
2. Draw an arc, centre O at the base of the pointer, radius OA.

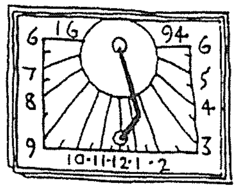
3. Later in the day mark where the shadow next meets this arc. Call this point B.

4. Use a pair of compasses to bisect angle AOB. ON then lies due north/south, whit N north of O.



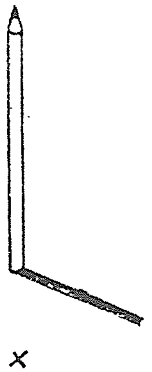
If you have already made a sundial then you can use the direction you have just found to align the gnomon along this line, making sure that the gnomon points to the north. Then you can use the dial to find the time by reading the time indicated by de shadow, making the necessary adjustements for longitude, the time of year, and any daylight saving alteration that operates in the country in which it is so be used.





L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE À TRAVERS DES INSTRUMENTS ANCIENS

Des activités solaires pour la première université estivale
à Montpellier du 19 au 23 juillet 1993



La première chose à noter est la façon dont le soleil semble bouger. Faites une baguette (un crayon enfoncé dans une boule de Blu-Tack, une carte courbée, etc.) et placez-le sur une feuille de papier au soleil. Marquez le bout de l'ombre. Maintenant, marquez le point où vous estimez que le bout de l'ombre sera dans une heure. La plupart des gens sont plutôt étonnés quand ils voient jusqu'où l'ombre arrive. Si on le fait en groupe on peut en faire une compétition pour voir qui l'a estimé au plus près à la fin d'une heure.

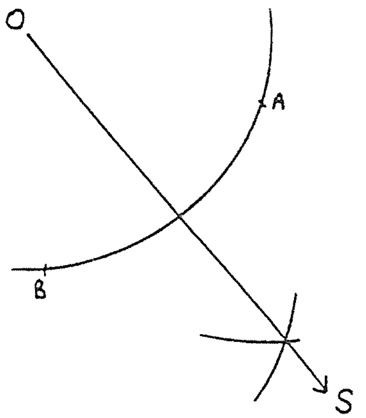
Utilisez cette idée pour trouver le sud :

1. A un moment donné, le matin (deux ou trois heures avant midi), marquez le bout de l'ombre sur la feuille de papier à A, par exemple.

2. Dessinez un arc, entre O à la base de la baguette, radius OA.

3. Plus tard dans la journée, marquez le point là où l'ombre rencontre de nouveau l'arc. Appelons ce point B.

4. Utilisez un compas pour couper en deux parties égales l'angle AOB. ON, donc, se trouve directement dans une ligne du nord au sud, avec N au nord d'O.

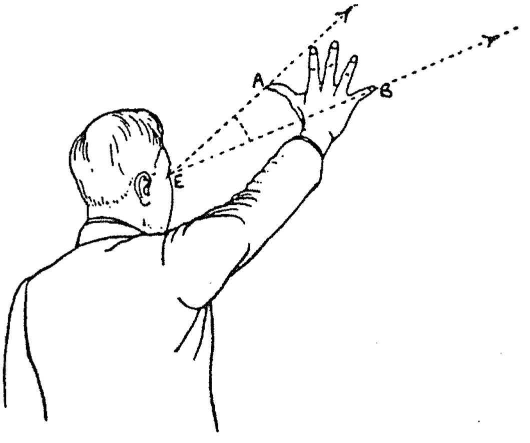


Si vous avez déjà fait au cadran solaire, vous pouvez utiliser la direction que vous avez trouvée pour aligner le style le long de cette ligne, en vous assurant que le style est orienté vers le nord. Ensuite vous allez pouvoir utiliser le cadran pour lire l'heure en lisant l'heure indiquée par l'ombre, en le réglant pour la longitude, le mois de l'année, et quelque heure artificielle qui existe dans le pays d'utilisation.

TEACHING GEOMETRY THROUGH THE USE OF OLD INSTRUMENTS

An introductory exercise to the cross staff
1st European Summer University, Montpellier 19-23 July 1993

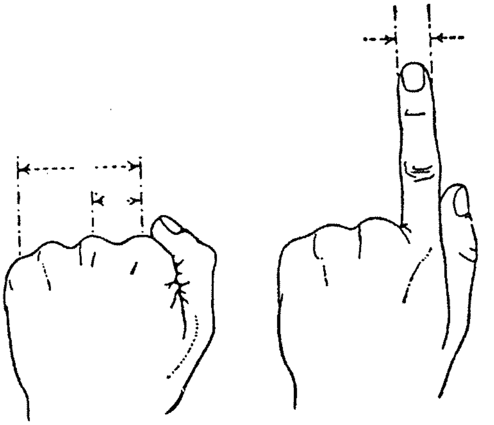
1. With the help of a partner measure the distance from your eye to your hand, held at arm's length (the diagram below should help).



2. Measure the span of your hand (AB).

3. Draw an appropriate right angled triangle and calculate the angle AEB subtended at your eye by the span of your hand.

4. Repeat the experiment to find the angles subtended at your eye be the distances shown below.



5. Compare your individual results with the class average.

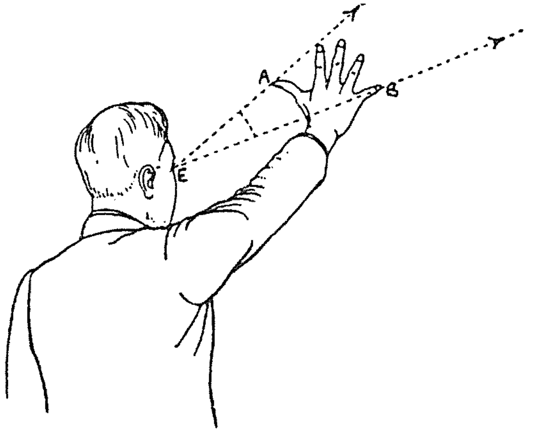
6. How accurate do you think these angular distance are ?

7. Use these body measurements of angular distances to estimate some angles of elevation.

L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE À TRAVERS DES INSTRUMENTS ANCIENS

Un exercice comme introduction au baculum
Première université estivale de Montpellier 19-23 Juillet 1993

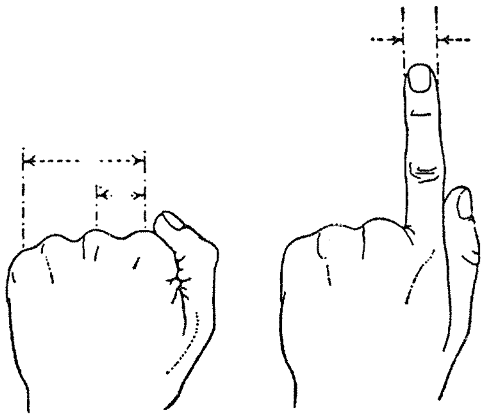
1. Avec l'aide d'un partenaire, mesurez la distance de votre oeil à votre main, le bras tendu (voir ci-dessous).



2. Mesurez l'empan de votre main (AB).

3. Dessinez le triangle rectangle qui en résulte et calculez l'angle AEB soustendu à votre oeil par l'empan de votre main.

4. Refaites l'expérience pour trouver les angles soustendus à votre oeil par les distances indiquées ci-dessous.



5. Comparez vos résultats avec le moyen pour la classe.

6. A quel point trouverez-vous ces distances exactes ?

7. Utilisez ces mesures corporelles des angles pour estimer quelques angles d'évaluation.

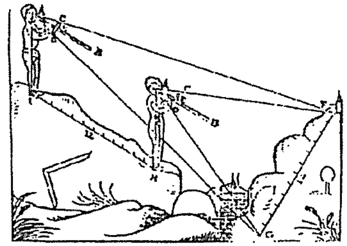
The Cross Staff

The three pieces are best cut out of thick card. This can be done by photocopying or sticking this sheet onto card before cutting it out. For a bigger cross staff photoenlarge initially.

Cut out the slots in the transoms, and after folding the staff lengthways the appropriatre transom can be slid along the staff.

Stand at some point I, equidistant from F and G. The cross staff is held horizontally, and the transom CD is moved so that the points F and G are just visible from I.

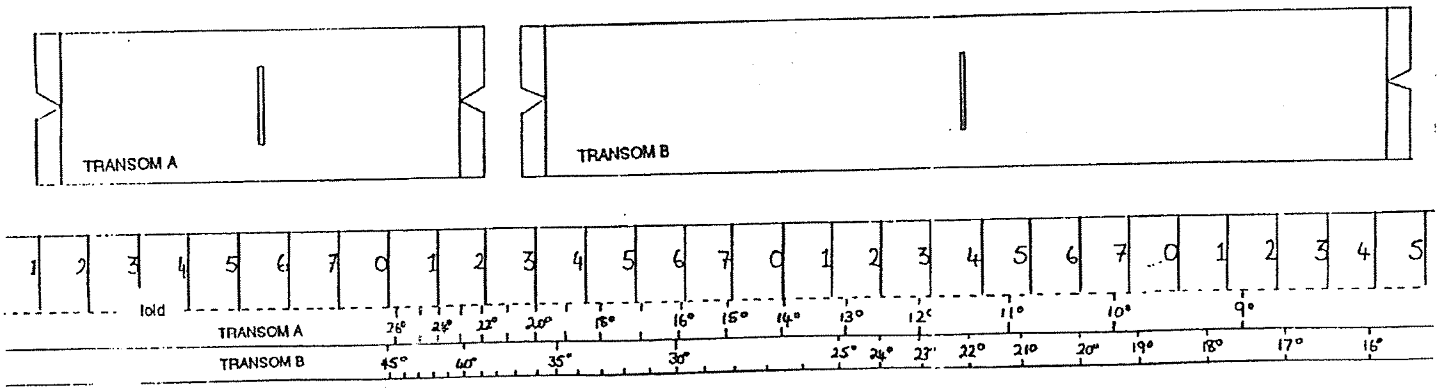
Now move the transom towards you through a distance equal to its length. Walk forward along the line IH until you come to the position H where you can just see F and G once again. If you measure the distance IH you have also obtained the distance FG.



THE BACULUM, OR CROSS-STAFF

From Oronce Fine's *De re & praxi geometrica*, Paris, 1556, showing the methods of measuring distances

Peter Ransom
Prudhoe Co. High School
Moor Road, PRUDHOE
Northumberland
NE42 5LJ U.K.



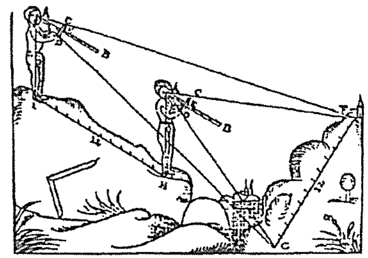
Le Baculum

Il vaut mieux découper les trois parties dans une carte épaisse. Ceci peut se faire ou en photocopiant ou en collant cette feuille sur de la carte avant de la découper. Pour un baculum plus grand, l'aggrandir avant de commencer avec la photocopieuse.

Découper les fentes dans les traverses, et après avoir plié le bâton longitudinalement, la traverse choisie peut être glissée le long du bâton.

Mettez-vous debout à un point I, équidistant de F et de G. Le baculum se tient horizontalement, et la traverse CD se déplace de façon que les points F et G sont juste visibles de I.

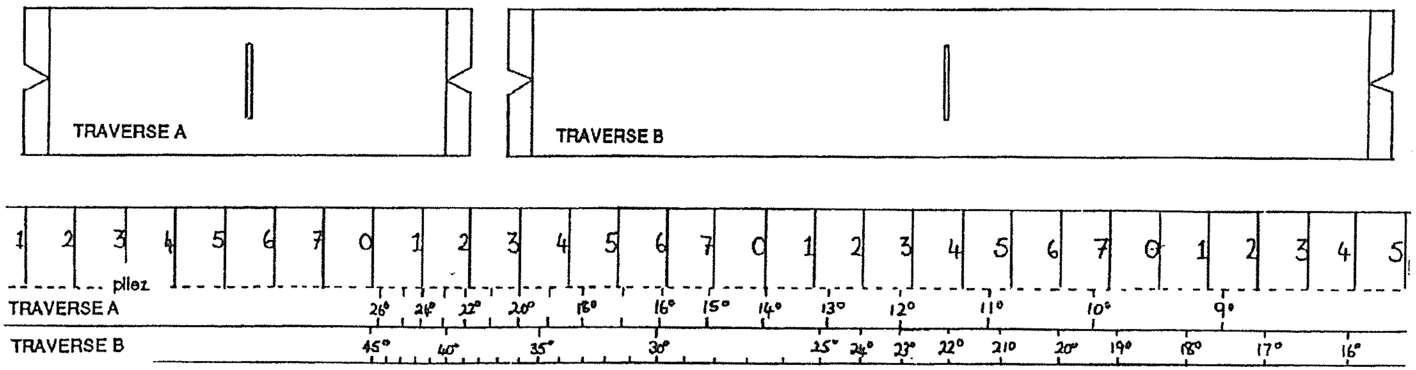
Maintenant avancez la traverse vers vous d'une distance qui correspond à sa longeur. Avancez le long de la ligne IH jusqu'à ce que vous arrivez à la position H où vous pouvez tout juste voir F et G de nouveau. Si vous mesurez la distance IH vous avez aussi trouvé la distance FG.

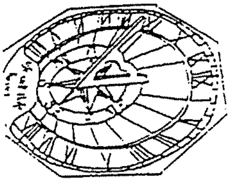


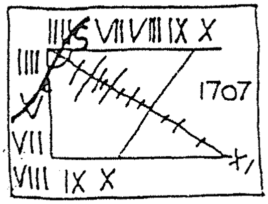
THE BACULUM, OR CROSS-STAFF

From Oronce Fine's *De re & praxi geometrica*, Paris, 1556, showing the methods of measuring distances

Peter Ransom
Prudhoe Co. High School
Moor Road, PRUDHOE
Northumberland
NE42 5LJ U.K.







TEACHING GEOMETRY THROUGH THE USE OF OLD INSTRUMENTS

An equatorial dial for the 1st European Summer University
Montpellier 19-23 July 1993

1. Mark a 1cm margin at the top and bottom of your card.

2. Mark the centres of the lines just drawn, and at the bottom centre draw two parallel lines 2mm apart as shown.

3. Place the centre of the Helix angle measurer at the top centre, draw round it, and mark every 15° as shown.

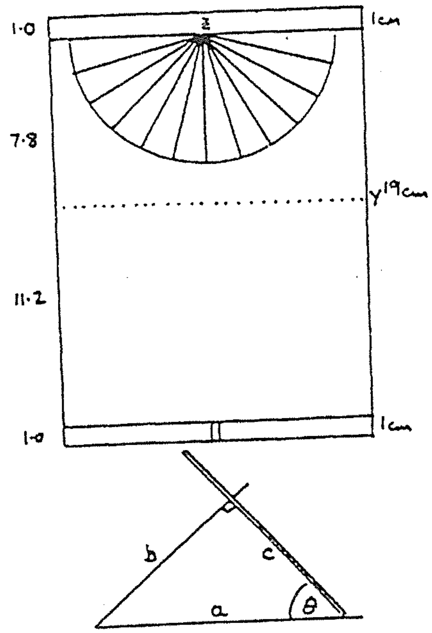
4. Turn the card over and repeat, so that the hour lines coincide on both sides of the card.

5.The line XY has to be drawn so that when folded, the straw is at an angle O, equal to the anglé of latitude of the place where it is to be used.

6. In Montpellier this angle is 43.7°, so the calculations to find the position of XY are shown opposite.

7. Push the straw through the card at the centre Z, and anchor it by folding the card along XY and tucking the tongue of card into the straw. The lenght of the straw below the card is calculated as shown.

8. Point the straw north, and you're ready to tell the time !



$a+b = 19$ $\quad b = a\sin\theta$

so $a + a\sin 43.7° = 19$

$1.69a = 19$

$\underline{a = 11.2}$, and by substitution

$\underline{b = 7.8}$

By Pythagoras, $a^2 = b^2+c^2$

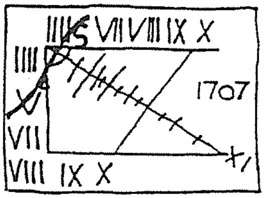
$11.2^2 = 7.8^2 + c^2$

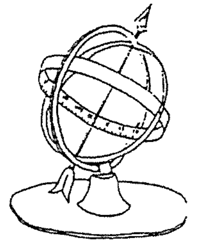
$c^2 = 11.2^2 - 7.8^2 = 66.0$

$\underline{c = 8.1}$

To find the time from the dial, first estimate the time shown by the shadow, then :

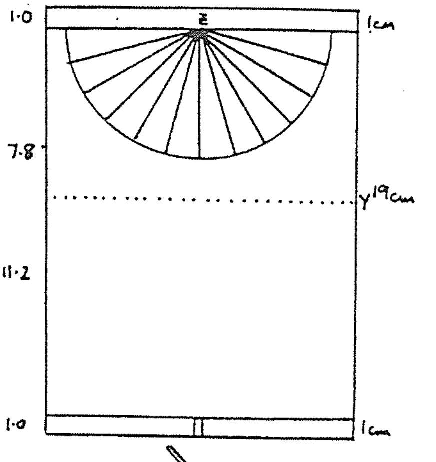
1. Make the adjustment for the time of year from the graph.
2. Add (or subtract) 4 minutes for every degree you are west (east) of Greenwich.
3. Add. 1 hour in British Summer Time, or two hours in France.





L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE À TRAVERS DES INSTRUMENTS ANCIENS

Un cadran équatrorial pour la première université estivale
à Montpellier du 19 au 23 juillet 1993



1. Dessinez une marge d'un centimètre en haut et en bas de votre carte.

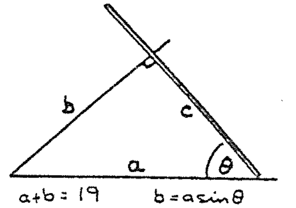
2. Marquez le centre des lignes que vous venez de dessiner, en bas, au centre dessinez deux lignes parallèles à deux centimètres de distance -voir à côté.

3. Placez le centre du rapporteur Helix en haut au centre, tracez sa forme, et marquez un point tous les 15°, comme indiqué ci-contre.

4. Retournez la carte, et répétez le processus afin que les lignes d'une heure coincident des deux côtés de la carte.

5. La ligne XY doit être dessinée afin que, une fois pliée, la paille se trouve à l'angle O, égal à l'angle de latitude de l'endroit où l'on s'en servira.

6. A Montpellier, cet angle est de 43.7° ; donc les calculs pour trouver la position de XY sont donnés ci-contre.



$a+b = 19 \qquad b = a \sin\theta$

so $a + a\sin 43{\cdot}7^\circ = 19$

$1{\cdot}69a = 19$

$\underline{a = 11{\cdot}2}$, and by substitutio

$\underline{b = 7{\cdot}8}$

By Pythagoras, $a^2 = b^2 + c^2$

$11{\cdot}2^2 = 7{\cdot}8^2 + c^2$

$c^2 = 11{\cdot}2^2 - 7{\cdot}8^2 = 66{\cdot}0$

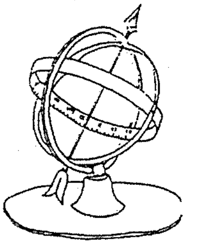
$\underline{c = 8{\cdot}1}$

7. Poussez la paille à travers la carte au centre Z et fixez-la en pliant la carte le long de XY et rentrant la languette de carte dans la paille. La longueur de la paille en dessous de la carte est calculée ci-contre.

8. Orientez la paille vers le nord, et vous êtes prêt à lire l'heure !

Pour trouvez l'heure à partir du cadran, premièrement estimez l'heure indiquée par l'ombre, puis :

1. Réglez-le selon la saison de l'année en utilisant la graphique.
2. Ajouter (ou soustraire) 4 minutes pour chaque degré plus à l'ouest (ou à l'est) de Greenwich.
3. Ajouter une heure en été en Grande-Bretagne, ou deux heures en France.



FIRST EUROPEAN SUMMER UNIVERSITY
History and Epistemology in Mathematics Education

Montpellier 19-23 July 1993

Background to the sundial

The principle of the sundial was known to the Chinese as early as 2500 BC., and sundials were widely used by the Greeks and Romans. In AD.606 the Pope is said to have ordered that sundials be placed on churches and this was probably the beginning of the long association of churches with sundials and clocks. The Saxon dial on Escomb church is thought to be the oldest dial in situ in the U.K., dating from the seventh century AD., though the Saxion dial on Bewcastle Cross also claims this honour ! Some larger examples, containing information that allow us to date them more accurately, can be found in Yorkshire. The dial at St. Gregory's Kirkdale dates from about 1060 AD..

Sundials rely on the casting by the sun of a shadow, of a simple rod or other structure called the *gnomon* (which projects from the surface), onto a calibrated background called the *dial plate*. It is the leading edge of the shadow, cast by the *style* (the name given to the part of the gnomon that casts the edge of the shadow) that is read from the dial plate to find the time. The angle of style to the horizontal must be the same as the latitude in which the dial is set up. The latitude of Montpellier is 43° 40' North.

The measurement of time is based on the rotation of the earth. The interval between successive apparent crossings of the sun across the imaginary line drawn through the north and south poles and that place (called the *meridian*) is known as the *apparent solar day*. This is because the shadow of the style on the dial plate depends on the position of the sun as it appears in the sky. Since the earth's orbit around the sun is an ellipse rather than a circle, and its axis is not perpendicular to the orbit's plane, the apparent solar day varies in length up to 31 minutes at the extremes of any year. Since this is not practicable for time keeping by clocks and watches, we average out these variations to produce *mean time* as in Greenwich Mean Time. This means that a correction factor needs to be applied to apparent solar time, which is that measured by a sundial. It was the introduction of the railways, and their need for a standard time for the whole country, that led to the introduction of *Greenwich Mean Time* in 1880.

To adjust a sundial's time to G.M.T. then, we have to apply the appropriate correction (called the *equation of time*) which is obtained from a table, graph, or other chart ; adjust for the longitude (add 4 minutes for each degree of longitude West of the Greenwich meridian. For every degree East of Greenwich subtract 4 minutes. Montpellier is 3° 50' East, so about 15 minutes needs to be subtracted) ; and during the summer remember to add one hour for British Summer Time ! (or two in France)

G.M.T. Correction Factor (Equation of Time) in minutes (C.F.)

Date		C.F.	Date		C.F.	Date		C.F.	Date		C.F.
Jan	2	+ 4	Apr	1	+ 4	Aug	17	+ 4	Nov	11	-16
Jan	4	+ 5	Apr	5	+ 3	Aug	22	+ 3	Nov	17	-15
Jan	7	+ 6	Apr	8	+ 2	Aug	26	+ 2	Nov	22	-14
Jan	9	+ 7	Apr	12	+ 1	Aug	29	+ 1	Nov	25	-13
Jan	11	+ 8	Apr	15	0	Sep	1	0	Nov	29	-12
Jan	14	+ 9	Apr	20	- 1	Sep	5	- 1	Dec	1	-11
Jan	17	+10	Apr	25	- 2	Sep	8	- 2	Dec	4	-10
Jan	20	+11	May	2	- 3	Sep	11	- 3	Dec	6	- 9
Jan	24	+12	May	15	- 4	Sep	13	- 4	Dec	9	- 8
Jan	28	+13	May	28	- 3	Sep	16	- 5	Dec	11	- 7
Feb	3	+14	Jun	4	- 2	Sep	19	- 6	Dec	13	- 6
Feb	20	+14	Jun	10	- 1	Sep	22	- 7	Dec	15	- 5
Feb	27	+13	Jun	14	0	Sep	25	- 8	Dec	17	- 4
Mar	1	+12	Jun	20	+ 1	Sep	28	- 9	Dec	19	- 3
Mar	8	+11	Jun	24	+ 2	Oct	1	-10	Dec	21	- 2
Mar	12	+10	Jun	29	+ 3	Oct	4	-11	Dec	23	- 1
Mar	16	+ 9	Jul	4	+ 4	Oct	7	-12	Dec	25	0
Mar	19	+ 8	Jul	10	+ 5	Oct	11	-13	Dec	27	+ 1
Mar	23	+ 7	Jul	19	+ 6	Oct	15	-14	Dec	29	+ 2
Mar	26	+ 6	Aug	4	+ 6	Oct	20	-15	Dec	31	+ 3
Mar	29	+ 5	Aug	12	+ 5	Oct	27	-16			

Carpe diem !

The British Sundial Society exists to help and inform with all matters to do with sundials. If you wish to obtain further details, contact Robert Sylvester, Barncroft, Grizebeck, Kirkby-in-Furness, Cumbria LA 17 7XJ.

"Make a Sundial" is available for £5.75, which includes p+p, from Mrs. J. Walker, 31, Longtown Rd., Little Sandhurst, Camberley, Surrey GU17 8QG.

I am always interested to heart of any projects with which you may be involved, and can be contacted at 12, Annaside Mews, Leadgate, Consett, Co. Durham DH8 6HL Great Britain.

HUYGENS et la Cycloïde
approches géométrique, analytique et graphique

Michel ROELENS
Professeur de Mathématiques
Lutgardiscollege (Oudergem)
Maria-Boodschaplyceum (Bruxelles)
K.I.P.S.H.O. (Hasselt)
Belgique

Dans son oeuvre *Horologium Oscillatorium* [Hu2] (1673), Christiaan HUYGENS (1629-1695) a démontré et utilisé certaines propriétés de la cycloïde pour améliorer l'horloge à pendule qu'il avait inventée lui-mème 17 ans plus tôt.

Pour une journée "porte ouverte" de l'école, mes élèves (17-18 ans, 8 heures de maths par semaine) et moi ont préparé une petite exposition sur les inventions mathématiques de Huygens. Deux aspects de son oeuvre ont retenu particulièrement notre attention: l'utilisation de fractions continuées pour la fabrication d'un planétarium et l'horloge à pendule muni de lames cycloïdales. Le premier sujet étant admirablement bien décrit dans [Ha], je m'en tiens ici au second. Avec mon aide, les élèves ont re-démontré les propriétés de la cycloïde trouvées par HUYGENS, en utilisant les moyens "actuels" de l'analyse qu'ils avaient fraîchement étudiés (intégrales, dérivées, équations différentielles...).

Dans l'atelier de l'Université d'été dont cet article est le compte rendu, j'ai voulu comparer trois approches et leur complémentarité pour un enseignement de ce sujet (et d'autres sujets?): l'approche authentique "géométrique" de HUYGENS tel qu'on peut le lire dans *Horologium Oscillatorium*, l'approche par l'analyse, et l'approche "graphique" rendue possible actuellement par l'introduction (en cours) des calculatrices graphiques dans les classes.

D'une part, la comparaison de ces approches est intéressante en soi (trois façons de voir les choses, trois "cultures" différentes). D'autre part, en se limitant à une seule approche, on butte sur des difficultés de taille à faire renoncer au sujet bien des professeurs de lycée. En combinant les trois, il est possible, à mon avis, de faire découvrir les propriétés en question par les élèves, et de leur faire apprécier aussi bien les outils de l'analyse que la beauté de certains raisonnements "géométriques" (à la ARCHIMÈDE) de HUYGENS.

1. Les grandes lignes

L'introduction de *Horologium Oscillatorium* et quelques passages de la première partie de cette oeuvre (contenant la description de l'horloge), permettent une prise en contact "directe" avec le contexte de l'horloge à pendule (extrait 1 ci-dessous). Afin d'entrer vraiment dans le problème, mes élèves ont effectué les expériences physiques que mentionne HUYGENS.

Extrait 1

L'HORLOGE À PENDULE
OU
DÉMONSTRATIONS GÉOMÉTRIQUES
SUR LE
MOUVEMENT DES PENDULES ADAPTÉ AUX HORLOGES
PAR
CHRISTIAN HUYGENS DE ZUYLICHEM,
FILS DE CONSTANTYN.

Quinze années ſe ſont écoulées [1]) depuis celle où nous avons fait connaître par la publication d'une brochure [2]) la conſtruction des horloges que nous avions récemment inventée à cette époque. Attendu que depuis ce temps nous avons trouvé pluſieurs choſes qui regardent la perfection de cet ouvrage, nous nous ſommes réſolus à les expliquer en particulier dans ce livre-ci.

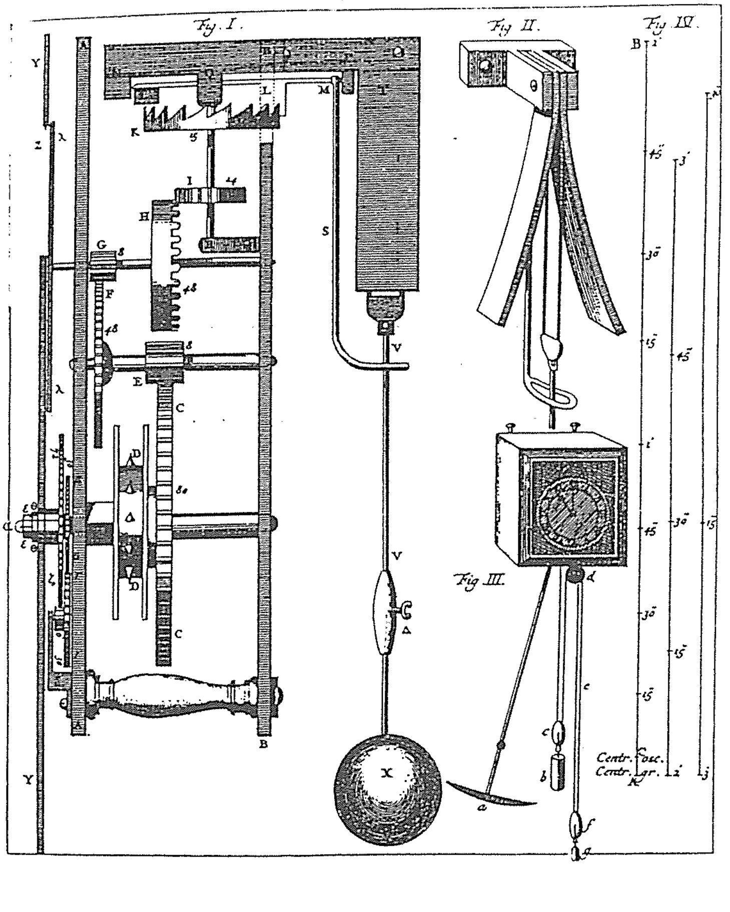
Ces choſes ſont ſi intimement liées à la perfection de cette invention qu'elles peuvent être conſidérées comme la principale partie et pour ainſi dire le fondement, qui y manquait auparavant, de tout ce mécaniſme. En effet, le pendule ſimple ne poſſédait pas de meſure du temps certaine et égale, puiſqu'on obſerve que les plus larges mouvements ſont plus tardifs que les plus étroits; or, nous avons trouvé par le moyen de la géométrie une façon differente, inconnue juſqu'ici, de ſuſpendre ce pendule: nous avons découvert une ligne poſſédant une courbure telle qu'elle ſe prête d'une façon entièrement admirable à lui donner l'égalité déſirée. Depuis notre application de cette ligne aux horloges leur mouvement eſt devenu ſi conſtant et ſi certain qu'enſuite de pluſieurs expériences faites par terre et par mer il eſt maintenant manifeſte que ces horloges ſont très utiles et à l'aſtronomie et à l'art de naviguer. C'eſt cette ligne que décrit en l'air par ſa circonvolution continuelle un clou attaché à une roue courante. Les géomètres de notre temps l'ont appelée cycloïde et l'ont examinée avec ſoin à cauſe de ſes diverſes autres propriétés. Quant à nous, nous l'avons conſidérée à cauſe de cette faculté dont nous parlions, ſavoir celle de meſurer le temps, laquelle nous y avons trouvée ſans en avoir le moindre ſoupçon, rien qu'en raiſonnant ſuivant les méthodes de l'art. Ayant depuis longtemps fait connaître cette propriété à quelques amis verſés en ces matières (car c'eſt peu de temps après la première édition de l'horloge que nous l'avons aperçue), nous la propoſons maintenant à lire à tous confirmée par la démonſtration la plus exacte que nous ayons pu trouver. Ainſi ce ſera en cette démonſtration que conſiſtera la principale partie de ce livre. Pour la donner, il a été néceſſaire tout d'abord de corroborer et d'amplifier la doctrine du grand Galilée touchant la chute des corps graves, doctrine dont le fruit le plus ſouhaité et pour ainſi dire le ſommet le plus élevé eſt préciſément la propriété de la cycloïde que nous avons découverte.

Au reste, afin qu'on pût rapporter cette propriété à l'usage des pendules, il nous a fallu établir une nouvelle théorie des lignes courbes, savoir la théorie des courbes qui par leur évolution en engendrent d'autres. Ceci conduit à la comparaison de la longueur des lignes courbes et des lignes droites entre elles que j'ai poursuivie même au-delà de ce que mon sujet demandait: je l'ai fait à cause de la beauté et de la nouveauté apparentes de cette théorie.

PREMIÈRE PARTIE DE L'HORLOGE À PENDULE

Contenant la description de l'horloge[1]*).*

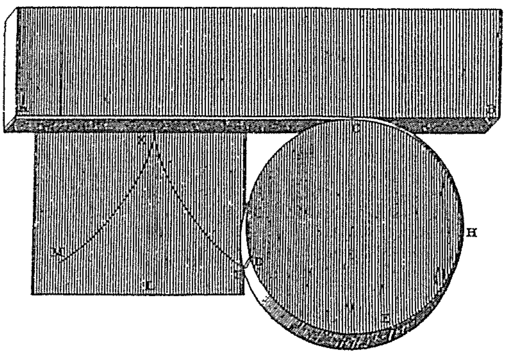
[Fig. 1[illegible].]



Reste à décrire la forme des lames entre lesquelles nous avons dit que le pendule est attaché [Fig. 17 II] et dont la fonction fort importante est de rendre sa période constante. En effet, sans elles les oscillations simples du pendule (quoique d'aucuns aient pensé différemment [1])) ne seront pas isochrones mais les plus étroites auront une période plus courte. C'est ce qu'on découvre aisément par l'expérience suivante: si l'on prend deux fils de même longueur, portant des poids égaux et suspendus séparément, qu'on écarte l'un beaucoup, l'autre peu, de la perpendiculaire et qu'on les lâche simultanément, on ne les verra pas longtemps mouvoir ensemble dans le même sens mais celui dont les oscillations sont plus étroites prendra l'avance. D'autre part on peut aussi trouver les rapports des temps correspondant à des arcs quelconques; on les exprimera en nombres calculés d'après des principes bien établis et aussi proches qu'on voudra. On peut dire par exemple que le temps d'une chute le long de tout un quart de circonférence est à celui qui correspond à un très petit arc à peu près comme 34 est à 29 [2]). De sorte qu'on ne doit aucunement attribuer cette diversité à la résistance de l'air, comme quelques-uns l'ont voulu [3]), mais qu'elle provient de la nature même du mouvement et de celle du cercle. On pourrait encore tirer cette conclusion de la construction du pendule isochrone, vu que celui-ci s'écarte notablement dans son mouvement de la circonférence de cercle, comme cela paraîtra bientôt.

Il pourra peut-être sembler que dans nos horloges du genre ici considéré, où l'amplitude des oscillations est toujours la même, l'inégalité dont nous parlions n'aura aucune importance et que par conséquent aucune correction du pendule ne sera nécessaire. Il en serait vraiment ainsi si l'amplitude de toutes les oscillations était constamment et absolument la même. Mais comme elle est quelquefois un peu plus grande et d'autres fois un peu plus petite, une assez grande différence résulte enfin de ce grand nombre de différences fort minimes; c'est ce que l'effet et les expériences font bien voir. Car quoique la force du poids par rapport à la prochaine roue soit toujours la même, cependant, étant transmise par tant d'autres, avec quelque soin qu'on les ait limées, elle ne parvient pas toujours en même intensité au pendule. D'ailleurs le mouvement des roues est aussi rendu plus difficile par le froid et par la disparition ou la corruption de l'huile qu'on y verse. Mais ce sont surtout les oscillations des horloges marines qui deviennent inégales à cause du ballottement continuel du navire, de sorte qu'il faut sans doute corriger le défaut d'inégalité chez toutes les horloges, mais que c'est surtout dans le cas des horloges marines qu'il faut veiller à ce que les oscillations de grande et de petite amplitude soient isochrones.

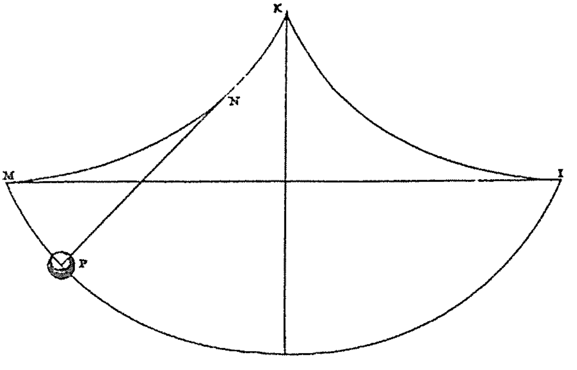
[Fig. 18.]



Soit attachée sur une table plane la règle AB grosse d'un demi-doigt [Fig. 18]. Ensuite soit fait un cylindre CDE d'une hauteur égale à cette grosseur et ayant le diamètre de la base égal à la moitié de la longueur du pendule; et soit FGHE une petite bande ou plutôt une mince plaque attachée à la règle en F et à la circonférence du cylindre en quelque point E, de sorte qu'elle s'applique en partie au cylindre et qu'en partie elle s'étende le long de la règle AB. Qu'une pointe de fer DI soit attachée au cylindre laquelle ait son extrémité un peu au-delà de la base inférieure et en façon qu'elle réponde exactement à sa circonférence.

Les choses étant ainsi arrangées, la pointe I décrira sur le plan de la table placée au-dessous la ligne courbe KI appelée cycloïde, aussitôt que le cylindre tourne en suivant la règle AB, dont il n'est séparé que par la grosseur de la petite lame FG. La base du cylindre employé sera le cercle générateur, CDE, de la cycloïde. Or, après que nous avons appliqué à la règle AB la table ou lame KL et que la partie KI de la cycloïde y a été tracée, nous retournerons cette lame et tracerons sur l'autre côté une ligne semblable KM émanant du même point K. Ensuite nous découperons la figure MKI exactement suivant ces lignes. C'est à cette figure-là qu'il faut adapter l'intervalle des lames entre lesquelles le pendule est suspendu [1]). À l'usage des horloges les petites portions d'arcs KM et KI suffisent; le reste de la ligne courbe serait inutile puisque le fil du pendule ne peut l'atteindre.

[Fig. 19.]



Mais afin qu'on entende plus pleinement la nature et l'effet de cette ligne admirable, il m'a semblé bon de représenter ici dans une autre figure [Fig. 19] les semicycloïdes entières KM et KI entre lesquelles le pendule KNP, d'une longueur égale à deux fois le diamètre du cercle générateur, est suspendu, lequel étant mis en mouvement exécutera des oscillations isochrones, quelle que soit leur amplitude, jusqu'à la plus grande de toutes correspondant à l'arc MPI: de telle manière que le centre de la sphère P attachée au fil se trouve toujours sur la ligne MPI qui est elle aussi une cycloïde. J'ignore si cette propriété remarquable est donnée à aucune autre ligne, savoir celle de se décrire soi-même par son évolution [2]). Or, ce que nous avons dit à propos d'elle sera démontré en détail lorsque nous traiterons de la chute des corps graves et de l'évolution des courbes.

De cette lecture et de ces expériences, nous retenons la description-définition de la cycloïde ainsi que les trois affirmations suivantes, qui demandent à être démontrées.

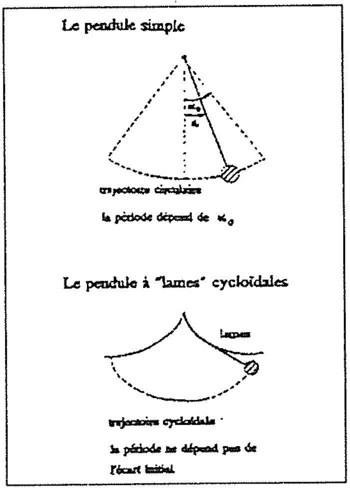
A Le pendule simple n'est pas *isochrone.*

B En suspendant le pendule entre deux "lames" cycloïdales (de dimensions appropriées), on retrouve comme trajectoire du pendule une cycloïde "égale".

C Le mouvement d'un corps"grave" sur une trajectoire cycloïdale est isochrone.

Il est clair que les affirmations B et C impliquent l'isochronisme d'un pendule muni de telles lames.

Chacun des paragraphes qui suivent reprend une de ces affirmations.



2. Le pendule simple (A)

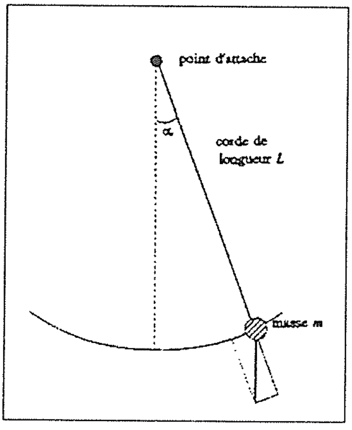
Approche de HUYGENS

Nous avons lu dans l'extrait 1 (p. 2): "*Le pendule simple ne possédait pas de mesure du temps certaine et égale, puisqu'on observe que les plus larges mouvements sont plus tardifs que les plus étroits.*"

HUYGENS ne donne pas de démonstration mais se réfère à l'expérience.

Approche analytique

Voyons ce qu'en dit la mécanique et l'analyse de NEWTON et d'après.



"Force égale masse fois accélération" nous donne l'équation différentielle

$$- mg \sin \alpha = mL \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

ou encore

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \alpha$$

Dans une approximation pour petits angles α , on remplace sin α par α et on trouve comme solution $\alpha = \alpha_0 \cos(\sqrt{\frac{g}{L}} t)$ La période (approchée) $2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ne dépend pas de α_o.

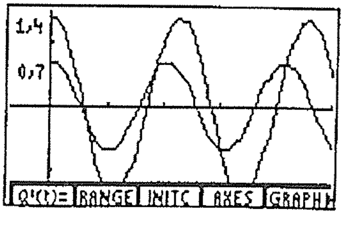
Il est bien plus compliqué de calculer la période exacte. On trouve (dans des cours universitaires de mécanique):

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha_0}{2}\sin^2\varphi}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} \right)^2 \sin^{2n} \frac{\alpha_0}{2} \right)$$

Approche graphique

Pour les élèves, l'équation différentielle est bien trop difficile à résoudre de façon analytique, mais il est possible de l'aborder graphiquement. On introduit l'équation différentielle dans une calculatrice graphique (en prenant p.e. L = 1 m) et on choisit deux valeurs différentes pour la condition initiale α_0, p.e. 1,4 rad et 0,7 rad.



Les solutions graphiques données par l'appareil (suivant une méthode numérique nommée *Runge-Kutta*), n'ont manifestement pas la même période.

Nous avons utilisé ici (et dans les paragraphes suivants) la TI-85 de *Texas Instruments*.

3. La développante de la cycloïde est une cycloïde égale (B)

L'approche de HUYGENS

Jetons d'abord un coup d'oeil sur la démonstration de HUYGENS. Celle-ci remplit plusieurs pages de la troisième partie de *Horologium Oscillatorium* (extrait 2 ci-dessous). L'affirmation B dont il s'agit correspond à la proposition VI de cette troisième partie (p. 13). J'invite le lecteur à prendre le temps de "descendre" le long du fil déductif de HUYGENS, qui mène par toutes les six premières propositions de la troisième partie. Deux propositions de la deuxième partie sont également utilisées, notamment les propositions XIV et XV.

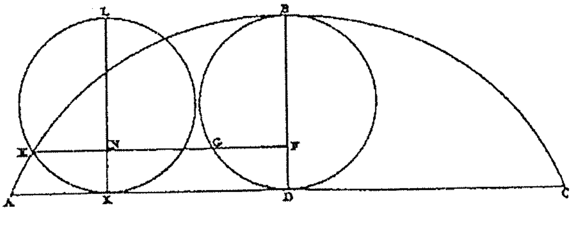
Le raisonnement se résume ainsi: HUYGENS considère deux cycloïdes égales comme sur la figure 58 (p. 12); *il démontre que la "deuxième" cycloïde est perpendiculaire aux tangentes de la première, et que cette propriété suffit pour conclure qu'elle en est la développante.* Le "passage à la limite" et la "dérivabilité" se cachent dans la démonstration de la proposition 3 (p. 11).

Extrait 2

PROPOSITION XIV.

Soit ABC *une cycloïde* [Fig. 35], AC *ſa baſe*, BD *ſon axe. Je penſe qu'on voit avec évidence comment cette ligne eſt engendrée ſuivant ce qui a été expoſé plus haut ſur ſa définition et ſa deſcription mécanique* [1]). *Soit de plus* BGD *un cercle ſymétrique par rapport à l'axe* BD. *Traçons* EF *parallèlement à la baſe* AC *par un point* E *arbitrairement choiſi ſur la cycloïde, laquelle parallèle coupe l'axe* BD *en* F *et la circonférence* BGD *en* G. *Je dis que la droite* GE *eſt égale à l'arc* GB [2]).

[Fig. 35.]



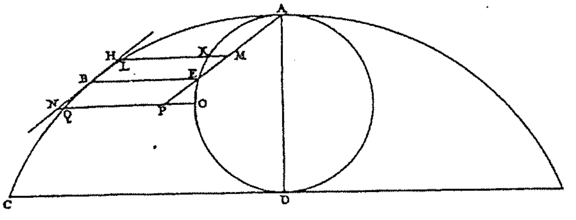
En effet, ſoit décrite par le point E une circonférence de cercle LEK égale à BGD et touchant la baſe de la cycloïde en K. Menons auſſi le diamètre KL. La droite AK eſt donc égale à l'arc EK. Mais la longueur entière AD eſt égale à la demi-circonférence KEL; par conſéquent KD eſt égale à l'arc EL ou GB. Or, KD ou NF eſt égale à EG, puiſque EN = GF et que la partie NG leur eſt commune. Il eſt donc prouvé qu'on a auſſi : GE = arc GB.

PROPOSITION XV.

Un point ſur une cycloïde étant donné, mener par lui une tangente à la cycloïde [1]).

Soit ABC [Fig. 36] la cycloïde et B le point donné ſur lui par lequel il faut mener la tangente.

[Fig. 36.]



Conſtruiſons autour de l'axe AD de la cycloïde le cercle générateur AED et menons BE parallèlement à la baſe de la cycloïde, laquelle parallèle coupe la circonférence du cercle nommé en E. Joignons les points A et E par une droite et tirons enfin par B une parallèle HBN à cette dernière. Je dis que cette parallèle touche la cycloïde en B.

En effet, prenons ſur la parallèle un point H quelconque différent de B, d'abord vers le haut, et menons par H une droite parallèle à la baſe de la cycloïde, coupant celle-ci en L, la circonférence AED en K et la droite AE en M. Comme KL eſt alors égale à l'arc KA et que la droite KM eſt plus petite que l'arc KE, la droite ML ſera inférieure à l'arc AE, c.à.d. à la droite EB ou MH; d'où il apparaît que le point H eſt ſitué en dehors de la cycloïde.

Prenons en ſecond lieu ſur la droite HN un point N ſitué au-deſſous de B et menons, comme plus haut, par N une droite parallèle à la baſe, coupant la cycloïde en Q, la circonférence AED en O, et le prolongement de la droite AE en P. Comme OQ eſt alors égale à l'arc OA et que OP eſt plus grande que l'arc OE, PQ ſera inférieure à l'arc EA, c.à.d. à la droite EB ou PN. D'où il apparaît de nouveau que le point N ſe trouve en dehors de la cycloïde. Puiſque tous les points pris ſur la droite HBN, excepté B, ſont donc ſitués en dehors de la cycloïde, il eſt établi que cette droite touche la cycloïde en B. C. Q. F. D.

TROISIÈME PARTIE
DE L'HORLOGE À PENDULE.

De l'Evolution et de la Dimenſion des Lignes courbes.

DEFINITIONS.

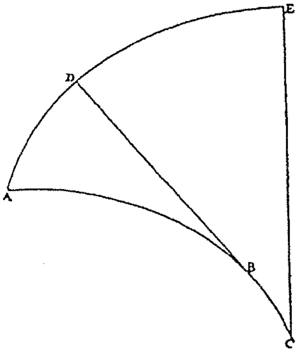
I.

Appelons ligne courbée vers un ſeul côté une ligne que toutes ſes tangentes touchent du même côté. Que ſi la ligne a quelques parties droites, les prolongements de celles-ci ſeront conſidérés comme des tangentes.

II.

Lorsque deux lignes de cette espèce émanent d'un même point et que la convexité de l'une est tournée vers la concavité de l'autre, comme sont placées dans la figure ci-jointe [Fig. 52] *les courbes* ABC *et* ADE, *elles seront dites concaves l'une et l'autre vers le même côté.*

[Fig. 52.]



III.

Si l'on considère un fil, ou une ligne flexible, enroulé sur une ligne courbée vers un seul côté, et que, une extrémité du fil demeurant attachée à la courbe, l'autre en est écartée de telle manière que la partie libre du fil reste toujours tendue, il est manifeste qu'une certaine autre courbe est décrite par cette extrémité du fil. Donnons-lui le nom de Développante.

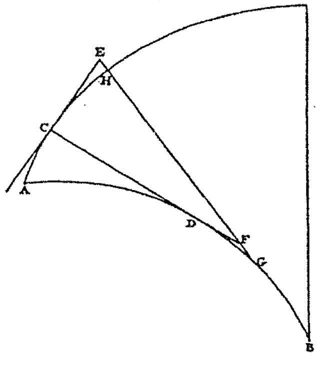
IV.

Et que celle sur laquelle le fil est enroulé porte le nom de Développée. Dans la figure qui précède [Fig. 52] ABC *est la développée et* ADE *la développante correspondante de sorte que, lorsque l'extrémité du fil passe de* A *en* D, *la partie tendue du fil est la droite* DB, *le reste* BC *étant encore enroulé sur la courbe* ABC. *Il est manifeste que* DB *touche la développée en* B.

PROPOSITION I[1]).

Toute tangente à la développée rencontrera la développante à angles droits.

[Fig. 53.]



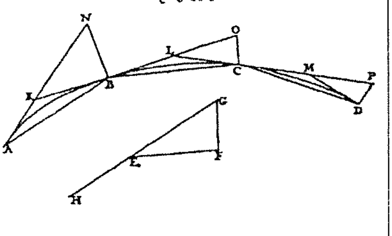
Soit AB [Fig. 53] la développée et AH la ligne décrite par son évolution. Puisse la droite FDC, tangente en D à la courbe AD, couper en C la courbe ACH. Je dis qu'il la coupe à angles droits, en d'autres termes que si l'on mène la droite CE perpendiculairement à CD elle touche la courbe ACH en C. En effet, puisque DC touche la développée en D, il apparait qu'elle représente la position du fil au moment où son extrémité est parvenue jusqu'au point C; et si nous réussissons à démontrer que le fil, dans la description entière de la courbe ACH, n'atteint nulle part la droite CE excepté au point C, il sera manifeste que la droite CE touche la courbe ACH en ce point.

Prenons sur AC un point H quelconque différent de C et considérons d'abord le cas où ce point est plus éloigné de l'origine de la développante que le point C. Supposons que la partie libre du fil soit HG lorsqu'il est parvenu avec son extrémité jusqu'au point H. HG touche donc la ligne AB en G. Et comme dans la description de la partie CH de la courbe, l'arc DG a été développé, CD prolongée du côté D coupera HG, p. e. en F. Appelons E le point de rencontre de GH avec la droite CE. Puisque l'ensemble des deux lignes CF et FG est alors plus grand que DG, que cette dernière soit courbée ou droite, il en résultera, lorsqu'on ajoute de part et d'autre la droite DC, que la somme des droites CF et FG est plus grande que celle de la droite CD et de DG. Mais à cause de l'évolution du fil, il apparait que la droite HG est égale à la somme de la droite CD et de DG. Par conséquent la somme CF + FG sera aussi plus grande que la droite HG; et en retranchant la partie commune FG, on trouve que CF est plus grande que HF. Or, FE > FC, parce que l'angle C du triangle FCE est droit. FE est donc a fortiori plus grande que FH. D'où il ressort que du moins de ce côté-là du point C l'extrémité du fil n'arrive pas jusqu'à la droite CE.

PROPOSITION II.

Toute ligne courbe terminée, courbée vers un seul côté, telle que ABD [Fig. 55] *peut être divisée en un si grand nombre de parties qui si l'on tire les cordes qui soustendent chacun des arcs, telles que* AB, BC *et* CD, *et ensuite depuis chacun des points de division et aussi depuis l'extrémité de la courbe les tangentes* AN, BO, CP, *chacune jusqu'à la normale à la courbe au point de division suivant* (BN, CO, DP *sont des normales*), *que chaque corde, dis-je, aura à la normale correspondante* (AB *à* BN, BC *à* CO, CD *à* DP) *un rapport supérieur à tout rapport arbitrairement donné.*

[Fig. 55.]



En effet, ſoit donné le rapport EF : FG [Fig. 55] de deux droites formant les côtés d'un angle droit F et tirons la droite GEH.

Suppoſons d'abord la courbe ABD diviſée par les points B, C en des parties ſi petites que les tangentes à la courbe en deux de ces points qui ſe ſuivent ſe coupent l'une l'autre ſuivant des angles dont chacun eſt ſupérieur à l'angle FEH, tels que $\angle$ AKB, $\angle$ BLC et $\angle$ CMD. La poſſibilité d'une pareille diviſion eſt trop évidente pour exiger une démonſtration. Les cordes AB, BC et CD ayant été tirées et les normales à la courbe BN, CO, DP ayant été érigées, leſquelles rencontrent les prolongements de AK, de BL et de CM en N, O et P, je dis que chacun des rapports de deux droites AB : BN, BC : CO et CD : CP eſt ſupérieur au rapport EF : FG.

Car, puiſque $\angle$ AKB > $\angle$ HEF, $\angle$ NKB, ſupplément du premier, ſera plus petit que $\angle$ GEF. Or, l'angle B du triangle KBN eſt droit, comme F du triangle EFG. Par conſéquent KB : BN > EF : FG. Mais AB > KB, puiſque l'angle K du triangle AKB eſt obtus; en effet, il eſt plus grand que l'angle HEF lequel eſt obtus par conſtruction. Le rapport AB : BN ſera donc plus grand que le rapport KB : BN et à plus forte raiſon que le rapport EF : FG. On démontrera de la même manière que les rapports BC : CO et CD : DP ſont l'un et l'autre plus grands que le rapport EF : FG. La propoſition eſt donc démontrée.

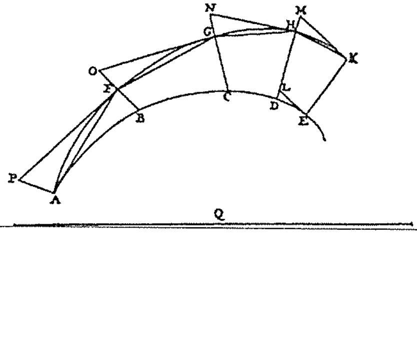
PROPOSITION III.

Deux lignes courbées l'une et l'autre vers un ſeul côté et concaves vers le même côté ne peuvent émaner d'un ſeul point dans une telle poſition l'une par rapport à l'autre que toute droite normale à l'une ſoit auſſi normale à l'autre.

En effet, ſoient ACE et AGK poſſédant l'extrémité commune A, ſi cela eſt poſſible, des lignes courbes de cette eſpèce [Fig. 56] et ſoit KE une normale en un point quelconque K de la courbe extérieure à cette dernière: étant normale à cette courbe KE le ſera donc auſſi à la courbe ACE.

Nous pouvons prendre maintenant quelque droite Q plus grande que la courbe KGA. Suppoſons KGA diviſée par les points H, G, F, comme il a été dit dans la propoſition précédente, en un ſi grand nombre de parties que chacune des cordes KH, HG, GF, FA ait à la normale adjacente HM, GN, FO ou AP un rapport ſupérieur à celui de la ligne Q à la droite KE. L'enſemble des cordes nommées aura donc auſſi à la ſomme de toutes les normales un rapport ſupérieur à Q : KE. Prolongeons maintenant ces mêmes normales et puiſſent-elles couper la courbe ACE en D, C, et B, normalement par hypothèſe. On aura maintenant: KE < MD. En effet, EL, perpendiculaire à KE, ſera tangente à la courbe ACE, puiſque KE lui eſt normale; EL coupera donc néceſſairement la droite MD entre D et M. Par conſéquent KE, qui eſt la plus courte de toutes les lignes compriſes entre les parallèles EL et KM, ſera plus petite que ML et à plus forte raiſon que MD. On démontrera de la même manière que HD < NC, GC < OB, et FB < PA. Comme on a donc PA > FB, la ſomme PA + OF ſera ſupérieure à OB. Pareillement, puiſque OB > GC, la ſomme OB + NG ſera plus grande que NC. Mais la ſomme PA + OF était ſupérieure à OB. Par conſéquent la ſomme des trois termes PA, OF et NG ſera certainement plus grande que NC. Derechef, puiſque NC > HD, la ſomme NC + MH ſera plus grande que MD. Partant, ſi l'on prend au lieu de NC la ſomme des trois termes PA, OF, NG qui lui eſt ſupérieure, la ſomme des quatre grandeurs PA, OF, NG et MH ſera a-fortiori plus grande que MD: et par conſéquent cette même ſomme ſera auſſi certainement plus grande que la droite KE, puiſque MD ſurpaſſait KE en longueur. Or, nous avons dit que la ſomme des ſouſtangentes AF + FG + GH + HK a à celle de toutes les normales PA, OF, NG et MH un rapport ſupérieur à celui de la ligne Q à KE. Par conſéquent la ſomme de toutes les cordes ſera plus grande que la droite Q. Mais cette dernière avait été priſe plus grande que la courbe AGK. La ſomme des cordes AF + FG + CK + HK ſera donc plus grande que la courbe AGK aux arcs de laquelle ces cordes correſpondent; ce qui eſt abſurde puiſque chacune des cordes eſt plus petite que l'arc correſpondant.

[Fig. 56.]



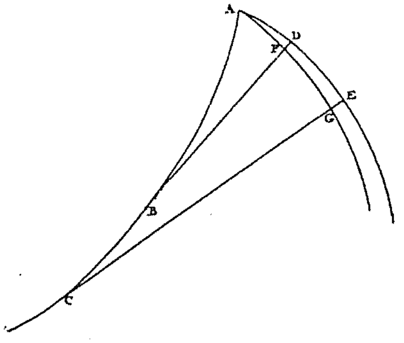
PROPOSITION IV.

Si d'un même point partent deux lignes courbées l'une et l'autre vers un feul côté et concaves vers le même côté, et ainfi fituées l'une par rapport à l'autre que toutes les tangentes à l'une d'elles coupent l'autre à angles droits, cette deuxième fera la développante de la première à partir du point commun.

Soient données les lignes ABC et ADE [Fig. 57] courbées l'une et l'autre vers un feul côté et concaves vers le même côté, poffédant l'extrémité commune A. Puiffent toutes les tangentes à la ligne ABC, telles que BD et CE, couper la ligne ADE normalement. Je dis que ADE eft décrite par l'évolution de ABC à partir de l'extrémité A.

En effet, fuppofons, fi cela eft poffible, que par la dite évolution foit décrite une certaine autre courbe AFG. Par conféquent des lignes droites quelconques, tangentes à la développée ABC, telles que BD et CE, couperont cette courbe AFG à angles droits *, p. e. en F et G. Mais par hypothèfe ces mêmes tangentes font auffi normales à la ligne ADE. Or, nous avons affaire à des courbes ADE et AFG, fe terminant au même point A, courbées l'une et l'autre vers un feul côté et concaves vers le même côté, puifqu'elles font concaves vers le même côté que ABC; car ceci eft vrai de la ligne ADE par hypothèfe et de la ligne AFG d'après la première propofition de cette Partie. De plus toutes les normales à l'une d'elles font auffi normales à l'autre. Mais il a été démontré plus haut que ceci eft impoffible *. Il eft donc établi que ADE elle-même fera décrite par l'évolution de la ligne ABC. C. Q. F. D.

[Fig. 57.]

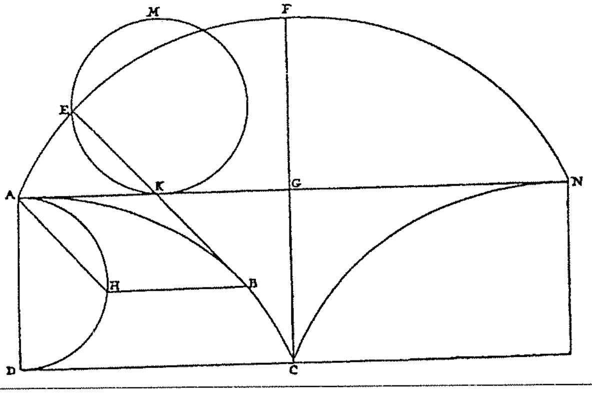


PROPOSITION V.

Lorfqu'une droite touche une cycloïde en fon fommet et qu'on conftruit fur cette droite prife pour bafe une autre cycloïde, femblable et égale à la première, à partir du point coïncidant avec le fommet nommé, une tangente quelconque à la cycloïde inférieure fera normale à l'arc cycloïdal fupérieur ¹).

Suppofons que la droite AG [Fig. 58] touche la cycloïde en fon fommet A et que fur cette droite prife pour bafe une autre cycloïde AEF à fommet F foit conftruite. Soit BK une tangente à la cycloïde ABC. Je dis que cette tangente, prolongée jufqu'à la cycloïde AEF, la rencontrera à angles droits.

[Fig. 58.]



En effet, décrivons autour de AD, axe de la cycloïde ABC, le cercle générateur AHD qui coupe BH, parallèle à la baſe, en H, et tirons la droite HA. Il s'enſuit, puiſque BK touche la cycloïde en B, qu'elle eſt parallèle à la droite HA *. Par conſéquent AHBK eſt un parallélogramme et AK eſt égale à HB, c.à.d. à l'arc AH *. Décrivons maintenant le cercle KM égal au cercle générateur AHD, touchant la baſe AG en K et coupant la droite BK prolongée en E. Comme BKE eſt parallèle à AH et par conſéquent EKA = KAH, il eſt manifeſte que le prolongement de BK coupe de la circonférence KM un arc égal à celui que la droite AH coupe de la circonférence AHD. Par conſéquent l'arc KE eſt égal à l'arc AH, c.à.d. à la droite HB et à la droite KA. Mais de cette égalité il réſulte, d'après une propriété de la cycloïde, puisque le cercle générateur MK a touché la règle en K, que le point décrivant la cycloïde a paſſé par E. La droite KE rencontre donc la cycloïde en E à angles droits *. Or, KE n'eſt autre choſe que le prolongement de BK. Il eſt donc évident que BK prolongée juſqu'à la cycloïde lui eſt normale. C. Q. F. D.

* Propos. 15. de la 2ième Partie.
* Propos. 14. de la 2ième Partie.
* Propos. 15. de la 2ième Partie.

PROPOSITION VI.

Par l'Évolution, à partir du ſommet, d'une demi-cycloïde, une autre demi-cycloïde eſt décrite, égale et ſemblable à la première, dont la baſe coïncide avec la droite qui touche la cycloïde développée en ſon ſommet.

Soit donnée une demi-cycloïde ABC [Fig. 58] à laquelle ſoit impoſée une autre demi-cycloïde ſemblable AEF, comme dans la propoſition précédente. Je dis que lorſque la ligne flexible appliquée à la demi-cycloïde ABC eſt développée à partir du point A, elle décrit de ſon extrémité la demi-cycloïde AEF. En effet, puiſque les demi-cycloïdes ABC et AEF, courbées l'une et l'autre vers un ſeul côté et concaves vers le même côté, de plus ſituées de ſorte que toutes les tangentes de la demi-cycloïde ABC coupent la demi-cycloïde AEF à angles droits, il s'enſuit que cette dernière eſt décrite par l'évolution de la première à partir du point A *. C. Q. F. D.

Et il apparait que ſi nous conſtruiſons une demi-cycloïde CN ſymétrique avec ABC par rapport à la droite CG, une autre demi-cycloïde FN ſera décrite par l'extrémité du fil, ſoit par l'évolution de la courbe CN ſoit lorſque le fil, déjà tendu ſuivant CF, eſt enroulé ſur elle; et que cette demi-cycloïde formera avec la précédente, AEF, une cycloïde entière.

Par ces conſidérations, et par la Prop. XXV de la Chute des Corps peſants, la vérité de ce que nous avons dit plus haut dans la Conſtruction de l'Horloge ſur le mouvement uniforme du pendule eſt préſentement manifeſte. En effet, il eſt clair que le pendule, ſuſpendu et mis en mouvement entre une paire de lames courbées en forme de demi-cycloïde, décrit par ſon mouvement un arc de cycloïde et que par conſéquent ſes oſcillations, quelle que ſoit leur amplitude, ſont exécutées dans des temps égaux. Car il n'eſt d'aucune importance que le mobile parcoure une ſurface courbée en cycloïde ou bien qu'étant attaché à un fil il décrive cette même ligne en l'air, attendu que dans l'un et l'autre cas il eſt également libre et a la même inclinaiſon au mouvement dans tous les points de la courbe.

La question qui reste ouverte après cette lecture attentive, c'est "comment a-t-il trouvé ça?" Comme dans tout texte organisé de façon déductive (et non de façon heuristique), l'auteur ne le dit pas! Au contraire, il prétend l'avoir trouvé par hasard et sans peine: "[...], *laquelle nous y avons trouvée sans en avoir le moindre soupçon, rien qu'en raisonnant suivant les méthodes de l'art*" (extrait 1, p.2).

Schéma: le fil déductif de la démonstration de HUYGENS

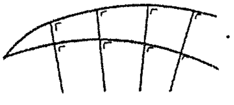
Proposition VI La développante est une cycloïde égale.

Proposition V Les tangentes à la première cycloïde sont normales à la seconde.

Proposition XV (deuxième partie) Construction d'une tangente.

Proposition XIV (deuxième partie) Propriété de la cycloïde.

Proposition IV Si les tangentes d'une courbe sont normales à une autre courbe, la deuxième courbe est la développante de la première.

Proposition III L'impossibilité de .

Proposition II

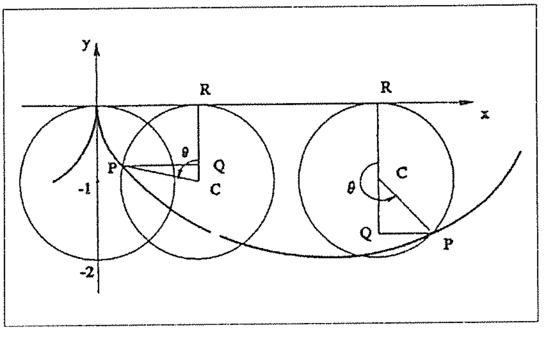
Proposition I Les tangentes d'une courbe sont normales à la développante.

Approche analytique

Re-démontrons maintenant cette même propriété en utilisant les moyens actuels de l'analyse.Les questions parsemées dans le texte guideront les élèves qui en ont besoin.

Tout d'abord, il faut "traduire" la définition "mécanique" de la cycloïde en langage analytique.

Prenons comme unité de longueur le rayon de la "roue".



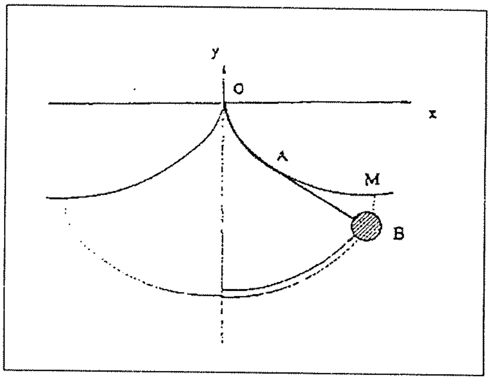
? Comment traduire le fait que la roue "ne glisse pas"?

? Exprimer les coordonnées de C en fonction de l'angle θ.

? Utiliser le triangle CPQ afin d'exprimer les coordonnées de P en fonction de θ.

Nous obtenons des équations paramétriques de la première cycloïde (les "lames"):

$$\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = -1 + \cos\theta \end{cases}$$



Attachons maintenant en O un pendule de longueur égale à $|\text{arc } OM|$. A un moment donné, la corde suit l'arc OA et continue de A à B selon la tangente. Soit θ_1 la valeur du paramètre θ en A.

? Calculer la mesure de l'arc OA et du segment AB

On trouve pour l'arc OA

$$\int_0^{\theta_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \dots = 4\left(1 - \cos\frac{\theta_1}{2}\right).$$

En remplaçant θ_1 par π on voit que la corde mesure 4 unités. AB mesure donc $4\cos\frac{\theta_1}{2}$ unités.

? Les coordonnées de B sont celles de A plus $|AB|$ fois un vecteur normé tangent à la cycloïde et orienté de A vers B. Qu'est-ce que ça donne?

Ça donne, après quelques lignes de calcul, $B\ (\theta_1 + \sin\theta_1, -3 - \cos\theta_1)$.

? Montrer que, si θ_1 varie, B parcourt une cycloïde égale à la première.

Il suffit pour cela de vérifier que

$$\begin{cases} B_x(\theta) = A_x(\theta + \pi) - \pi \\ B_y(\theta) = A_y(\theta + \pi) - 2 . \end{cases}$$

(B_x et B_y, par exemple, désignent les coordonnées du point B).

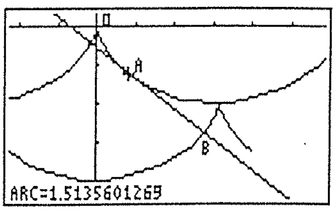
Certes, il y a bien d'autres façons de procéder pour démontrer que la développante est une cycloïde égale. On pourrait partir des équations des deux cycloïdes, définir B comme le point d'intersection de la tangente en A et la deuxième cycloïde, et vérifier que | arc OA | + | AB | = | arc OM |. Ou alors, on pourrait suivre HUYGENS d'un peu plus près: démontrer "en général" qu'une courbe normale à toutes les tangentes d'une courbe donnée, en est la développante, et puis vérifier que nos deux cycloïdes vérifient cette propriété.

Les concepts utilisés et les calculs de l'approche analytique sont plus compliqués que ceux de HUYGENS. L'avantage, néanmoins, c'est qu'il s'agit d'un *calcul*: la stratégie à suivre n'est pas difficile à découvrir; pour aboutir, il suffit de persévérer et d'être suffisamment habile en calcul algébrique. Le "calculus" de NEWTON et autres nous permet, en quelque sorte, de nous passer du génie de HUYGENS...

Approche graphique

Contrairement aux systèmes d'algèbre sur ordinateur (*Derive, Mathematica*, ...) les calculatrices graphiques ne peuvent pas (encore) effectuer à notre place ces manipulations de formules. Mais elles peuvent aider à visualiser et à vérifier ce calcul. Avant de voir apparaître la cycloïde sur l'écran, il faut en déterminer les équations. (Pour mes élèves, c'est un argument motivant en faveur de l'étude des équations paramétriques).

Dessinons sur l'écran la première cycloïde et sa translatée. En A, dessinons la tangente. Calculons (sur la calculatrice) | arc OA | (figure ci-jointe) et | AB |. On additionne ces deux mesures et on voit apparaître la valeur exacte de 4. Si la calculatrice ne démontre pas, du moins elle convainc.



4. L'isochronisme (C)

Approche de HUYGENS

La dernière des trois affirmations de nos "grandes lignes", notamment l'isochronisme d'un mouvement oscillatoire sur une trajectoire cycloïdale, est plus difficile à démontrer que la deuxième. Mon collage de *Horologium Oscillatorium* (extrait 3 ci-dessous) ne reprend que quelques propositions et "saute" les démonstrations. Notons au passage la façon dont les propriétés du mouvement de chute sont déduites de quelques "hypothèses" simples. HUYGENS "refait" ici une partie du travail de GALILÉE. Il est intéressant de repérer le "passage à la limite": "*si l'on considère les lignes courbes comme composées d'une infinité de lignes droites...*" (p. 20). C'est cette idée audacieuse qui a permis à LEIBNIZ, pendant les mêmes années 1670, de mettre au point le calcul différentiel.

Extrait 3

DEUXIÈME PARTIE DE L'HORLOGE À PENDULE.

De la Chute des Corps pesants et de leur Mouvement cycloïdal.

HYPOTHÈSES.

I.

Si la gravité n'existait pas et qu'aucune résistance d'air ne s'opposait au mouvement des corps, chacun d'eux continuerait son mouvement avec une vitesse uniforme en suivant une ligne droite.

II.

Mais maintenant il arrive par l'action de la gravité, de quelque cause qu'elle provienne, que les corps se meuvent d'un mouvement composé de leur mouvement uniforme dans une direction quelconque et de celui de haut en bas qui est dû à la gravité.

III.

On peut considérer ces deux mouvements séparément et l'un n'est pas empêché par l'autre [1]).

PROPOSITION I[1]).

Dans des temps égaux les accroissements de la vitesse d'un corps tombant sont toujours égaux et les espaces parcourus durant des temps égaux depuis le commencement de la chute forment une série dont les différences successives sont constantes.

PROPOSITION II[1]).

L'espace parcouru pendant un certain temps par un corps qui commence sa chute en partant du repos est la moitié de l'espace que ce corps pourrait parcourir d'un mouvement uniforme avec la vitesse acquise par la chute au bout du temps considéré.

PROPOSITION III.

Deux espaces parcourus par un corps tombant dans des temps quelconques, dont chacun est pris depuis le commencement de la chute, sont entre eux comme les carrés de ces temps, ou bien comme les carrés des vitesses acquises.

PROPOSITION VIII.

Lorsqu'un mobile descend d'un mouvement continu d'une hauteur déterminée par un nombre quelconque de plans contigus d'inclinaison quelconque, il finira toujours par acquérir la même vitesse, laquelle sera égale à celle qu'il acquerrait par une chute verticale de même hauteur [1]).

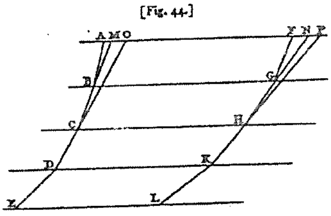
PROPOSITION XI.

Lorsqu'un mobile tend à descendre par quelque surface et qu'après l'invertissement du mouvement il est porté en haut par la même surface ou par une autre semblable et semblablement posée, il montera et descendra par le même espace en des temps égaux [2]).

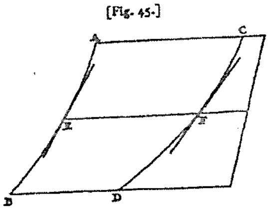
PROPOSITION XXI.

Lorsqu'un mobile descend d'un mouvement continu le long de certains plans inclinés contigus quelconques, et qu'une autre fois il descend de la même hauteur par un même nombre de plans contigus, ainsi construits que chacun d'eux correspond en hauteur à un des plans précédents, mais que le deuxième plan a toujours une plus grande inclinaison que le premier; je dis que le temps de la descente le long des plans moins inclinés est plus bref que celui de la descente par les plans plus inclinés.

[Fig. 44.]



[Fig. 45.]



Or, il est manifeste par là, si l'on considère les lignes courbes comme composées d'une infinité de lignes droites, que lorsqu'on a affaire à deux surfaces inclinées suivant des lignes courbées de la même hauteur et dont l'inclinaison de l'une surpasse toujours celle de l'autre en des points quelconques de même hauteur, le corps descendra alors aussi en un temps plus court le long de la surface moins inclinée que le long de la plus inclinée.

Supposons par exemple que les deux surfaces [Fig. 45] soient inclinées suivant les courbes AB et CD de même hauteur et pour lesquelles, lorsqu'on prend des points quelconques E, F de même hauteur, l'inclinaison de CD surpasse celle de AB, en d'autres termes que la tangente à la courbe CD en F soit plus inclinée par rapport à l'horizon que la tangente en E à la courbe AB: le temps de la chute par AB sera plus court que celui de la chute par CD.

Et la même chose aura lieu lorsque l'une des lignes est droite, pourvu que l'inclinaison partout égale de la droite soit plus grande ou plus petite que celle de la courbe en chacun de ses points.

PROPOSITION XXII.

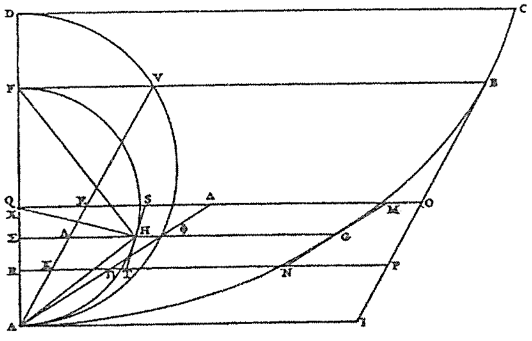
Si l'on considère dans une cycloïde à axe vertical, ayant son sommet en bas, deux parties de même hauteur de la courbe, mais dont l'une est plus proche du sommet, le temps de descente par la partie supérieure sera plus petite que celui de la descente par la partie inférieure.

PROPOSITION XXIII.

Soit la cycloïde ABC [Fig. 48] *ayant son sommet vers le bas et son axe* AD *vertical. Prenons sur elle un point quelconque* B *et tirons de là vers le bas la droite* BI *qui touche la cycloïde et se termine à la droite horizontale* AI. *Tirons la droite* BF *perpendiculairement à l'axe et décrivons sur* FA, *après l'avoir divisée en deux parties égales par le point* X, *la demi-circonférence* FHA. *La droite* ΣG *ayant été ensuite menée parallèlement à* BF *par un point quelconque* G *pris sur la courbe* BA, *laquelle* ΣG *coupe la circonférence* FHA *en* H *et l'axe* AD *en* Σ, *considérons les tangentes aux deux courbes aux points* G *et* H *et les parties de ces tangentes interceptées par les mêmes deux horizontales* MS *et* NT, *savoir* MN *et* ST. *Et puissent les mêmes droites* MS *et* NT *intercepter sur la tangente* BI *la partie* OP *et sur l'axe* DA *la partie* QR.

Cela étant ainsi, je dis que le temps dans lequel un corps parcourra la droite MN *avec une vitesse constante telle qu'il peut l'acquérir en descendant par l'arc* BG *de la cycloïde, sera au temps dans lequel la droite* OP *sera parcourue avec une vitesse constante égale à la moitié de celle qui est acquise par la descente le long de la tangente* BI, *comme la tangente* ST *est à la partie* QR *de l'axe.*

[Fig. 48.]

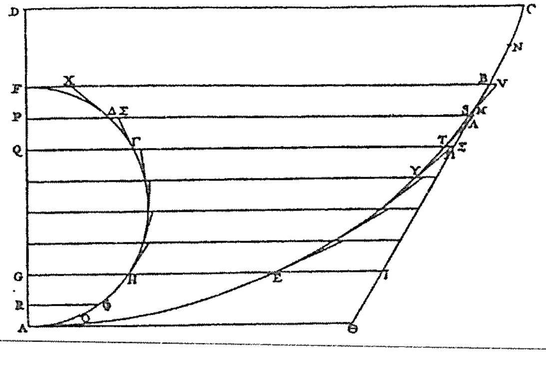


PROPOSITION XXIV.

Considérons de nouveau, comme dans la Proposition précédente, la cycloïde ABC [Fig. 49] *dont le sommet se trouve en bas et dont l'axe* AD *est vertical. Prenons sur elle un point quelconque* B *et tirons à partir de lui de haut en bas la tangente à la cycloïde* BΘ *qui rencontre la droite horizontale* AΘ *en* Θ. *Tirons encore la droite* BF *perpendiculaire à l'axe et décrivons sur* FA *la demi-circonférence* FHA. *Puisse ensuite une autre droite* GE, *parallèle à* FB, *couper la cycloïde en* E, *la droite* BΘ *en* I, *la circonférence* FHA *en* H *et enfin l'axe* DA *en* G.

Je dis que le temps de la descente suivant l'arc de cycloïde BE *est à celui suivant la tangente* BI *avec la moitié de la vitesse qui peut être acquise par une chute suivant* BΘ *comme l'arc* FH *est à la droite* FG.

[Fig. 49.]



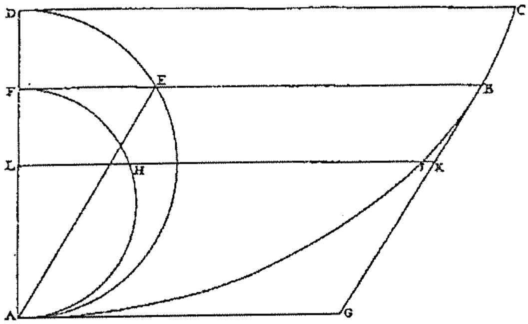
PROPOSITION XXV.

Dans une cycloïde à axe vertical et dont le sommet se trouve en bas, les temps de descente dans lesquels un mobile, partant du repos d'un point quelconque de la courbe, atteint le point le plus bas, sont égaux entre eux, et ont au temps de la chute verticale le long de l'axe entier de la cycloïde une raison égale à celle de la demi-circonférence d'un cercle à son diamètre.

PROPOSITION XXVI.

Les mêmes choses étant supposées, et une horizontale HI *étant en outre tirée* [Fig. 51] *qui coupe l'arc* BA *en* I *et la circonférence* FHA *en* H, *je dis que le temps nécessaire pour parcourir l'arc* BI *est à celui dans lequel est parcouru l'arc* IA *après* BI, *comme l'arc* FH *de la circonférence est à* HA.

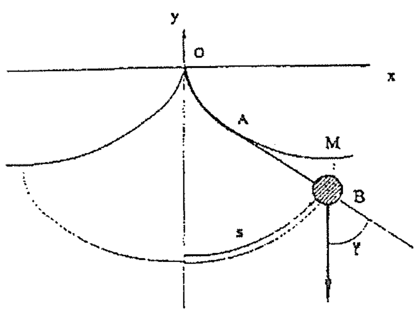
[Fig. 51.]



Approche analytique

Dans une approche analytique, une équation différentielle intervient à nouveau.

Sur la figure, on voit que la composante tangente de la pesanteur mesure $m\,g\,\sin\,\psi$. On obtient donc l'équation différentielle



$$-mg\sin\psi = m\,\frac{d^2s}{dt^2}$$

? Quel rapport y a-t-il entre l'angle ψ et la valeur du paramètre θ en A ?

Il suffit p.e. d'exprimer la pente de AB, d'une part en fonction de θ (en utilisant les équations de la première cycloïde), et d'autre part en fonction de ψ , pour trouver que

$$\psi = \frac{\theta}{2}$$

? Exprimer la mesure s de l'arc NB en fonction de θ .

Pas besoin pour cela de calculer à nouveau une intégrale: on peut réutiliser intelligemment la formule trouvée plus haut pour la mesure de l'arc OA. On trouve:

$$s = 4 \sin \frac{\theta}{2}.$$

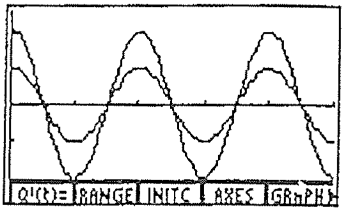
En substituant tout ça dans l'équation différentielle, on obtient

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{4}s.$$

La solution est $s = s_o \cos\left(\frac{\sqrt{g}}{2}t\right)$. La période, $\frac{4\pi}{\sqrt{g}}$, est donc constante, en effet.

Approche graphique

Graphiquement, ceci peut être découvert par des élèves qui n'ont pas étudié la résolution d'équations différentielles. On fait tracer sur l'écran les solutions pour quelques valeurs de la condition initiale s_o, et on constate que la période ne change pas. En déterminant un "modèle-sinus" pour les graphes obtenus, on peut découvrir également la formule exacte de la solution (et donc de la période).



5. Bibliographie

[Bo] H. J. M. Bos, *Studies on Christiaan Huygens: invited papers from the symposium on the life and work of Christiaan Huygens, Amsterdam 22-25 August 1979*, Lisse (Swets & Zeitlinger), 1980

[Cl] M. Cleve, D. De Bock, M. Roelens, *De grafische rekenmachine in de wiskundeles*, Uitwiskeling 9/4 (1993), 15-50

[Ed] C. H. Edwards, Jr., *The historical development of the calculus*, New York (Springer), 1979

[Fi] R. Finney, G. Thomas, F. Demana, B. Waits, *Calculus, a graphing approach*, Reading MA (Addison-Wesley), 1993, 2 volumes

[Ha] M. Hallez, Introduction de l'histoire des mathématiques du 17ème siècle en classes de 4ème et 3ème, Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques, Bulletin inter-IREM épistémologie, Lyon, p. 271-291

[Ho] R. Hooykaas, *Experientia ac ratione: Huygens tussen Descartes en Newton*, Mededeling 201 van het Museum Boerhave, Leiden, 1979

[Hu1] C. Huygens, *Oeuvres complètes*, Den Haag (Nijhoff), 1888-1950, 23 volumes

[Hu2] C. Huygens, *Horologium Oscillatorium*, Bruxelles (Culture et civilisation), 1966 (fac simile de l'édition de 1673)

[MB] Museum Boerhave, *Christiaan Huygens 1629-1695*, Mededeling 224, Leiden, 1988

[St) D. J. Struik, *The land of Stevin and Huygens*, Dordrecht (Reidel), 1981

Equations du troisième degré et nombres complexes

Giuliano TESTA
Liceo Scientifico "P. Lioy" - Vicenza (Italie)

INTRODUCTION

L'efficacité d'une étude dans une perspective historique consiste, selon moi, en ceci: faire revivre aux étudiants quelques moments importants des maths comme ils ont été vécus par les vrais protagonistes, et ainsi les rendre, eux mêmes, protagonistes et, dans un certain sens en faire des "créateurs".

Un exemple extraordinaire (les maths en sont "peuplées") est la découverte des nombres que, d'après Gauss, nous appelons complexes. Au début innommables, presque des "non nombres", appelés "Quantità Silvestri" par Cardano, et "più di meno e men di meno" par Bombelli, les nombres imaginaires sont sortis comme par magie, mais avec force et arrogance, d'un royaume méconnu et ils se sont imposés par le fait même de leur présence. Cette apparition inattendue mais inévitable a été la source d'une grande surprise.

L'expérience que je veux présenter s'est passée cette année dans une Quatrième classe du Lycée Scientifique "P. Lioy" (une classe "Première" du Lycée français) de Vicenza. La classe etait composée de 20 élèves agés de 17 ans environ: 8 filles et 12 garçons.
Tout le monde a suivi assez bien, en particulier les filles qui ont préparé soigneusement les notes que j'ai utilisées pour expliquer le travail fait.

En synthèse l'idée centrale que j'ai posée à la base du travail est la suivante:

Les idées, obscures au début, ressortent de l'intuition.

Souvent elles naissent à cause de la découverte de certaines contradictions (par exemple les irrationnels), ou elles viennent de la recherche d'instruments nouveaux nécessaires pour résoudre des problèmes quand les instruments que l'on a à disposition ne sont pas suffisants. La compréhension n'est pas immédiate, mais parfois elle demande un processus long et fatiguant; de plus, pour comprendre il faut agir et il ne suffit pas d'écouter et de répéter.

Le problème est donc le suivant: **comment savoir ce qu'il faut faire?**

Un exemple suffira à éclairer ce que je veux dire. Je me trouvais en Angleterre avec ma femme, mon fils et ma nièce. Cette dernière avait une capacité extraordinaire pour trouver de l'argent perdu par quelqu'un. Elle a trouvé une pièce même sur un arbre! Mon fils qui avait six ans se fâchait énormément et il était jaloux car, lui, il ne trouvait jamais rien. Un jour j'ai décidé de l'aider et donc, sans qu'il s'en aperçoive, j'ai voulu perdre une pièce juste devant ses pieds.
Voilà: je pense que l'enseignant doit semer des occasions sur le chemin des élèves, il doit même les faire trébucher pour leur faire voir ce qu'ils ne verraient pas tout seuls. Encore: il doit faire mûrir chez les élèves le désir et la conviction d'opérer, de devenir peu à peu autonomes et critiques et de ne pas attendre toute réponse par le prof. Je crois que le rôle central de l'enseignant est celui-ci: **enseigner à ne pas avoir besoin de l'enseignant.**

L'expérience a été développée selon quatre moments successifs:

1) Etude des fonctions du type $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
2) Résolution de l'équation $x^3 + px + q = 0$
3) Cas irréductible
4) Nombres complexes

En ce qui concerne la méthode suivie je désire souligner les points suivants:

1) Exploitation fréquente de l'intuition
2) Reconnaissance des analogies
3) Utilisation des graphiques
4) Utilisation de la calculette pour les calculs les plus durs
5) Discussions nombreuses

Souvent je posais les questions suivantes: "Et à présent qu'est-ce qu'on peut faire?" ; ou encore "Est-ce que tu te souviens d'avoir déjà vu quelque chose de pareil?"

Nous nous limiterons ici à illustrer les points les plus intéressants, c'est à dire le cas irréductible et les nombres complexes. Ceux qui sont intéressés à lire le texte complet de ma relation (contenant aussi une anthologie de l'Algebra de Bombelli) pourront en faire demande à: Testa Giuliano, Borgo Casale 76, 36100 Vicenza, Italie.

EXPERIENCE

Nous avons employé la formule de CARDANO pour résoudre les trois équations suivantes.

I CAS $x^3 + 108x + 5824 = 0$

Cette équation a une racine réelle unique; de plus, elle est la somme de deux nombres entiers: $x = \sqrt[3]{2^3} + \sqrt[3]{-18^3}$. Mais on n'a pas toujours de la chance!

II CAS $x^3 + 18x - 81 = 0$

Cette équation a une racine réelle unique; de plus, elle est la somme de deux radicaux cubiques bien compliqués.

$$x = \sqrt[3]{\frac{81}{2} + \frac{15}{2}\sqrt{33}} + \sqrt[3]{\frac{81}{2} - \frac{15}{2}\sqrt{33}}$$

A l'aide d'une calculette, Michela a énoncé l'hypothèse que la valeur de la racine soit 3, en écrivant que x = 4.4 - 1.4 = 3. Nous avons alors cherché à vérifier cette hypothèse, en employant la méthode exposée par Bombelli dans le premier livre de son Algebra. Ensuite nous avons analysé la démonstration géométrique de Bombelli relativement à l'équation $x^3 + px = q$, expliquée dans le deuxième livre.

III CAS $x^3 - 195x - 14 = 0$

Cette équation a trois racines réelles, mais il faut calculer la racine carrée d'un nombre négatif: $x = \sqrt[3]{7 + \sqrt{-524^2}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{-524^2}}$, et les élèves se sont énormément étonnés.

La question est donc la suivante: est-il encore possible d'employer la formule de CARDANO ? Naturellement, cette question débouche dans une autre: qu'est-ce que les nombres?

Nous avons longuement examiné ce sujet. Voyons en résumé les observations qui en sont sorties.

1) Avec les nombres, on fait des opérations.
2) Les opérations sont définies au moyen de règles.
3) Mais, a-t-on observé, d'où viennent ces règles?
4) Quant à nous, les possibilités sont deux:
   - nous les controuvons
   - ou bien il faut les chercher dans quelque livre.
5) En tout cas, elles sont le fruit d'une invention, parce qu'elles ne sont pas tombées du ciel.
6) Donc nous avons décidé d'inventer des règles nouvelles pour traiter les racines carrées des nombres négatifs.
7) J'ai alors demandé: "L'invention est-elle soumise à des limitations, ou bien peut on faire ce qu'on veut?"
8) La réponse a été la suivante: "Oui, on peut faire ce qu'on veut, mais dans certaines limites".
9) Lesquelles?
10) A propos de l'expression $x = \sqrt[3]{7 + \sqrt{-524^2}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{-524^2}}$,

Michela a observé que ces nombres "sono e non sono" ("ils sont et ils ne sont pas"). Je lui ai fait remarquer, alors, que Bombelli, lui même, avait dit quelque chose de pareil: "Parendomi più tosto sofistiche che vere" ("Elles me semblent plutôt sophistiquées que réelles").
Et, encore,Leibniz a écrit: "Quaedam tertia natura abscondita - remota a natura numeri - sophistica- sylvestris - analyseos miraculum - idealis mundi monstrum - paene inter Ens et non-Ens amphibium" (une troisième nature secrète - éloignée de la nature du nombre - sophistiquée - sylvestre - prodige du monde idéal - un amphibie entre l'être et le non-être.)

Il est intéressant de remarquer comment Michela a employé le mot "numeri" : évidemment, meme si inconsciemment, son attention s'adressait aux opérations à faire, plutôt qu'à ces drôles d'acteurs apparus d'un coup sur scène.

11) Quelqu'un a observé qu'on devait inventer des règles pour la racine de -1. Celui-ci a été un pas important en avant car, encore une fois inconsciemment, on avait employé les propriétés formelles des opérations: $\sqrt{-4 * 524^2} = \sqrt{4 * 524^2}\ \sqrt{-1}$.
12) A la question:" Y-a-t-il un sens dans l'opérer avec la racine de -1?", j'ai obtenu la réponse suivante: "Oui, car on a à faire avec la racine de -1 , et nous ne l'avons pas inventée". Réponse chouette, n'est-ce pas?

Voici le point central: la racine de -1 est une évidence des faits, une conséquence des calculs et non pas une invention à nous. C'est pourquoi, si nous voulons procéder, il faut inventer quelque chose de tout à fait nouveau.

A la surprise fait écho la nécessité.

Ayant centré l'attention sur la racine de -1, j'ai reproposé la question sur la nature des limitations à mettre à l'invention.

13) Katiuscia alors a fait une remarque très belle et intéressante: l'invention est arbitraire, mais dans certaines limites, parce qu'elle doit permettre la généralisation. De plus, elle a précisé qu'il faut opérer d'une façon sensée. Donc Katiuscia avait établi une sorte de critérium qui devait etre précisé.

En effet l'idée de la conservation des propriétés formelles se formait de plus en plus .

En effet, peu après, Katiuscia en développant sa pensée disait, en ce qui concerne les règles, que les nouvelles ne devaient pas changer les vieilles. Mais alors comment faire? "Essayons de traiter la racine de -1 comme si elle était un nombre normal".

14) A ce point j'ai proposé de donner un nom à cet objet évanescent et d'inventer un symbole nouveau pour le désigner.

En ce qui concerne le nom les propositions ne se sont pas fait attendre: "absurde, impossible et, finalement, imaginaire".

Pour le symbole, aussi, il y a eu des propositions intéressantes:

$$\exists\ ,\ \ni\ ,\ i$$

Les deux premiers symboles indiquaient quelque chose qui existe et qui n'existe pas (il s'agit de la lettre "e", majuscule et minuscule reflétées par un miroir, lettre initiale du verbe être).

15) Puisqu'on avait proposé de travailler avec i comme s'il était un nombre comme les autres avec droit de cité dans le royaume des maths, nous avons décidé de l'appeler nombre, différent des autres, mais nombre.
16) Nous nous sommes posé alors le problème de rechercher avec soin les propriétés de ce nouveau nombre et ses caractèristiques.

En résumé:
a) On a introduit un symbole pour indiquer la racine de -1
b) On a opéré en appliquant les propriétés des racines.

Cristina a observé qu'avec l'introduction du symbole "i" le problème est seulement caché, mais non pas éliminé. L'exigence d'une réflexion critique en est ressortie. De toute façon avant d'arriver à cela on a opéré également, même si d'une façon un peu naïve.

Exemple de Michela

$$-2-3=2i^2+3i^2=i^2(2+3)=5i^2$$

L'exemple a paru à tout le monde (et à elle même) trop artificiel et rusé: néanmoins il est clair qu'il faut garder les propriétés formelles.
Pour revenir à nos moutons, on a écrit la relation:

$$\sqrt[3]{7+\frac{1}{2}\sqrt{-4*524^2}}+\sqrt[3]{7-\frac{1}{2}\sqrt{-4*524^2}}=\sqrt[3]{7+524i}+\sqrt[3]{7-524i}$$

Donc on devait travailler avec des expressions du type: $7 \pm 524i$.

Il n'a pas été difficile de généraliser selon le schéma:

$$\begin{array}{c}\text{nombres réels}\\ \Downarrow\ \Downarrow\\ a+b\,i\\ \Uparrow\\ \text{nouveau symbole}\end{array}$$

et il a été donc assez spontané d'écrire les relations suivantes:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+dbi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Et ça a été le tour de la division. J'ai suggéré de trouver x et y tels que

$$\frac{a+bi}{c+di} = x + yi$$

Puisque le symbole "i" au dénominateur nous gène, j'ai demandé comment il pouvait être éliminé.

Pour aider les élèves je leur ai demandé s'ils n'avaient jamais rencontré une situation pareille: si donc ils avaient déjà eu l'occasion de traiter une expression avec quelque chose de non désiré au dénominateur.

Ils ont tout de suite proposé l'exemple suivant: $\frac{4}{3+\sqrt{2}}$.

Menés par l'analogie des problèmes il n'a pas été difficile pour les élèves de comprendre ce qu'ils devaient faire.

Une fois un peu mieux connus ces nombres (que l'on a bien sûr appelés complexes) on s'est arrêtés brièvement à réfléchir sur ce que l'on venait de faire.

Il m'intéressait de savoir quelle avait été la réaction des élèves, comment en réalité ils avaient retenu les actions accomplies.

Voilà les adjectifs employés par les élèves pour décrire leur façon de travailler:

"hypothétique, absurde, casuel, fantasque".

Donc les élèves avaient ,certes, parcouru le chemin, ils avaient avancé des propositions significatives aussi, ils avaient réalisé des liaisons, conduits par l'analogie, mais il leur fallait encore quelque chose pour une vraie compréhension. Il fallait revoir la question d'une façon critique. En particulier, il fallait faire deux choses importantes: a) utiliser le symbole "i" dans la résolution des équations de troisième degré pour voir si ça marchait. b) répondre à la question:"Pouvons-nous donner le statut de nombre à ces nouveaux objets?"

La première question était de type pratique, tandis que la deuxième demandait, justement, un examen critique. Les étudiants, à ma grande surprise, ont voulu affronter tout de suite la première question, même si tout ce qu'on allait faire apparaissait tout à fait fantasque. Le problème a été résolu par Pierpaolo. Il a réutilisé avec aisance la méthode déjà appliquée dans le cas des équations avec une seule racine réelle, employant ainsi des radicaux imaginaires comme s'ils étaient des radicaux réels.

Il a observé aussi que de $\sqrt[3]{7+524i}$ "vengono fuori" (en sortent) trois valeurs différentes. Il a ajouté ensuite (ce qui est très important) qu'il avait été surpris par ce fait . . . et qu'il ne l'avait jamais vu auparavant.

Un nouveau problème se posait: comment accoupler les six valeurs des deux racines cubiques? En effet les couples possibles sont neuf tandis que les racines de l'équation sont trois. Naturellement on peut procéder par tentatives, mais ce n'est pas trop économique. J'ai suggéré de calculer les racines cubiques de l'unité, c'est-à-dire de résoudre l'équation $x^3 = 1$.

Les élèves se sont étonnés car la raison d'une telle aide ne leur semblait pas clair.

De toute façon, les calculs faits, il n'a pas été difficile de résoudre le problème.

En effet, ayant indiqué comme toujours $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ on a presque immédiatement construit le tableau

$$\begin{array}{cccc} * & 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & \omega^2 & 1 & \omega \end{array}$$

et on a vérifié que $\left(\sqrt[3]{a}\,\omega\right)^3 = a$, $\left(\sqrt[3]{a}\,\omega^2\right)^3 = a$, et enfin on a écrit les solutions de l'équation $x^3 + px + q = 0$ comme il suit:

$$x_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} \quad , \quad x_2 = \sqrt[3]{A}\,\omega + \sqrt[3]{B}\,\omega^2 \quad , \quad x_3 = \sqrt[3]{A}\,\omega^2 + \sqrt[3]{B}\,\omega$$

Quand nous nous sommes engagés à chercher une convenable représentation géométrique, il ne nous a pas fallu trop de temps pour voir que la droite était déjà pleine et occupée par les réels: il fallait donc trouver ailleurs de la place vacante. Il n'a pas été difficile d'imaginer que le plan avait beaucoup de place libre et donc qu'il était possible d'associer au nombre complexe $z = a + bi$ le point $P(a,b)$. Et quand nous nous sommes demandé comment opérer dans le plan, à quelqu'un il a paru naturel de penser aux vecteurs, grâce à l'analogie avec la somme. Au contraire, pour le produit le problème était moins immédiat. J'ai alors suggéré, pour commencer, de considérer les nombres complexes de module unitaire en employant un peu de trigonométrie.

Désormais le jeu était fait, et il n'a pas été difficile d'arriver jusqu'à la célèbre formule de Moivre. Nous avons ensuite sans problèmes attaqué la question de la détermination des racines n-ièmes de l'unité et l'interprétation géométrique associée. De plus, les élèves ont attaqué et résolu tout seuls le problème du calcul de la racine carrée d'un nombre complexe quelconque, fournissant la formule générale et la relative interprétation géométrique.

La dernière question posée a été la lecture et la traduction de quelques pages de l'Algebra: puisque les difficultés étaient considérables, plusieurs fois je suis intervenu pour aider les élèves à comprendre l'abstrus langage et à reconnaitre les expressions algébriques, écrites presque sans symboles. D'une façon ou d'une autre, les élèves ont vérifié la correction des calculs et ils ont réussi à retrouver le fil du discours.

Enfin j'ai donné aux élèves un questionnaire à remplir avec sincérité.
Pour réaliser l'expérience nous avons employé 20 heures environ, ainsi partagées:

étude des fonctions polynomiales:	8 heures
formule de Cardano:	2 heures
nombres complexes:	7 heures
exercice de traduction:	2 heures
questionnaire:	1 heure

QUESTIONNAIRE

1) Décrivez avec un mot la sensation que vous avez éprouvée quand il a été nécessaire de calculer les racines carrées des nombres négatifs pour obtenir des résultats réels:
"*abstrus - atroce - gênant - choquant - stimulant - étrange - étonnant - fatiguant - égarement - extraordinaire - surprise - incroyable*"

2) Est-ce-que vous croyez que votre compréhension a été

TRES BONNE	1
BONNE	11
SUFFISANTE	5
INSUFFISANTE	1

3) Avez vous trouvé difficile le sujet?

BEAUCOUP	2
ASSEZ	14
PEU	2

4) Est-ce-que le sujet a été charmant?

BEAUCOUP	5
ASSEZ	10
PEU	3

5) Vous vous êtes amusés?

BEAUCOUP	6
ASSEZ	8
PEU	4

6) Est-ce-que vous croyez que le temps consacré au sujet a été excessif?

OUI	11
NON	6
	(1 douteux)

7) Est-ce-que les ateliers ont été utiles?

BEAUCOUP	13
ASSEZ	5
PEU	-

8) Est-ce-que les discussions ont été utiles?

OUI	17
NON	-
	(1 critique)

Pourquoi?

aide commune dans la compréhension - la comparaison démontre que notre point de vue n'est pas toujours correct - possibilité de communiquer ses difficultés - incitation à faire des propositions sur la manière d'affronter un problème - aide à comprendre des problèmes dont, normalement, on ne s'aperçoit pas-forme de contrôle - on fait une comparaison entre toutes les opinions de la classe faisant participer tout le monde au cours, meme ceux qui dorment - ça aide notre esprit dans le raisonnement et ça permet aux étudiants de fixer des idées qui peuvent paraitre lointaines - on apprend à ne pas trouver les solutions déjà toutes pretes et à chercher à résoudre personnellement les questions proposées ; cependant cela n'est pas toujours facile, au contraire, en particulier quand on ne sait pas d'où démarrer.

9) Voulez vous employer la meme méthode pour étudier d'autres sujets?

OUI	16
NON	2

10) Croyez vous avoir changé votre attitude envers les maths?

OUI	15
NON	2
	(1 réponse pas claire)

Comment?

l'étude est plus facile car cela a plus de sens et c'est plus beau - en pensant aux maths je ne vois pas seulement des nombres; cette méthode en effet a rendu mon esprit plus élastique en général et non seulement dans les maths - je les aime moins, peut -être à cause de la grande difficulté, néammoins je les trouve toujours charmantes - elles m'ont toujours plu et je les aimerai toujours de quelque façon qu'elles soient enseignées - j'ai appris qu'avant de résoudre un problème quelconque je dois réfléchir sans être impulsif ; de plus j'ai compris que chaque partie des maths est liée à une autre et c'est à nous de trouver cette liaison - souvent les maths peuvent t'expliquer l'inexplicable - les maths ne sont pas stériles, souvent elles sont même sympas et amusantes - maintenant je n'apprends plus des notions passivement mais je cherche à les re-construire moi même avec le raisonnement et surtout avec l'intuition.

11) Quels buts, selon vous, je m'étais fixé?
Faire prendre confiance avec les maths pour ne pas y penser comme à quelque chose d'absurde ou d'impossible - aider nos esprits à faire des progrès presque inespérés - augmenter notre observation et notre capacité de critique; nous habituer à utiliser la logique et à évaluer justement les choses simples sans les considérer comme naturelles car c'est sur elles qui se pose le raisonnement - nous faire découvrir le charme des maths - nous faire trouver une bonne méthode pour les autres matières aussi - ce qui parait impossible à réaliser ne l'est pas et vous nous l'avez démontré - faire réfléchir d'une façon autonome - chercher toujours la voie la plus briève.

12) Est-ce-que l'expérience est réussie?

OUI	14 (2 un peu; 1 assez)
NON	2
	(1 oui et non; 1 réponse pas claire)

Pourquoi?

Au début on était tous abattus et meme un peu fachés car on ne comprenait pas le but de ce travail, mais après nous avons commencé à comprendre et alors...- selon moi on a réussi seulement en partie car souvent on repoussait un problème qu'après on n'affrontait plus - j'ai pu appliquer positivement cette méthode dans l'étude de la chimie en réussissant avec calme à comprendre meme des problèmes difficiles - nous avons appris à donner libre essor à notre intuition personnelle en nous détachant d'une façon de procéder mécanique très souvent égarante - en ce qui concerne l'intuition il est important de savoir lire, mais quelquefois il faut aussi savoir où lire.

BIBLIOGRAPHIE

Bombelli, R., **L'algebra, Prima edizione integrale**, Feltrinelli, Milano, 1966
Bombelli, R., **L'algebra (Libri IV e V)**, Zanichelli, Bologna, 1929
Bortolotti, E., **L'Ecole mathématique de Bologne**, Zanichelli, Bologna, 1928
Bortolotti, E., **L'origine et le premier développement du calcul des imaginaires**, Scientia, Zanichelli, Milano, juin 1923
Bortolotti, E., **La trisezione dell'angolo ed il caso irriducibile dell'equazione cubica nell'Algebra di Rafael Bombelli da Bologna**, Rendiconti della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, 1923
Procissi, A., **Il caso irriducibile della equazione cubica da Cardano ai moderni algebristi**, Periodico di matematiche, 1951
Fuhrer, L., **Historical stories in the mathematics classroom**, For the Learning of Mathematics, Volume 11, number 2, White Rock, B.C., Canada, 1992
Kahn, C., **L'histoire comme source de problèmes**, dans "Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques", Bulletin INTER-IREM Epistémologie, Lyon
Hadamard, J., **The Psychology of Invention in the Mathematical Field**, Dover, 1954

REVERSING THE CUSTOMARY DEDUCTIVE TEACHING OF MATHEMATICS BY USING ITS HISTORY: THE CASE OF ABSTRACT ALGEBRAIC CONCEPTS

CONSTANTINOS TZANAKIS
DEPARTMENT OF EDUCATION, UNIVERSITY OF CRETE
74100 RETHYMNON, CRETE, GREECE

The customary approach to the teaching of mathematics is deductive. In this way however, the motivation for introducing new mathematical concepts, theorems or theories is hidden, so that a sufficiently deep understanding is difficult to be acquired. At the same time, the interelation between very different at a first glance, mathematical concepts or domains, is not easily revealed.

On the other hand, following the **basic steps in the historical development** of a certain mathematical subject and presenting questions and problems that have served as prototypes in this development, the subject can be taught with sufficient explanation of the motivations for introducing new concepts or axioms. Thus the interelation between different mathematical concepts or theories can be presented with clarity and the student can be given hints for further study of more advanced results that fall outside the scope of a course on the particular subject considered.

Such an approach may be called **genetic** in the sense that the presentation of a subject is neither historical nor strictly deductive but is such that one investigates a problem only after having been led to it in a **natural** way. Moreover the emphasis is less on **how to use** theories methods and concepts and more on **why** these theories methods and concepts can provide an answer to mathematical problems.

As an example of this approach, we consider the presentation of the interelation of the following concepts: (i) complex number, (ii) rotation group, (iii) isomorphism and homomorphism of abstract algebraic stuctures, as it can be taught

- at an **elementary** level in a secondary school mathematics course
- at a more **advanced** level in an undergraduate university course.

More specifically, we try to present aspects of the important developments in the 19th century algebra, that had been motivated by the geometrical interpretation of complex numbers. As already mentioned, **the presentation is not strictly historical but it is inspired by its basic steps**. Moreover, unecessary complications are avoided by using concepts and methods that emerged partly as a consequence of these developments.

From the analysis of such examples follows that the general procedure to be followed in a genetic approach is based on

(i) a general knowledge of the subject's history,

(ii) the determination of the key steps of the historical evolution,

(iii) their presentation given possibly in a modern formulation, but certainly inspired by the historical process,

(iv) the formulation of many details in sequences of exercises of increasing level of difficulty, so that each one presupposes (some of) the preceding ones. In this way any course or textbook following a genetic approach can be kept to a reasonable size.
Among the many advantages of such an approach belong

(i) the natural presentation of the subject, in which the logical gaps are kept to a minimum

(ii) problem solving becomes an essential ingredient of the presentation indispensable for a complete understanding

(iii) many correlations with other subjects are revealed. Therefore it becomes possible to understand the unity of a mathematical domain.
As far as our example is concerned, it can be convincingly argued on the basis of classroom observations, that in a deductive teaching, students have severe difficulties to grasp the meaning of **abstract** algebraic concepts like group, algebraic field, vector space, isomorphism of abstract structures etc. The basic reasons for this are that

(i) such concepts are introduced in their most general sense right from the beginning

(ii) usually students have no experience of **many mathematically relevant concrete examples**.

On the other hand, looking at the historical evolution of such concepts, it may be asserted that each one was introduced and established when
(i) concrete problems had already appeared to which this concept offered a (usually not easily substituted) solution, e.g. the concept of a group and the problem of solving by radicals the n-th degree polynomial equation
(ii) it became necessary to use sets having the same algebraic structure but the elements of which are of a totally different nature, e.g. both vectors in analytic geometry and solutions of linear ordinary differential equations can be considered as vectors of an abstract finite dimensional vector space.

Therefore, history teaches us that abstract algebraic concepts must first be introduced through mathematically relevant (i.e. non-artificial) concrete examples.

In our case study we have examined how complex numbers became a legitimate mathematical object through their geometrical interpretation in the early 19th century. This involves their trigonometric representation and the accompanying association with rotations of the Euclidean plane, based on de Moivre's theorem.

More specifically and in a modern terminology, this geometric interpretation can be described by saying that complex numbers of unit length form a group under multiplication,which is isomorphic to the group of plane rotations. Moreover, similarity transformations in the plane taken together with rotations generate an algebraic field isomorphic to the field of complex numbers.This fact played an important role in the evolution of algebra in the 19th century, naturally leading to the question:
"Is it possible to generalize complex numbers in such a way so that a similar relation to space rotations and similarities exist?" In terms of an analysis of the relation of complex numbers to plane rotations this question can be formulated as follows:" Is it possible to find a field, which extends the complex number field, so that its multiplication group is isomorphic to the group generated by rotations and similarities in space?".

This question lies behind Hamilton's main motivations in his research that led to the discovery of quaternions. In a genetic approach we show how one can avoid Hamilton's complicated and zig-zag procedure, by using the (historically antecedent) concept of a matrix and arrive at quaternions in a simple and lucid way.

Finally this relation of quaternions to space rotations can be formulated in a compact and elegant form, as was first done by Cayley, a fact puzzling Cayley very much, thus motivating him to look for a deeper interpretation. Using the concept of a matrix, we can show that Cayley's exploitation of an idea of F.Klein can be presented in an elementary way, leading to the homomorphism of the group of space rotations to the group of the 2X2 unitary matrices (or "complex plane rotations"!). At the same time this reveals the intimate topological relation of the two groups, which seen from a modern viewpoint, is the basis of the puzzling relation of quaternions to space rotations, refered to above.

In our approach many details have been given as interesting and illuminating exercises which may motivate the student (i) to study the subject further (ii) to study other more advanced results, for which hints have been given through the genetic presentation of our original subject.

To summarize what has been said, we may say that our aim is the description in detail of a concrete example of how the customary presentation of mathematics can be reversed by using its history as an essential ingredient.

Using Ancient Astronomy to Teach Trigonometry: A Case Study

Glen Van Brummelen
The King's University College
9125 — 50 St.
Edmonton, AB
CANADA T6B 2H3

Introduction

Trigonometry, a subject of immense utility and beauty, is nevertheless difficult to convey to students in a form that allows them to be practitioners; that is, masters rather than servants. The definition of the sine and other trigonometric functions is easily followed, but once the student returns from the picture to the universe of mathematical symbols, perception vanishes and is replaced by a vague collection of algorithms for symbolic manipulation inherited from past experience in mathematics courses. A number of my beginning college-level calculus students, for instance, are proud to have solved the equation $\sin\theta + \cos\theta = 1.3$ for θ as follows:

$$\theta(\sin + \cos) = 1.3$$

$$\theta = \frac{1.3}{\sin + \cos}$$

Often these are students who perfectly well grasped the geometric content of the trigonometric functions. Their leap into symbolic mathematics has been accompanied by a jettisoning of conceptual awareness. Hence their ability to use trigonometry in new situations is severely hampered or completely curtailed.

As a beginning teacher, my initial reaction was to join my colleagues and blame the secondary mathematics program, which in my locality gears its students to algorithmic performance. The syllabi are so large that many teachers are forced to spend their time training students in drill problems designed for performance on similarly-structured exams. It seems to me after several years' experience that this criticism applies equally well to many North American, and possibly European introductory college-level mathematics programs. While our students may perform well on technical examinations soon after the class ends, they are not learning mathematics. Particularly, they lack a grasp of:

- **Why** the subject exists. Mathematics in history often arises (directly or indirectly) from an enquiry in some other discipline. Many students regard mathematics as pure algorithmic training, internally justified, and thus find little motivation. (I intentionally do not refer to "applications" of mathematics, since that implies that the theoretical edifice was created independently of the application.)

- **What** the mathematics means. An algorithmic approach enforces the students' belief that life in a mathematics class consists of mimicking a mechanical symbol-manipulating device. Surprisingly little grasp of the geometric or quantitative meanings of the symbols is retained in the long term, and I have found that students strongly resist having to change their conceptual base to break the barrier between thinking in math class and thinking in real life. They have, after all, survived so far with this distinction.

- **How** to ask mathematical questions, and how to pursue an answer. We are often frustrated that students display little originality and few exploratory instincts. Of course, it is unrealistic to expect them to have this ability if they have not been encouraged to "go beyond the paper" in their understanding.

It is a common refrain that history can provide a fertile ground to address these problems, and with some reason. Presenting the early development of a subject within its cultural and scientific context can give rise to the original motivations in a natural way. Through this, the role of the subject and its importance can become clear. If the historical goal of a subject can be made to be the students' goal in an historical project, they take ownership of the task and can participate in a clearly defined, and extra-mathematically important, achievement.

The presentation of history, however, must be planned carefully to achieve these objectives. If implemented without care, historically-based teaching may not solve, and could even lead to, many of the unfortunate effects above. My historical materials for the classroom are developed with several points in mind. Firstly, the linguistic style is quite casual. This helps to overcome a conception that mathematics is performed only by those predisposed to algorithmic thought, and begins to break down the barrier between mathematical and other ways of thinking. Secondly, the enthusiasm and excitement for the subject comes through clearly (partially aided by the casual tone). Enthusiasm is an infectious disease that we should not fear spreading to our students! Thirdly, a clearly defined goal determined by historical need provides relevance, interest, and a desire to pursue the project to its conclusion. Finally, a constant movement back and forth between from the geometric to the symbolic to the geometric blurs the false dichotomy between these two ways of understanding. Once this conceptual barrier has been overcome, the initiative to pose questions and to find one's own solutions comes naturally. After all, many mathematical disciplines arise from asking the "obvious" questions!

Trigonometry is one of my students' most feared and least understood topics. It arises in introductory calculus to an inevitable shared and terrified hush. Although the students have seen it in more than one previous course and can wield identities with some ability, a little discussion reveals that they know little of the content of an identity beyond that it has "something to do with angles". More than half at some point make the fundamental mistake of treating the functions and arguments interchangeably, producing for example the curious solution to the trigonometric equation at the beginning of this paper. Clearly the connection between the geometry and the algebra does not exist for them in mathematical practice.

The early history of trigonometry presents a nice case study for use in the classroom. It arose directly from problems in astronomy, and in fact remained a subdiscipline of astronomy for about 1000 years. The required background knowledge in astronomy is minimal, and comes naturally to a student trying to make sense of the motions s/he sees in the sky. The results can be rewarding: with only a little additional help, at the end of the study the student will be able to predict the Sun's location on any day, and with a set of lunar positions can determine whether an eclipse will occur at a certain time. This was one of the historical motivations for trigonometry, and provides the climax for the case study. Additionally, the historical abandonment of the chord in favour of the sine becomes apparent in a very practical way. The mathematical theory that emerges from the students' explorations corresponds to the historical discovery of many of the basic trigonometric identities and functions. It is presented here in the spirit of Ptolemy's *Almagest.*

My materials are still a work in progress, and may be handled quite roughly. They may be reorganized to a certain extent, sections may be omitted without much difficulty, and modern functions replaced with the ancient ones and vice versa. I have decided to use the ancient chord function instead of the modern sine, because it is the obvious function to choose given the problems Hipparchus and Ptolemy faced, and the theory behind the chord table is more natural with it, but I have made a concession to simplicity by using a base circle of 1 unit rather than the ancient 60, since it is an unnecessary and unilluminating complication in the classroom. For a similar reason I use decimal arithmetic rather than the astronomers' base 60.

The original intended audience for this presentation was a mathematics class for 17–18 year olds working in small groups. Occasionally throughout I ask one or more questions in a shaded box, with a difficulty level assigned to it. I suggest the students to explore these on their own, or better in groups of two to four. I have asked most of the questions marked Easy or Medium to my classes with success; the harder questions are for those more accustomed to geometrical or other theorems and proofs. Some may be omitted entirely or dealt with in the classroom.

An excerpt from the handout is included below. The entire paper is about 20 pages long and too extensive to present here in its entirety. I will be delighted to provide copies of the complete work to those interested; please write me at the listed address.

Excerpt of the Presentation

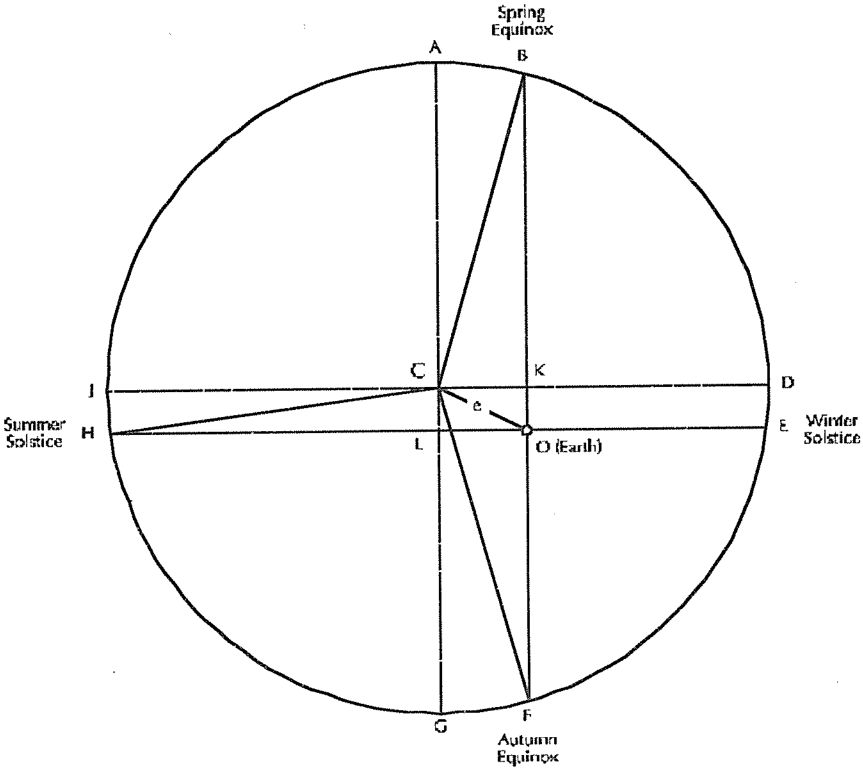
Sundance: Greek Astronomy and the Birth of Trigonometry

The handout, which can be given to a group of students as independent study or presented in class, begins with a description of the obvious patterns of motion observable in the sky. From this, the need to understand the paths of the Sun and Moon for agricultural, astrological and meteorological purposes arises. This leads to Hipparchus' desire to model the motions of the Sun and Moon, which could then also be used to predict eclipses by determination of the times when they occupy the same, or diametrically opposite, positions. The basic solar model, a circular orbit around the Earth at its centre, is slightly altered to account for the Sun's apparent variable speed. This leads naturally to a need to measure lengths in a circle where only angles are given. This excerpt picks up after a discussion of how Hipparchus might have constructed a trigonometric table to find these lengths.

The Final Solar Model and Eclipses

With a table of chords, Hipparchus could go ahead and find the precise values of the eccentricity and the angle at which to place the centre of the Sun's orbit, which in turn would allow him to tell where the Sun would be at any time. We will follow Hipparchus' journey, assuming now that we have a chord table and can find the chord of any angle. The diagram below is the same as our earlier model of the Sun's motion except that I've added some letters to indicate points and some extra lines we'll need. You'll remember we worked out earlier that the arc of the circle for the summer is 91.172º; from the picture this is –HCF. We can use the same reasoning to find the angle for the spring:

$$\angle BCH = 0.98564° / day \times 94\tfrac{1}{2}\, days = 93.143°.$$



Question 6 Hard	*From these facts, can you work out the angles <JCH and <ACB?*

Question 6 (alternative) Medium	*Which angles in the picture correspond to the amount that the spring arc is greater than 90º? How many degrees is this sum? Repeat this question for the summer, replacing the word "sum" by "difference". Now, use the two pieces of information you have to find the values of each of the angles that makes up the sum and difference.*

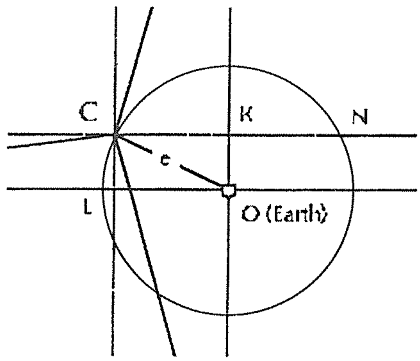
So far we haven't needed any chords, because all we were handling were arcs, not lengths. To find the eccentricity $e = OC$ we're going to need some! Hipparchus' strategy relied on using one of the right-angled triangles near the middle of the diagram, either OCL or OCK. For either triangle, the hypotenuse is the length we're after. Hipparchus had the good fortune to live well after Pythagoras (although the Pythagorean Theorem was also known long before even Pythagoras!), so he was able to use the Pythagorean Theorem, which for the triangle OCL says that $OL^2 + CL^2 = OC^2$. Thus, our problem is now to find both OL and CL.

Question 7 Medium	*Remember that the angle <JCH is 0.985º. From this, and assuming you can work out any chord from your chord table, how could you find out the length CL?*

You should find that CL=0.0172 units. To get OL you can use the same process, but with the angle <ACB instead, and you'll find that OL=0.0377 units. Then we turn to Pythagoras and we find:

$$e = \sqrt{CL^2 + OL^2} = 0.0414 \text{ units.}$$

We're almost there! Now we need to know the angle < KOC, which will tell us the direction in which the centre of the circle will be. This is a little trickier, so I'll draw part of the picture of the solar model again with an extra circle added, as a clue.



Question 8 Medium	*Find the size of <KOC. You'll need the chord table, but you'll need to use it backward: you'll know the length of a chord and you'll want to use the table to find the angle that has that value for the chord length.*

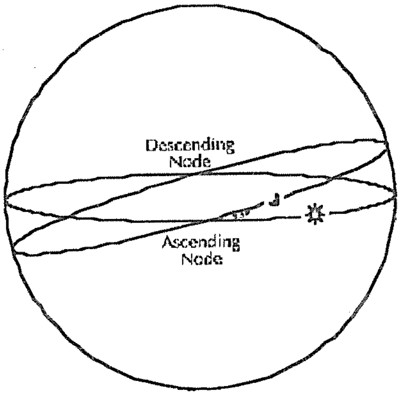
The solution to Question 8, using the small circle drawn around the right-angled triangle, is similar to the common practice in ancient trigonometry. There is a much simpler solution using the modern sine function. If you know the sine, see if you can find it. In fact, many of the methods you see here have simpler solutions using the sine instead of the chord. That's why the sine is used today, and the chord has all but disappeared.

So, now we know that the direction of the centre of the Sun's circle is 65.5º west of north, so to speak, on our picture. That means that the Sun is furthest away from the Earth (its **apogee**) when it is in this direction from the Earth as well, which is in late spring. We want to be able to find out where the Sun is on particular days and particular times, so let's find out what day of the year the Sun is at its apogee as an example for calculations. We know that the Sun is at the point *B* on March 21, the spring equinox, and that it moves 0.98564º/day.

Question 9 Easy	*Find out what day the Sun arrives at its apogee, using the information above.*

We're now able, with a little chord work, to find out where the Sun is on its orbit circle at any day of the year, just by remembering the crucial 0.98564°/day. That takes care of the most important of the seven wandering stars. Hipparchus moved next to the Moon, and either he, Ptolemy, or someone between them dealt with the planets as well. We don't precisely know how Hipparchus dealt with these other objects, but we do know what Ptolemy did, and it gets very complicated, although it's very accurate. Ptolemy used Hipparchus' model for the Sun, though: its accuracy was good enough for even Ptolemy's standards, and was certainly good enough to be quite reliable for predicting eclipses.

We will not go through Ptolemy's model for the Moon, but let's look at enough details to understand the way to predict eclipses. The motion is a complicated combination of circles, but it all happens on a circle that is tilted 5° from the ecliptic (see below). The circle itself moves around the celestial sphere, so that the places where the Moon's circle and the Sun's circle intersect (the **ascending and descending nodes**) move slowly along the ecliptic.



Question 10 Medium	*Why would it be important for the purpose of eclipse prediction to know how close the Moon is to the ascending and descending nodes?*

Let's suppose know that we know where the Moon will be on certain days of the year (I'll give the information to you). From this, we know how to find where the Sun will be, and if the conditions are right, we'll have a solar eclipse!

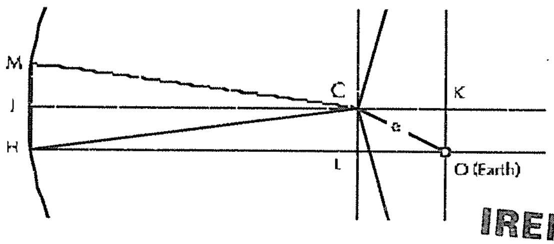
Solutions to Questions

6. Since the spring angle is <BCH=93.143° and <ACJ=90°, we know that the sum of the two smaller angles is $90° + \angle ACB + \angle JCH = 93.143°$. The summer angle, similarly, is $90° + \angle FCG - \angle JCH = 91.172°$. Adding these two equations together, we find

$$180° + 2(\angle ACB) = 184.315°,$$

which gives <ACB=2.158°. From this number we use the spring angle sum equation above to get <JCB=0.985°.

7. Draw a line straight up from *H*, as below, until you reach the circle on the other side of *J*. That point is *M* on the diagram below. Then the segment *HM* is the chord of *twice* <JCH, so we can find the length of *HM* by using the chord table to evaluate $\mathrm{Crd}(2 \times 0.985°) = \mathrm{Crd}(1.97°)$, which is 0.0344 units. But *HM* is twice *CL*, so that *CL*=0.0172 units. (Alternatively, using modern trigonometry, $CL = \sin\angle CHL = \sin\angle JCH$.)



8. The line CK is half of the chord (CN) of the angle $<CON$. But $<CON$ is twice the angle we want, $<KOC$. So, since $CK=OL=0.0377$ units, we know that $CN=0.0744$ units. The next step would seem to be to look up the angle corresponding to this in a chord table, but remember that the table gives chords assuming that the radius of the circle is 1 unit, and our circle's radius is $e=OC=0.0414$ units, which is much smaller. The trick is to set up a new measuring system temporarily, where the radius e is 1 Unit long. In these new Units, we have

$$CN = 0.0744\,units \cdot \left(\frac{1\,Unit}{0.0414\,units}\right) = 1.797\,Units.$$

Now our chord table can tell us that this number of Units corresponds to an angle of 130.9°. The angle we want is half of this, so now $<KOC=65.5^{\circ}$.

9. The angle from A to the apogee is 65.5°, as we just worked out. From our previous work, we know that $<ACB=2.158^{\circ}$, so the Sun needs to travel about 67.7° after March 21 to make it to the apogee. At 0.98564°/day, this is $67.7/0.98564 \approx 69$ days. That makes it May 29.

10. The Moon and the Sun are small enough so that if the Moon is far enough away from the nodes, the Sun cannot possibly be close enough for the Moon to overlap it. And that, after all, is precisely what a solar eclipse is: the overlapping of the Moon in front of the Sun.

The remainder of the paper carries the project to its goal of eclipse prediction using Hipparchus' model of solar motion and basic knowledge of the celestial sphere. The Ptolemaic model of lunar motion is a technically difficult additional factor, and data for lunar motion are provided to bypass this complication. My pedagogical aims would not be better fulfilled by including a complete theory here.

THE IMPACT OF USING MATHEMATICS PROBLEMS WITH HISTORICAL BACKGROUNDS IN THE TEACHING OF MATHEMATICS ON STUDENTS ATTITUDES TO THE SUBJECT.

Greisy Winicki
Department of Education in
Technology and Science - TECHNION
Israel

Curiosity and the urge to solve problems are the emotional hallmarks of our species (HOMO SAPIENS); and the most characteristically human activities are mathematics, science, technology, music, and the arts - a somewhat broader range of subjects that is usually included under the 'humanities'. Indeed, in it is common usage this very words seems to reflect a peculiar narrowness of vision about what is human. Mathematics is as much a 'humanity' as Poetry.

Carl Sagan - The Dragons of Eden

Mathematics is generally taught in school without any historical background: most of the pupils having no idea of the historical context of mathematics development. This is true for almost all stages in education, in elementary school, junior and senior high school, and to some extent in university too. Most pupils consider mathematics only as a collection of facts to be remembered by heart, absolutely given facts that have always existed. The main problem is how to overcome those myths that contradict the cultural meaning of this subject matter.

We believe that one way of improving the situation is to confront pupils with the historical continuity in the development of mathematics by presenting them with math problems that have a historical background. For this purpose, we developed a collection of fifty problems in algebra and geometry, with a historical background and connected with the curriculum. These problems correspond to the curricula of the 8th, 9th and 10th grade and all of them appear under the same structure. We did not provided the solutions but each of the problems did present its historical background and a section called 'what else can we ask'.
We chose the approach to mathematics history through problems because:

a) A large part of mathematics creation originated from the attempt to solve problems;
b) While solving math problems with historical background, students may realize that some questions they find in the textbooks, were asked by mathematicians from the past. We hope that, in that way, students will learn how to ask questions and to appreciate the value of a good question.
c) In general, a good problem constitutes a challenge for the students and this fact may improve their curiosity and willingness to solve it. In this collection, the challenges are reachable by the students because they were chosen according to the study program;
d) During problem solving, the student is actively involved in his learning, maybe more involved than he is when listening to a lecture;
e) The historical background of a problem may contribute to locate it from the temporal point of view - who formulated the problem and why -, may help to understand the efforts made to solve it and to valorize the questions suggested by its solution. Giving such a frame to the problem may improve the significance of the problem and may also relate the topic with the students' world;
f) Problem solving is a relevant part of mathematics curriculum, so this approach is appropriate for our classrooms.

Three teachers volunteered to integrate these problems into their teaching, instead of some exercises and problems that appear in the study book. Before starting the teaching according to the research method, a questionnaire was distributed in order to test the pupils' attitudes to the integration of history into mathematics lessons. After six months of such integration, another questionnaire was distributed in order to check whether there were changes in pupil attitudes toward the integration of history. In this questionnaire we also asked whether the pupils could indicate a change in their attitude toward the subject itself. Both questionnaires were anonymous. Moreover, all the three teachers were interviewed about their impressions and opinions about the experiment.

Research findings are very encouraging. The three teachers who had participated in this study found the integration of the history of mathematics through historical problems to be positive and contributive. One teacher pointed out that whenever she started the lesson with a historical problem the pupils did not let her change the subject. Another teacher indicated that the pupils had been very excited about the fact that there was a link between the material studied in history lessons and the one taught in mathematics lessons. The same teacher said that some of the pupils who generally did not participate actively in the lesson, were very enthusiastic in participated much more in the lessons that dealt with history. About 50% of the pupils who answered the pre-questionnaire declared they were not interested in math history. After six months of study using historical problems only 16% of them pointed out that they were not interested. The percentage of interested pupils went up to 84%. The only admissible conjecture would be that pupils' exposure to the historical background of the mathematics they study in class made them become more interested in the subject. In the post-questionnaire we asked the pupils what was their attitude toward exposure to the history of mathematics through problems. About 80% of all the pupils considered the combined teaching of mathematics and the historical background as positive and interesting. The pupils' answers were categorized according to a classification system developed during the pilot research and which proved itself in the present one. We also wanted to check the change in pupils' attitude toward the subject. After their confrontation with historical problems,†twenty-three of them declared that they change their attitude. The teachers themselves pointed out the improvement of pupils' interest.

The conjecture that the integration of history of mathematics in its teaching may influence the pupil's achievement in mathematics has not yet been checked, but in view of the results of this study the subject should undoubtedly be explored.

The following is an example of the problems of the collection we developed.

Grade: 9th

Subject: Quadrilaterals, areas
Period: Ancient Egypt
2000 B.C.

Historical Background:
A papyrus which taught us about Ancient Egypt is now in Moscow. 26 of the 110 problems in this papyrus are geometric ones. Most of them deal with calculation of land area and volume of grain containers. The egyptians knew how to calculate the area of a triangle as half the product of a basis' length by the length of its correspondent altitude.
Another source for mathematics problems which occupied the egyptians are the wall paintings. A huge dedication on the walls temple in honor of Horus relates about numerous quadrilateral fields which were devoted to this god and for that purpose their area had been calculated.

Problem:
The tax collector calculated the area of a quadrilateral of sides a, b, c, d according to the following formula:

$$S = (a+c).(b+d)/4$$

Is this formula correct for any quadrilateral?
The following is a list of quadrilaterals to be checked:

a) a square
b) a rectangle
c) a rhombus
d) a trapeze

For each one of them it has to be asked whether the tax collector:
1) always lost, 2) got what he deserved, 3) always made profit 4) sometimes made profit and sometime lost, 5) another alternative.

What else can we ask?
For which of all the triangles ABC with AB = BC = 4 units, is maximal the area??

How do we want to *render* our students?

Neil Bibby*
July 19, 1993

In Nottingham, Cambridge and London, over the period 13 to 16 July 1993, the life and work of George Green (1793-1841) has been celebrated, upon the occasion of the bicentenary of his birth. Since Green is important to both mathematicians and physicists, it was interesting to reflect on the relative historical emphasis given by these two groups and to see how this relates to education in the two subjects. For instance, physicists *celebrate the originators of ideas* -consider for example the *naming of units* (Newton, Ampère, Gauss, etc.), and the body of theory in physics necessarily forces historical considerations- modern physics has not *replaced* classical physics: it complements it, and can only be made sense of by reference to the late 19th century breakdown of classical physics in certain cases. In mathematics new theory *replaces* old theory (e.g. modern analysis *ousts* Newtonian/Leibnizian calculus) and so a historical account *can* be dispensed with.

The events also threw up certain dangers of historical work. For instance, over-simplistic biographical accounts can lead to 'deification'; in Green's case, regarding his intellectual creativity as something which could flourish despite long hard hours working at the mill is a romantic and unhelpful way of interpreting his circumstances. Is 'deification' educationally desirable? Doesn't it `shut-out' the students, and perpetuate the notion of genius, which *they* could never be *themselves*? Doesn't it render students as 'admiring onlookers' rather than 'sharers in ideas'? Isn't it educationally undesirable to be rendered an 'admiring onlooker"?

Doesn't all this mean that historical approaches in mathematics education are potentially as {\it dangerous} as they might be *helpful*? Doesn't this call for a discussion of educational philosophy? How do we want to *render* our students? This is the central question.

---

*(The Sir James Henderson British School of Milan, Viale Lombardia, 66; IT-20131 Milan)

Contribution to the 'table ronde' about the role of history of mathematics in mathematics teaching at the Summer University, Montpellier July 19-23, 1993

Introducing a historical perspective into the teaching of mathematics. The situation in Germany

Lutz Führer *
July 19, 1993

Apart from singular exceptions, depending on special inclinations of sole teachers, there are usually no explicit historical items in the mathematics classroom of today in Germany

The most used textbooks for secondary schools ("Mathematik heute", Hahn/Dzewas, Lambacher/Schweizer, Kusch/Aits) generally do not mention historical facts. Some very few exceptions are eclecticly scattered like curiosities over the optional exercises or introductions. In such cases there is no attempt to explain historical or social perspectives, language and expressions are modernized without any comment, and there is no connection between the examples showing any emergence of ideas. The historically most detailed example is in Hahn/Dzewas, Vol. 10, p. 87. Their section "applications of π" opens with five short sentences about disagreements concerning the shape of the earth and Eratosthenes' opinion. Having explained the geometrical design of his measurement the historical digression ends with the suggestion to compute the earth radius from the equation

$$900 \text{ km} = \frac{\pi * r * \text{angle measured}}{180^\circ}$$

as if Eratosthenes had done this.

Most of the newer textbooks for secondary schools up to the 10th grade (Büning/Spallek, Kuypers/Lauter/Wuttke, Tischel) concentrate on applications and leave the historical aspects at the level just mentioned. The only exception, as far as I see, is Barth/Federle/Haller of Bavaria who try (since 1985) to strengthen historical aspects of Algebra and Geometry using historical pictures, comments, and some exercises to illustrate the fundamental ideas. But the sequence of books is rather expensive and concerning the exercises the historical perspective is optional.
At the 'Oberstufe' (grades 11 to 13) there are only two rather singular books using historical items to introduce and to illustrate the fundamental concepts: a textbook of Danckwerts on Analysis and on of Barth/Haller on Probability. The first one is not very common, and the second one is too big, too expensive, and too far from Statistics for practical use in the classroom. In general the used textbooks show the same lack of historical aspects as mentioned above with respect to the books for lower classes.

It is impossible to understand or discuss the German standard curricula in mathematics on a large scale without historical persepective.

Mathematics is presented to the pupils as a sequence of concepts and constructions of continuously rising complexity. Secondary school teachers in mathematics are convinced of a general principle that allows them to identify hypothetically logical and psychological difficulties in the classroom, namely that higher items have always to be understood as a simple consequence of lower facts, skills and methods. Being successful in mathematics means to the ordinary student to remember approximately all the details from the former lessons and to make no mistake in applying them.

---

*(Am Kupferberg 14, FRG-5342 Rheinbreitbach)
Contribution to the 'table ronde' about the role of history of mathematics in mathematics teaching at the Summer University, Montpellier July 19--23, 1993

The background ideology of school mathematics is to ascend from simpler ideas to more complex ones in `the' (psycho-)logical consistent manner described in the canonical curriculum. `Simpler' in this context means something like a happy mixture of `fewer prerequisites', `historically more distant' and `ontogenetically lower'. As a conseqeunce the first four classes are restricted to natural numbers and their admissable operations, followed by positive ratios and decimal fractions in classes 5/6. Negative numbers and ratios are reinvented not before class 7, because they were historically late, and variables and functions come later on (after some preparatory exercises and preliminaries) as a prelude to calculus, like Felix Klein has suggested at the beginning of our century.

Shapes and figures of space are named and then reduced to the plane. The next stage is congruence geometry of triangles complicated by the vocabulary of transformations and oriented at forgotten attempts to teach the foundations of geometry. Similarity and Pythagoras follow at class 9 as means for calculations, pi, trigonometry and stereometry in the same manner at class 10, before the climax is reached at grade 12 with Linear Algebra and Vector Geometry of lines and planes. The interrelations of these seemingly contextfree fragments of geometry are, for the student and most of the teachers, hidden behind the curtain of school history.

In my opinion there are three hindrances to explicit history in mathematics teaching:
- German university students and school teachers in mathematics are not obliged to know anything about the history of their subject.
- Since the Second World War historical perspectives are in general discredited to the youth by frustrating attempts to come to terms with the German past.
- The stream of consciousness of pupils and students has changed its stucture to something like a manipulation system of discrete perceptions of space and time. To study the emergence of ideas and thoughts has therefore become a strange and artificial concept.

Historical perspectives are methodologically indispensable to grasp the essentials of concepts like functionally related variables, transformation geometry, differential quotients or correlation coefficients.
More than that, at a didactical level they are indispensable to grasp the prominent role of antiquated, formalistic, and term oriented mathematics in the general system of education.

HISTORY AND MATHEMATICS TEACHING IN ITALY : A GLORIOUS PAST, AN UNCERTAIN PRESENT, A PROMISING FUTURE

Fulvia FURINGHETTI
Dipartimento di matematica,
Università di Genova.

In the attitude of Italian school towards history in mathematics teaching there has always been a discrepancy between theory and practice : at the theoretical level in some periods of the past and of the present times we find a clear agreement on the opportuneness, even more the necessity, of introducing history in mathematics teaching, while in the school practice we find poor realizations of the intentions.

Certainly Italy has a good tradition of research in history of mathematics, from Pietro Cossali and Guglielmo Libri to Baldassarre Boncompagni who founded his bulletin in 1868 and Gino Loria who founded a journal that may be considered its prosecution in 1898. Loria was also a strong supporter of the importance of history in mathematics teaching; other personages of the period, among them some teachers, shared this opinion. In particular it has relevant the contribution of the secondary school teacher Gaetano Fazzari, editor of a mathematical journal for students (*Il Pitagora*), that contains a high percentage of papers on historical topics, since the editor ascribed to history a central role for rousing students' interest (and love) for mathematics.

Loria advocated the presence of history in university courses (Barduzzi & others, 1903; Loria, 1930); he was author of books in history of mathematics and also of a book of selected pages on history of science for students (Loria, 1925).

This was the pioneering period in the modern mathematics education in Italy; the interest for history (as well as epistemology) in mathematics teaching continued in the successive years, specially thanks to Federigo Enriques. This university professor, leading researcher in the famous Italian school of algebraic geometry of the first half of XX century, showed a great interest in mathematics education. He wrote a book important for the teacher training and re-training (*Questioni riguardanti la geometria elementare,* Zanichelli, Bologna, 1900, afterwards *Questioni riguardanti la matematiche elementari*, Zanichelli, Bologna, 1912), edited an important journal for mathematics teaching (*Periodico di matematica*, from 1921 to 1946), founded a journal on epistemology and philosophy of science (*Scientia*, 1907); in these last subjetcs he wrote books translated in foreign languages.

The official programmes launched in 1923, still in use in upper secondary school, contains some directions referring to history; but we have to say that in this period the neo-idealistic philosophy fostered a split between humanistic and scientific orientation of Italian culture and a consequent decreasing interest for the humanistic side of mathematics (and science).

In the 1970s thing started to change and some new textbooks appeared containing little historical notes addressing the teachers' attention to a historical view of mathematics; for example, in my work with teachers I ascertained the impact of the textbook by Lina Mancini Proia and Lucio Lombardo Radice (1977) in rousing a certain interest for this view. Other significant elements have been the new programmes (1979) for lower secondary school (ages 11-13) that contain hints about history and the creation of regular courses of history of mathematics in many Italian universities.

At present the new programmes proposed for the initial two years of upper secondary school (ages 14-16), under experimentation in a relevant number of classes, encompass indications about history of mathematics; unfortunately these indications are embedded in a lot of other various indications of innovations without practical suggestions for implementation (Furinghetti, 1993). In the programmes under discussion for the last three years of upper secondary school (ages 16-19), a level where it would be possible to work with history in a significant way, the indications are generic.

In this situation it may be considered positive the interest for a humanistic dimension of mathematics and its teaching timidly emerging in the cultural environment; one of the effects is that books of history of mathematics (original or translated) are published more than in the past and reach a larger number of readers (among them teachers). All these elements encourage an effective introduction of an historical perspective in teaching both by individual attemps and in structured projects.

REFERENCES

Furinghetti, F.: 1993, 'Insegnare matematica in una prospettiva storica', *L'educazione matematica*, to appear.

Barduzzi, D., Giacosa, P & Loria, G.: 1903, 'In quale modo ed in quale misura la storia delle scienze matematiche, fisiche et naturali possa costituire oggetto di un corso universitario', *Atti del secondo congresso internazionale science storiche*, v. XII, 15-21.

Loria, G.: 1925, *Pagine di storia delle scienze*, Paravia, Torino.

Loria, G.: 1930, 'L'insegnamento della storia delle scienze in Italia', Archeion, v.13,474-476.

The place of the history of mathematics in mathematics teaching and curriculum. The situation in Greece.

Athanassios Gagatsis*

What role does history play in mathematics teaching?

In Greece there is a long tradition of using short historical notes in mathematics textbooks, especially those on geometry. These notes contain profiles of the great mathematicians of ancient Greece and information about their work, in an effort to stress the Greek origin of mathematical science. This historical material serves an educational policy with a long tradition in Greek education; the roots of this tradition can be traced back to the formation of the modern Greek state, in the early 19th century, when the classical Greek civilization was viewed as the main factor in the formation of the national character of modern Greece.

The same orientation towards biographies and general information (dates of discoveries etc.) has also been the main feature of various historical notes in algebra textbooks over the last 40 years. We stress here the fact that in Greek schools there is, for every subject taught, an official textbook the use of which is compulsory to all teachers and pupils.

Since 1987 there has been a reform in mathematics of secondary education, with a clear deviation from the 'new maths' principles and oriented towards the process of problem-solving. In this context there has also been a new attitude towards the role of historical notes. Textbooks written according to the new curricula contain, at the end of various chapters, long historical notes which give emphasis to the problems related to the emergence and evolution of fundamental mathematical concepts (e.g. number, equation, logarithm, derivative, integral, matrix and determinant, probability, etc.).

Positive and negative influences

The first section seems to reveal a favourable environment for the development of an interest in the history of mathematics among teachers; however, the reality is different. Neither in Greek universities, which prepare the future teachers of mathematcis, nor in in-service training schools, has history of mathematics been taught as a subject in its own right. A few recent exceptions to this rule do not make up for the fact that the overwhelming majority of secondary teachers lacks knowledge about the history of mathematics and its educational value. This lack of a historical education in mathematics may well be the reason that most teachers regard the historical notes as 'space fillers' and do not bother with their content. There is, naturally, a small number of teachers who try to use these notes to advantage in their day-to-day teaching, aiming to promote discussion in their classes. Official guidelines for teachers recommend them to employ one teaching-hour, after completing a chapter's subject matter, to the study of the respective historical note and to engage in a free discussion in the classroom.

Finally, there is a small group of secondary school teachers and university professors who try to spread the value of using history of mathematics in the classroom. They act mainly within the Group for the History of Mathematics, an affiliate of the Greek Society of History of Sciences and Technology. They publish occasional papers in a series entitled ``Matters of History of Mathematics" and keep in touch with teachers interested in this area. Among their recent and most influential activities are the organization of an interdisciplinary symposium on "Didactic exploitation of history of sciences" (Thessaloniki, August 1991) and the involvement in writing the historical notes for the new official mathematics textbooks mentioned above.

---

* Department of Mathematics, Aristotle University of Thessaloniki,GR-54006 Thessaloniki)
Contribution to the 'table ronde' about the role of history of mathematics in mathematics teaching at the Summer University, Montpellier July 19--23, 1993

SUMMARY OF CONTRIBUTION TO PANEL DISCUSSION ON THE PLACE OF THE HISTORY OF MATHEMATICS IN MATHEMATICS TEACHING AND CURRICULUM

HEIEDE Torkil
Royal Danish Scholl of Educational Studies
DK - 2400 Copenhagen NV, Denmark.

In the Garden of Eden Adam and Eve were told to give names to all the animas, and that was the beginning of language and of science. No doubt they were also told to count on their fingers, and that was the beginning of mathematics. So mathematics has a very long history, and its history is an integral part of it, that is : mathematics is a living subject. Therefore the history of mathematics should appear in some form everywhere in the teaching of mathematics, from primary school to university. And it should appear not as an "educational tool" in the teacher's hand to make things easier or more colourful or more fun; it should appear in its own right to give the learner a better and truer understanding of what mathematics is - and this would then in its turn make everything more colourful and more fun, not always easier to grasp but maybe easier to appreciate.

In Denmark there is a long tradition for studying and teaching history of mathematics at the universities, and this tradition has in some measure also been present at the upper secondary level, since the teachers at this level are all university educated. The same tradition has also been felt at the lower secondary level and even a little at the primary level, partly because of the influence of an elementary mathematics textbook in which the exposition was wholly historical; it was written for the so-called folkn high schools in 1888 and has been reprinted many times, also as late as in 1962.

All this was given a new impetus in 1988 when history of mathematics was made obligatory at the upper secondary level : all the topics on the mathematics curriculum should now be taught with du respect to what the ministry of education called the three aspects of mathematics, namely the structural (or deductive) aspect, the model aspect (or the aspect of applicability), and the historical aspect (which was even mentionned first in the new regulations). The most immediate impact of this has of course been on the textbooks, since the market is completely free. Old textbooks have appeared in new editions with history added, sometimes in whole chapters written by historians of mathematics, and also quite new textbooks and smaller books on single topics have been written in which the history has been totally integrated in the text. Also in new textbooks for the other school levels one can detect more history than before, often in the form of very short biographies and portraits of mathematicians connected with the different topics, e.g. Descartes, Fermat, Chebychev. For use at the upper secondary level (and in the education and in-service education of teachers) there have also appeared collections of sources to the history of mathematics.

Référence

Torkil Heiede, "Why Teach History of Mathematics?". The Mathematical Gazette 76 (1992) pp. 151-157. This paper contains my personal answer to the question in the title; the list of references contains 48 other answers, all in English. The Danish version of the paper is "Hvorfor undervise i matematikkens historie?" Normat (Nordisk Matematisk Tidskrift) 39 (1991) pp. 153-161 & 192; here the list of references is longer, since it also contains 31 answers to the same question in French, German and other languages.

The role of history of mathematics in mathematics teaching. The situation in The Netherlands.

Jan van Maanen *

At present history of mathematics has no structural position in mathematics education in Dutch secondary schools. Yet, there was a vivid tradition in the history of mathematics during this century. Several textbooks for secondary schools had chapters on the history of their subject matter. The mathematics teacher and historian of mathematics Dijksterhuis propagated history of mathematics as a subject in the education of mathematics teachers, and at some places in the uppersecondary level history even was an optional part of the curriculum (from 1952 until 1973 in the Gymnasium $\propto$ programme, which prepared in the 11th and 12th grades for a university study in the humanities, and from 1974 until 1985 in the 'Wiskunde II' programme, which was taken in the 11th and 12th grades by some of the prospective science students). In present curricula, however, history of mathematics is no longer extant as a subject in its own right.

On the other hand, mathematics is taught in all types of Dutch secondary schools, and another way in which history might be extant is in the `ordinary' mathematics textbooks. Some of these have regular references to history (*Getal en Ruimte*, for example, and the *Wageningse Methode*), which occasionally give biographical information and historical introductions. But most of the times history is an extra which can be left out as well (and probably is left out by many teachers), an illustration with a caption but without a reference in the text. In most of the texts, however, references to history are rare or totally absent. Pythagoras' theorem, for example, is taught without reference to history in *Exact Wiskunde* and *Wiskundelijn*, whereas *Moderne Wiskunde* at least adds: "Pythagoras was a Greek philosopher (about 500 B.C.)", and *Sigma* says about proving the theorem: "One thinks that a Greek mathematician, Pythagoras (580-496 B.C.) has been the first to do that". It even occurs that authors clearly have knowledge about the history and use it as a source of inspiration, but without revealing their source to their readers.

But there are also positive signs. Research is going on, relevant articles appear in Dutch and foreign journals, the curriculum for the upper secondary level ('Wiskunde B') is under discussion and the integration of history is one of the topics in that discussion, the new curriculum for the lower secondary level ('Wiskunde 12-16', the numbers refer to the age groups for which the programme is intended; the curriculum will start in grade 7 in Autumn 1993) does not mention the approach of mathematics via history directly, but one of its elements is called 'Integrated Mathematical Activities' and integration with history is stimulated, as indicated by the publication of a series of model lessons by the 'Team 12-16', membership of the International Study Group on the relation between History and Pedagogy of Mathematics (HPM) increases, and without doubt this sentence could be much longer than it is now already.

In summary: history of mathematics has had a stronger position in Dutch mathematics education than it has now, but it seems to regain terrain.

---

* *University* of Groningen, Department of Mathematics, P.O. Box 800, NL-9700 AV Groningen)
Contribution to the 'table ronde' about the role of history of mathematics in mathematics teaching at the Summer University, Montpellier July 19--23, 1993

Introduction of an historical perspective in the teaching of mathematics: the situation in Portugal

Eduardo Veloso,
Universidade de Lisboa

This report will take in consideration three aspects: i) intentions and projects, ii) teacher's practice, and iii) the new curriculum proposals. In each of these directions, there are some positive advances but also insufficiences and obstacles that need to be understood if we want to overcome them. I will indicate briefly both of them.

In what concerns **intentions and projects**, we can say that the situation has changed lately in a positive direction:

• The interest shown by teachers regarding any initiative on history and the teaching of mathematics has been growing up all the time. The workshops and conferences organized during the annual meetings of the Association of Teachers of Mathematics (APM) are growing in number and participation of teachers. The Portuguese Society of Mathematics has a similar experience.

• This Society created a National Seminar for the History of Mathematics, a few years ago, and one of the aims of this organization is to promote an historical perspective in the teaching of mathematics. This Seminar will organize, in the next month, the First Portuguese-Brazilian Meeting on History of Mathematics and during this meeting a panel with the theme of this one will be organized.

• A Working Group on History and the Teaching of Mathematics was created some months ago within the APM, with the following objectives:

- to become a center for the exchange of teachers' experiences;
- to found a documentation center;
- to organize and support other related activities.

• The theme of the next issue of the Association journal will be "History and the Teaching of Mathematics".

• Some positive initiatives concerning the pre-service teachers and in-service teachers training in History of Mathematics have been taken recently. My colleague Gertrudes Amaro will describe these initiatives in her atelier during this meeting.

In addition to these positive aspects of the situation, we must recognize that the reform movement on school mathematics in Portugal, very active since ten years ago, has neglected as a theme for reflection and proposals the introduction of a historic perspective in the teaching of methematics, focusing its work on other issues namely problem solving and the introduction of new technologies. As a consequence, the most innovative experiences in mathematics education in Portugal were adressed to these fields. Another consequence is the non existence of written materials on the issue of the place of history in mathematics education, in contrast with the considerable production of papers, reports and even thesis on the other subjects.

Concerning the **teacher's practice**, and refering to the situation before the implementation of the new curriculum that is just beginning, we can say that in general, the historical perspective was almost absent from the classroom. In some cases, teachers followed the practice of the textbooks, making brief bibliographical references or telling old and questionable anecdotes. The positive initiatives described above are too recent to have resulted, for instance, in proposed activities or historic texts and other materials to be used by the teachers. In spite of this, it would be not fair to give a totally negative picture of the situation. Some teachers are trying to overcome the present situation, and some interesting experiences were developed these last years. Three exemples allow us to see the type of things teachers are experimenting:

• In an elementary school (grades 5 and 6) the teachers decided to stop each year, for one day, the regular school work and to organize a set of activities and representations called "One day in.. (Athens, Rome,...)". In what regards mathematics, pupils discuss the mathematical problems of the epoch and play the roles of famous mathematicians.

• The making of sundials and its mathematical study has been experimented in some schools, in conjunction with the research of old sundials existing in the school region.

• Last year, following some previous experiments, the APM launched a nationwide project on the mathematics of Portuguese Discoveries of the 15th century. Hundreds of 9th grade pupils investigated and built nautical instruments and developed other related activities.

Finally, I will make some comments on the place of history in the **new curriculum**. The situation is contraditory, from my point of view. The references to history and the recommendations for its use in the classroom are, with no doubt, much more frequent than in the past. As a consequence, teachers and textbook authors are more convinced and motivated to give more attention to history. And this is very positive. We can also find in the curriculum some adequate phrases about the place of history in the teaching of mathematics, like the fact that the history of mathematics "help to recognize the contribution of mathematics to understand and solve the problems encountered by the human beings in the past" or that "activities with an historical perspective show mathematics as a science on construction".

However, the set of indications and suggestions included in the new curriculum is most probably not adequate to support an effective change in teacher's practice, for several reasons:

• The suggested activities are in general not so interesting and surely not able to change the traditional ideas of what is one activity on history of mathematics. It is suggested, for instance, "to propose to the pupils a bibliographical research on Pascal or Laplace", or "the writing of a text on Descartes", and other similar activities.

• The history of mathematics appears in the curriculum as an addition or appendix and not as a substancial and essential component of mathematics education. For instance, if we reflect on some phrases explaining the reasons to include history, like "activities with an historical perspective can humanise the learning of mathematics [...] [and] give excelent opportunities to make documentation research", we see that the place of history in the teaching of mathematics is underestimated.

• The excessive extension of the programs will have as a consequence the giving up of everything that seems secondary, and this is certainly the case of history in the new curriculum.

To finish, I would like to pose some questions:

• To what extent the accepted aims of school mathematics imply the place given to the history in the teaching of mathematics?

• Namely, if the aims are chiefly utilitarian, like "preparation for further studies" or "preparation for the living in a technological society" or even "developing logical reasoning", the result will not be that an historical perspective in the teaching is something accessory, used as a motivation to the students or to add some interest to mathematics?

• Is it possible to imagine a set of objectives to school mathematics in such way that the history of mathematics will be a natural and essential component of the teaching of our discipline?

L'histoire des mathématiques dans l'enseignement et dans les programmes: la situation au Portugal

Eduardo Veloso,
Universidade de Lisboa

Mon rapport prends en considération trois points de vue: i) le niveau des intentions et des projets, ii) la pratique des enseignants, et iii) les propos des nouveaux programmes de mathématiques. Dans chacun de ces aspects, il y a dans mon pays, à present, des initiatives et des signes encourageants mais aussi des insuffisances qu'il faut comprendre et surmonter. J'essayerai d'indiquer brièvement les uns et les autres.

En ce qui concerne **le niveau des idées, des intentions, et des projets**, on peut constater que la situation au Portugal, dans les dernières années, a évolué dans un sens très positif:

• L'intérêt des professeurs pour toutes les initiatives se rapportant à l'histoire des mathématiques et à sa place dans l'enseignement, ne cesse d'augmenter. Les cours, conférences et ateliers sur ce sujet qu'on organise à l'occasion des rencontres de la *Associaçao de Professores de Matematica (APM)*, sont chaque année plus nombreux et font toujours salle comble. La *Sociedade Portuguesa de Matemática* a une expérience semblable.

• Cette Société a créé, il y a quelques annés, le *Seminário Nacional de História de Matemática*, dont l'un des objectifs concerne l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques. Le mois prochain il va organiser, au Portugal, le *1º Encontro Luso-Brasileiro sobre a História da Matemática*, oú aura lieu une table ronde sur ce même sujet.

• L'APM vient de créer un groupe de travail sur histoire et enseignement des mathématiques, ayant comme but de promouvoir l'échange d'expériences entre les professeurs, d'organiser un centre de documentation, d'appuyer la formation des professeurs en histoire des mathématiques, et de mettre en place d'autres activités similaires. Le thème central du prochain numéro spécial du journal de l'APM sera "Histoire et Enseignement des Mathématiques".

• Quelques initiatives récentes concernant l'histoire des mathématiques dans la formation initiale des enseignants sont aussi a signaler et seront abordées par Mme. Gertrudes Amaro dans son atelier.

A coté de ces signes positifs, on doit dire que, en général, le mouvement pour la réforme de l'éducation mathématique au Portugal, très actif depuis une dizaine d'annés, a choisi comme thèmes majeurs de ses réflexions et de ses propos la résolution de problèmes et l'introduction des nouvelles technologies, et plus récemment, par exemple, la formation des enseignants... mais pas l'histoire des mathématiques. Donc, comme c'est normal, les expériences et projets d'innovation mis en place dernièrement au Portugal se rapportent, la plupart des cas, aux thèmes cités plus haut. Ces options ont eu pour conséquence, par exemple, la presque inexistence de textes de réflexion sur l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques, contrastant avec l'éssor de travaux, rapports et thèses sur quelques-uns des autres thèmes.

Par rapport à la **pratique des enseignants**, et en nous référant à la situation avant l'introduction toute récente des nouveaux programmes, on doit dire que, d'une manière générale, la perspective historique était presque absente des classes de mathématiques. Tout au plus, et en se conformant aux contenus des manuels scolaires, on faisait de brèves références biographiques ou on racontait quelques anecdotes plus ou moins vraies. On doit remarquer que les initiatives positives, au niveau du mouvement des idées, citées plus haut, sont très récentes et n'ont pas encore produit, par exemple, des matériaux auxiliaires pour les profésseurs, pareils à ceux qui sont déjá disponibles dans les autres directions du renouveau de l'enseignement des mathématiques. Cependant, il ne serait pas juste de présenter un tableau tout à fait négatif de la situation, même au niveau de la pratique. Ces dernières années, quelques initiatives ont été prises par des professeurs dans le but de renverser la situation. Je mentionne trois exemples:

• Dans une école (enfants de 11/12 ans), on a pris l'initiative d'arrêter chaque année les travaux scolaires pendant toute une journée et d'organiser avec les élèves un ensemble de réprésentations et activités appellé " Un jour à... (Rome, Athènes, ...)". Les élèves de mathématiques ont évoqué, de plusieurs façons, les problèmes mathématiques et les mathématiciens de l'époque considérée.
• La construction de cadrans solaires et son étude mathématique ont été entrepris dans quelques écoles. On a fait aussi des recueils des cadrans existants dans la région de l'école.
• En réponse à une initiative da l'APM, des centaines d'élèves de 13/14 ans ont fait des projets sur les mathématiques de la navigation pendant les explorations portugaises du XVéme siècle. En petits groupes, les élèves ont étudié les règles de la navigation astronomique, écrites dans les journaux de bord et ont construit et utilisé des modèles d'instruments anciens.

Voyons finalement quel est le rôle attribué à l'histoire des mathématiques dans **les nouveaux programmes**. La situation est à mon avis contradictoire.

On doit dire tout d'abord que les références à l'histoire des mathématiques sont beaucoup plus nombreuses et insistantes que dans le passé, ce qui eut pour conséquence que les professeurs — et les auteurs des manuels scolaires — ont compris qu'il fallait donner plus d'espace qu'auparavant à l'histoire. Aussi, on peut trouver, disseminées a travers le texte des programmes, des approches intéressantes sur le rôle de l'histoire des mathématiques, comme par exemple dans les deux phrases suivantes: "reconnaître l'apport des mathématiques pour la compréhension et résolution des problèmes de l'homme à travers les temps", "activités avec une perspective historique [...] montrent les mathématiques comme une science en construction.".

Cependant, l'ensemble des indications contenues dans les programmes ne constitue pas un appui réel pour le changement de la pratique des enseignants. Ceci pour diverses raisons:
• Les activités suggérées sont, dans la plupart des cas, peu imaginatives et peu propices à changer les idées reçues sur ce qui est une activité en histoire des mathématiques. Je cite quelques suggestions des programmes: "on pourra proposer aux élèves un travail de recherche bibliographique sur Pascal ou sur Laplace", "on suggère la réalisation d'un travail de groupe sur Descartes". "à propos du théorème de Pythagore, il est utile de faire une référence à l'histoire des mathématiques (les mathématiques des Egyptiens, des Grecs, la corde à douze nœuds, la preuve dans l'histoire des mathématiques).".
• L'histoire apparait comme un complément, et pas comme une composante essentielle de l'education mathématique. Si on réfléchit un peu sur les raisons présentées pour l'inclusion d'une perspective historique, comme par exemple "les activités avec une perspective historique humanisent l'étude de la discipline" et "donnent occasion à d'excellentes opportunités pour faire de la recherche de documentation", on voit que le rôle de l'histoire dans l'enseignement est sous-estimé.
• La grande extension des programmes aura pour conséquence l'abandon de tout ce qui apparait comme secondaire, ce qui est certainement le cas de l'histoire dans les nouveaux programmes.

Pour finir, je voudrais poser quelques questions:
• Dans quelle mesure les objectifs de l'enseignement des mathématiques, acceptés à un certain moment, peuvent déterminer l'adoption d'une perspective historique dans cet enseignement?
• Plus concrètement, est-ce qu'un ensemble d'objectifs d'ordre principalement *utilitaire*, comme par exemple "la préparation pour des études supérieures" ou "la préparation pour la vie dans une société technologique" ou même "le développement du raisonnement logique" ne conduit pas à envisager les perspectives historiques comme accessoires, comme simple motivation pour les élèves ou donnant un surcroît d'intérêt aux mathématiques?
• Peut-on envisager un ensemble d'objectifs pour les mathématiques scolaires qui puisse conférer à l'histoire des mathématiques la place qui lui appartient dans l'enseignement?

THEME 3

TOPIC 3

Relations entre l'enseignement et les facteurs culturels

The Relationship between mathematics education and the culture

EXPOSES - WORSHOPS

CONFERENCE - PLENARY LECTURE

QU'EN EST-IL DES MATHÉMATIQUES ELÉMENTAIRES EN ALGÉRIE ? *

-Ali ASSEM-**

Abstract :

Un des principes de l'enseignant est de se remettre continuellement en cause. Pour cela il faut tenir compte de plusieurs facteurs : l'expérience pédagogique, la nature de l'enseignement prodigué et l'évolution de l'environnement c'est à dire les facteurs socio-culturels et éducatifs.

Dans notre pays, ce dernier phénomème est frappant et on en distingue trois facteurs au moins une période d'alphabétisation intense, une algérianisation et une arabisation de l'enseignement (avènement de l'école fondamentale).

Le but de la communication est de découvrir les effets de ces facteurs sur l'enseignement des mathématiques.

I - INTRODUCTION

La situation actuelle de l'enseignement des mathématiques (débat sur l'école algérienne, taux d'échec très important...) m'a amené à poser la question : "c'est quoi l'enseignement ?".

"C'est une fonction sociale qui répond naturellement aux exigences de la société qui l'instaure et le nourrit. Mais comme toute institution, il peut arriver que l'enseignement se fige en des textes et des habitudes vidées peu à peu de toute vie véritable. Il s'ensuit alors un divorce entre les besoins fonctionnels de l'environnement et le mode de réponse de l'institution ainsi naissent le malaise et les troubles"

En Algérie, le secteur de l'éducation a connu, depuis 1982 à nos jours, différentes réformes liées essentiellement aux contextes socio-culturel et politique du pays, en d'autres termes liées aux idéaux pour lesquels le peuple algérien s'est toujours mobilisé à travers son histoire : "l'attachement à l'islam et aux valeurs de la civilisation arabo-musulmane" et aux idéaux de la révolution socialiste : la récupération et l'épanouissement du patrimoine national, l'effort continu pour l'édification d'une société évoluée".(2)

En 1970 une première réforme "démocratisation de l'enseignement".

En 1976 une deuxième réforme "instauration de l'école fondamentale neuf ans obligatoires pour tous". (2)

---

*Thème 3 : relation entre l'enseignement et les facteurs cultutels.

**Maître-Assistant à l'U.S.T.H.B. Alger

[2] Ordonnance instauration de l'école fondamentale Avril 1976.

II- ÉVOLUTION DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

De 1962 à 1970 les programmes suivis étaient ceux laissés par le colonisateur (les mathématiques traditionnelles). Les directives ministérielles de 1964 soulignent l'importance et l'objet de l'enseignement du calcul :

a) Faire acquérir aux élèves des notions utiles, pratiques, dont ils se serviront plus tard dans la vie quotidienne.

b) Développer en eux la pensée intuitive, l'esprit d'observation, la mémoire, l'attention l'esprit d'initiative.

c) Donner à l'enfant l'habitude de réfléchir et de raisonner afin de développer au maximum son esprit logique[1].

Malheureusement, l'application sur le terrain fut tout autre en raison du manque de formation des enseignants d'une part, et de l'alphabétisation intense d'autre part, qui a exigé un surcroit d'enseignants étrangers d'horizons divers avec comme corollaire des habitudes diversifiées.

De 1970 à 1976, l'avènement des mathématiques modernes et l'attachement à la culture arabo-musulmane, au coeur de la réforme de 1970 qui a vu la démocratisation de l'enseignement induisant une organisation de stages de recyclages pour les enseignants et la traduction des différents programmes à cause de l'arabisation des enseignements.

1976 fut une date charnière de notre enseignement, l'ordonnance du 1er avril 1976 instituait l'école fondamentale de neuf ans obligatoires pour tous. Ceci a eu pour conséquence une réforme totale des horaires et des programmes de mathématiques. La réforme de 1976 se voulait révolutionnaire afin de bâtir une école scientifique et moderne par son contenu et ses méthodes, ainsi l'école fondamentale conçue en trois paliers de trois années chacun, fut généralisée dès 1980 au premier et au deuxième palier et les enseignements se font en langue arabe. Cette réforme a pris compte de l'évolution pédagogique, c'est à dire de l'évolution des contenus enseignés, des progressions dont la façon de les introduire et enfin des méthodes pédagogiques et moyens didactiques.

Pour une réussite de ces réformes, il fallait algérianiser le corps enseignant et veiller à l'arabiser progressivement. Mais la démographie galopante a fait que l'algérianisation a sacrifié la formation de qualité des éducateurs, ceci a duré jusqu'en 1980. En effet, les I.T.E. (Institut des Techniques de l'Éducation) dispensaient des formations d'une année au lieu deux années prévues par un système d'éxamens internes et de chantiers d'été. Les moniteurs et les instructeurs devenaient instructeurs et instituteurs respectivement, par ailleurs, on faisait appel à des vacataires et on recrutait sur titre les instructeurs sans aucun critère. Les enseignants d'orignine moniteurs représentaient environ 80% du personnel en élémentaire. Dès 1980, les contraintes étant moins dures (stabilisation du taux de scolarisation, saturation des autres secteurs économiques...) le niveau des recrus devenait plus élevé et le phénomène des vacataires fut réduit à néant depuis 1990.

[1] Objectifs et programmation de l'Enseignement des Maths circulaire (1964)

III - EFFETS DES RÉFORMES :

Il est à noter que les contenus enseignés étaient plus ou moins liés aux mutations intervenues dans les sciences par l'avènement des mathématiques modernes axées sur l'abstraction. Depuis 1980 l'enseignement des mathématiques au premier et deuxième palier établit une continuité directe (relevant de l'isomorphie) entre les deux ages de l'apprentissage (5/6 ans et 14/15 ans). L'élève par des manipulations effectives vit certaines notions mathématiques (l'associativité, la distributivité...) avant de pouvoir en prendre conscience formellement plus tard. "Il va de l'agi au pensé formel sur des contenus objectivement isomorphes". L'enseignement de la géomètrie par contre fut trop axiomatisé. Mais, la réussite du système éducatif dépend essentiellement de la composante humaine chargée d'appliquer les programmes et d'utiliser les moyens matériels. Ainsi les phénomènes algérianisation et arabisation ont influé négativement sur le système éducatif, le premier a eu comme corollaire "un personnel sous qualifié n'ayant aucune formation pédagogique d'où une baisse du niveau qualitatif" et le second comme corollaire "la non maitrise de la langue arabe avec une écriture axiomatique obéissant à la logique de la langue (de droite vers la gauche), une non disponibilité de manuels pédagogiques (un seul manuel en langue arabe). Ceci peut expliquer une part de l'échec que vie l'école algérienne.

IV - EN GUISE DE CONCLUSION

Les réformes qu'a connu notre système éducatif n'ont à aucun moment de l'histoire fait l'objet d'une revendication de la masse ni d'un débat national ou du corps enseignant. Ces réformes en fait n'étaient qu'un outil du régime de l'époque (parti unique). Depuis 1988 avec l'avènement du plurialisme politique, un débat national est en train de se réaliser sur le devenir de notre système éducatif. Il faudrait alors répondre à des questions comme :

- Connait-on les besoins de notre société en formations mathématiques ?

- Connait-on les besoins de l'individu en formations mathématiques pour maitriser sa propre vie, privée ou sociale ?

- Peut-on préciser alors quelles mathématiques enseigner utiles et/ou formatrices ?

L'introduction de l'analyse algébrique à Cambridge au début du 19ème siècle.

Marie-José Durand-Richard
Collège Paul Gauguin, Paris
Chercheur associé REHSEIS CNRS

Au début du 19ème siècle, l'enseignement des mathématiques à Cambridge est devenu "la gloire et l'honneur de l'université". Mais paradoxalement, il est resté figé dans une sorte de double fidélité à la géométrie euclidienne et à la forme newtonienne du calcul infinitésimal, le calcul des fluxions. Une telle crispation rend de plus en plus difficile l'assimilation des remarquables développements qu'ont connus les mathématiques sur le Continent. D'un point de vue strictement internaliste, c'est donc dans un contexte de stagnation qu'interviennent, dès 1813, les jeunes mathématiciens de l'Ecole Algébrique Anglaise pour imposer les acquis de l'analyse algébrique, tant dans le domaine de l'enseignement que dans celui de la recherche. Initiative audacieuse, qui ne saurait être évaluée comme un simple transfert de connaissances. Confrontée à la nécessité d'un renouvellement plus profond des institutions et des savoirs qui les fondent, elle débouche sur une conceptualisation du champ de l'opératoire, que Bourbaki[1] considère comme une des trois voies ayant conduit le 19ème siècle à l'élaboration de l'Algèbre Abstraite, et qui n'est pas sans produire des orientations spécifiques quant au choix des fondements de l'analyse algébrique. Et cette spécificité concerne tout autant leurs conditions d'émergence que leurs répercussions sur l'enseignement des mathématiques à Cambridge.

L'historien des mathématiques L. Novy qualifie d'Ecole Algébrique Anglaise un groupe de mathématiciens formé de Charles Babbage (1791-1871), George Peacock (1791-1858), Augustus de Morgan (1806-71), et Duncan F. Gregory (1813-44), auquel il rattache également George Boole (1815-44) et William Rowan Hamilton (1805-65), ainsi que Arthur Cayley (1821-95) et James Joseph Sylvester (1814-97) dont les travaux, bien que plus tardifs, n'en sont pas moins fortement marqués par les orientations de leurs prédécesseurs[2]. Hamilton est vraisemblablement le plus connu, sans doute parce qu'il va le plus loin sur la voie du formalisme en produisant la première structure algébrique dont la multiplication des éléments n'est pas une opération commutative : celle des quaternions. Mais, du point de vue de l'histoire de ce mouvement, il faut insister sur le fait que Hamilton n'a aucun lien direct avec l'université de Cambridge, puisqu'il est irlandais, ce qui en Grande Bretagne, représente beaucoup plus qu'une simple distinction régionale[3], et qu'il se démarque radicalement de cette école qu'il appelle Philologique, se revendiquant lui-même d'une Ecole Théorique. Boole et De Morgan sont plus connus comme logiciens que comme mathématiciens, Boole pour son algèbre, de Morgan pour les lois de dualité qui portent son nom. Gregory, mort trop jeune pour marquer les mémoires, descend d'une grande famille de mathématiciens écossais : il oriente les conceptions formalistes de Peacock, dont il est le plus proche disciple, vers des techniques sépcifiques de résolution des équations différentielles, et fonde à Cambridge en 1837 le premier journal britannique de recherche mathématique, le *Cambridge Mathematical Journal*. Babbage apparaît depuis quelques années comme le pionnier de la conception des ordinateurs, parce que sa "machine analytique", telle qu'il l'invente dans les années 1830, séparant les cinq fonctions opératoires essentielles que sont la mémoire, le calcul, le contrôle, la commande, et le transfert des nombres, fonctionne selon les mêmes principes qu'une calculatrice automatique à

---

1 Bourbaki, 1962, 74.

2 Novy, L., 1968.

3 L'histoire présente pourrait suffire à nous en convaincre, si nous ignorions la famine de 1845-51 et l'opposition religieuse entre catholiques et protestants, incarnée au 19ème siècle par l'engagement de D. O'Connell dans le mouvement pour l'émancipation des catholiques, de 1823 aux années 1840.

programme externe. C'est à Peacock que les ouvrages généraux d'histoire des mathématiques attribue la paternité de cette conception de l'algèbre comme langage du raisonnement symbolique, qu'il présente en 1833 dans son *Report on the Recent Progress and Actual State of Certain Branches of Analysis*. A Babbage et Peacock, qui forment la première génération de ce groupe de mathématiciens, il faut adjoindre J.F.W. Herschel, le fils de l'astronome William Herschel auquel on doit la découverte d'Uranus en 1781. Après des débuts prometteurs en mathématiques, John se consacrera lui aussi à l'astronomie : il établira en particulier, depuis le Cap de Bonne Espérance où il séjournera de 1833 à 1838, la carte stellaire de l'hémisphère sud.

Babbage, Herschel et Peacock sont au coeur de ce qui deviendra le "network de Cambridge"[4]. Ce réseau intellectuel ouvert aux idées libérales oeuvre à l'édification d'une conception unificatrice de la science et de l'enseignement, afin de combler le fossé qui s'est creusé entre d'un côté, les deux Universités anglaises, Oxford et Cambridge, toutes deux branches de l'Eglise Anglicane, et de l'autre, les nouvelles pratiques inventives issues de la Révolution Industrielle (1760-1830). C'est donc animés d'une volonté proprement politique de réforme qui Babbage, Herschel et Peacock veulent imposer à Cambridge une nouvelle conception des mathématiques. Et c'est bien parce qu'ils mènent de front cette réflexion sur la restructuration des enseignements et sur le rôle du symbolisme dans l'invention en mathématiques que leur conception de l'analyse algébrique est structurée par une conception générale du calcul formel plutôt que vers celle qu'induit le travail de A.L. Cauchy (1789-57) dès 1821, fondé sur la notion de limite.

I. L'enseignement des mathématiques à Cambridge au début du siècle

Dès 1802 s'engage dans le pays un vaste débat sur le rôle des Universités et sur la nature des savoirs fondamentaux qu'elles ont à dispenser pour que les classes gouvernantes soient à même de maîtriser les contradictions d'un pays qui passe en quelques décennies, d'une économie essentiellement rurale à une géographie où les ponts, les chemins de fer, les bateaux, les machines-outils affirment partout la naissance d'un pouvoir nouveau, où la production technique apparaît comme fondamentale Dans cette visée réformatrice pointe d'ailleurs un certain nationalisme : une Angleterre dominante sur le plan industriel et militaire ne saurait être en reste dans le domaine scientifique, et les Universités anglaises, où l'enseignement est alors en déclin, souffrent de la comparaison avec les institutions nouvelles dont s'est dotée la France depuis la Révolution.

1. Les paradoxes d'un tel enseignement

Les Universités Anglaises, dont les statuts demeurent inchangés depuis 1570, sont conçues comme *seminaries of sound learning and religious education*, destinées essentiellement à la formation du clergé et à celle des classes gouvernantes traditionnelles. En 1841, Peacock estime qu'au moins la moitié des étudiants de Cambridge entrent dans les Ordres, et ce sera encore le cas du tiers d'entre eux[5] de 1850 à 1900. De fait, tant à Oxford qu'à Cambridge s'est imposé le conservatisme des Collèges, qui contrôlent à l'extérieur de vastes réseaux de patronages ecclésiastiques. A l'intérieur, ils dominent l'institution universitaire - où les *Heads of Houses* ont droit de veto sur toute décision du *Caput* - ainsi qu'une société extrêmement hiérarchisée d'étudiants aux statuts différents : *noblemen, fellow-commoners, pensioners, sizars*. Et surtout, ils gouvernent l'enseignement en choisissant les *lecturers* et les *tutors* parmi leurs *fellows*, d'autant plus qu'à l'université, les professeurs enseignent peu[6]. Celle-ci reste seulement garante de l'examen écrit, le *Senate House Examination* ou *Mathematical Tripos* [7],

---

[4] Cannon, W., 1964.

[5] Jenkins, J., & Jones, D.C., 1950.

[6] Elus ou nommés à vie, ils sont nombreux à considérer leur chaire comme une distinction plutôt que comme une charge. Leur rétribution, fixée par donation ou par charte, étant insuffisante, ils la complètent, très souvent par une cure ecclésiastique, qui les maintient hors de l'Université.

[7] Il s'appellera ainsi à partir de 1824, au moment où la création d'un *Classical Tripos* facultatif viendra le compléter.

fondé sur les mathématiques, dont la pratique s'est imposée au milieu du 18ème siècle, malgré l'absence de statut correspondant[8]. Pour les étudiants préalabement classés dans la liste des*wranglers*, c'est un examen hautement compétitif, qui servira de modèle lors de la création des autres *Tripos*, mais qui signe davantage l'accès aux privilèges afférents à la distinction qu'il représente au sein de l'Université, qu'à une carrière de recherche dont le choix est laissé à l'initiative personnelle[9]. En 1802, questions de cours (11 heures) et problèmes (7 heures), rédigés en anglais, portent sur l'arithmétique, l'algèbre, la doctrine des fluxions, la géométrie, la trigonométrie, l'hydrostatique, l'optique et l'astronomie. Jusqu'en 1839 perdurent aussi dans les Collèges un examen préalable en latin, les *disputationes* ou*viva voce examination* , survivance de la tradition scolastique, où les étudiants ont à soutenir et opposer leurs arguments sous la forme du syllogisme, sur des questions telles que "la doctrine de l'éternité de la faute est-elle inconsistante avec la doctrine de l'omnipotence de Dieu?", ou "la méthode de Newton des "raisons premières et ultimes" est-elle correcte?"[10]. A. de Morgan, 4ème *wrangler* en 1827, s'en souvient en ces termes : *"The real disputations were very severe exercises. I was badgered for two hours with arguments given and answered in Latin - or what we called Latin - against Newton's first section, Lagrange's Derived Functions, and Locke on Innate Principles. And though I took off everything, and was pronounced by the Moderator to have disputed magno honore, I never had such a strain of thought in my life."* [11]

Le *Bachelor of Arts degree* ne correspond donc pas à un contrôle des connaissances qui soit strictement le même pour tous. Plus essentiellement peut-être, les trois années d'études et de résidence obligatoire au Collège ont à garantir tout autant une formation morale et religieuse, et le diplôme n'est finalement attribué qu'à l'issue d'une cérémonie qui tient du rite, où chaque diplômé doit prononcer un serment d'allégeance à l'Eglise Anglicane[12]. Une telle cérémonie se reproduit d'ailleurs à tous les échelons de la vie universitaire, réalisant ainsi, face à toute perspective de réforme, une sorte de verrouillage idéologique obtenu par auto-culpabilisation des membres de la communauté[13]. Babbage et de Morgan s'inscrivent contre cette tradition où certitude du savoir et stabilité de l'institution se réfèrent à des valeurs dont la contestation est désormais possible : le premier s'inscrit en 1814 pour un*ordinary degree*, et non pour les *mathematical honours*, le second refuse en 1827 le serment d'allégeance à l'Eglise Anglicane.

De fait, les mathématiques enseignées à Cambridge restent attachées à une conception du savoir qui n'est pas celle d'une science autonome, mais celle d'une connaissance de l'organisation d'un monde créé une fois pour toutes. Perçues comme principes de la philosophie naturelle, elles participent d'un mode d'appréhension des connaissances qui se réfère à la théologie naturelle développée par W. Paley (1743-1805) au tournant du siècle, selon laquelle les acquis de la connaissance rationnelle confirment la religion révélée. Dans un tel système de référence, où l'homologie permet à la notion d'harmonie de légitimer l'immuabilité d'un ordre universel voulu par Dieu, les mathématiques sont au coeur de la représentation d'un monde hiérarchique

---

8 Gascoigne, 1989.

9 Pour les autres étudiants, préalablement classés comme *senior optimes*, *junior optimes*, ou *pollmen*, l'examen ressemble davantage à une formalité, tout comme leur séjour à Cambridge, essentiellement consacré à nouer des relations précieuses pour l'avenir. En 1802, le programme de l'examen des *pollmen* porte sur les deux premiers livres des *Eléments* d'Euclide, l'arithmétique des fractions, l'algèbre éléementaire, l'*Essay on the Human Understanding* de Locke, et les *Evidences of Christianity* de W. Paley.

10 Rouse Ball, W.W., 1889, 183.

11 "Les véritables "disputations" étaient des exercices très sévères. Je fus harcelé pendant deux heures avec des arguments donnés et contrés en latin - ou ce que nous appelons latin - sur la première section de Newton, les fonctions dérivées de Lagrange, et les principes innés de Locke. Et bien que j'aie tout surmonté, et que le *moderator* aie déclaré que j'avais disputé *magno honore*, je n'ai jamais eu une telle tension d'esprit dans ma vie". Traduction personnelle, comme toutes celles de cet article. De Morgan, A., 1915, 305.

12 Winstanley, D.A., 1935, 197-202, 302-13.

13 Branche de l'Eglise Anglicane, Cambridge et Oxford excluent les dissidents, non plus de l'université, où ils peuvent s'inscrire depuis peu, mais d'une qualification reconnue. J.J. Sylvester, d'origine juive, devra ainsi renoncer au diplôme de l'université de Cambridge en 1837, et obtiendra celui de Dublin en 1841. La création de l'Université de Londres en 1828, soutenue par la dissidence, la bourgeoisie, et les utilitaristes, s'inscrit dans le refus de pérenniser de telles pratiques.

et prédéterminé, que menace toute tentative de réforme. Il est alors cohérent que ce soit sous forme géométrico-euclidienne qu'elles se trouvent intégrées au cursus classique, dans la mesure où la rigueur logique de la géométrie euclidienne est plus proche de la syllogistique que l'opérativité encore mal fondée du calcul algébrico-analytique. Parce qu'elles constituent à Cambridge l'essentiel des examens, donc de l'enseignement, elles appartiennent au même cadre de référence que les structures qui servent à légitimer la permanence spirituelle et temporelle du pouvoir, fondées sur la fidélité au savoir des Anciens. Lorsque W. Whewell (1794-1866), philosophe et mathématicien, entreprendra sa défense des Collèges contre l'Université en 1836, il explicitera clairement cette volonté de maintenir un enseignement géométrique des mathématiques élémentaires qu'il identifiera à une représentation de la permanence du monde.

2. Les enjeux

The Edinburgh Review, créé en 1802, soutenu par les Whigs, est au coeur d'un vaste mouvement de contestation contre l'ordre établi[14]. En 1808, J. Playfair (1748-1819) inaugure la critique de l'enseignement dans les Universités anglaises, en arguant du fait que la fidélité à la logique scolastique exclut le recours à l'expérience et à l'observation, tout comme la curiosité ou l'esprit d'innovation, c'est-à-dire toute démarche expérimentale. Les critiques du *Edinburgh Review* s'appuient sur la philosophie utilitariste, si prégnante en Angleterre au début du 19ème siècle, et portée par les oeuvres de J. Locke (1632-1704), de W. Paley, de J. Bentham (1748-1832) et de James Mill (1773-1836), dont les mathématiciens de l'Ecole Algébrique Anglaise se démarqueront en affirmant le caractère essentiel, voire "naturellement" fondé, du symbolisme algébrique[15]. Playfair affirme : *"What is the main object of most branches of human knowledge, if it be not to minister the bodily wants of man? What is the utility of mathematics, but as they are brought to bear upon navigation, astronomy, mechanics, and so upon bodily wants? What is the object of medecine? what of anatomy? Why greater purposes have law and politics in view, but to consult our bodily wants - to protect those who minister them - and to arrange the conflicting interests and pretentions which these wants occasion? Here is an exact instance of the mischief of verbal studies. One of the greatest objects of human wisdom .. is to turn the properties of matter to the use of man. ... .What was said about the dictates of Aristotle, was not meant to his Physics, but of his Logic and his Metaphysics ... The logic of Aristotle is particularly hostile to inductive sciences. By turning the mind to the syllogistic method, it becomes a very powerful obstruction to that knowledge which is derived, by induction, from experience and observation."* [16]
Mais si la critique est véhémente, et s'adresse tout autant à l'Eglise qu'à l'Etat, en raison même de la fonction première des Universités d'Oxford et de Cambridge, elle ne conteste ni la légitimité du pouvoir spirituel, ni celle du pouvoir temporel : *"We have no doubt of the truth of the one (our religion) or of the excellence of the other (our government) and are convinced*

---

[14] Ponteil, XV, 66.

[15] Dans les années 1820, Peacock, en tant que "tutor" au Trinity College de Cambridge, compte J.M. Kemble et W.D. Conybeare parmi ses étudiants les plus proches, et tous deux sont membres du groupe des *Apostles*, célèbres à Trinity College pour leurs critiques de la théologie de Paley et de l'utilitarisme benthamien, et qui se retrouveront nombreux dans le *Broad Church Movement*. Le *Discourse on the Studies of the University* (1835) de Sedgwick est également destiné à démarquer l'enseignement universitaire à Cambridge des éléments de la philosophie de Locke qui ont pu inspirer l'utilitarisme. Durand,1985, 37-39, 291-98, 305-14.

[16] "Quel est le principal objet de la plupart des branches de la connaissance humaine, si ce n'est d'administrer les besoins matériels de l'homme? Quelle est l'utilité des mathématiques, si ce n'est qu'elles sont amenées à porter sur la navigation, l'astronomie, la mécanique, et donc sur les besoins matériels? Quel est l'objet de la médecine? celui de l'anatomie? Quels plus grands projets peuvent avoir la loi et la politique, que de pourvoir à nos besoins matériels - de protéger ceux qui les administrent - et de concilier les intérêts et les prétentions conflictuelles que ces besoins engendrent? L'un des plus grands objets de la sagesse humaine ... est d'utiliser les propriétés de la matière pour l'usage de l'homme"
"Ce qui a été dit des diktats d'Aristote ne s'adressait pas à sa Physique, mais à sa Logique et à sa Métaphysique... La logique d'Aristote est particulièrement hostile aux sciences inductives. En accoutumant l'esprit à la méthode syllogistique, elle devient une obstruction très puissante à cette connaissance qui est obtenue, par induction, à partir de l'observation et de l'expérience". Playfair, Anonyme, 1810, 161, 185.

that both will be placed on a firmer basis, in proportion as the minds of men are more trained to the investigation of truth". [17]

Lorsque Playfair ouvre le débat, c'est pour stigmatiser l'ignorance qu'ont ses compatriotes de la *Mécanique Céleste* de Laplace. Il y insiste massivement sur le fait que la théorie laplacienne confirme totalement la mécanique newtonienne, et argumente pour établir que, loin de constituer une menace pour la religion, elle confirme non seulement l'existence d'un Dessein initial, celui du Créateur, mais la doctrine des causes finales héritée d'Aristote[18]. D'où que s'énoncent les controverses sur la Réforme de l'Université, est affirmée la primauté nécessaire d'une préservation de la permanence qui est cependant investie de valeurs différentes selon les tendances qui s'affrontent.

Face à cette affirmation d'une stabilité nécessaire, se manifeste dans tout le pays, surtout autour des nouveaux centres industriels, un dynamisme et un intérêt pour la science marqué des valeurs de l'utilitarisme. Il existe en Angleterre une culture mathématique développée pendant tout le 18ème siècle par les *Philomaths* [19], dans des journaux destinés à un public non-académique[20], comme le *Ladies Diary* et le *Mathematical Repository,* ainsi que dans les académies dissidentes[21], ou dans les écoles de commerce et de navigation, comme à Newcastle on Tyne, Whitehaven, Durham ou Sanderland[22] : une part conséquente de l'enseignement y est accordée au calcul algébrique. De très nombreuses sociétés provinciales voient également le jour, dont la vitalité manifeste un décalage flagrant entre une aristocratie terrienne fidèle à la culture du 18ème siècle, où la science fait partie des loisirs du gentleman amateur, et les nouvelles élites provinciales - marchands, propriétaires de manufactures, capitalistes, ingénieurs, nouveaux juristes et médecins - en quête d'une légitimation culturelle de leur pouvoir naissant. Parce qu'ils sont conscients que l'inadaptation de l'Université ajoute aux menaces d'explosion sociale qui secouent alors le pays, les scientifiques les plus libéraux vont œuvrer à la recherche d'un nouvel équilibre permettant de dépasser les oppositions entre les "learned men", tenants d'une érudition classique traditionnelle, et les nouveaux "practical men"[23].

II. La *Société Analytique* et le renouvellement du statut de la science

En introduisant à Cambridge la notation leibnizienne dy/dx pour le calcul différentiel, en lieu et place de la notation fluxionnaire y• qui s'y était imposée depuis Newton, Babbage, Herschel et Peacock réalisent un acte de réconciliation fondamental entre les mathématiques enseignées à Cambridge et celles pratiquées sur le Continent. Un tel acte intervient après un manque de communication mathématique vieux de près d'un siècle, régulièrement attribué à la querelle de priorité qui avait si violemment opposé Newton et Leibniz au sujet de l'invention du Calcul Infinitésimal, mais qui s'enracine à l'évidence dans la sclérose des Universités anglaises[24].

---

[17] "Nous n'avons aucun doute sur la vérité de l'une (notre religion) ou l'excellence de l'autre (notre gouvernement), et nous sommes convaincus qu'ils seront tous deux placés sur une base plus ferme, dès lors que l'esprit des hommes sera plus exercé à la recherche de la vérité". Ibid., 179-80.

[18] Playfair, 1808, 278-79.

[19] Pedersen, 1963.

[20] Des exercices de mathématiques paraissent régulièrement dans le *Ladies Diary* (1704-1840), dont Thomas Simpson et Charles Hutton, tous deux professeurs au *Royal Military College* de Woolwich, seront successivement éditeurs, ainsi que dans le *Mathematical Repository* (1770-1840) de Thomas Leybourne, où les étudiants de Cambridge eux-mêmes étudient certains problèmes en vue de la préparation de leur examen. Fauvel, Ransom, Wallis, 1991, 8-9; & Panteki, 1987, 125.

[21] Rogers, L., in Bos & Mehrtens & Schneider, 1981.

[22] Fauvel, Ransom, Wallis, 1991, 16-19 & 27-32.

[23] Ces interrogations relatives à la nature des fondements de la connaissance, qui conduisent à envisager une restructuration des mathématiques à Cambridge, conduiront de même à envisager une restructuration de la logique, qui s'exprime d'abord dans le mouvement que W. Hamilton - à ne pas confondre avec l'inventeur des quaternions - a appelé la "nouvelle analytique", avant d'aboutir à la mathématisation par Boole des lois de la pensée. Diagne, 1989; Durand-Richard, 1994a et 1994b.

[24] Le phénomène est de fait beaucoup moins sensible à Dublin ou à Edinbourg.

1. Les initiatives de *The Analytical Society*

L'acte fondateur de l'Ecole Algébrique Anglaise ressemble fort à une provocation d'étudiants. En 1812, E. Bromhead, C. Babbage, et quelques amis s'inspirent des querelles entre Siméonistes, relatives à une diffusion avec ou sans commentaire de la Bible, pour créer *The Analytical Society* afin de diffuser sans commentaire la notation "d" du calcul différentiel! Mais au-delà de l'enthousiasme et de la contestation, l'unique volume des *Memoirs of the Analytical Society* , publié en 1813, formule déjà, dans une longue préface très érudite, leur futur programme de recherche : développer une conception des mathématiques fondée sur l'analyse - démarche qui est la mieux à même de théoriser les pratiques inventives - et mettre en avant les méthodes permettant d'unifier la résolution des différents types d'équations : fonctionnelles, différentielles, ou aux différences finies. Leur intérêt pour les mathématiques continentales se soutient d'une volonté politique tout à fait manifeste dans l'épreuve de force qu'ils engagent pour en hâter l'adoption. Babbage, Herschel et Peacock traduisent en 1816 le *Traité Elémentaire de Calcul Différentiel et Intégral* de S.F. Lacroix (1765-1843). Les tuteurs privés y forment d'autant plus intensément leurs étudiants que Peacock, *moderator* au *Senate House Examination* en 1817, 1819, 1821, pose systématiquement ses questions dans la notation différentielle. L'entreprise est complétée en 1820 par la parution simultanée de trois volumes d'exemples, destinés à illustrer l'utilisation de la théorie du Calcul Différentiel et Intégral par une multitude d'exercices et de résultats : les *Examples of the Functional Equations* de Babbage, les *Examples on the Calculus of the Finite Differences* de Herschel, et surtout les *Examples on the Calculus of the Applications of the Differential and Integral Calculus* de Peacock[25].

Peacock, *fellow* et tuteur de *Trinity College* de 1817 à 1836, *Lowndean Professor* jusqu'en 1839, avant d'être nommé doyen de la cathédrale d'Ely par Melbourne, consacre toute sa ténacité à inscrire dans les faits sa volonté sans cesse réaffirmée de réformer l'université : "*I assure you, my dear Herschel, that I shall never cease to exert myself to the utmost in the cause of reform, and that I will never decline any office which may increase my power to effect it. I am nearly certain of being nominated to the office of Moderator in the year 1818-19, and as I am an examiner in virtue of my office, for the next year, I shall pursue even more decided than hitherto, since I shall feel men have been prepared for the change, and will then be enabled to have acquired a better system by the publication of improved elementary books. I have considerable influence as a lecturer, and I will not neglect it. It is by silent perseverance only that we can hope to reduce the many-headed monster of prejudice, and make the University answer her character as the loving mother of good learning and science*" [26]. Mathématicien whig anglican de l'Université de Cambridge, c'est avec une ténacité et une diplomatie quasi légendaires qu'il inscrit délibérément son action institutionnelle et sa pensée mathématique dans l'histoire de la professionnalisation de l'Université et de la laïcisation de ses statuts.

2. Réforme de l'Université et institutionnalisation de la science

Faute de disposer de l'autorité suffisante pour s'attaquer directement à la réforme de l'université, Peacock participe activement à la création des structures permettant d'exprimer une conception renouvelée du savoir, qui intègre préoccupations symboliques et visées utilitaristes :

---

25 Whewell s'associe un court moment à leur entreprise. Il publie en 1819 un traité de Mécanique faisant un usaage exclusif de la notation différentielle.

26 "Je vous assure, mon cher Herschel, que je ne cesserai jamais de me consacrer le plus possible à la cause de la réforme, et que je ne déclinerai aucun rôle qui puisse me permettre d'accroître mon pouvoir de le faire. Je suis presque certain d'être nommé au poste de *Moderator* pour l'année 1818-19, et puisque je suis du même coup examinateur pour la prochaine année, je poursuivrai avec encore plus de détermination, parce que je sens que les hommes sont prêts au changement, et qu'ils ont pu acquérir une meilleure préparation grâce à la publication de meilleurs manuels. J'ai une influence considérable en tant que *lecturer*, et je ne la négligerai pas. C'est seulement par la persévérance silencieuse que nous pouvons espérer réduire l'hydre de la prévention, et conduire l'université à répondre à sa vocation de mère protectrice du vrai savoir et de la science". Royal Society Library : Herschel Papers, Hs.13.249, lettre de Peacock à Herschel du 17.03.1817.

la *Cambridge Philosophical Society*[27] en 1819, l'*Observatoire* entre 1816 et 1823, la *Pitt Press* (1831-32) et le *Fitzwilliam Museum* (1830-35), ainsi que l'extension de la bibliothèque et des locaux universitaires (1829-42). Dans ses *Observations on the Statutes of the University of Cambridge* (1841), où il confronte l'histoire des textes aux pratiques effectives, il établit une séparation radicale entre les institutions qui, au sein de l'université, doivent en symboliser la permanence, et celles qui doivent s'adpater à l'évolution des connaissances. L'ouvrage joue un rôle essentiel de catalyseur vers la Réforme des Universités Anglicanes, qui prend place dans les années 1850. Peacock est un des cinq membres de la Commission Royale d'Enquête[28] nommée à Cambridge pour l'impulser, et appartient à la Commission Exécutive qui, de 1855 à 1859, est chargée de vaincre les résistances des Collèges d'Oxford et de Cambridge à la Réforme votée en 1855 et 1856. Si les serments d'allégeance à l'Eglise Anglicane y sont supprimés pour tous les examens sauf en théologie, les membres du *Senate* et les titulaires d'une fonction universitaire doivent toujours se déclarer "bona fide" vis-à-vis de l'Eglise Anglicane[29]. Le Mathematical Tripos est séparé en 1848 entre un examen élémentaire obligatoire pour tous, avec la possibilité de soutenir ensuite un *Classical Tripos*, un *Moral Tripos*, un *Natural Sciences Tripos*, ou un *Mathematical Honors*. Et un *Board of Mathematics* est créé la même année, chargé d'assurer la corrélation nécessaire entre les cours et les sujets d'examen.

Babbage, plus radical que Peacock, mais aussi plus immédiatement reconnu socialement et intellectuellement, conduit ces projets de réforme à partir de Londres. Il crée la *Royal Astronomical Society* en 1820, et publie en 1830 une très virulente critique de la *Royal Society*, qu'il rend responsable du déclin de la science en Angleterre, parce que son fonctionnement persiste à refléter le statut de gentleman-amateur de l'homme de science[30]. Babbage en appelle à la nécessité pour cette nation "d'économistes et de calculateurs", d'établir une collaboration plus étroite entre science, industrie et pouvoir. Après l'échec que subit le network de Cambridge à tenter d'installer Herschel à la présidence de la Royal Society en1830, c'est au sein de la *British Association for the Advancement of Science*, créée en 1831, que s'élabore une conception unificatrice de la science, contribuant à l'unité idéologique de la bourgeoisie montante et de l'aristocratie au pouvoir : une science qui susceptible d'intégrer toute démarche inventive dès lors qu'elle peut être quantifiée et légitimée par les sciences déductives. A l'occasion des congrès annuels, ses membres, qualifiés désormais de *scientists* [31],parcourent le pays, des villes universitaires aux centres industriels, et la communauté ainsi formée intervient aussi bien à propos des grandes questions traditionnelles de la science[32] que de celles qui concernent l'industrialisation du pays[33]. Pendant ses 20 premières années d'existence, la *British Association* est contrôlée par un noyau stable d'une vingtaine de membres, que Morrell et Thackray appellent les *Gentlemen of Science* [34], où se retrouvent Babbage, Herschel, Peacock, et bon nombre des éléments du *network* de Cambridge.

---

27 Babbage y publiera plusieurs articles, entre 1820 et 1830, sur le rôle de la notation mathématique. De Morgan y prolongera les travaux de Peacock sur l'Algèbre symbolique.

28 La Commission Royale d'Enquête est composée de Peacock, Herschel, du naturaliste libéral Sedgwick, de son collègue Romilly, secrétaire général de l'Université de Cambridge, ainsi que de Lord Graham, évêque de Chester. Tillyard, p. 105.

29 Cette abolition des "tests" religieux avait fait l'objet d'une pétition adressée au Parlement en 1834, et signée par 64 membres de l'Université de Cambridge, dont Peacock et Babbage. Elle fut soutenue par W. Hamilton. La fin de toutes les restrictions religieuses dans les statuts de l'Université, en partsiculier l'ouverture aux non-anglicans des *fellowships* dans les Colleges et des *Professorships* à l'Université, attendra 1871.

30 Babbage, 1830, *Works*, 7.

31 C'est en 1833 à Cambridge que Whewell, qui préside le 3ème Congrès de l'Association, forge ce terme pour désigner les participants à cette espèce "d'église nationale de l'intellect", telle que la définit S.T. Coleridge. Morrell & Thackray, 2-34, p. 256-75.

32 Les débats sur la nature de la lumière, auxquels Peacock, biographe de Young, s'intéresse de près, en sont un exemple.

33 Les débats sur l'installation du chemin de fer, auxquels Babbage participe activement, en sont un autre exemple.

34 Ils sont quasiment tous de confession anglicane, politiquement proches des Whigs et des anglicans libéraux du *Broad Church Movement*, et constituent un groupe socialement intermédiaire entre les classes qu'il s'agit de réconcilier du côté du pouvoir. Morrell & Thackray, p. 21-9.

En Angleterre, la première moitié du 19ème siècle est donc marquée par une transformation du statut de la science, tant sur le plan conceptuel qu'institutionnel, transformation dans laquelle la première génération des mathématiciens de l'Ecole Algébrique Anglaise intervient très systématiquement. Et le sens d'un tel engagement - la recherche des structures ontologiquement légitimes garantissant la permanence d'un ordre qui demeure conçu comme universel - n'est pas dépourvu d'effet sur leur conception des mathématiques.

III. L'analyse algébrique à Cambridge : une algèbre de l'infini.

L'importance des interventions de l'Ecole Algébrique Angiaise dans le processus d'institutionnalisation et de laïcisation de la science ne saurait être dissociée du fait que ces mathématiciens n'ont rien renier de leur anglicanisme. Leur engagement reste partie prenante d'une conception théologique de la permanence du monde, conçue comme un ordre universel, où les mathématiques persistent, comme chez Newton, à servir de principes. Le développement des sciences au début du 19ème siècle suppose que ces principes ne régissent plus seulement les lois du mouvement, mais l'ensemble des lois opératoires que l'analyse mathématique est susceptible d'exprimer. C'est en ce sens que Peacock se livre à un travail de reformulation des résultats de l'analyse algébrique à partir de considérations philologiques issues de l'*Essay on Human Understanding* de Locke. Une telle perspective conduit à réinterroger le rapport entre discours mathématique et réalité. C'est par le biais d'une analyse des relations entre le mot, l'idée et la chose[35] que Peacock tente d'imposer comme structurelles les propriétés d'opérations fonctionnant sur des symboles, des symboles conçus comme arbitraires dans la mesure où ils ne possèdent pas de lien nécessaire à la chose désignée.

1. Les pistes ouvertes par Woodhouse

Professeur à Cambridge de 1820 à 1827, Woodhouse ne saurait être directement rattaché à l'Ecole Algébrique Anglaise dans la mesure où il n'intervient pas pour imposer institutionnellement la notation différentielle. Il est pourtant le premier à y publier ouvrages et manuels utilisant les méthodes continentales, et à proclamer l'indépendance des méthodes algébriques à l'égard du raisonnement géométrique. Il prépare la rupture épistémologique que l'Ecole Algébrique Anglaise mènera à son terme sur le plan sociologique et conceptuel.
Parce que les mathématiques sont conçues comme fondement de la connaissance, l'assimilation de l'analyse algébrique suppose que soient résolus les nombreux paradoxes liés à l'utilisation des séries infinies, et à l'extension aux variables complexes de résultats obtenus dans le domaine réel. Pour qu'une méthode perçue comme heuristique soit reconnue comme démonstrative, il faut également que lui soit transférée la conviction de vérité ou de certitude absolue attachée jusqu'ici à la géométrie. Woodhouse rappelle, pour mieux s'en démarquer, la position des détracteurs du caractère instrumental de l'algèbre, dont il est fait usage dans les institutions moins soucieuses du caractère fondamental de la connaissance (écoles militaires, écoles de commerce et de navigation), et indique du même coup sa propre perspective de travail :"*The arguments that seem to render all operations performed with impossible quantities unintelligible may be included under the following statement. Algebra is a species of short-hand-writing, a language, or system of characters or signs, invented for the prupose of facilitating the comparison and combination of ideas. Now all demonstration by signs, must ultimately rest on observations made on individual objects; and all the varieties of the transformation and combination of signs, except what are arbitrary and conventional, must be regulated by properties observed to belong to the things of which the signs are the representatives. Demonstration by signs is shewn to be true, by referring to the individual things the signs represent; and is shewn to be general, by remarking that the operation is the same, whatever is the thing signified, or, in other words, that the operation is independant of the things signified*""[36].

---

[35] ou en termes plus modernes, entre signifiant, signifié et référence.

[36] "Les arguments qui semblent rendre inintelligibles toutes les opérations effectuées avec des quantités impossibles, peuvent être contenues dans l'affirmation suivante. L'Algèbre est une espèce d'écriture abrégée, un langage, ou un système de caractères ou de signes, inventés dans le but de faciliter la comparaison et la combinaison des idées. De fait, toute démonstration effectuée sur des signes doit fianlement reposer sur des observations faites sur des objets

Ce principe philosophique le conduit à fonder l'exactitude des résultats et l'efficacité des méthodes de l'analyse algébrique sur l'existence d'une logique propre aux opérations elles-mêmes, qu'il présuppose à partir de résultats obtenus inductivement dans la pratique algébrique. De fait, cette hypothèse masque le recours à l'usage heuristique de l'analogie dont il est ici fait usage mais entre opérations sur les quantités possibles et opérations sur les quantités impossibles. Ainsi affirme-t-il pouvoir attacher une signification (*meaning*) aux symboles x et + et prouver que (a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd, si a, b, c, d sont réels, en leur attribuant un sens qui puisse être contrôlé à chaque étape de la démonstration. Ce qui n'est pas possible pour $(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})$, dont il peut seulement être affirmé que, c'est que si on combine ces signes de la même manière que les réels, on obtient $ac+ad\sqrt{-1}+bc\sqrt{-1}-bd$. De même,

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 = x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3}\sqrt{-1} + ...$$

signifie seulement que $e^{x\sqrt{-1}}$ doit être compris comme un symbole abrégé pour écrire le membre de droite, calculé selon la méthode de Lagrange appliquant le théorème du binôme à $((1 + (e-1))^n)^{\frac{x}{n}}$. Dans cette équivalence, les deux membres ne sont signifiants que du point de vue symbolique, opératoire[37].

Ainsi Woodhouse parie-t-il sur la nature essentiellement rationnelle des opérations de l'esprit en revendiquant comme gage de rationalité le caractère artificiel de ces inventions que sont les symboles. C'est une telle conviction qui sous-tend sa définition de la démonstration, déjà présente chez Locke : ""*I (am) convinced in my own mind, that there can be neither paradoxes nor mysteries inherent and inexplicable in a system of characters of our own invention, and combined according to rules, the origin and extent of which we can precisely ascertain...Demonstration would be defined to be a method of showing the agreement of remote ideas by a train of intermediate ideas, each agreeing with that next it; or, in other words, a method of tracing the connection between certain principles and a conclusion, by a series of intermediate and identical propositions, each proposition being converted into its next, by changing the combination of signs that represent it, into another shewn to be equivalent to it*".[38]

Et il l'exprime avec tant de force que cette conviction peut légitimement être considérée comme le cadre général du programme de recherche que développera l'Ecole Algébrique Anglaise. "*Algebra is a universal language ... That the science of geometry was first invented is properly an accidental circumstance*" .[39]

L'algèbre ainsi conçue par Woodhouse transfère la légitimité des résultats de sa traditionnelle référence à la réalité représentée à une référence à la cohérence interne du discours. La radicalité de ce point de vue conceptuel débouche sur l'énonciation d'idées qui deviendront principielles

---

particuliers; et toutes les variétés de transformation et de combinaison des signes, sauf ceux qui sont arbitraires et conventionnels, doivent être régies par les propriétés dont on a observé qu'elles appartenaient aux choses dont les signes sont les représentants. On montre que les démonstrations faites sur des signes sont vraies, en se référant aux choses individuelles que ces signes représentent; et qu'elles sont générales, en remarquant que l'opération est la même, quelle que soit la chose signifiée, ou, en d'autres termes, que l'opération est indépendante des choses signifiées". Woodhouse, 1801, 90.

37 Cette définition de l'exponentielle d'une quantité imaginaire par son développement en série conduit au traitement spécifiquement formel de la trigonométrie, qu'il reprendra en 1809 dans son ouvrage *The Plane and Spherical Trigonometry*..

38 "Je (suis) convaincu pour ma part, qu'il ne peut y avoir ni paradoxes ni mystères intrinsèques et inexplicables dans un système de caractères de notre propre invention, et combinés selon des règles dont nous pouvons préciser l'origine et la validité...La démonstration devrait être définie comme une méthode consistant à montrer la cohérence d'idées éloignées par une suite d'idées intermédiaires, chacune s'accordant avec la suivante; autrement dit, une méthode consistant à tracer le lien entre certains principes et une conclusion, par une suite de propositions intermédiaires et identiques, chaque proposition étant convertie en la suivante, en changeant la combinaison des signes qui la représente, en une autre dont on montre ainsi qu'elle lui est équivalente". Woodhouse, 1801, 93.

39 "*L'Algèbre est un langage universel ... Que la science de la géométrie ait été inventée la première est en tout état de cause une circonstance accidentelle*" . Woodhouse, 1802, 87-89.

chez Peacock : principe de permanence des formes algébriques traduisant l'universalité des lois opératoires, dissociation entre égalité numérique - contingente - et égalité opératoire ou symbolique - nécessaire -, existence formelle des séries, subordination du fini à l'infini[40]. Le caractère de vérité absolue des mathématiques change de camp : il n'est plus attribué à la géométrie, mais à cette algèbre de l'infini en voie de légitimation, qui a si bien su rendre compte de cette loi universelle qu'est la loi newtonienne de gravitation qu'elle peut légitimement se substituer au calcul infinitésimal comme mathématiques fondamentales[41].

2. Le programme de recherche de *The Analytical Society*

En 1813, il n'est plus temps de revenir sur la querelle Newton-Leibniz. Mais, quelle que soit l'importance de la mécanique dans la constitution de l'analyse algébrique, Babbage prend soin de préciser que ses abondantes références aux travaux de Lagrange et Laplace ne se rapportent pas à la dynamique : ""*The admirable review of the* Mécanique Céleste *will still be fresh in the minds of ours readers. But il should be recollected, that the Author of that Essay confines his attention entirely to the subject of Analytical Dynamics; referring to the discoveries in the Integral Calculus merely as connected with that subject, and that too very cursorily.* Our business is exclusively with the pure Analytics"[42].

Comme en témoignent l'extrême formalisme des trois mémoires présentés, l'un par Babbage, les deux autres par Herschel, ainsi que l'historique de l'Analyse que donne cette préface[43], la réflexion de ces jeunes "analystes" est toute entière orientée vers les potentialités offertes par le travail de Laplace sur les fonctions génératrices, conçu comme un calcul exponentiel sur des opérateurs différentiels, et qui reste valide à la fois pour l'analyse finie ou infinitésimale, réelle ou imaginaire[44]. Leur ambition est d'explorer l'ensemble des méthodes générales qui gouvernent la résolution des équations aux différences, des différents types d'équations. Elle est orientée par une conception des opérations qui tend à abandonner le domaine des lois de la nature pour se rapporter de plus en plus aux méthodes du raisonnement mathématique, conçu comme inventif.

"Attentively to observe the operations of the mind in the discovery of new truths, and to retain at the same time those fleeting links, which furnish a momentary connection with distant ideas, the knowledge of whose existence we derive from reason rather than from perception, are the objects in whose pursuit nothing but the most patient assiduity can expect success. Powerful indeed, must be the mind, which can simultaneously carry on two processes, each of which requires the most concentrated attention. Yet these obstacles must be surmounted, before we can hope for the discovery of a philosophical theory of invention; a science which Lord Bacon reported to be wholly deficient two centuries ago, and which has made since that time but slight advances" [45]

---

40 Durand, 1985, p. 107-53.

41 L'argument est essentiel : il est présent chez Playfair en 1808, chez Babbage en 1816, et chez Grainger Hall en 1834. Becher, p. 228; Durand, 1985, p. 124-25.

42 "L'admirable compte-rendu de la Mécanique Céleste doit être encore présent à l'esprit de nos lecteurs. Mais il faut se souvenir que l'Auteur de cet Essai restreint entièrement son travail à la Dynamique Analytique, se référant aux seules découvertes du Calcul Intégral en relation avec ce sujet, et ce de manière succincte. Le nôtre traite exclusivement d'Analyse pure". Babbage, 1813, ii, *Works,* 1, 40.

43 L'extrême érudition de cette préface, rédigée par Babbage et discutée collectivement, témoigne de l'existence chez ces jeunes auteurs d'une culture mathématique acquise hors de l'université. Les travaux de Laplace y sont particulièrement à l'honneur. Anonyme, 1813, xii-xiii, in Babbage, *Works,* 1, 50-51.

44 Grattan-Guinness, 1978, 273-403.

45 "Observer attentivement les opérations de l'esprit dans la découverte de nouvelles vérités, et retenir en même temps ces liens fugitifs, qui fournissent une connection momentanée avec des idées éloignées, dont on déduit la connaissance de leur existence plutôt à partir de la raison que de la perception, sont les objets à la poursuite desquelles on ne peut espérer le succès que grâce à la plus patiente persévérance. Quoi qu'il en soit, l'esprit doit être puissant, qui peut conduire simultanément ces deux processus, dont chacun requiert l'attention la plus soutenue. Cependant, ces obstacles doivent être surmontés, avant que nous puissions espérer la découverte d'une théorie philosophique de l'invention, une science que Lord Bacon considérait comme totalmenet déficiente il y a deux siècles, et qui n'a fait depuis que de légères avancées" . Ibid., xxi, *Works,* 1, 59.

Cette théorisation de l'invention passe par la recherche de la forme la plus générale possible des expressions littérales, par laquelle l'Ecole Algébrique Anglaise tente d'unifier les différents types de calcul : calcul sur les séries, calcul aux différences finies, calcul différentiel, calcul fonctionnel. Les premiers articles de Herschel, portant sur l'extension des notations fonctionnelles et différentielles à des indices quelconques, participent directement de cette ambition[46].

3. L'Algèbre Symbolique de Peacock.

Aussi bien dans son *Traité d'Algèbre* de 1830 que dans son *Report on the Recent Progress and Actual State of certain branches of Analysis,* présenté en 1833 à Cambridge au 3ème congrès de la *British Association for the Advancement of Science,* Peacock systématise les réflexions de *The Analytical Society* en présentant l'Algèbre symbolique, ce "langage du raisonnement symbolique", comme un système de lois de combinaisons, opérant sur des symboles arbitraires, c'est-à-dire généraux dans leur forme comme dans leur valeur, dépourvus de toute référence à quelque représentation que ce soit. De même, la vérité des propositions découle, non pas d'un quelconque critère de réalité, mais de la connexion nécessaire entre les différentes étapes de la démonstration. Ce faisant, Peacock marque radicalement la pensée mathématique de ses successeurs en distinguant fondamentalement :
- le mode d'élaboration de l'algèbre, qu'il appelle algèbre arithmétique, référée au langage ordinaire et au champ numérique, et la structuration de l'algèbre symbolique, définie par des lois opératoires posées comme telles, et dont découlent les égalités algébriques ou formes équivalentes, dont l'identité n'est qu'opératoire;
- le travail du mathématicien, opérant à l'intérieur de ce champ opératoire symbolique, et l'interprétation des résultats obtenus, qui lui reste extérieur.

Cette perspective relève d'une épistémologie génétique inspirée de la philosophie de Locke, et s'oppose à toute présentation axiomatique de l'algèbre. Peacock énonce comme fondamentales les propriétés opératoires issues de la pratique algébrique. C'est à ses successeurs qu'il reviendra de mieux les distinguer, et de pousser l'abstraction plus avant, pour envisager d'autres fonctionnements opératoires possibles. Mais c'est à Peacock qu'il revient d'avoir distinguer entre les propriétés des opérations et leur dénomination traditionnelle, qui est repoussée dans le champ de l'interprétation.
"The operations called addition and substraction are denoted by the signs + and -.They are the inverse of each other. In the concurrence of the signs + and -, in whatever manner used, if two like signs come together, whether + and +, or - and -, they are replaced by the sign +; and when two unlike signs come together, whether + and -, or - and +, they are replaced by the single sign -. When different operations are performed or indicated, it is indifferent in what order they succeed each other.
The operations called multiplication and division are denoted by the signs x and ÷, or more frequently by a conventional position of the quantities or symbols with respect to each other......
The operations of multiplication and division are the inverse of each other.
In the concurrence of the signs + and - in multiplication or division, if two like signs come together, whether + and +, or - and -, they are replaced by the single sign +; and if two unlike signs come together, whether + and -, or - and +, they are replaced by the single sign -.
When different operations succeed each other, it is not indifferent in what order they are taken." [47]

---

46 Herschel, 1813abc, 1814, 1816.

47 "Les opérations appelées addition et soustraction sont notées par les signes + et -. Elles sont inverses l'une de l'autre. Dans la concurrence des signes + et -, quelle que soit la manière de les utiliser, si deux signes semblables sont ensemble, soit + et +, soit - et -, ils sont remplacés par le signe +; et quand deux signes différents sont ensemble, soit + et -, soit - et +, ils sont remplacés par le signe -. Quand différentes opérations sont effectuées ou indiquées, l'ordre dans lequel elles se succèdent est indifférent.
Les opérations de multiplication et de division sont notées par les signes x et ÷, ou plus fréquemment par une position conventionnelle des quantités ou des symboles les uns par rapport les autres....
Les opérations de multiplication et de division sont inverses l'une de l'autre.

Si ce saut conceptuel n'est pas présenté axiomatiquement, il n'est pas présenté arbitrairement. Il est légitimé inductivement par le double énoncé du principe de permanence des formes équivalentes, qui fixe les conditions du transfert des résultats de l'algèbre arithmétique à l'algèbre symbolique : *"(A) : Whatever form is algebraically equivalent to another when expressed in general symbols, must continue to be equivalent, whatever those symbols denote"* *"(B) : Whatever equivalent form is discoverable in arithmetical algebra considered as the science of suggestion, when the symbols are general in their form, though specific in their value, will continue to be an equivalent form when the symbols are general in their nature as well as their form"*. [48]

Dans cette perspective, l'algèbre symbolique n'a recours à l'infini que pour marquer l'itération sans fin d'une opération, ou l'écriture d'une division qui ne s'achève pas. Il s'agit dans les deux cas de l'infini dénombrable. Si Peacock n'ignore pas l'intervention d'une "valeur" infinie dans certains calculs, par exemple dans $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 +$ &c. lorsque x=1, il exclut ce cas de l'algèbre symbolique, qui ne traite que de l'équivalence opératoire des deux membres, et l'interprète comme "signe de l'impossibilité" pour la forme-série $1 + x + x^2 + x^3 +$ &c. d'exprimer la forme-quotient $\frac{1}{1-x}$. Il est avec 0 un signe de transition, indiquant un "changement dans la nature ou dans la forme d'une fonction, quand elle est considérée dans le cours complet de son passage par ses différents états d'existence"[49].

IV. Le refus de la notion de limite.

La séparation radicale que revendique Peacock entre une structuration strictement symbolique des propriétés opératoires et l'interprétation des résultats obtenus n'est pas sans répercussions sur la façons dont s'est trouvée enseignée la notion de limite à l'université.

1. Un choix explicite.

Une telle perspective est déjà présente en 1816, dans les distances que prennent les traducteurs à l'égard de l'exposé de Lacroix. Alors que celui-ci, dans son grand traité en 3 volumes de 1797-99, présentait le calcul différentiel selon la méthode algébrique de Lagrange, supposant que toute fonction admet un développement en série entière, il avait préféré fonder son *Traité Élémentaire* sur la méthode des limites de D'Alembert, mieux à même selon lui de concilier brièveté et exactitude"[50]. Dans leur traduction, Babbage, Peacock et Herschel se doivent de respecter cette option, mais ils déplorent, dans l'Avertissement, l'abandon de la méthode plus correcte et plus naturelle de Lagrange, et donnent une centaine de pages de matière originale qui précise leurs orientations. Herschel écrit un traité sur le calcul des différences et des séries, qui remplace l'appendice de Lacroix, et Peacock rédige 12 des 14 notes dont l'intitulé spécifie très précisément leur démarche.

Dans la note B, Peacock se démarque catégoriquement de la notion de limite, et montre comment l'exposé selon D'Alembert peut être remplacé par l'exposé selon Lagrange, à partir de développement d'une fonction en série de Taylor, en définissant la dérivée ou le coefficient différentiel comme prmier terme de ce développement. S'il reconnait à la méthode newtonienne des premières et dernières raisons, la même valeur démonstrative qu'à la méthode d'exhaustion des Anciens, il veut exclure *a priori* toute référence au mouvement dans l'exposé des premiers

---

Dans la concurrence des signes + et - dans la multiplication ou la division, si deux signes semblables sont ensemble, soit + et +, soit - et -, ils sont remplacés par le même signe +; et si deux signes différents sont ensemble, soit + et -, soit - et +, ils sont remplacés par le seul signe -". Peacock, 1833, 196-97

48 *"(A) : Toute forme qui est algébriquement équivalente à une autre quand elle est exprimée en symboles généraux doit continuer à lui être équivalente, quel que soit ce que ces symboles représentent."*
"(B) : Toute forme qui est découverte en algèbre arithmétique considérée comme science de suggestion, lorsque les symboles sont généraux dans leur forme, bien que spécifiques dans leur valeur, doit continuer à être une forme équivalente quand les symboles sont généraux dans leur nature aussi bien que dans leur forme". Peacock, 1833194.

49 Peacock, 1833, 232.

50 Lacroix, 1810, 1, xxvi.

principes : *"The consideration of motion, which is essential to the method of fluxions, is foreign to the spirit of pure Analysis, and the analogy by which the name and the properties of a fluxion are transfered to a modification of the difference of a function, is strained and unnatural. The different orders of fluxions also are involved in considerable obscurity, and we are utterly unable to comprehend the connexion which they respectively bear to their primitive function.*
In the brievity of its demonstration, and in the facility of its application, it is unquestionnably inferior to all the other methods, and the mixture of mechanical and geometrical considerations upon which it is founded, are little calculated to assist us in investigating the properties of functions which are always algebraical in their form, and generally in their nature so".[51]

Cette volonté d'algébrisation du Calcul Différentiel est guidée par l'idée de produire un calcul simple, rigoureux, et ontologiquement fondé sur l'existence d'une logique propre aux opérations. Elle s'appuie sur les travaux de Lagrange et de Laplace, ainsi que sur la méthode d'Arbogast de séparation des symboles d'opération de ceux des quantités, qui permet d'écrire le théorème de Lagrange, $\Delta u(x) = (e^{d/dt} - 1)u(x)$, auquel Peacock consacre la note E, et que Gregory rebaptisera "forme symbolique du théorème de Taylor". L'écriture finie du théorème s'appuie sur l'analogie opératoire entre le développement d'une fonction en série de Taylor : $u(z+x) = u(z) + \frac{du}{dz}\,x + \frac{d^2u}{dz^2}\frac{x^2}{2!} + \frac{d^3u}{dz^3}\cdot\frac{x^3}{3!} + \&c.$, et la série qui définit l'exponentielle : $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \&c$, où, $\frac{du}{dz}$ est remplacé par du, puis d séparé de u. Le théorème de Lagrange établit ainsi une relation entre opérateur différentiel et différence finie : $\Delta u = (e^{xd} - 1)\,u$, et finalement $\Delta^n u = (e^{xd} - 1)^n u$, dont Peacock attribue ici la possibilité à la notation :

"The differential notation is equally convenient for representing both operations and quantities; its symbols are distinct, and never ambiguous, it is symmetrical in all cases, and it continues equally simple, whatever be the order of the differential, or the nature of the function to which it is applied; whilst that of fluxion is deficient in nearly all the essential particulars which we have just enumerated, and in the representation of many important theorems, it absolutely fails"[52]

Effectivement, seule la notation différentielle permet de manipuler comme naturellement l'analogie entre $\frac{d^n}{dx^n}$ et la puissance $n^{\text{ième}}$ de $\frac{d}{dx}$, analogie qui est systématiquement utilisée dans la méthode de séparation des symboles d'opération et de quantité. Seule cette notation permet donc de développer l'idée d'un calcul portant directement sur les opérations, et qui constitue, aux yeux de ces mathématiciens, la véritable vocation de l'Algèbre comme structure.

2. L'opposition philosophique au point de vue de Cauchy

Cauchy adopte dès les années 1820 un point de vue plus réaliste, distinguant soigneusement l'étude des séries convergentes de celle des séries divergentes, que Peacock refuse systématiquement, aussi bien en s'adressant directement à Cauchy qu'aux analystes qu'il

---

[51] *"La considération du mouvement, qui est essentielle à la méthode des fluxions, est étrangère à l'esprit de l'Analyse pure, et l'analogie par laquelle le nom et les propriétés d'une fluxion sont transférées à une modification de la différence d'une fonction, sont forcées et non naturelles. Les différents ordres de fluxions sont également imprégnées à une obscurité considérable, et nous sommes finalement incapables de comprendre la connection qui les lie respectivement à leur fonction primitive.*
Du point de vue de sa démonstration, et de la facilité de son utilisation, elle est sans nul doute inférieure à toutes les autres méthodes, et le mélange de considérations mécaniques et géométriques sur lesquelles elle est fondée, est peu propice à nous aider dans la recherche des propriétés des fonctions qui sont toujours algébriques dans leur forme et en général aussi d&ans leur nature". Lacroix, 1816, 612.

[52] Lacroix, 1816, p. 613.

estime les plus éminents, comme Abel, Poisson ou Liouville. La distinction qu'il établit entre algèbre arithmétique et algèbre sysmbolique s'articule sur de la recherche systématique de la généralité de l'algèbre, qui est pour Peacock un des caractères essentiels du progrès de la science. La distinction entre séries convergentes et séries divergentes, retour à la multiplicité des cas, lui apparaît comme une régression.

"M. Cauchy, in his Leçons sur le Calcul Infinitésimal (published in 1823), has attempted to conciliate the direct consideration of infinitesimals with the purely algebraical views of the principles of this calculus, which Lagrange first securely established; and it may be very easily conceded that no attempt of this able analyst, however much at variance with ordinary notions or ordinary practice, would fail from want of a sufficient command over all the ressources of analysis. He considers all infinite series as fallacious which are not convergent, and that, consequently, the series of Taylor, when it takes the form of an indefinite series, is not generally true. It is very true that M. Cauchy has perfectly succeeded in dispensing with the consideration of infinite series in the establishment of most of the great principles of the differential and integral calculus; but I should by non means feel disposed to consider his success in overcoming difficulties which such a course presents as a decisive proof of the expediency of following in his footsteps. The fact is, that if the operations of algebra be general, we must necessarily obtain indefinite series, and if the symbols we employ are general likewise, it will be impossible to determine, in most cases, the convergency or divergency of the series which result. It is only, therefore, when we come to specific values that a question will arise generally respecting the character of the series : and it is only when we are compelled to deduce the function which generates the series from the application of the theory of limits to the aggregate of a finite number of its terms, that its convergency or divergency becomes important as affecting the practability of the enquiry : in short, it must be an erroneous view of the principles of algebra which makes the result of any general operation dependant upon the fundamental laws of algebra to be fallacious. The deficiency should in all such cases be charged upon our power of interpretation of such results, and not upon the results themselves, or upon the certainty and generality of the operations which produce them : in short, this rejection of diverging series from analysis, or of such series as may become divergent, is altogether inconsistent with the spirit and principles of symbolical algebra, and would necessarily bring us back again to that tedious multiplication of cases which characterized the infancy of the science". [53]

De fait, cette opposition systématique à la notion de limite s'enracine sur la philosophie des mathématiques de l'Ecole Algébrique Anglaise, dont témoigne l'affirmation réitérée de se démarquer de la dynamique. En témoignent également, *a contrario*, les arguments de leurs

---

53 "M. Cauchy, dans ses *Leçons sur le Calcul Infinitésimal* (publié en 1823), a tenté de concilier la considération directe des infinitésimaux avec les conceptions purement algébriques des principes de ce calcul, que Lagrange avait le premier solidement établi; et il peut très bien être concédé qu'aucune tentative de cet habile analyste, bien qu'elle soit très en contradiction avec la pratique ou les notions ordinaires, n'échouerait pas manque d'une maîtrise suffisante de toutes les ressources de l'analyse. Il considère *toutes les séries infinies qui ne sont pas convergentes comme erronées*, et, par conséquent, la série de Taylor comme généralement non vraie, quand elle prend la forme d'une série infinie. C'est pour cette raison qu'il la tranfère du calcul différentiel au calcul intégral, et l'exhibe comme une série formée d'un nombre fini de termes, et complétée par une intégrale définie. Il est très vrai que M. Cauchy a parfaitement réussi à éviter la considération des séries infinies pour établir la plupart des grands principes du calcul différentiel et intégral, mais je ne peux en aucun cas me sentir disposé à considérer son succès à surmonter ce type de difficultés comme une preuve décisive de l'opportunité qu'il y aurait à emboîter ses pas. Le fait est que, si les opérations de l'algèbre sont générales, nous devons necessairement obtenir des séries infinies, et si les symboles que nous employons sont également généraux, il doit être impossible de déterminer, dans la plupart des cas, la convergence ou la divergence des séries qui en résultent. C'est seulement, par conséquent, lorsque nous envisageons des valeurs spécifiques qu'une question se pose en général concernant le caractère de la série : et c'est seulement quand nous sommes amenés à chercher la fonction qui génère la série en appliquant la théorie des limites à l'aggrégat d'un nombre fini de ses termes, que sa convergence ou sa divergence devient importante car elle affecte la possibilité même de la recherche : en résumé, c'est nécessairement un point de vue erroné des principes de l'algèbre qui permet que le résultat d'une opération générale, dépendant des lois fondamentales de l'algèbre, puisse être fallacieux. Cette insuffisance doit être dans tous ces cas attribuée à notre pouvoir d'interprétation de tels résultats, et non aux résultats eux-mêmes, ou à la généralité et à la certitude des opérations qui les produisent : en résumé, le rejet des séries divergentes de l'analyse, ou de séries qui puissent devenir divergentes, est inconsistent tout à la fois avec l'esprit et les principes de l'algèbre symbolique, et nous ramènerait nécessairement à cette fastidieuse muliplication des cas qui caractérise l'enfance de la science." Peacock, 1833, 247-48 n.

opposants à Cambridge. Lorsqu'en 1819, un homonyme de Peacock, Daniel Mitford, publie *A Comparative View of the Principles of the Fluxional and Differential Calculus,* il oppose la conception de Newton :

"The view which it gives of the Genesis of Quantities is natural and explicit; its definition of a fluxion definite and philosophical; and its practical calculus purely analytical as well as geometrically true; and ... as a system, it forms a compact, consistent and harmonious whole." [54]

à celle de Lacroix :

"It endeavours to disguise rather than explicitly to set forth the Newtonian Hypothesis of genesis by motion, (... a Genesis observed by Nature herself, as Newton justly remarks..) though virtually involved in, and necessary to the clear understanding of, the principles on which the analysis is practically conducted" [55]

Son argumentation repose essentiellement sur une conception réalistico-newtonienne de la notion de fonction, et sur la conviction de la continuité des variations temporelles, qui se traduit par l'affirmation d'un principe de continuité.

"The principle of Limits necessarily implies and presupposes the notion of continuity. ... . We must contemplate Functions, not in the light of abstract numbers, but as continuous magnitudes generated by motion".[56]

Ce faisant, son argumentation reste tributaire de distinctions que les algébristes se proposent justement de dépasser : nombres concrets/nombres abstraits, quantités/grandeurs, comparaison de quantités de natures différentes, conception étroite de la notion de fonction. Pour D.M. Peacock, aucune variation n'est arbitraire : le mouvement est nécessaire à la définition d'une limite. Il refuse l'abandon de la référence au réel, considèrant le calcul leibnizien comme "une théorie visionnaire destituée de tout fondement dans la nature philosophique des choses"[57].

Ce débat sur le caractère continu des variations et sur leur genèse par le mouvement fait écho à celui qui s'étend alors bien au-delà du monde savant, en raison de ses évidentes implications théologiques. Opposant géologues uniformitaristes et catastrophistes quant à l'évolution de l'univers, il porte explicitement sur

3. Tergiversations autour du curriculum

S'il n'existe aucun texte officiel fixant le contenu du curriculum avant 1848, les manuels de référence, utilisés pour la préparation des étudiants à l'examen, indiquent clairement les luttes d'influence qui s'exercent autour de la Révolution Analytique dans les décennies 1830-40.

L'analyse algébrique a bien été adoptée dans les examens à Cambridge à partir des interventions de l'Ecole Algébrique, et notamment par l'intermédiaire de l'enseignement des tuteurs collégiaux ou privés, fort nombreux. L'utilisation de la notation leibnizienne s'est d'autant mieux imposée que, comme le soulignent y compris ses détracteurs, la pratique du calcul différentiel est la même que celle du calcul fluxionnaire : elle n'exige donc aucune modification quant au type de problèmes posés. D'autres traductions suivront, qui complèteront celle de Lacroix, notamment celles de Boucharlat et Francoeur par Blakelock.

La Révolution Analytique a cependant souffert de deux maux d'importance. Le premier provient de l'extrême généralité de l'Algèbre Symbolique. Bien que Peacock n'en introduise les principes que par induction à partir de pratiques arithmético-algébriques, son *Treatise of Algebra* apparaît davantage aux historiens comme une réflexion sur la nature de l'algèbre que

---

54 "Elle donne de la Genèse des Quantités une conception naturelle et explicite; sa définition d'une fluxion est définie et philosophique, et son calcul pratique purement analytique aussi bien que géométriquement vrai; et ... en tant que système, elle forme un tout concis, consistant et harmonieux". Ibid., 4.

55 "Elle entreprend de dissimuler plutôt que d'établir explicitement l'hypothèse newtonienne d'une genèse par le mouvement, qu'elle contient pourtant virtuellement, et qui est nécessaire à une compréhension claire des principes à partir desquels l'analyse est conduite pratiquement". Ibid., 6.

56 "Le principe des limites implique et présuppose la notion de continuité. .. Nous devons considérer les Fonctions, non pas à la lumière des nombres abstraits, mais comme des grandeurs continues engendrées par le mouvement". Peacock, D.M., 1819, 10, 37.

57 Ibid., 28.

comme un manuel d'enseignement. En rejettant la géométrie, notamment l'étude des courbes, au rang des applications ou des conséquences d'un calcul analytico-algébrique systématique, cet enseignement se heurte aux mêmes difficultés que connaîtra la réforme dite des "mathématiques modernes" au 20ème siècle. Les débats portant sur le rôle de l'abstraction sont de même nature : les étudiants ont à assimiler des structures portant sur des pratiques qu'ils ne maîtrisent pas, et sont extrêmement gênés par un niveau d'abstraction qui ne correspond pas à leur formation intiale. D'autre part, dans la mesure où toute cette école se consacre à l'étude des spécificités opératoires de toute espèce de calcul, et s'oppose au point de vue de Cauchy, la théorie des limites, quand elle est utilisée, reste fondée sur des considérations intuitives proches de celles de D.M. Peacock. La *Doctrine of Limits,* publiée par Whewell en 1838, en est un exemple d'autant plus frappant qu'elle reprend, après d'autres, le principe faux selon lequel "ce qui est vrai jusqu'à la limite est vrai à la limite", et qu'elle marque la réaffirmation du primat de la géométrie sur l'algèbre comme point de départ de l'enseignement élémentaire en mathématiques. Whewell, soupçonneux envers ce qu'il estime la trop grande autonomie que donne au mathématicien ces démarches algébriques, s'inquiète des libertés qu'il pourrait prendre envers le sentiment religieux. C'est notamment pour des raisons morales qu'il veut privilégier une formation fondée sur la géométrie plutôt que sur l'algèbre : un raisonnement qui peut et doit être contrôlé étape par étape, grâce à l'observation des figures et à la maîtrise du syllogisme, qui se réfère au langage ordinaire, est mieux à même d'affermir la discipline d'esprit nécessaire aux fonctions de pouvoir qu'auront à assumer les étudiants dans l'avenir.[58]

En 1842, lorsque M. O'Brien, d'une part, et De Morgan d'autre part, publient chacun un traité de calcul différentiel fondé sur la notion de limite, Peacock reprend la publication en deux volumes de son *Treatise of Algebra.* N'est-ce-pas là un témoignage flagrand du fait que la polémique n'est pas close?

Conclusion

Les débats portant sur l'abstraction de nature opératoire, qui sont au coeur de la la Révolution Analytique en Angleterre, traversent plusieurs niveaux de contradiction : contradiction sur le plan politique entre les valeurs traditionnelles du pouvoir aristocratique, et celles de la bourgeoisie montante; contradiction sur le plan social entre les adeptes d'un enseignement attaché aux valeurs du passé, et les réformateurs à la recherche de principes qui puissent fonder les connaissances nouvelles; contradiction dans le domaine scientifique entre la conception d'un temps porteur de continuité et d'harmonie, et celle d'un temps plus abstrait, marqué concrètement du sceau de l'arbitraire, et conceptuellement du sceau de l'automatisme; contradiction enfin quant à la philosophie des mathématiques, et la question de savoir si les principes de la philosophie naturelle sont de nature dynamique ou opératoire. Les débats relatifs à son acceptation portent sur la possibilité d'admettre qu'un raisonnement puisse n'être légitimé que par des mécanismes, des automatismes opératoires, et sur le caractère artificiel ou naturel de tels mécanismes. La perspective offerte par les travaux de l'Ecole Algébrique Anglaise porte en germe l'ensemble des questions d'aujourd'hui sur la mathématisation des lois de l'esprit, et sur la maîtrise, non plus du mouvement, mais de l'action en général.

La conviction qu'affirme l'Ecole Algébrique Anglaise de pouvoir construire l'algèbre comme une algèbre de l'infini, qui puisse suppléer aux interrogations posées par la notion de limite, ne doit pas être tenue pour un vain rêve, ou pour une persepctive sans issue. Comme tous les mathématiciens confrontés à l'invention, ils tentent de résoudre des difficultés qui feront ultérieurement l'objet de recherches distinctes. Leur conception du symbolisme algébrique modifie radicalement le statut de l'algèbre, les méthodes qu'inventent Gregory et De Morgan dans cette perspective pour la résolution des équations différentielles prendront tout leur sens dès lors que les espaces de fonctions auront été eux-mêmes structurés, et la notion de somme de série divergente trouvera une signification avec les travaux de Poisson et de Frobenius, conduisant aux généralisations e Hölder et de Cesaro[59].

---

58 Whewell, 1850, 43.

59 Kline, M., 1109-115.

Bibliographie

Sources primaires

> Babbage, C., *The Works of C. Babbage*, (eds) Campbell-Kelly, M., London, 1989, 11 volumes.

- id., 1830, *Reflections on the Decline of Science in England and some of its Causes, Works*, 7.

> Ball, W.W.R., 1889, *A History of the Study of Mathematics at the University of Cambridge*, Cambridge.

> Boucharlat, J.L., 1828, *An elementary Treatise on the Differentail and Integral Calculus*, trad. R. Blakelock, Londres.

> Cauchy, A.L., 1821, *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*, première partie : Analyse Algébrique, Paris. *Oeuvres* (II, 3), 1-331.

> De Morgan, A., 1837-42, "On the Foundations of Algebra, I, II", *Trans. of the Camb. Phil. Soc.*, 7, 173-87, 287-300.

-id., 1842, *The Differential and Integral Calculus*, London.

- id., 1844-49, "On the Foundations of Algebra, III, IV", *Trans. of the Camb. Phil. Soc.*, 8, 139-42, 241-54.

- id., (1872),1915, *A Budget of Paradoxes*, Chicago & London, D.E. Smith.

> Francœur, LB.., 1829-30, *A Complete Course of pure Mathematics*, trad. R. Blakelock, Cambridge.

> Herschel Papers, *Royal Society Library*, London.

> Herschel, J.F.W., 1813a, "On trigonometrical Series, particularly those whose terms are multiplied by the tangents, cotangents, secants, &c., of quantities in arithmetical progression, together with some singular transformations", *Memoirs of the Analytical Society*, Cambridge, .

- id., 1813b, "On Equations of Differences, and their Application to the Determination of Functions from Given Conditions", *Memoirs of the Analytical Society*, Cambridge, 64-125.

- id, 1813c, "On a Remarkable Application of Cotes' Theorem", *Phil. Trans. R.S.*, 103, 8-26.

- id., 1814, "Considerations of Various Points of Analysis", *Phil. Trans. R.S.*, 1814, 104, 440-468.

- id. 1816, "On the Developement of Exponential Functions, together with several new theorems relating to finite differences", *Phil. Trans. R.S.*, 116, 25-45.

- id., 1820, *Examples of the Calculus of the Finite Differences*, Cambridge.

> Lacroix, S.F., (1797-99), 1810, *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*, Paris, 3 vol.

> Lacroix, S.F., 1816, *An elementary Treatise on the Differential and Integral Calculus*, trad. Babbage, Herschel et Peacock, Cambridge.

> O'Brien, M., 1842, *An elementary treatise on the differential calculus, in which the method of limits is exclusively made use of*, Cambridge.

> Peacock, D. M., 1819, *A Comparative View of the Principles of the Fluxional and Differential Calculus*, Cambridge.

> Peacock, G., 1820, *A Collection of Examples on the Calculus of the Applications of the Differential and Integral Calculus*, Cambridge. 3ème partie in Babbage, *Works*, 1, 283-326.

- id., 1830, *Treatise of Algebra*, Cambridge. Réed. 2 vol.,1842-45.

- id., 1833, "A Report on the recent progress and actual state of certain branches of analysis", *Proceedings of the British Association for the Advancement of Science*, London, 185-351.

- id., 1834, *Report on the recent progress and actual state of certain branches of analysis*, Cambridge.

- id., 1845, "Arithmetic", *Encyclopaedia Metropolitana*, London, I, 369-523.

- id., 1841, *Observations on the Statutes of the University of Cambridge*, Cambridge.

> Playfair, J., Anonyme, 1808, "Traité de Mécanique Céleste, par P.S. Laplace", *The Edinburgh Review*, vol. 11, n° XXII, janv. 1808, 249-84.

> Playfair, Anonyme, 1810, *Edinburgh Review*, 16, XXXI, april 1810.

> Whewell, W., 1836, *Thoughts on the Study of Mathematics as Part of a Liberal Education*, Cambridge & London.

> Whewell, 1833, "Address", *Proceedings of the third meeting of the British Association of Science*, Cambridge.

-id., 1835, *Thoughts on the Study of Mathematics as Part of a Liberal Education*, Cambridge.
- id.,1838, *Doctrine of Limits, with its applications, namely conic sections, the first three sections of Newton, the differential calculus. A portion of university education.* Cambridge.
- id., (1845), 1850, *On a liberal education in general, and with particular reference to the leading studies in the University of Cambridge,* Cambridge.
> Woodhouse, R.,1801, "On the Necessary Truth of certain Conclusions obtained by means of imaginary quantities", *Phil. Trans.*, 91, 89-120.
- id., 1802, "On the Independance of the Analytical and Geometrical Methods of Investigation, and on the Advantages to be Derived from their Separation", *Phil. Trans.*, 92, 85-125.
- id., 1803, *Principles of Analytical Calculation*, Cambridge.
- id., 1809, *A Treatise on Plane and Sperical Trigonometry*, Cambridge.

Sources secondaires

> Bourbaki, N., 1969, *Eléments d'histoire des mathématiques*, Paris, Hermann.
> Cannon, W., 1964, "Scientists and Broadchurchmen : An Early Intellectual Network", *Journal of British Studies*, vol. IV, n° 1, 65-88.
> Diagne, S.B., 1989, *Boole, l'oiseau de nuit en plein jour*, Paris, Belin.
> Dubbey, J.M., 1978, *The Mathematical Work of Charles Babbage*, Cambridge.
> Durand, M.J., 1985, "George Peacock (1791-1858) : La Synthèse Algébrique comme loi symbolique dans l'Angleterre des Réformes (1830)", *Thèse pour le doctorat de l'E.H.E.S.S.*
> Durand, M.J., 1990, "Genèse de l'Algèbre Symbolique en Angleterre : une Influence Possible de John Locke", *Revue d'Histoire des Sciences*, 43, n°2-3, 129-80.
> Durand-Richard, M.J., 1992, "Charles Babbage (1791-1871) : De l'Ecole algébrique anglaise à la "machine analytique"", *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines*, 118, 5-31.
- id., 1994a, "G. Boole et la mathématisation des opérations de l'esprit", *Actes de l'Université d'été des IREM du 7-13 juillet 1990.*
- id., 1994b, "l'Ecole Algébrique Anglaise : les conditions conceptuelles et institutionnelles d'un calcul symbolique comme fondement de la connaissance", à paraître dans *Mythes et Réalités de l'Europe Mathématique*, ss dir. C. Goldstein, J. Gray, J. Ritter.
> Fauvel, J., Ransom, P., Wallis P. & R., 1991, *Mathematical Tradition in the North of England,* Durham, NEBMA.
> Gascoigne, J., 1989, *Cambridge in the age of the Enlightenment, Science, religion and politics from the Restoration to the French Revolution*, Camb. Un. Press, Cambridge.
> Grattan-Guinness, I., "Laplace P.S.", *Dictionary of Scientific Biography*, ed. Gillispie, C.C., 1978, XV, 273-403.
> Jenkins, J., & Jones, D.C., 1950, "Social class of Cambridge University alumni of the 18th and 19th centuries", *British Journal of Sociology*, 1, 93-116.
> Kline, M., 1972, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,* New-York.
> Morrell, J., & Thackray, A., 1981, *Gentlemen of Science, Early Years of the British Association for the Advancement of Science*, Oxford, Clarendon Press.
> Pedersen, O., 1963, "The "Philomaths" of the 18th century England : a Study in Amateur Science", *Centaurus,* 8, 238-62.
> Ponteil, F.,1968, "L'éveil des nationalités et le mouvement libéral", *Peuples et Civilisations,* Paris, XV.
> Rogers, L., "A Survey of Factors Affecting the Teaching of Mathematics Outside the Universities in Britain in the Nineteenth Century", in Bos & Mehrtens & Schneider, 1981, *Social History of Nineteenth Century Mathematics,* Boston-Basel-Stuttgart, Birkhaüser, 149-64.
> Tillyard, A.I., 1913, *A History of University Reform from 1800 to the Present Time, with suggestions towards a complete scheme for the University of Cambridge,* Cambridge.
> Winstanley, D.A., 1935, *Unreformed Cambridge,* Cambridge.

MATHEMATICAL TEXTBOOKS IN VERNACULAR LANGUAGES

The Case of Czech Textbooks and Their Development in the 16 th c

F O L T A Jaroslav , Prague

1. First stages of the development of mathematics were introduced on the beginning of cultural development of mankind only in vernacular languages. Mathematics of ancient Egypt, Mesopotamia, Greece was developed and its results were written in languages which were understandable to the majority of inhabitans of that countries. It depended only on the cultural level of them. With religious institutionalized education in Arabian and Latin cultures and its broadcasting in countries with different vernacular languages, mathematical culture became separated from local culture. The further development of mathematics occured the separated from the local alliterate people. The culturally lower ranks ofinhabitans needed only elementary parts of reckoning practice and that was broadcasted among them mostly by tradition.

Counting with fingers, with score sticks, with abacus, with apices or coins signs, were used up to the begin of 20th century even in very developed countries (1)

(1) Special research by the programme of ethnomathematics gives us more exact pictures of this arts of counting in low developed countries up to now.

During the 17th and 18th c.when European mathematics had overtook the leading role in the world development of this subject,one left also in "learned mathematics" Latin and started publishing in vernacular languages. All these changes came about with substantial changes by the end of the feudal system and were connected with the growing forces of urban population, especially merchants and artisans. Great antifeudal uprisings caused grow of literacy among urban inhabitants.

New conditions for trade and handicrafts started with the 14th c. in Italy and during the next century, and spread following the trading roads, reached to all main centres in different countries of Europe. The need of education for artisants and merchants caused establishing a system of nonconfessional schools. The first need of those social ranks - in the area of our interests - was the ability of counting different kinds of economical and technical problems. It helped emerge - for first time after the ancient Museum of Alexandria - mathematicians working professionally. In first stages this helped the town-reckoners: in Germany called "Rechenmeister" in other countries "arithmeticians". They were organized into special guild corporations in areas where the trade, handworking and handicraft were very developed.

The trade intenzification was not accompanied with - speaking in modern terms-normalization, with unification of measures, weights, money and prices. They were different almost in every town. Tasks of the town-reckoner in the first stages were to help the young future merchants in orientation with reckoning in domestic units and to solve reckoning problems of local origine: interest account, rates, partion of inheritance, profit or loss of some enterprise, but also some geometrical knowledge neeled in surveying.

Another task was added maybe later, teaching the reckoning praxis to young artisans and merchants and their children. This means to all who had no need of Latin education in confessional schools, but demanded knowledge of reckoning methods and practice ofsolving problems. For example in Annaberg in German Saxony was opened a reckoning school (Rechenschule) in 1525 by the arithmetician Adam Ries. And it was the only school from several in the town existing, which was under municipal authorities and had the special rights given by the town. Similar municipal (but Latin) schools were in the same time founded on the Czech territory at the opposite side of the border at Jáchymov. Both were instigated by the great silver-run to those localities of the time.

Afterwards the education in those schools became connected with normal trivium too, and also reading and writing were on taught in the reckoning-schools in vernacular languages, or the common trivium-programme was introduced by the schoolrector from the beginning already.

Institutionalization of teaching in vernacular languages implied the need of corresponding textbooks. This was the starting point of further development of higher education and also of "learned mathematics" written in local languages.

2. Bohemian Lands and their neighbourhood.

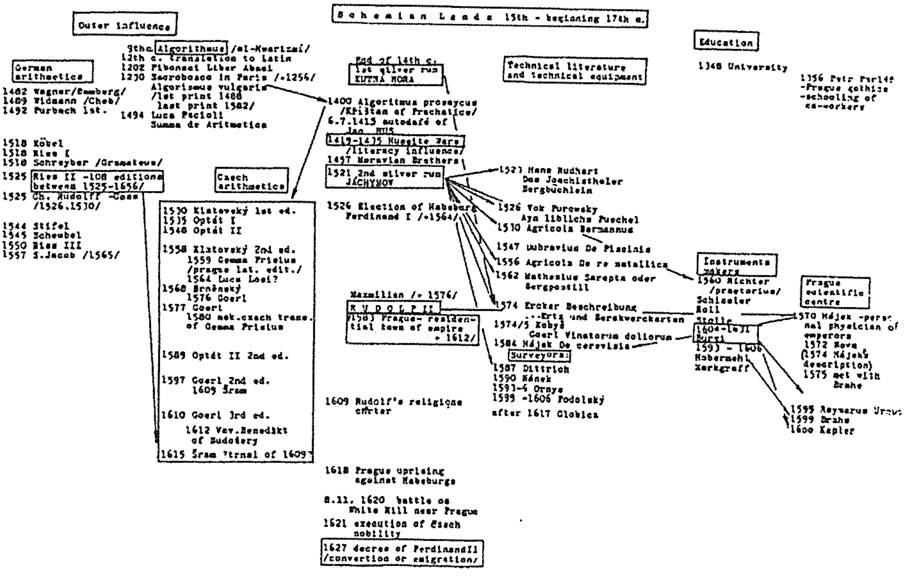
First we shall put our attention to Czech practical arithmetics, we have to discribe the situation conditioning the forming of that kind of mathematical literature in Bohemian Lands. "Czech Lands" or more exactly "Lands of Czech Crown" were from the 9th century one of the few European countries borders whose were not substantially changed during the next ages. Temporary fusions were done mostly from dynastic interests, but the nucleus was stabile and in comparison with relative small mutually independent other dwarf countries constituted one of the greater countries on European continent of that time.

After the first Czech dynasty of Premysliden the Luxembourgian dynasty came with great interests on the Czech throne in 1310. John the Blind was the first, and his son - the later Roman Emperor Charles IV (ruling 1346-1478) was the next of them. By Charles initiative and on the good base of educational tradition of Bohemian Lands he founded in Prague in the year 1348 the first university in the space northern of the Alps and eastern of the Rhine. In Charles time, too, one started construction of almost all the famous gothical buildings in Prague. With constructing the gothical cathedrale on the Prague Castle was also connected a technical training of builder-masters.

With the end of the 14th c. were opened the silver mines in Kutná hora the richest source of silver ore in Europe of that time. But very shortly after auto-da-fé of John Hus in Constance the hussite reformation broke out and the twenty years Hussite-Wars with the crusades began.

This part of Bohemian history was very important for the whole cultural advancement of the country, by increasing the literacy of inhabitants and it was followed by the educational system of Czech (Moravian) brethers (founded 1457). One could observe similar developments in other European countries standing under influence of reformation.

A second silver run broke out after opening the mines at Jáchymov (1521) on the south parts of Krusné hory - hills and in the same time on the northern slopes of it in also newly founded Saxonian town Annaberg. Among 18 thousands miners who came to Jáchymov were also personalities who were able to describe and then publish (and such a way perserved for us) the quite new mining and metalurgical technologies used there: Physician Agricola, priest Mathesius and technician Ercker wrote books which became classic for a long time. The time of economical growth lead to progress in other handicrafts,in agriculture, and in greater investments. In southern Bohemia, Jakub Krcín of Jelcany created a great system of ponds, which was watered by artifical so called "golden drain" some tenth of km long. The aim was to establish fish production. The system is working up to now. Without progress in surveying instruments and methods this functioning would have been impossible. Dubravius' book about pisciculture and Hájek's about brewing show that the technological literature had emerged, partly in Latin, partly in German.



Technical achievements, economical prosperity, trade boom, increasing of living standard and also, compared with other parts of western Europe, more ideological tolerance called new and new people to Bohemian Lands and to Prague, at the Emperor's court. Especially from the time of Rudolf II. Prague was one of the great European scientific and cultural centres.

It was a great personal achievement of Tadeás Hájek - the personal physician of Emperors - mathematician and astronomer, that by the end of 16th c., Tycho Brahe, Joannes Kepler, Joost Burgi, Raymarus Ursus and other outstanding scientists of that time were invited to the court at Prague.

This was one achievement of the economical growth and ideological tolerance. But we shall turn our attention to another result of that social and economical development.

3. Czech practical arithmetics.

Parallel to the mentioned technical literature appeared also practical arithmetical textbooks in Czech language, almost in the same time as the German ones in Saxony.
a) General mathematical conditions of Czech arithmetics.
If D.J.Struik told that the new centre of practical arithmetics were at that time the Italian towns and Nuremberg, Prague and Vienna in middle Europe and that arithmetics and algebra were taught there by arithmeticians without contacts with universities, he is only partially true. The Italian arithmeticians "maestri d'abaco" were really practicioners like Saxonian Adam Ries, but among authors of Czech arithmetics we find university graduates as well as educated artisants (e.g. printers).

In Saxony there were the very successful arithmetics books containing reckoning on lines and with numbers by Adam Ries. Especially his second book of 1525 enjoyed during 126 years at least 1O8 editions, which comparison has not yet been done, but some were shown at the conference prepared in 1992 commemorating the half millenium of Adam Ries. It seems that the editions changed according to local and time conditions. Ries' first book devoted only to reckoning on lines got only three editions. Ries' second textbook and its adaptations were broadcasted in such a great number that, in Germany, saying "nach Adam Ries" is very popular and has similar meaning like originally the term "algorithmus"- developed also from the name of mathematician.

"Algorithmus" - rules for arithmetical operations, in 12th c., and translated into Latin and broadcasted since beginning of 13th c. in many different versions - was the theoretical background of all textbooks of reckoning in vernacular languages. John Holywood (nicknamed Sacrobosco) and at the same time Jordanus Nemorarius prepared manuscripts of " algorithmus" which were used in universities, transformed by many authors and printed already by the end of 16th c.

We do not know the names of mathematics teachers at the beginning of Prague University, but we know that about the year 136O three weeks there were devoted to teaching the "algorithmus". General formulations of those types of manuscripts caused, that they could be used over more than 35O years.

Titles of Czech elementary arithmetics 1530 -1615

<u>KLATOVSKÝ</u> /1530.1558/	/ 1504-1551/
Nové knížky vc počtech na cifry a na liny, přitom některé velmi užitečné regule a exempla mince rozličné podle běhu kupeckého krátce a užitečně sebrána	New booklets on the reckoning with numbers and on the lines,with some rules and examples of different coins - as to the benefit of trade run- briefly and usefully collected
<u>OPTÁT OF TELČ</u> I /1535/	/ ? -1559/
Isagogicon jenž je první uvedení každému počinajícímu se učiti a to ku poznání dvojí každému velmi potřebného umění ... orthographii ... arithmetiky...	Isagogicon, which creates an introduction for everybody who begins with learning, namely for cognition two very desirable arts ...orthography first... arithmetics after it...
<u>OPTÁT OF TELČ</u> II /1548,1589/	
Knížky početní na rozličné koupě v nově vytištěné.Při tom kterak se jeden každý mince čísti a učiti má o čem druhá stránka listu tohoto ukazuje	The reckoning booklet for different trade - new edited. With introduction how the coin may be read and learned what the next page of this leaf shows
<u>MIKULÁŠ BRNĚNSKÝ</u> /1568/	/1500?- ? /
Knížka v níž obsahují se začátkové umění aritmetického, to jest počtův na cifry neb liny pro pacholátka a lidi kupecké sebraná	Booklet which contains the beginnings of arithmetical arts,i.e. the reckoning with numbers or on the lines; for little boys as well as for merchants collected
<u>GOERL OF GOERLSTEIN</u> /1576/	/1550 ? -after 1588/
Ein nutzlich und künstlich Rechenbuch auf den Federn...	Needed and artistic reckoning book with numbers...
<u>GOERL OF GOERLSTEIN</u> /1577,97,1610/	
Arithmetica to jest knížka početní neb umění počtův na linách a cifrách skrze exempla a mince rozličné všem v handlech v ouřadech a v hospodářství se obírajícím velmi užitečná a prospěšná	Arithmetics i.e. the reckoning book or the countingart on the lines and with numbers,which - according to its examples and different coins- will be very useful and serviceable to everybody who works in trade, office and farming
<u>PAVEL ŠRAM</u> /1609/	/ ? - ? /
? Die Arithmetik ...?	? Arithmetics ...?
/1615/	
? Aritmetika, knížka počtův, přeložená do řeči moravské ...?	? Arithmetics the reckoning booklet translated into the Moravian language

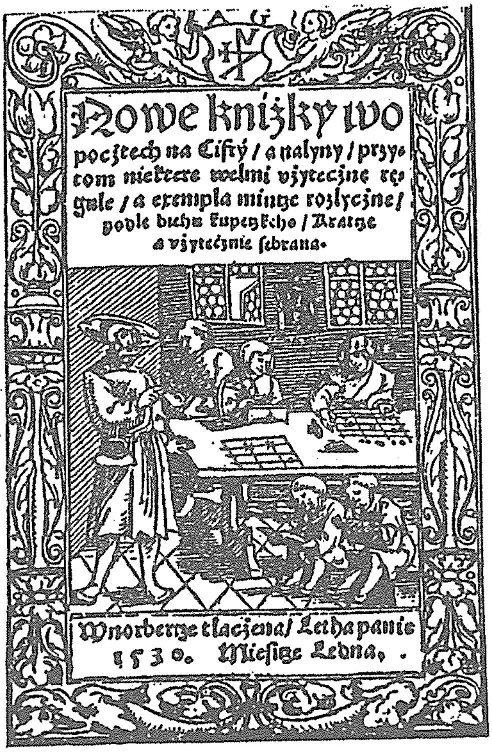
We should consider practical arithmetics like applications of "algorithmus" on problems of everyday life with addition of some special reconting methods. Therefore, the time of use of a textbook was limited and depended on localities, on units, prices, weights, measures, goots etc used at that time. And the change of units or rates made the textbooks only partially useful. In Germany, where the Ries tradition predominated, the local - and time - interpretations were done in Ries' textbooks self.

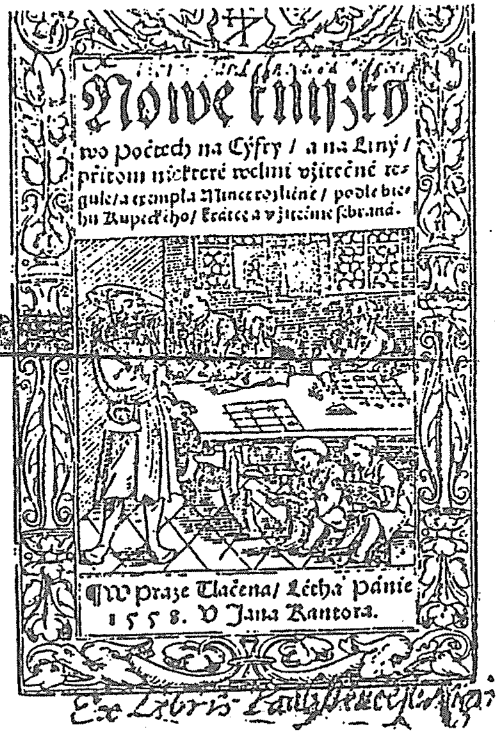
In Bohemian Lands Czech arithmetics started in 1530 and during 85 years (up to 1615) 10 Czech textbooks by five authors were edited. Time distance between two neighboring editions was 9-10 years. (2) It seems to be "a normal" time-need for a new textbook.

(2) There were two greater irregularities in 13 and 5 years intervals, which were in mutual following places and can be averaged to "9".

We have to add, that there were also other practical textbooks edited in Prague in Latin (e.g. Gemma Frisius 1559 and Luca Losi 1564) or in German as well as the Latin one of a domestic author (Benedikt of Nedouzery,1612).

b) Ondrej Simkovic called Klatovsky of Dalmanthorst





The author of the first Czech arithmetics was Ondrej Klatovsky. He graduated from Prague University and then he belonged to the circle of humanistic intellectuals concentrated around Matous Collinus of Chotèrina, professor of classical languages at the university and in the same time rector of his own private school in Prague. It was very probably, that Klatovsky tought at Collinus' school and was stimulated by him to write an arithmetics for those purposes. It is known, that the edition of Klatovsky's book was supported by sponsor of the circle Jan Hodèjovsky of Hodèjov.

The contents of this practical arithmetics served without doubts as a model for next Bohemiam authors. In opposite to Ries' German and to the next Czech reckoning textbooks, Klatovsky started with modern operations with numbers and only after it, in the second part of the book, he elucidated reckoning on lines - more common at that time. Maybe, it was an attempt of a university graduate to bring new progressive methods, which were taught at the university, to common life of artisans and merchants. But from a methodical point of view, for the situation which existed in the practical life of the time, it was more needed to begin with common known and used lines-counting. Reckoning with lines did not need writing and also counting by heart was minimalized by it. Even Adam Ries in his third textbook from 155O wrote, that he came to the conclusion, that reckoning with lines at the beginning of learning of a young counter trained him better in counting ability than reckoning with numbers.

Klatovsky's arithmetics, after these two kinds of elementary computing technics, described in a third part fractions and in a fourth examples of different practical problems.

Contents of Klatovský s Arithmetics (1530,1558)

(1) Reckoning with numbers

(2) Reckoning on lines

(3) Reckoning with fractions

(4) Examples of different practical problems:
- -signs and units of common used coins and weights
- -exchangerates of different money and their units (czech,nurembergian, meissenian,austrian,salzburgian, bavarian,swabian,hungarian)
- -transmission of measures of capacity of vine and grain in Bohemia and of vine in Nuremberg
- -transmission of weights were considered among Nuremberg, Leipsic and Prague in so called "great weight" and "weight of spices"
- -rates among measures of cloth
- -transmission of goldmoney to silvermoney
- -introduction of special units for 60 pieces "kopa" (i.e. "threescore") or for 15 pieces "mandel" (i.e. "fifteen") and the units of time

(5) General rules:
- Regula de tri ... Regula Quinque (i.e. double trinomial)
- Regula societatis
- Tollet
- Regula on buying for buying (bartertrade)
- Regula "on usury" (in czech "lichva" i.e. interest account)

Already in the first part, we find many facts which have more practical character:
- signs of used coins and weights
- exchange rates of different money and their units (Czech, Nurembergian, Meissen, Austrian, Salzburgian, Swabian, Bavarian and Hungarian)
- transmissions of measures of capacity of vine and grain in Bohemia and of vine in Nuremberg.
- transmissions of weights were considered among Nuremberg, Leipsic and Prague in so called "great weights" and "weights of spices"
- also rates among measures used for clothes were introduced
- transmissions of gold money to silver one
- special unit "kopa" (i.e. threescore) was introduced as well as "mandel" (i.e. fifteen)
- units of time

In the last part Klatovsky introduced a few particular examples for every general rule and used also the mentioned rate tables. The simple exercises concerned the paper, vine, cloth and soap.

Progression was exercised on salaries for tower construction, for delivery of news from Prague to Buda and to the regula de tri he gave only few examples adding that the next would be introduced in the part devoted to the "reckoning on lines". And there are also rules for double trinomials (regula quinque), which he considered as exceedingly difficult. In fact in the part devoted to the line-reckoning are all species newly elucidated and with further examples exercised.

The fourth part of the textbook is full of material concerning the economical processes. Every group of examples is introduced with general explanations. In the first place is "Gesellschaft jez slove tovaryssství" i.e. regula societatis: more partners who participate in the same enterprise with different time or money proportion and their share on the profit or loss with taking in account their part of the complete (or uncomplete) work.

In this part is also introduced some inheritance reckoning, e.g.: Last will of a man, whose wife was pregnant in time of his death: If the wife would give a birth to a boy then three quarter of the inheritance would come in the boy's property and the rest to the mother's: if she would give birth to a daughter, then the daughter's share would be a third and the mother's the rest. But the wife, after her husband's death gave birth to twillings, a boy and a girl. The question is: how to divide the inheritance according to the Last will.

Other groups are devoted to the reckoning of metal mixures, to money exchanges, payment of merchants debts to abroad (e.g. between Prague and Leipsic or Prague and Nuremberg or between Vienna and Buda), rules for reckoning of profit and loss were exercised on buying and selling under different conditions and with taking in to account all other expenses.
Special attention is paid to examples of goods-exchange, so called "regula o koupi za koupi" (what means the rules about buying for buying- we shall say today the barter-trade) e.g.:
wool for cloth, cloth for vine, vine for silk, but also pepper for linen or pewter for herrings.
Some pages of the textbook are devoted to reckoning of gold and silver in some mixture (tollet-counting), where the difficulties were caused with special weight-units of each of them. At the close of the fourth part examples "on usury" are concentrated. We shall analyzed more complicated ones.

Example on compound interest by Klatovský

Jeden měštěnín vypůjčil sobě v židech na lichvu 350 zlatých českých od jednoho žida ,kterýžto na ten způsob mu půjčil, aby každý rok ze sta zlatých dal 6 zl. a druhý rok z těch 6 zl. zase lichvu tak dlouho, pokud by jich užíval. Ten měštěnín užíval těch peněz 4 léta. Otázka,co musí tomu židu z té hlavní sumy lichvy a lichvy z lichvy dáti?

One citizen leant 350 at six percent yearly /i.e. every year he have to return for each hundert 106 and next year again 6% from this 106 so long how long he will use the lean/. What interest ist to pay and interest from interest for 4 years?

Solution: Take 100 4times and multiply it mutualy
you received $/100/^4$ i.e. 10^8= 100 000 000
Do the same with profits of 100 /i.e. 106/ 126 247 696
From 10^8 you will receive 106^4
What do you receive then for 350
Use the trinomial rule:
$$350\,\frac{106^4}{10^8} = 350 \cdot 1{,}26247696 = 441{,}866936$$

If it is written in gold coins, then debtor have to pay:
441 gold coins 52 groschen and 707/ 3125 parts of "small coins"

This example shows how the trinomial rule was used for more complicated cases. But what regarding the example itself, we must consider that similar cases have already been solved before Klatovsky (see the old egyptian or mesopotamian texts).
In his arithmetics Klatovsky did not analyse the rules for reckoning the square and cube roots (radix quadratum et cubitum) because - according to his opinion- those operations are solved by "Reguli Cosse and Alligationis" and it was his intention to write a special book devoted to them. Unfortunately there are no signs that he had really written such a booklet or even started with it.

c) Jirí Mikulás Brnènsky

2nd part of Klatovský (1530)

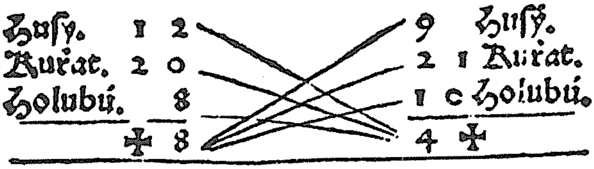
Frontispiece of Brnènský (1567)

Despite the fact that Klatovsky was not a reckoner-practicioner in Struik's sense like Adam Ries, his Czech arithmetics was used even in German schools in Bohemia and became a model for the next one. Klatovsky died after 1551 and the second edition of his textbook was printed, with only small changes, probably after his death. The greatest change is the addition of three new examples at the end of the book.

Almost twenty years after Klatovsky's withdraw from Prague in 1547 the mentioned private school of Collinus received a new teacher: Mikulás Brnènsky. He taught there and after Collinus' death (1566) he organized himself his own reckoning-school at Prague, and for this purpose he wrote an own arithmetics. If there were influences of Charles university of Prague on Klatovsky, Brnènsky as graduate of Wittenberg university (1556) was without doubts under the influence of German arithmeticians. Maybe that this was the reason why he started the book with reckoning on lines and treated numbers only afterwords. Influence of Klatovsky is proved already by the title page where the picture from the title sheet of the second part of Klatovsky' s arithmetics is used. And Klatovsky' s pictures were used in other places of Brnènsky' s textbook, too, and also some parts of the text are identical.

Brnènsky taught after his return from Wittenberg about six years in the school in Moravian metropole Brno and two years before his departure for Prague he was schoolmaster in the Moravian town Úsov. Brnènsky is known in the literature on the history of mathematics by his nickname Brnènsky determined by his Moravian working - place, but in the introduction of his book one finds the dedication: to his brothers, sons of honorable Sir Jindrich Mikulás from Hasistejn and Lobkowicz. According to it his name is Jirí Mikulás of Hasistèjn and Lobkowicz.

A few different concepts are shown in the first part ("on lines"), where the examples are aranged to groups according to their subjects: counting of fishes, about hen, eggs and on measures like ell, counting of hundreds, of thousands, about axes, counting of the half of things which were bought. Then follows a part devoted to regula de tri. Regula quinque is as a whole taken over from Klatovsky, but more attention is given to regula falsi.



Dyuisor C 4.

Tý Figuře rozuměg takto/ počty kterýž gſau poſtaweni proti Lewé ruce/ ſlugý prwnieygſſý faleſſný počty/ A tyto geſſto proti prawé ruce ſtogý/ ſlugý druzy Faleſſný počty/ a geſt gich 40.

Giž počjtey každý žiwočich w prwnijm faleſſném počtu/ podlé těch nahoře dorčeneych Peněz / totižto. 1. Hus za. 2. gř alb/ a gedno kuře po. 1. gř alb ꝛc. Tehdy přijgde. 48. gř alb. Tento poſtawency faleſſney Počet klamaa přijliš wo. 8. yakž dole ſtogý.

Giž počijtey y ty druhý ffaleſſný počet/ každau wěc obzwláſſtně podlé ſweych Peněz / Tehdy přijgde. 44. gř alb. to Klamá přijliš wo. 4/ ſnijmey. 4. od. 8. zuoſtanet 4 to geſt twůy Diuiſor. yakž dole ſtogý.

Dále Multiplicuy/ 1 2. z prwniegſſých Faleſſných počtuow/ ſtijm menſſijm pozuoſtalým počtem (totižto 8. 4. tehdyž přijgdau

$x+y+z=40$
$2x+y+\frac{z}{2}=40$

$3x+y=40$

⇓

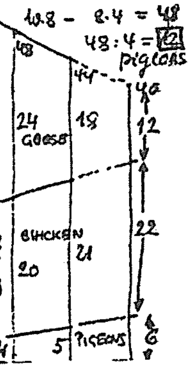
x	y	z
1	37	2
2	34	4
3	31	6
4	28	8
5	25	10
$\boxed{6}$	$\boxed{22}$	$\boxed{12}$
7	19	14
8	16	16
9	13	18
10	10	20
11	7	22
12	4	24
13	1	26

BRNĚNSKÝ'S METH:

$1.8 - 12.4 = 24$
$24:4 = \boxed{6}$ GOOSE

$21.8 - 20.4 = 88$
$88:4 = \boxed{22}$ CHICKEN

$10.8 - 8.4 = 48$
$48:4 = \boxed{12}$ PIGEONS



BRNĚNSKÝ (1567) – REGULA FALSI

The example in the figure is following problem: somebody wishes to buy three kinds of animals for 40 groschen. When the price of one goose is 2 groschen, of one chicken 1 groschen and for 2 pigeons he had to pay 1 groschen. The question is how many of every kind of animals he can buy. We know the problem could be solved by a system of two indeterminate equations:

$$\begin{array}{ll} x + y + z & = 40 \;/.(-1) \\ 2x + y + z/2 & = 40 \;/.\ 2 \\ \hline 3x + y & = 40 \end{array}$$

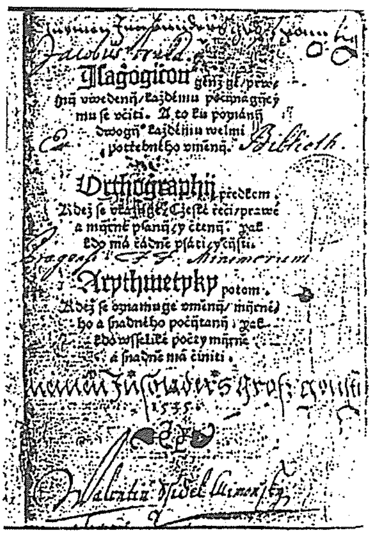
and the solution in whole numbers depends on the choice of y or x. All solutions are:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y	37	34	31	28	25	22	19	16	13	10	7	4	1
z	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26

The solution given by Brnènsky is done with the help of regula falsi and therefore shows only one possible case, and also the choice of the number of animal-kinds has not been quite by free will. In the picture we see also the systematical use of signs (+) for plus and (-) for minus as the signs for excess or insuffiency and it is the first use in Czech textbooks (first time in printed texbook it was used in Widmanns' German one of 1489).

Brnènsky's textbook in comparison with Klatovsky's, contained more examples and the whole text shows great methodical experience of the author.

d) Benes Optát of Telc



Frountspiece of Isagogicon (Beneš Optát z Telče 1535)

Brnènsky was only the third author in the chronological sequence. The second was Benes Optát, priest of Moravian Brethers, who came to the castle Námèst nad Oslavou at the invitation of the local landlord Mezirícsky. He was acting there like a private teacher of local nobility children. He translated the New Testament into Czech and edited it in Námèst at 1533. Parallel, in the same year, he wrote the Czech grammar as a consequence of his work on translation of the New Testament and it was the first Czech grammar at all and the impuls for Jan Blahoslav, also bishops of Moravian brethers, for creating the fundamental Czech grammar of the year 1571.

From the private teaching of Optát originated also "Isagogicon", a textbook of orthography and reckoning. Both editions (1535,1548) are identical with exception of 2O more examples supplemented to the last one. The booklet was used even at the end of 17th c. The main difference of both editions is in the title, but both started with Czech grammar and half of them is devoted to elementary arithmetics.

Although Optát remarked that reckoning with numbers is quickier, all arithmetical operations are elucidated on lines and only afterwards also with numbers. Second part of his arithmetics is concentrated on special rules: regula de tri, regula societatis, regula quinque, different rules used by shopping, rules of hundreds and thousands, rules on profit and loss and rules of money-change. On the end of the book examples were added called "rychant", which are more for pleasure of readers e.g.:

> One goose was sitting on the grass and a lot of others were flying over her. She told them: Dear geese, how many are you? They answered: If we would be twice more and a half and a third of it, even then we would be hundred. How many geese were flying.

This example has been borrowed from the second edition of Klatovsky's book. As regards the contents, the arithmetical part of Optát's book is more elementary in comparison with other textbooks, but has one priority - the grammatical part separated for first time in Czech writen textbooks the teaching of the national language from religious teaching. Maybe the lower standard of this booklet as well as its connection with grammar made the book very popular especially in schools of the Moravian Brethers.

e) Jirí Goerl of Goerlstejn.

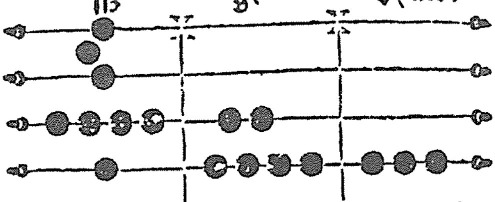
JIŘÍ GOERL Z GOERLŠTEYNA (1577)
ADITIO & SUBSTRACTIO "ON THE LINES"

o Počtu na Linách. VI.

Za	Žito	125 ß	12 gr	4.	d alb
	Pssenicy	234 ß	16 gr	5.	
	Gečmen	450 ß	20 gr	2.	
	Owes	176 ß	10 gr	0	
	Hrách	654 ß	24 gr	6.	
	facit	1641 ß	24 gr	3.	d alb.

V Figuře stogj takto:

ß gr d alb.



Proba Addycý gest Subtrakcý.
Odegmi každý počet kterýž s položil/ nezuostaneliť nic/ dobřes včinil.

Subtractio.

Třetj způsob Arythmetyky / slowe odgjmanj/ neb odtrhowánj/ gest geden počet od druhého odgjmati neb odtrhowati/ a to menssý od wětssýho/ aby poznati mohl/ co gest počtu zůstalého.

Whereas the first three authors of Czech arithmetics books were academically educated, the next two were practicioners-reconers. Jiří Goerl was German origin from the family of town Loket (north-west Bohemia)

D.E.Smith (Rara mathematica, 1908 pp 353-4, and History of mathematics vol I, New York 1923, reprints 1951,1958) introduced this textbook as the only one of those mentioned by us, but he considered the author "Görl'z Görlssteyn" as a Polish and the locality where it was published as -instead Prague- Czerny, actually the name of the printer in Prague.

In years 1566-7, during his stay with his relatives in Litomèrice, Goerl learnt Czech. He entered the Latin school and decided himself for a career as arithmetician and settled then at Prague. Because the German reckoning books were unsuitable to the conditions in the Bohemian Lands - if we use his words from the introduction - he decided to write own German book at 1576 and dedicated it to the Emperor Rudolf II. Goerl obtained a noble predicate for it and in his heraldic signs arithmetics was presented as a girl with pen and compass. Afterwards he worked as municipal notary and a clark in St. George monastery of Prague, too.

The Czech edition of 1577 is not the translation of the German predecessor but a very free revision. Some important parts of the German one were not adapted to the Czech edition, and also the whole structure was changed.

Goehrl's German textbook contains:

1. Species. The rules of it were versificated. Only numeration and addition were presented also in reckoning on lines, all other operations only "on numbers".
2. Coss "Regeln durch welcher Erlernung man der edlen und sinnreichen Regel Algebrae (so geweniglich Coss genandt)... (Rules with which one learned the fine and reasonable regula algebrae (commonly named Coss).
3. Different examples from merchant - practice. He mentioned the next book "Practica", but, unfortunately it has not been published.

Goerl's Czech arithmetics is devided into five parts:

1. Reckoning on the lines
2. Reckoning with numbers
3. Reckoning with fractions
4. Rules on all coins
5. Regula falsi and examples for the readers' pleasure

The Czech book is more elementary and some parts of the German edition were not incorporated into it. E.g.: Coss, reckoning the square - and cubic roots, regula tollet etc. Reckoning of percent and some other parts were quite different in both books (profit and loss, regula quinque). But the Czech book is the only one of all mentioned, where one finds quotations of other authors: Apianus, Stifel, Risius, Frisius, Rudolff and Euclid. And from Goerl's notices one can see, that the author planned a special book on mathematical problems of mining - but this also was not done.
All three Czech editions are identical and in spite of a long time distance among the editions they had been printed with the same tape-setting.

f) Pavel Sam of Budisov

9· Regula De Tri

a každy wsswym Stawu ma položiti: fa: Ka- bata spolem 5333 fl/ 10 gr/ a každy obzwlasst 1777 fl 13 gr / 2 ½ d. Rytyřij 2666 fl 10 gr. a každy obzwlasstě 533 fl. 10 gr. Zeman- nu 1333 fl/ 10 gr/ a každy obzwlásstě 133 fl/ 10 gr. Měsstánij 666 fl / 10 gr/ a každy ob- zwlasstě 44 fl/ 13 gr/ 2 ½ d.

Z tak so skonáwa Prwnij Traktát O Poč- tu na Linách / wijce a rozličněgssy Exempla při druhým Traktátu o Počtu na Cyffrách nagdeš.

Druhy

96

Druhy Traktá

této Knijžky o zkrácených Po- čtu na Cyffrách/ o Rozličnych a vžite- ných Regulijch/ na wsselikau Mincy Mi- ru/ Wahu/ a giny / ktere o Regule De Tri stžawagij.

NVMERATIO.

Numeracy.

NVmeratio, Co Numeracy nel Počijtanj wěcj / gest w předesslym Traktátu wo Počtu na Linách dost obssyrně powědijno / protož hned k následu- gicym Stránkam a Specibus přistaupijm.

ADDITIO.

Summowánij.

JCžij mnoho diwných a rozdjl- ných Počtůw do gedné Summy wně- sti/ tijmto Slowijčkem A.

G Sporá-

He was the last author of this series. We know only, that he was a printer in Moravian Olomouc in years 1612/4-1621/3. He belonged to the protestants, his son Krystov emigrated to Wittemberg after 1621 and printed there anticatholic pamphlets and sent them to Bohemian Lands.

The original version of Sram's textbook had to be German and was edited at 16O9, but up to now no copy was found. Also the only known copy of Czech editions (1615) lost the title page and unknown number of leaves at the end of the book. The bibliography of old Czech printings (Knihopis) edited at 1939 introduced this Sram's book under the name of Adam Ries. We do not know if it is realy only a translation of some of the many versions of Ries'successful textbook of 1525 and how it is connected with the original German version of 16O9.

Merely half of the book is devoted to elementary arithmetical operations (species) and special rules connected with them. Interesting is a new topic in this part of the textbook: the so called "form of registers" which contains instructions of sold-day book. The second part is devoted, like in other mentioned arithmetics books to the reckoning with numbers. But Sram introduced all species together theoretically and the examples and special rules only afterwards. Examples are then ordered more according to the used aplications then to the mathematical contents.

4. If we shall conclude this 85 years' development of the first Czech practical arithmetics books, we see that the theoretical background was simple- it did not exceed the "algoritmus". The reason of the books was in examples, special rules, tables of units. All contents were depending on locality (money, weights, measures, prices, goods) and time, because all those units were still changing over the years. Therefore it was impossible to make only simple translations of foreign textbooks.

There are other problems connected with the study of those old textbooks in vernacular languages. We need comparative studies, not only of textbooks in one area and in one epoche, but besides structure one has to compare contents in its extension, used examples and their methods of solution and also used concrete numbers in different countries, not only European ones,and in different times. After that we will be perhaps able to prove the thesis of mediterranean influence on first steps of reckoning textbooks in vernacular languages in other countries of Europa. And more: The comparision would be made also with examples used in Egyptian papyrus or Mesopotamian cuneiform texts, because even there we should find not only similar problems but maybe also similar formulations of examples, and given with the same concrete numbers.

As concerns the further Czech development it is not typical for the other European countries. Time of Maxmilian and Rudolf II was over with Rudolf death (1612). Resistance of Czech Estates was defeated in the battle on the White Hill (1620) and the thirty years war between protestants and catolics began. It effected for Bohemian Lands the predomination of nontolerant influence of Spain Habsburgs and 1621 began with execution of Czech nobility, then with introduction of new loyal and mostly German aristocracy into Bohemian.Lands. For example the confiscations were put in care of Lichtensteins and from that time this genre had in Moravia more land than in their own county. Ferdinand II had given in 1627 three rules : (1) new organisation of country, (2) introduction of German language as the parallel official language, (3) The only choice for all protestant nobility was either conversion to catholicism or to emigrate. About 30% of nobility but also towns inhabitants and peasants -who were forbiden to do so - emigrated. Among them for example Jan Amos Comenius and other Moravian brethers.

The normal development of Czech culture, which we have seen only through the example of elementary mathematical textbooks was interrupted. Jesuits were used for recatholization, Germanization was used for centralization of Habsburgian sovereignity and not only Czech practical arithmetics, but also new mathematical and physical ideas originated in protestant countries were for a long time not introduced to university in spite of the evidence that they were familiar in Prague Jesuit circles. But this is another chapter of science development in Bohemian Lands.

QUELQUES CARACTERISTIQUES DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE EN GRECE DE 1830 A 1884 : L'INFLUENCE DES GEOMETRES FRANCAIS[1]

Athanassios Gagatsis
Département des Mathématiques
Université Aristote de Thessaloniki

INTRODUCTION

On a l'habitude de dire que, de façon générale, les savoirs enseignés ne sont pas les savoirs des mathématiciens. Contrairement à l'idée reçue, la "transposition didactique" à partir de la science vers le savoir scolaire n'est pas un processus unilatéral, descendant du sommet à la base. Il s'agit plutôt d'une interaction complexe entre de nombreux facteurs. De fait, les contenus devant être enseignés dans chaque pays résultent d'interactions entre enseignants, mathématiciens, élèves, ainsi que d'autres acteurs sociaux, comme la cellule familiale, ou le système des examens et des concours dans le système éducatif d'un pays; ou encore d'interactions liées aux choix politiques. Le savoir scolaire n'est que l'image finale d'une suite de transformations appliquées à un savoir pour rendre ce dernier transmissible à travers l'enseignement. Ainsi le passage du nouveau savoir ("savoir savant") en savoir enseigné est par lui-même un processus social, déterminé par des facteurs spécifiques à chaque pays et à chaque culture.

Remarque particulièrement importante dans le cas de la Grèce qui possède une longue tradition dans l'enseignement de la Géométrie Théorique Euclidienne, et ce pour des raisons historiques liées à l'origine grecque de cette Géométrie. Le cours de Géométrie a notamment été utilisé comme **passerelle** entre la Grèce moderne et la Grèce ancienne, servant une politique éducative précise. Aussi l'enseignement de la Géométrie se trouve étroitement lié à son histoire et, de façon plus générale, à l'histoire des Mathématiques. L'étude des caractéristiques particulières de l'évolution historique de l'enseignement de la Géométrie en Grèce permet en effet de relever certaines contradictions issues justement de son origine grecque.

Une première contradiction porte sur le terme même de Géométrie Euclidienne: par ce terme est signifiée non la forme traditionnelle des *Eléments,* mais la forme que lui a donnée Legendre à la fin du XVIIIe siècle.

Une seconde contradiction est due à l'insistance mise sur la Géométrie Théorique et qui eut pour effet de sous-estimer le rôle et l'importance de la Géométrie intuitive-pratique dans l'enseignement. Naguère le souci de couvrir la plus grande partie de la matière traditionnelle (Géométrie du plan - Géométrie de l'espace) avait eu pour conséquence de déplacer le début de l'enseignement de la Géométrie Théorique au niveau du premier cycle de l'enseignement secondaire. Les programmes officiels des soixante dernières années ont, à de nombreuses reprises, répercuté ce principe qui, finalement, s'est révélé impraticable.

L'insistance pour conserver la forme hellénique-euclidienne de la Géométrie Théorique a constitué un facteur dãopposition aux différentes tentatives de réforme et de modernisation des leçons (**troisième contradiction**); par exemple, l'introduction timide des concepts et méthodes des mathématiques plus récentes (transformations, etc.) commencée en 1960, s'est

---

[1] Ce texte a été présenté à la "Première Université d'Eté Européenne: Histoire et Epistémologie dans l'Education en Mathématiques". Ma participation a reçu le soutien financier du Service Scientifique de l'Ambassade de France en Grèce (Athènes) et de l'Institut Français de Thessalonique.

trouvé annulée par la perdurance, dans le même temps, d'un usage généralisé des instruments euclidiens (lieux géométriques, constructions, etc.), usage visant à souligner l'origine grecque du cours.

Finalement, et ceci est significatif, le modèle rigoureux de développement correspondant à l'axiomatique de Hilbert a été choisi pour la Géométrie scolaire. Or cette axiomatique, si elle corrige certaines faiblesses logiques de la Géométrie traditionnelle, n'apporte pas de changements radicaux quant à la thématique. Ce choix, opéré en 1968, sans que soient pris en compte les besoins ni des enseignants ni des élèves, a provoqué une résistance générale et la forme rigide de l'axiomatique originelle a été remplacée par une forme plus souple qui, nonobstant certains aménagements, se maintient jusqu'à aujourd'hui.

Ces oppositions, ces contradictions, les changements des manuels scolaires de Géométrie en Grèce, mais aussi les changements sociaux et politiques en Grèce, permettent, en tant que critères, de diviser l'enseignement de la Géométrie en Grèce en trois périodes (Gagatsis, 1989; Gagatsis, 1993): la première période recouvre les premières cinquante-quatre années de l'Etat grec moderne (1830-1884); la seconde période dure jusqu'aux années de la réforme (autour de 1968); et la troisième période concerne l'intervalle allant de 1968 à aujourd'hui. Cette répartition autorise une première approche des changements qui eurent lieu en Grèce dans l'enseignement de la Géométrie.

Une question apparaît naturellement, surtout pour les lecteurs qui ne connaissent pas l'histoire de la Grèce: **"Pourquoi étudier l'enseignement de la géométrie à partir de 1830 ?"** Ou, autrement dit, **"Que se passait-il avant 1830 ?"**

Les réponses se situent à deux niveaux :

- le **premier niveau** porte sur l'enseignement de la géométrie, et sur l'éducation en général, rudimentaire avant 1830 en raison notamment de l'occupation turque. Avant la révolution grecque de 1821, et pendant la période de l'occupation turque, il n'existait que quelques écoles, ou hors des frontières géographiques de la Grèce d'aujourd'hui (Adrianoupolis, Constantinople, Kalipolis, Smyrne), ou en Grèce même (comme le célèbre gymnasium de Chios, l'une des écoles les plus importantes du point de vue de l'innovation dans les années d'avant la révolution).

- le **second niveau** concerne les livres de mathématiques grecs. Il semble bien (Gagatsis, 1992, Poulos, 1988), que le premier livre de mathématiques grec ait été imprimé en 1532 à Venise. Il s'agit de l'ouvrage de Michel Psellou, intitulé *Les Quatre sciences Mathématiques*. Ce livre constitue une synthèse du savoir de son époque. Durant la même époque, d'autres ouvrages ont été imprimés, certains à Moscou, d'autres à Venise, Vienne, Peste, etc...

On rencontre déjà à cette époque des traductions en grec de livres scientifiques français (Nicolaïdis - Dialetis, 1992)

- Abbé Kaïllé : *Leçons élémentaires d'Astronomie Géométrique*
- Fontenelle (1974) : *Entretiens sur la pluralité des mondes*
- Nicolas-Louis de Lacaille (1797) : *Leçons élémentaires de mathématiques ou Eléments d'Algèbre et de Géométrie.*

A noter que ce dernier livre est probablement le premier livre d'algèbre publié en Grèce (Kastanis, 1990). La première édition française de l'ouvrage de Lacaille date de 1741; et ses rééditions de 1764, 1768, 1770 et 1778, par les soins de l'abbé Marie (Kastanis, 1990).

Ces quelques rappels montrent qu'à l'évidence le centre d'édition des livres de mathématiques en langue grecque se trouve à l'extérieur de l'actuel territoire grec. De plus, comme nous l'avons mentionné, l'éducation en Grèce était rudimentaire avant 1830. Et ce sont ces différentes raisons qui conduisent à examiner l'enseignement de la géométrie scolaire de 1830 à nos jours.

Dans cet article, ne sera présenté que l'enseignement de la géométrie pendant la première période (1830-1884) parce que, d'une part, c'est la période durant laquelle a été fondé le système scolaire grec et, d'autre part, c'est pendant ces années-là que se trouvent les racines de la forte stabilité qui caractérise et le système scolaire grec et l'enseignement de la géométrie en Grèce jusqu'à aujourd'hui.

Nous proposons quatre directions d'étude :
- le système scolaire
- les programmes scolaires
- les méthodes didactiques
- les manuels scolaires en géométrie.

Nous ne présentons ici que la quatrième direction: les manuels scolaires de géométrie.

Les manuels scolaires de Géométrie

Malgré la situation désastreuse au lendemain de la révolution grecque (bibliothèques incendiées, écoles et maisons d'édition destruites, massacre de nombreux maîtres d'école et d'hommes de lettres), plusieurs livres de mathématiques ont été publiés peu après 1821. Ceci peut être expliqué par deux éléments :

- **le premier** concerne la liberté qu'avaient alors les directeurs des écoles ou les enseignants de choisir le manuel scolaire. Il n'y avait pas obligation de suivre un seul et unique manuel (ce sera le cas durant la seconde période, cela l'est encore aujourd'hui). Ce droit, pourtant, avait été contesté à plusieurs reprises : "Est-ce que nous voulons transmettre une illusion anarchiste du savoir dans l'esprit des jeunes ? C'est ce que nous faisons si nous permettons l'utilisation de différents manuels. Qu'est-ce que cela peut signifier d'autre, sinon l'incapacité de l'Etat à contrôler cette situation ?" (Discussion au Parlement grec, 1855, Nardi, 1992).
- **le second** a ses racines dans un certain nationalisme grec, selon lequel les mathématiques sont fondamentalement un fruit de l'antiquité grecque. Et la production d'un grand nombre de manuels grecs en mathématiques manifestait une continuité entre l'antiquité et le tout nouvel Etat grec.

Durant cette même période, et donc dans cette atmosphère, sont édités plusieurs manuels de géométrie :

1. <u>Les livres de Gérakis</u>
Géométrie élémentaire et Trigonométrie (traduction de l'allemand) - Petite Géométrie élémentaire - Géométrie élémentaire. Ces livres d'origine allemande connurent plusieurs rééditions. Notons par parenthèse l'influence multidimentionnelle de l'éducation mathématique grecque du XIX^{e} siècle sur l'éducation en Bulgarie qui a eu pour conséquence que les ouvrages de Gérakis furent largement répandus et très utilisés en Grèce mais aussi en Bulgarie où ils servirent dans les écoles grecques de Bulgarie et dans les écoles bulgares.

2. <u>Le premier livre grec de Géométrie analytique</u>
Edition du premier livre grec de Géométrie analytique en 1855 par Michel Sofianos, professeur à l'Ecole Militaire d'Athènes. Il s'agit d'un ouvrage organisé selon le modèle français.

3. <u>Les traductions des *Eléments de Géométrie* de Legendre</u>
Le manuel de Géométrie ayant le plus marqué l'éducation mathématique est sans conteste celui de Legendre qui a été traduit à quatre reprises et très souvent réédité.

La première traduction des *Eléments de Géométrie* de Legendre a été faite par I. Karandinos, à Corfou, en 1829. Ancien étudiant de l'Ecole Polytechnique de Paris, il avait de nombreux liens avec la culture française. Sa *Recherche sur la nature du calcul différentiel* a d'ailleurs été traduite en français (1827). I. Karandinos était responsable des éditions mathématiques "Académie Ionienne". Sa contribution dans l'enseignement a été importante. Il a en effet formé plusieurs enseignants qui ont ensuite répandu ses idées dans les écoles de l'Heptanèse et de Grèce continentale, et qui firent circuler le livre de Legendre partout où ils enseignaient. Dans le Prologue de cette traduction, Karandinos critique notamment les mathématiciens qui se sont essayé à écrire des traités de géométrie, mais qui en sont restés à une copie servile du texte d'Euclide. Dans la suite il blâme Lacroix pour n'avoir pas suivi, dans ses *Eléments de Géométrie*, les conseils et méthodes que Lacroix lui-même avait pris soin d'inscrire dans ses *Essais sur l'enseignement*. Par contre, et toujours selon Karandinos, Legendre applique dans sa *Géométrie* tous les conseils méthodologiques de Lacroix ! Le conflit entre Legendre et Lacroix trouve ainsi des prolongements en terre grecque.

Cette traduction se caractérise par sa fidélité au texte original et par l'accessibilité de la langue employée. Il y eut une réedition à Athènes en 1840.

La deuxième traduction des *Eléments de Géométrie* de Legendre, publiée en 1857 à Athènes et rééditée en 1862, est due au capitaine de corvette A. Zochios. Dans son prologue, le traducteur souligne qu'il lui paraît inutile de vouloir expliquer pourquoi il n'a pas lui-même rédigé, plutôt qu'une traduction, un nouveau traité de Géométrie. La langue utilisée est plus difficile d'accès que celle de la première traduction.

La troisième traduction a été publiée une première fois en 1860 à Athènes par Ch. Vafas, puis rééditée en 1870, avec certains ajouts et certaines modifications.
Elle se distingue des autres traductions par deux aspects : d'une part par la langue utilisée, la "katharevoussa", langue plus proche du grec ancien que de la langue parlée (ou langue "démotique"); d'autre part par sa tentative de démontrer le 5ème postulat d'Euclide, ce qui conduit l'auteur à substituer au postulat euclidien la proposition : "deux perpendiculaires à une même droite sont équidistantes sur toute leur longueur".
Cette tentative ne doit pas nous étonner : de Proclus (V^e^ siècle avant J.C.) au XIX^e^ siècle, plusieurs mathématiciens se sont essayés à cette démonstration; outre Legendre lui-même, on peut mentionner John Wallis en 1663 et Playfair en 1795 (Thomaïdis, 1988).

La quatrième traduction des *Eléments* a été publiée en 1862 à Athènes par A. Damaskinos. Elle a été rééditée en 1865, 1870, 1874 et en 1878.
A. Damaskinos constitue l'exemple-type d'un mathématicien fortement influencé par la culture française. Dans le Prologue de ses *Eléments de Physique expérimentale* (publiés en 1871 à Athènes), et après avoir remarqué que les sciences physico-mathématiques, 30 ans après la création de l'Université d'Athènes, se trouvaient toujours dans une situation balbutiante, il énonce son admiration pour la nation française et exprime sa gratitude pour le rôle qu'elle a joué dans la Révolution grecque de 1821 (le texte est en grec et en français) :

A CEUXQUI ONT COMBATTU POUR LA GRECE

> C'est à vous, qui avec tant d'empressement êtes allés vous ranger à côté des fils de ce noble pays, dont les pères ont combattu avec les nôtres pour nous aider à conquérir notre liberté, que je dédie cet ouvrage. En acquittant ainsi une petite partie de la dette sacrée, contractée par notre chère patrie envers la plus noble des nations, vous avez prouvé aux yeux de l'Europe entière, que les vertus qui ont inmortalisé nos ancêtres se re trouvaient aux mêmes degrés chez leurs descendants.
>
> *A. DAMASKINOS*

Deux aspects distinguent cette *Géométrie* des autres :

- dans le Prologue, l'auteur exprime de façon explicite ses intentions didactiques. Il utilise ainsi des expressions telles que : "apprendre les mathématiques", "comprendre les mathématiques", "les qualités d'un manuel de mathématiques", "la clarté des démonstrations", etc.

- le langue "puriste" du texte grec, langue particulièrement difficile. Et il est particulièrement singulier que soit employée une "katharevoussa" complexe par un auteur qui souligne dans son introduction que la qualité d'un bon manuel se trouve certes dans la clarté des démonstrations mais aussi dans la simplicité de son langage.

L'issue linguistique

Pour rendre compte de cette difficulté de langue, nous avons appliqué au texte de Damaskinos la formule de lisibilité de Flesh dans son adaptation au grec (Gagatsis, 1985) :

lisibilité = 206,8 - 0,59 sm - 1,015 mp

où sm = nombre de syllabes pour 100 mots

mp = nombre de mots par phrase.

Une comparaison entre la lisibilité du texte de Karandinos (première traduction) et celle du texte de Damaskinos (quatrième traduction) est instructive. Le tableau suivant a été établi à partir de trois textes empruntés aux deux auteurs :

Tableau 2 : Difficulté de quelques passages des deux *Géométries*

	Introduction	1er critère de l'égalité des triangles	1ère proposition du 4ème livre sur les polygones réguliers
Karandinos	50	61	58
Damaskinos	16	50	50

Ces résultats, qui indiquent nettement que le texte de Damaskinos est bien moins "lisible" que celui de Karandinos (on aurait sans doute pu montrer que ce texte de Karandinos était aussi plus "lisible" que les textes de Zochios ou de Vafas) demandent à être commentés.

L'utilisation d'une langue complexe s'explique au moins en partie par la situation politique de la Grèce à cette époque. Juste après la création de l'Etat grec, certains dirigeants politiques et certains intellectuels voulurent imposer, comme langue officielle, la langue "puriste" (la "katharevoussa"), plus proche du grec ancien que de la langue parlée (langue démotique"). Ils visaient ainsi à renforcer l'image, tant en Grèce qu'à l'étranger, d'une continuité de l'esprit grec depuis l'antiquité jusqu'au nouvel Etat, et, par là, à affermir la conscience nationale. La question linguistique, le conflit entre le "démotique" et la "katharevoussa" devint un conflit éducationnel et politique qui ne cessa d'agiter les passions tout au long des XIX^{e} et XX^{e} siècles.

Si l'ouvrage de Damaskinos répercute, à travers la difficulté de sa langue, l'attitude officielle, par contre le texte de Karandinos échappe à ce climat conflictuel. Il a en effet été publié dans l'Heptanèse, archipel de la mer ionienne qui n'a jamais été occupé par les Turcs et où la question de l'identité nationale ne se posait pas dans les mêmes termes que dans le reste de la Grèce. (Les auteurs de l'Heptanèse avaient pour tradition d'écrire en "démotique", comme en témoigne, par exemple, l'hymne national grec, écrit en démotique, et dû au poète zantais Solomos.)

On comprend ainsi qu'une des raisons ayant contribué à l'édition de nouvelles traductions des *Eléments* de Legendre était la quasi interdiction pesant sur la langue du texte de Karandinos.

4. Un ouvrage de cette même période mérite une mention particulière. Il s'agit de la *Collection des problèmes mathématiques*, 2ème volume : la Géométrie, de S. Soudzou et A. Pizou Pagavi, qui, au 5ème chapitre, présente des problèmes analogues à ceux posés par Clairaux. Par exemple, au ¨ 52, cet énoncé, qui correspond à un problème de Clairaux (cf. le commentaire qu'en fit E. Barbin) :

"Problème : Comment mesurer la distance entre deux points si la mesure directe est empêchée par un objet, par exemple un étang, une montagne, une forêt."

L'intérêt de l'ouvrage est que les auteurs présentent différentes procédures de résolution, selon les instruments géométriques dont on dispose (règle, rapporteur...). Et ceci prend toute son importance lorsqu'on sait que l'une des stratégies de la recherche sur l'enseignement des mathématiques est justement de proposer aux élèves des constructions géométriques susceptibles de diversifier les procédures de résolution.

5. L'influence française dépasse les seules traductions des *Eléments de Géométrie* de Legendre. Après avoir étudié à Paris avec, comme professeurs, Liouville, Cauchy, Lamé, Bertrand et Sturm (Poulos, 1988), le mathématicien Vassilios Lakon obtint une chaire de professeur à l'Université d'Athènes, et publia plusieurs manuels de Mathématiques élémentaires et de Géométrie destinés à l'enseignement secondaire : *Géométrie élémentaire* (Athènes, 1873), *Eléments de Géométrie* (Athènes, 1877). Et en 1881, quand il devint Doyen de l'Université d'Athènes, le discours qu'il prononça portait sur les principes de Géométrie.

CONCLUSION

A peine devenue Etat moderne, la Grèce adopte certaines attitudes qu'elle va développer au cours du XIXÆ siècle et dont les traces, ou les effets, subsistent aujourd'hui encore.

Le contexte socio-économique précapitaliste qui était le sien tandis que le reste de l'Europe et l'Amérique du Nord se trouvaient dans un contexte capitaliste, la rendait dépendante des métropoles d'industrialisation et de technologie. Qui plus est, elle venait tout juste de se libérer d'un joug de 400 ans. Ainsi se trouve-t-elle d'une part attirée par ses voisins européens, et d'autre part est-elle en quête de sa propre identité.

Cette situation a eu pour conséquence deux attitudes fondamentales : le mimétisme et le nationalisme, avec pour corrolaire une volonté de stabilité, éléments qui seuls permettent de comprendre la question de l'enseignement, et notamment de l'enseignement de la Géométrie et des Mathématiques, en Grèce

Imitation fidèle, le système éducatif grec s'est figé autour de ce modèle que constituait alors le système allemand. D'où son organisation structurelle, avec les différents niveaux de scolarité imités de la Prusse.

Quant au nationalisme du système grec, on peut le repérer à deux niveaux :

- **de manière générale** par le poids accordé aux études dites classiques (littérature grecque ancienne - grammaire - histoire - religion), l'enjeu de ces matières étant d'asseoir l'identité de la nation.
- **de manière spécifique** à l'intérieur du champ des Mathématiques : celles-ci doivent leur "survivance" en tant qu'objet d'enseignement principalement au fait qu'elle font référence à un glorieux passé, l'antiquité grecque. Et ce qui est alors enseigné, c'est davantage l'excellence et le génie des Grecs de l'antiquité que la matière elle-même.

Il convient aussi de rappeler, dans cette conclusion, la question linguistique (utilisation d'une langue archaïsante au détriment de la langue parlée), en ce qu'elle a créé des difficultés de compréhension et de communication.

Dans ce contexte, les programmes scolaires conçus et appliqués alors n'ont pas grand'chose à voir avec les programmes scolaires des sociétés contemporaines : pas d'objectifs d'apprentissage, de très rares conseils méthodologiques, des contenus imprécis. Un seul programme a fait exception à la règle, le programme de 1857, qui indique le contenu de l'enseignement en Géométrie. Mais, revers de la médaille, cette explicitation s'est trouvée sclérosée par le principe de stabilité que nous venons d'évoquer, au point que, jusqu'à aujourd'hui, c'est à peu près toujours les mêmes contenus que l'on retrouve.

Enfin, concluons sur ce paradoxe qui, nous semble-t-il, n'illustre que trop parfaitement la situation de l'enseignement : si les *Eléments de Géométrie* de Legendre ont, en Grèce, connu le succès que nous avons souligné, c'est principalement par ce que cet ouvrage était considéré comme une bonne adaptation des *Eléments* d'Euclide.

Références

CAJORI F., (1910) "Attempts made during the eighteenth and nineteenth centuries to reform the teaching of geometry", *The Americain Mathematic Monthly, 17*, pp. 181-201.

DAMASKINOS A., (1878), *Eléments de Géométrie de Legendre*, Traduction contenant des modifications et des ajouts, Athènes [en grec].

GAGATSIS A., (1985) *L'évaluation de la compréhension des textes mathématiques*, Thessalonique [en grec].

GAGATSIS A., (1989), *Sur certains problèmes de l'enseignement de la Géométrie en Grèce: un exemple: la symétrie orthogonale*, Seminaire d'Imag, Grenoble.

GAGATSIS A., (1992) *Eléments de l'histoire de l'éducation mathématique*, Thessalonique [en grec].

GAGATSIS A., (1993) Alcuni problemi dell'insegnamento della geometria in grecia. Un esempio: la simmetria ortogonale, in *La matematica e la sua didattica*, n“ 3, pp. 244-260.

KARANDINOS K., (1840) *Eléments de Géométrie de Legendre*, Traduction de la 12ème édition du texte français, Athènes [en grec].

KASTANIS N., (1986) *A bas Eucide - Nous ne serons pas des liquidateurs nationaux*, Groupe pour l'histoire des mathématiques, n“ 2, Thessalonique [en grec].

KASTANIS N., (1990) Le premier livre d'algèbre de l'éducation néohellénique, in *Les sciences mathématiques pendant la turcocratie*, Athènes [en grec].

SANFORD V., (1935) Adrien-Marie Legendre, *The Math. Teacher, 28*, pp. 182-184.

SCHBRING G., (1988) *Theoretical categories for investigations in the social history of mathematics education and some characteristic patterns*, 6th ICME, Budapest.

STAMPER A.W., (1906) *A History of the teaching of elementary geometry*, Dissertation in Columbia University.

HISTOIRE DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES EN ESPAGNE

MARIANO HORMIGON
Université de Saragosse (Espagne)

Je suis persuadé que beaucoup d'entre vous se demandent à quelle étrange mode appartient le fait de présenter dans un forum international un exposé sur l'enseignement des mathématiques dans un pays comme l'Espagne où, à moins d'être un spécialiste en histoire des mathématiques et, en outre, assez cultivé, on rencontrera d'énormes difficultés pour citer le nom de quelque auteur qui se soit distingué par ses mérites en matière de recherche et qui figure dans les histoires mathématiques les plus courantes dans les milieux professionnels ou de l'enseignement. Et même si votre inappréciable savoir vous rappelle quelque heureux personnage, comment pourrait-il résister la brûlure des lumières russes -soviétiques ou non-, françaises, britaniques, même allemandes, qui ont sidéré le monde avec leurs impressionnants résultats ? Sans vouloir s'engager en critiques -qui n'aboutiraient nulle part- sur comment ont été forgés les génies dans l'histoire intellectuelle de l'Humanité où, à mon humble avis, n'est pas or tout ce qu'on a fait briller, il y a longtemps que je considère que ce problème-ci, celui des grands génies, n'est qu'un moindre problème. S'il s'avérait le problème fondamental auquel pendant les deux derniers siècles se sont confrontés professionnels et politiciens de la science, enseignants et élèves liés ou étrangers aux mathématiques, créateurs mathématiciens prestigieux et les gens que cultivent leur bonheur et qui s'en fichent et s'en contrefichent de la substance et de l'utilité des mathématiques, outre les quatre règles de l'arithmétique et les figures élémentaires de la géométrie, alors tout le système éducatif du monde contemporain se tromperait beaucoup plus qu'il ne l'est. Parce que ce qui s'est imposé, depuis que les magnats de l'industrie ont eu besoin de gens avec une certaine instruction scientifique ou depuis que les peuples ont imposé à leurs états par la force de leurs révolutions le *désideratum* de José Marti, *être lettrés pour être libres*, n'a pas été la production des génies, mais l'enseignement de matières et de réponses concrètes de façon à assurer le fonctionnement des engrenages de l'édifice social de ces états.

Autrement dit, bien que certains auteurs comme Dieudonné ont réclamé qu'on considère comme mathématiciens ceux qui ont apporté à une théorie quelque chose de remarquable, cela ne constitue pas la raison par laquelle les mathématiques ont été et sont un élément obligé des études de tous les garçons et de toutes les filles du monde développé, en voie de développement et, bien sûr, du monde à développer, parce que, malgré les spécifités -voire, d'après les critères occidentaux, le retard- d'une civilisation donnée, on ne mettra pas à l'écart dans le processus de maturation des personnes le besoin de compter ou de mesurer. Ces aptitudes à nous rendre la vie plus facile moyennant son organisation numérique (en incise : on a écrit des feuilletons sur la deshumanisation du monde variante brûlage de livres, fuite des animaux, sur les larmes des poètes ou de la Gioconde, mais pourrait un créatif moderne imaginer ce que serait le monde sans chiffres ?) ou à permettre l'encadrement de l'espace ouvert de sorte que celui-ci puisse être mesuré, sont celles qui ont fait des mathématiques un élément nécessaire de la vie quotidienne et qui leur ont paré de l'auréole de *chose pratique*. En fin de compte, tous ceux qui ne sommes pas de génies des mathématiques avons de la chance, parce que si la seule préoccupation était la recherche, la formation et l'analyse ultérieur de la production scientifique des êtres exceptionnels qui ont contribué de manière remarquable à la création mathématique, il ne nous resterait même pas la voie qui mène à l'histoire mathématique de l'Espagne, nous ne pourrions entamer que la voie de quelque sorte de suicide collectif.

Heureusement, j'imagine que pour la plupart d'entre nous, parce que je suis sûr que parmi un si choisie publique il doit y avoir un génie mathématique accompli ou en germe, l'étendue sociale des mathématiques a transformé l'étude de son histoire en quelque chose de très convenable. Jusqu'à maintenant la pénurie de professionnels a provoqué que n'on contemple que les sommets les plus élevés, les rivières aux débits les plus importants de la géographie des mathématiques. Au fur et à mesure qu'augmente le nombre de personnes qui sommes payées pour nous consacrer à ces tâches, les nuances du paysage gagnent en clarté et le zoom de notre attention peut se fixer sur quelques développements intellectuels qui, soigneusement considérés, peuvent être d'intérêt pour tous et, parfois, passionnants. C'est sous cette perspective que j'envisage l'histoire de l'enseignement des mathématiques en Espagne, sujet passionnant pour moi en tant qu'Espagnol et, de ce fait, énormément concerné, surtout sur son présent et son avenir. A ce propos, je vais me référer à deux citations. D'une part, je suis d'accord avec la réflexion de Paolo Rossi sur la mémoire et l'oubli quand il se base sur la sentence de mon compatriote, le jésuite Gracian, qui affirme que celui qui n'a pas de mémoire n'a pas de futur. D'aute part, en ligne idéologique avec Karl Marx, je maintiens comme lui que ceux qui ignorent l'histoire sont condamnés à la répeter et, la deuxième fois, comme caricature. Voilà pourquoi c'est important de réfléchir sur certains développements de l'histoire de l'enseignement des mathématiques dans un pays comme l'Espagne qui, d'être un territoire où le soleil ne se couchait jamais, devint un état isolé et délaissé, saigné par de terribles guerres civiles qui aboutirent à une période dramatique de dictature fasciste de presque quarante ans. Quelques états actuels devraient réfléchir, tenant compte de l'expérience des Espagnols, sur le destin final de certaines positions irréfléchies.

Il y a des pays qui sont caractérisés par la profonde empreinte de l'isolationisme. Si l'isolement est imposé par la voie militaire ou policière les conséquences n'iront au delà de quelques centaines de miliers de *wet backs* flottants dans un fleuve ou dans un détroit quelconque. L'Espagne, naturellement, a subi son processus d'isolationisme depuis que Philippe II décida, en 1559, d'interdire aux ressortissants du royaume d'Espagne de sortir étudier à l'étranger. Evidemment, le but poursuivi par sa Catholique Majesté était de prévenir l'héressie de ses vassaux, mais les conséquences pour l'équipement de son armée -perceptibles au terme d'un demi-siècle- et sur la capacité d'articulation de ce que l'on pourrait appeler les forces vives de l'état préindustriel et précédant le siècle des lumières ont été catastrophiques. Cependant, dans le cas d'espèce, il y a eu aussi des conséquences positives du fait qu'on a du donner une formation, par le biais d'écoles spécialement établies pour des matières spécifiques -comme celles pour la formation d'artilleurs ou pilotes- dont l'axe central était l'enseignement des mathématiques. Sous le gouvernement des Habsbourg -XVI^{e} et XVII^{e} siècles- les responsables les plus directs de cet enseignement étaient les jésuites. Mais pas les seuls. Des religieux appartenant à d'autres ordres et même des civils se cont consacrés brièvement à ces tâches. Comme preuve de que tout n'a pas été stérile dans le domaine des mathématiques ont peut signaler à l'époque d'oeuvres de valeur, en particulier plusieurs collections de l'*Acta Eruditorum* de Leipzig, dans certains centres d'enseignement, voire des universités.

L'espace dont je dispose pour cet exposé et les précédents sur lesquels on peut se fonder afin d'aboutir au XX^{e} siècle m'obligent à partir d'un horizon plus proche, comme celui des siècles des lumières espagnoles et le mouvement de la préindustrialisation du XVIII^{e} siècle. Le changement de dynastie et les conséquents renouvellements des attitudes qui entraînent l'ascencion des Bourbons ont contribué à entreprendre avec un certain dynamisme le processus de transformation intellectuelle qui sépare le Barroque du Siècle des Lumières et dans lequel les sciences utiles en général et les mathématiques en particulier ont joué un role saillant.

1988 a marqué le bicentenaire de la mort de Charles III, l'un des rares monarques qui, parmi tous ceux qui ont gouverné l'Espagne, mérite d'être remémoré avec respect. Cet évènement est sans aucun doute la raison de l'augmentation du nombre et de la qualité des études sur le siècle des lumières espagnoles et, en particulier, sur les sciences et les mathématiques de la deuxième moitié du XVIII^{e} siècle, travaux qui ont complété les recherches précédentes des spécialistes. Donc, on peut signaler quelques caractéristiques importantes de l'implantation et de l'évolution des études des mathématiques à cette époque, que je procède à résumer de la façon suivante :

1.- La production mathématique espagnole -et plus spécialement celle orientée à l'enseignement- s'est développée de façon remarquable grâce aux dispositions des gouvernements de l'époque. Les récentes études quantitatives[1] montrent qu'entre 1700 et 1809 on a publié en Espagne 203 titres de mathématiques, dont 71 appartiennent à la période 1768-1788 (règne de Charles III) et 100 (presque 50%) à la période 1768-1798.

2. - Au XVIII^e siècle les militaires, les marins et les jésuites donnent un grand élan aux mathématiques en Espagne. Ces trois secteurs de la société introduisent les sciences exactes dans les centres de formation, avec une prédilection spéciale pour les mathématiques mixtes. De cette façon, on enseigne les mathématiques non seulement dans les académies d'ingénieurs, artilleurs et marins, mais également dans les séminaires des nobles, parfois à un niveau de modernité acceptable. Je veux dire par là qu'on enseigne le *calculus*.... Les universités introduisent elles aussi quelques disciplines mathématiques, bien qu'il faut attendre que le siècle soit bien avancé pour que l'on puisse parler d'un enseignement de qualité.

3. - Le phénomène éducatif le plus important du siècle des lumières espagnoles est représenté par ce qu'on appelle les Sociétés Economiques d'Amis du Pays, lesquelles, avec l'appui de la Couronne, s'organisent autour des bourgeois, des religieux et des aristocrates défenseurs des nouvelles idées. La première, qui a servi de modèle à toutes les autres, a été la Basquaise, qui a été établie au Séminaire de Vergara (Guipuzcoa), dirigée par le Comte de Floridablanca. Au sein de cette institution on en entammé une politique de relations avec l'extérieur à travers des invitations aux scientifiques étrangers et des voyages d'études d'espagnols au delà des frontières (les frères Fausto et José de Elhuyar, par exemple). Benito Bails, sur lequel je parlerai ci-près, a été professeur à la Basquaise. Par la suite se sont développés d'autres sociétés, parmi lesquelles la Société Économique Aragonaise, très active jusqu'au début de la guerre de 1808, occupe une place de choix à cause de l'intérêt qu'elle a porté sur la pédagogie. Cette société, une de celles que l'on connaît le mieux[2], s'est distinguée par l'établissement d'écoles consacrées à des matières utiles à la formation d'artisans, telle que la chimie, la botanique, le dessin, le filage, l'économie et, bien sûr, parmi les plus solides on trouve les mathématiques, pour lesquelles ont a établi un plan d'études en quatre ans, les deux premiers voués fondamentalement aux sujets de base (arithmétique, algèbre et géométrie), le troisième au calcul infinitésimal et le dernier à l'application des mathématiques aux disciplines physiques de base. Ces écoles ont récompensé les professeurs -de préférence militaires- qui avaient élaboré des manuels pour les étudiants. Les écoles des Sociétés Économiques d'Amis du Pays ont perdu leur raison d'être quand, à la fin du premier tiers du XIX^e siècle -en particulier en 1836- ont a procédé à la structuration du tissu éducatif de l'état libéral avec la création des instituts d'enseignement secondaire.

4. - Pendant le XVIII^e siècle ont a rédigé plusieurs textes destinés à l'enseignement des mathématiques dans les institutions ci-dessus, beaucoup d'eux sur commande des autorités pertinentes qui, par ce biais, voulaient moderniser la connaissance de cette matière. Le plus complet et le plus ambitieux de tous est celui du catalan Benito Bails (1730-1797), réalisé pour les cours de mathématiques de l'Académie de San Fernando de Madrid. Bails avait été éduqué en France et en 1772 avait été chargé de préparer un ouvrage pour recueillir les connaissances mathématiques de l'époque : il l'a intitulé *Elementos de matematicas*, en dix volumes en 4°, et sa publication s'est achevée en 1783. En 1778 il a publié un autre ouvrage en trois volumes en 8°, intitulé *Principios de matematicas*, qui a été le manuel le plus employé dans les établissements scolaires.

Toute l'oeuvre de Bails est un manuel, y compris les imposants *Elements* ; donc ce n'est pas la peine d'y chercher des indices d'originalité. C'est un outil de travail. Cet ouvrage, les *Elements*, se divise en deux parties fondamentales. Les trois premiers volumes sont consacrés

---

[1] MARTIN CASALDERREY, F. (1980) "Catàlogo de obras y autores matemàticos del siglo XVIII : Espana e Hispanoamérica". *Revista de la Universidad de Santander*, 2 (2ª), 1315-1319.

[2] ARENZANA VICTOR (1987) *La ensenanza de las matematicas en Espana en el siglo XVIII. La Escuela de Matematicas de la Real Sociedad Economica Aragonesa de Amigos del Pais.* Zaragora, Publicaciones del Seminario Matematico Garcia de Galdeano, Universidad de Zaragoza.

aux mathématiques pures (Vol. 1 - Arithmétique et Géométrie ; Vol. 2 - Algèbre ; Vol. 3 - Application de l'Algèbre à la Géométrie et au Calcul infinitésimal : Vol. 4 - Dynamique ; Vol. 5 - Hydrodynamique ; Vol. 6 - Optique ; Vol. 7 - Astronomie ; Vol. 8 - Astonomie physique ; Vol. 9 - Architecture civile et Hydraulique ; Vol. 10 - Tables et logarithmes). Ses sources d'inspiration ont été françaises, surtout le *Cours de Mathématiques de Bézout pour la Formation des Gardes de Pavillon et de la Marine*. Bails a apporté une abondante bibliographie de plus de cent titres d'auteurs contemporains qu'il suit et qu'il recommande aux lecteurs qui désirent plus d'information sur le sujet. Parmi ces auteurs ont peut souligner les Bernoulli, Clairaut, d'Alembert, Euler, Newton, Ricatti, Wolf et le propre Lagrange.

Bails, qui malgé sa raffinée prudence a subi la rigueur de l'Inquisition, qui en arriva à l'incarcérer accusé d'être athée, n'a pas manqué de courage car, en tant qu'argumentation téléologique il a remplacé les obligées servitudes à la Théologie sainte par la recherche de la vérité scientifique. On y trouve des aspects qui jaillissaient par tous les recoins européens, par exemple sa critique sur la rigueur excessive dans l'exposition des mathématiques et sa défense de l'efficacité procédurière, l'exigence de l'homogénéisation du système de mesures (surtout pour les distances), l'algorithme pour le développement de l'algèbre, les méthodes d'Euler pour le développement du calcul, etc.

Cependant, on ne doit pas oublier que l'oeuvre de Bails, comme celle de beaucoup d'autres mathématiciens de son époque, est dédiée à l'utilité pratique des mathématiques. C'est pour cela que, après les trois volumes consacrés à l'Arithmétique, à l'Algèbre et au Calcul différentiel et intégral, il affirme dans la préface du quatrième volume :

"Il est temps de révéler l'application de ces artifices, parce que sur elle repose le bénéfice que le genre humain puise de l'étude des mathématiques".

Le règne de Charles III a eu une répercussion déterminante sur la réforme des structures universitaires et a favorisé, bien que timidement, l'introduction des études de mathématiques -et d'autres sciences- dans les nouveaux plans que depuis 1771 ont adoptés les universités espagnoles. On a approuvé des textes différents et d'un varié niveau intellectuel : on peut citer non seulement celui de Villalpando, utilisé à Saragosse, et celui de Lacaille à Valence, mais également ceux rédigés par Wolf, Corsini et d'autres. Rien qu'à l'Université de Salamanca il faut souligner la présence de Juan Justo Garcia (1752-1830), Professeur d'Éléments d'Arithmétique, Géométrie et Algèbre, auteur des *Elementos de Aritmética y Algebra* publiés en 1782, qui par la suite ont été l'objet d'une assez large diffusion parmi les universités et d'autres établissements d'enseignement espagnols.

Dans le Séminaire des Nobles, régenté par les jésuites avant leur expulsion, et sous la direction de Jorge Juan depuis 1771, on s'est adonné aussi à l'enseignement des mathématiques. Antonio Rossel (1748-1829), auteur de l'ouvrage *Instituciones matematicas* destiné à l'enseignement d'initiation, et Vincente Duran y ont donné des leçons.

Les Collèges et Académies militaires qui n'avaient pas disparus au cours des successives réformes de l'Armée ont gardé leur niveau traditionnel. L'exemple le plus significatif est le Collège Militaire d'Artillerie de Segovia qui, dès sa fondation en 1764, a déployé une très intéressante activité. On a évalué très positivement le fait que les professeurs ont publié des manuels et ont recueilli dans la bibliothèque la crème de la littérature mathématique de l'époque. Un détail qui peut faire preuve de l'environnement créé par le Collège de Segovia est l'autorisation accordée en 1773 par l'Inquisiteur Général afin que les professeurs de l'établissement puissent lire des livres interdits. Ces professeurs étaient Antonio Eximeno, un jésuite originaire de l'école de l'abbé Tosca, et Cipriano Vimercati, qui a exercé comme professeur jusqu'à 1776 et a publié un manuel de mathématiques destiné à l'enseignement. Il a été succédé par Pedro Giannini, auteur d'un manuel de mathématiques en quatre volumes visant les élèves de l'École Militaire Royale d'Artillerie. La structure interne de ce manuel est propre de l'époque : trois volumes consacrés aux contenus purs et le quatrième à leurs applications. D'après le catalogue élaboré par Giannini lui-même, en 1774 la bibliothèque disposait de 682 ouvrages répartis en 2554 volumes, outre les collections comme l'*Acta* de Leipzig déjà citée, les

Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, le *Journal des Savants*, la *Bibliothèque Britannique* et d'autres[3].

Normalement on délimite le XIX^e siècle espagnol entre 1808, date du début de la dénommée Guerre de l'Indépendance contre les Français, et 1898, chiffre funeste pour le chauvinisme espagnol où les peuples de Cuba, des Philippines et de Puerto Rico, en se secouant le joug colonial, ont eu l'occasion de commencer à connaître d'autres dominations *made in USA*. Pour comprendre un peu l'évolution de l'enseignement des mathématiques au long de cette période, la première des perspectives que j'ai choisie paraîtra certainement insolite pour ceux qui, comme de raison, regardent l'histoire d'Espagne avec le kaléidoscope des réalités hispaniques du dernier demi-siècle. La survivance d'une armée anachronique, composée surtout de cadres chevronnés dans les campagnes africaines du début du XX^e siècle et idéologiquement préparée pour défendre un régime -celui du Général Franco- contre son propre peuple a contribué à répandre le sentiment que les choses ont toujours été comme cela. Nationalistes espagnols, coryphées de grandeurs hispaniques ruinées et détracteurs implacables de l'histoire d'un pays plus complexe que celui encadré dans quelque légende noire ont donné prise à une sorte de considérations négatives de tout ce qui pouvait avoir parfaitement un rapport, d'un point de vue objectif, avec les militaires espagnols, qui depuis le XVI^e siècle n'ont gagné que les guerres qu'ils ont livré contre leur propre peuple. Partant de ces hypothèses, que pourrait-on espérer du concours intellectuel qu'une armée de soudards aurait apportée à la science ? Une fois dépassées les phases du fanatisme historiographique où les partisans de la *légende rose* et ceux favorables à la *légende noire* ont laissé de côté les arguments viscéraux et se sont mis à étudier, on a découvert que dans l'histoire de l'armée espagnole le métal précieux qui brillait n'était pas nécessairement celui des épées. Des études successives sur le XVIII^e siècle espagnol et quelques esquisses sur le XIX^e ont nuancé ces fausses idées enthousiastes ou défaitistes, en remplaçant les préjugés et les intuitions par des études de plus en plus sérieuses.

Les mathématiques espagnoles du début du XIX^e siècle sont le rejeton des Lumières françaises, même aussitôt et longtemps après l'entrée de l'armée de Napoléon en Espagne en 1808. Le halo d'exellence des mathématiques de l'époque révolutionnaire se matérialise en épisodes qui font la preuve de l'adhésion aux réalisations scientifiques françaises, qui surtout au sujet de quelques aspects précis, tel que les versions espagnoles de Monge ou Lacroix parmi d'autres, s'effectue dans un délai vraiment court. Velamazan a souligné que la Géométrie de Monge était déjà traduite en espagnol en 1803 quoique, malheureusement, on ignore qui a été son traducteur. D'autres titres ont été : CONDILLAC A. (1805) *La lengua de los calculos*. Madrid. Traduit par la Marquesa de Espeja ; LACROIX S.F. (1805) *Introduccion a la Geografia matematica y critica*. Madrid. Traduit par Francisco de Clemente y Miro ; LACROIX S.F. (1808) *Curso completo elemental de Matematicas puras. Tomo II : Algebra* Madrid. Traduit par José Rebollo y Morales. 6 éditions ; LACROIX S.F. (1818) *Tratado elemental de Aritmética. Toma I.* 2^e édition. Madrid. Traduit par José Rebollo y Morales. 7 éditions ; LACROIX S.F. (1821) *Tratado de Trigonometrica rectilinea y esférica, y de la aplicacion del Algebra a la Geometria. Tomo IV*. Madrid. Traduit par les Professeurs de Mathématiques des Caballeros Pages (sic) de S.M. 8 éditions (8^e édition, 1846) ; LACROIX S.F. (1827) *Elementos de Geometria..* 2^e édition. Madrid. Traduit par José Rebollo y Morales. 3 éditions.

On pourrait dire autant de certaines nouvelles idées qui arrivent en Espagne dans la première moitié du XIX^e siècle dans les oeuvres de José Mariano Vallejo, quelques ingénieurs militaires et autres. Malheureusement, dans l'Espagne contemporaine armée et société ont rarement marché du même pas et en la même direction, ce qui explique que le plus que honorable niveau des mathématiques que l'on étudiait dans quelques académies militaires espagnoles pendant les décennies les plus dures du XIX^e siècle, comme Maria Angeles Velamazan a signalé dans sa

---

[3] Sur les mathématiques en Espagne au XVIII^e siècle voir HORMIGON Mariano (1990) "Las matematicas en la Illustracion espanolo. Su desarrolo en el reinado de Carlos III". In : Joaquin Fernandez Pérez & Ignacio Gonzalez Tascon (eds), *Ciencia, Técnica y Estado en la Espana Ilustrada*. Zaragoza, Ministerio de Educacion y Ciencia/Sociedad Espanola de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, pp. 265-278.

thèse de doctorat, n'ait pas eu sa contrepartie adéquate dans la société civile, malgré les idées qu'on pourrait extraire du climat généré par les versions espagnoles ci-dessus. Parmi les multiples aspects d'intérêt concernant les apportations militaires à la modernisation des mathématiques en Espagne qu'on pourrait souligner on distingue celui des voyages en Europe -particulièrement à Paris- de certains ingénieurs et artilleurs pour connaître les plans d'études et l'organisation scolaire des établissements des futurs officiers. Par ailleurs, Velamazan a défini, par exemple, et je suis d'accord avec son avis, une des périodes de l'histoire des mathématiques militaires du XIX^e espagnol en ce qui concerne les aspects de base de la formation mathématique (arithmétique, algèbre, etc.) comme *période française*. Il s'agit, en somme, de la période comprise entre la fin de la Guerre de l'Indépendance (1814) et 1833, date où les militaires espagnols se substituent totalement aux auteurs forains dans le champ de la formation miliaire pour ce qui concerne les matières qu'on vient de nommer. Donc au point de vue de ce secteur, minoritaire mais extrémement significatif pour la science et les mathématiques, l'influence française et paradigmatique[4] . Mais pour ne pas trop m'attarder sur les voies de pénétration des oeuvres de l'autre côté des Pyrénées dans ce côté-ci, et compte tenu de la remarquable répétition d'auteurs, je vais centrer plus mon attention sur le secteur civil, non sans prévenir, cependant, que j'ai déjà présenté le sujet de l'influence française au colloque organisé par le Professeur Jean Dhombres à Paris en Décembre dernier. Pour l'étude du secteur civil, maintenant nous disposons, en outre, des recherches effectuées par Fernando Vea, également à l'occasion de sa thèse doctorale, sur les mathématiques et l'enseignement secondaire en Espagne au XIX^e siècle[5] , recherches que je m'apprête et où, aux appréciations de la simple compilation on peut ajouter quelques données importantes relatives à la quantification légiférée dans un secteur clé pour cette sorte de besogne (je crois que toute personne qui ait la moindre connaissance des prétentions de futur d'une politique de marketing conviendra avec moi que l'investissement en enseignement secondaire est plus solide et a plus d'avenir que tout autre segment éducatif. Ce qu'on apprend à un âge déterminé reste soudé à la personnalité pour longtemps).

L'enseignement secondaire commence a être réglé en 1836. L'esprit des gouvernements libéraux modérés de munir ce secteur éducatif d'une certaine rigueur a poussé quelques uns des

---

4 Sur le rôle des militaires dans les mathématiques en Espagne au XIX^e siècle voir : VELAMAZAN M^a Angeles & AUSEJO, Elena (1989) "Los planes de estudio en la Academia de Ingenieros del Ejército de Espana en el siglo XIX". *Llull, Revista de la Sociedad Espanola de Historia de las Ciencias y de las Técninas*, 12(23), 415-453. VELAMAZAN M^a Angeles (1990) "L'Enseignement des Mathématiques dans les Ecoles Militaires en Espagne au XIX^e siècle". In : Elena Ausejo (ed.), *Science and Society in Contemporary Spain, Proceedings of the XVIIIth International Congress of History of Science (Hamburg-Munich, 1-9 August 1989).* "Cuadernos de Historia de la Ciencia", 6. Zaragoza, Seminario de Historia de la Ciencia y de la Técnica de Aragon, Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza, 23-38. VELAMAZAN M^a Angeles (1991) "Catalogo del Fondo Bibliografico historico-cientifico de la Academia General Militar de Zaragoza (1800-1940)". *Llull, Revista de la Sociedad Espanola de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, 14(26)*, 302-324. VELAMAZAN M^a Angeles &AUSEJO, Elena (1991) *"La ensenanza de las Matematicas en la Academia de Ingenieros en Espana en el siglo XIX"*. In : Manuel Valera & Carlos Lopez Fernandez (eds), *Actas del V Congreso de la Sociedad Espanola de Historia de las Ciencias y de las Técnicas.* Murcia, Promociones y Publicaciones Universitarias, vol. 2, pp. 1307-1317. VELAMAZAN Maria Angeles (1993) *La Ensenanza de las Matematicas en las Academias Militares en Espana en el siglo XIX*. Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza. VELAMAZAN M^a Angeles & AUSEJO, Elena (1993) "De Lagrange à Cauchy : el Calculo Diferencial en las Academias militares en Espana en el siglo XIX". *Llull, Revista de la Sociedad Espanola de Histoiria de las Ciencias y de las Técnicas, 16(30)*, 327-370. VELAMAZAN, M^a Angeles (1993)"Nuevos datos sobre los estudios de Geometria Superior en Espana en el siglo XIX : la aportacion militar". *Llull, Revista de la Sociedad Espanola de Historia de las Ciencas y de las Técnicas, 16(31)*, 587-620. VELAMAZAN M^a Angeles (1993) "The *Memorial de Ingenieros*". In : Elena Ausejo & Mariano Hormigon (eds), *Messengers of Mathematics* : European Mathematical Journals (1800-1946). Madrid, Siglo XXI, pp. 259-266. VELAMAZAN M^a Angeles (1993) "Le rôle de l'Armée dans le développement du journalisme scientifique en Espagne pendant le XIX^e siècle". In : *Colloque sur le Journalisme Scientifique au XIX^e siècle* (Paris, Décembre 1992). A paraître.

5 VEA Fernando (1992) *Las matematicas en la ensenanza secundaria en Espana en el siglo XIX*. Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza.

gouvernements de la Reine Isabelle II a établir des listes officielles de manuels d'usage obligatoire dans l'ensemble des établissements scolaires du pays, les lycées (*Institutos*), chargés de dispenser ce type de formation. Cette documentation illustre le niveau de l'influence française exactement dans la moitié du siècle. La première liste dont on dispose correspond a l'année 1846 et la dernière est apparue en 1852 afin de régler les textes pour l'année scolaire1852-53. Ces listes font référence aux diverses matières pour chaque plan d'études

Les disciplines mathématiques habituelles des successives réglementations de la période en question ont été : Arithmétique et Géométrie, Éléments de mathématiques, Applications courantes de l'Arithmétique et autres y afférentes comme, par exemple, Topographie. En réalité, comme Fernando Vea a démontré, les contenus ne différaient pas beaucoup les uns des autres et la variété des dénominations n'a été qu'un simple changement de noms, car la picaresque espagnole a surmonté les contraintes juridiques par une simple méthode : chaque professeur expliquait ce qui bon lui semblait ce qui généralement était le seul manuel qu'il connaissait, à l'écart de tout ordre émanant des hauteurs ministérielles. Habituellement, malgré la bigarré multiplicité de plans, dispositions et ordres on a essayé d'assurer une formation éléméntaire de base en arithmétique, géométrie, algèbre, trigonométrie plane et quelques applications extrémement utiles comme la comptabilité. L'entortillée réglementation espagnole du XIX^e siècle en matière d'enseignement ne peut pas être expliquée en quelques mots. On pourrait penser que chaque ministre a voulu entrer dans l'histoire avec l'élaboration d'un plan d'études ou d'un réglement définitif, mais le sujet ne devrait pas être très solide du moment que certains ministres qui ont réussi à occuper le poste pendant l'étonnante période de deux années scolaires ont introduit amendements à leur première proposition. Plus de vingt-cinq plans en moins de trois quarts de siècle est un chiffre qui, même sans appui d'examens comparatifs, sera difficile à battre.

Très probablement avec l'intention de se défendre de certaines critiques acerbes, le choix des textes de la première et courte liste officielle relative à arithmétique et géométrie[6] s'est proposé non seulement y introduire les noms déjà réputés de mathématiciens espagnols vivants, tels que José Mariano Vallejo, José de Odriozola, Alberto Lista et Juan Cortazar, mais aussi recommander deux volumes du *Traité* de Lacroix et les mathématiques de Francoeur. Vea se demande si ce texte était la traduction de Lista du livre de Francoeur ou le traité écrit par Lista en se basant sur celui de Francoeur, comme le religieux libéral espagnol reconnaît dans la préface. Effectivement, on n'a pas trouvé la traduction de l'ouvrage de Francoeur. La liste, comme toutes les dispositions découlantes des gouvernements espagnols du XIX^e siècle, n'est restée en vigueur qu'une année scolaire. C'est pourquoi celle qu'on a conseillé pour l'année suivante, 1847-48, était beaucoup plus détaillée et s'attardait soigneusement sur chacune des sections fondamentales des mathématiques élémentaires[7] . Lacroix était officialisé pour l'enseignement de l'arithmétique, l'algèbre, la géométrie et la trigonométrie. Et à côté de Legendre[8] , conseillé pour l'enseignement de la géométrie et la trigonométrie, on trouvait un autre auteur français qui

---

[6] Le texte officiel sur la Gaceta de Madrid disait :
"Los tomos 1° y 3° del *Tratado de matematicas* de Lacroix, traducido por Rebollo, ultima edicion de Madrid. Primera y segunda del tomo 1° de la obra de D. José Mariano Vallejo, titulada *Tratodo elemental de matematicas* ; ultima edicion de Madrid. Los tomos 1° y 2° del *Curso completo de matematicas puras*, por D. José de Odriozola, reformado por el mismo ; ultima edicion. *Matematicas puras* por Francoeur, traduccion de D. Alberto Lista. *Tratado de aritmética* por D. Juan Cortazar ; un tomo en 8°, marquilla, 1846".

[7] La voici : "*Aritmética : Tratado de aritmética* de Mr. Lacroix, traducido por Rebollo, ultima edicion. Idem de Bourdon, traducida. Idem de Vallejo (obra elemental). Idem de Cortazar. *Algebra : Tratado elemental de algebra* de Lacroix, traducido por Rebollo. *Curso de matematicas*, por Odriozola. *Tratado elemental de algebra*, por Vallejo. *Geometria : Tratado elemental de geometria* de Lacroix, traducido por Rebollo. Idem de Legendre, traducido por Gilman, sin dar las notas. *Curso de matematicas*, por Odriozola. *Tratado elemental de geometria*, por Vallejo. *Trigonometria plana : Tratado elemental de trigonometria*, por Lacroix, traducido por Rebollo. Idem de Legendre, por Gilman, sin dar las notas. *Curso de matematicas* de Odriozola. *Tratado elemental de trigonometria*, por Vallejo. *Topografia : Curso de matematicas*, por Odriozola. *Tratado de topografia* de Carrillo".

[8] Le livre de Legendre était LEGENDRE, A.M. (1849) *Tratado de Trigonometria rectilinea y esférica*. 2^a ed. Madrid.

serait largement suivi en Espagne à cette époque là- : Pierre Louis Marie Bourdon. Cette tendance subsiste pendant les deux années suivantes, bien qu'en 1849-50 on publie une nouvelle liste où les français recommandés sont les mêmes.

Comme d'habitude, l'adoption de manuels officiels se justifiait par une légitime envie d'offrir une doctrine solide et mise à jour et cet argument est répété de génération en génération et par chacun des professeurs quand il impose un type déterminé de pages comme moyen obligatoire pour réussir un examen déterminé. Mais, évidemment, cette adoption a d'autres répercussions. Outre la confirmation de l'influence française, sous la perspective personnelle des auteurs d'une époque quelconque le fait d'introduire un livre dans une liste officielle a impliqué un atout non négligable pour les minuscules revenus perçus par les professionnels de l'enseignement (en Espagne on a créé un éloquent dichon qui fait bonne preuve de l'intérêt que le pouvoir public à dispensé aux enseignants : *être plus pauvre qu'un maître d'école*). Sans doute pour cette raison la liste afférente à l'année 1850-51 était ostensiblement plus courte et n'y figuraient que trois auteurs espagnols. Bien qu'en Espagne quelques professeurs d'instituts de province pouvaient profiter de la vente des traductions des collègues français, les mathématiciens de la capitale (Madrid) avaient profité de la proximité de détenteurs du pouvoir de décider sur les contenus des listes officielles dictées par le Ministère. Même dans la dernière des listes publiées, celle relative à l'année scolaire 1852-53, tout aussi brève que les précédentes, l'éminant mais décédé Joseph Mariano Vallejo a été remplacé par le deuxième professeur agrégé de mathématiques de l'Institut de Madrid, Acisclo Fernandez-Vallin (après tout, celui qui a remporté de morceau, et on n'exagère pas si l'on dit qu'il a roulé sur l'or grâce à ses manuels, c'est Juan Cortazar, mais ceci n'est pas le sujet du travail).

L'appât du gain -sans doute masqué de patriotisme- des mathématiciens de Madrid et d'autres endroits du pays, lesquels, une fois l'officialité fini, se sont rendus compte des avantages de copier un livre existant et de l'imposer aux élèves de l'Institut où ils étaient titulaires d'une chaire, n'a pas entraîné un grave préjudice à la pénétration en Espagne des textes mathématiques français. Par une simple raison : le besoin de rénovation du message éducationnel était un facteur d'incidence implacable dans la nécessité de s'adresser à des sources foraines, et le premier lieu où l'on regarde en Espagne c'est de l'autre côté des Pyrénées. En ce moment-là l'auteur choisi a été Cirodde, un professeur du Lycée Napoléon dont les oeuvres avaient recueilli les compliments du Conseil d'Instruction Publique de France en tant que manuels. Vea, qui a étudié comparativement les contenus de oeuvres des auteurs espagnols de l'époque et des français importés, n'a pas hésité à évaluer positivement la traduction des oeuvres de Cirodde, aussi bien par le niveau des mathématiques qu'on y expose, que par la modernité de leur développement.

Si, pendant les deux premières décennies de la deuxième moitié du siècle les figures clés de la présence française dans les mathématiques espagnoles sont Cirodde et Bourdon, auteurs dont les oeuvres sont régulièrement réimprimées, au début du dernier quart du siècle s'est produit la logique relève générationelle avec la diffusion de versions d'autres auteurs tels que Briot, Rouché, Comberouse et autres. A cette date la communauté mathématique espagnole avait suffisamment grandie pour apprécier les traits les plus significatifs de son retard. Comme d'habitude, à l'heure de se pencher sur les responsabilités de ce retard, plus d'un auteur a donné tort à la persistente influence française et à l'ensemble d'auteurs ci-dessus, comme si le niveau élémentaire des oeuvres importées était la cause du faible souci de formation et d'information de la plupart des domaines. A titre d'exemple, on peut rappeler quelques expressives lignes de José Augusto Sanchez Pérez, tirées de la Nécrologie d'Octavio de Toledo, publiées dans la *Revista Matematica Hispano-Americana* en 1934! :

"La culture mathématique espagnole du dernier tiers du XIX^{e} siècle consiste, généralement, en la traduction d'une culture française passée, basée sur Cirodde, Rouché, Salmon, Navier et Francoeur. Avec ce bagage de connaissances on devenait savant en Espagne".

Outre de l'échappée par la tangente qui signifiait la critique de l'influence française parmi les intellectuels espagnols un autre facteur a pris du corps : l'introduction des référants allemands dans la presque totalité des différentes professions. Plus précisement, en mathématiques, cette contre-offensive a été menée depuis l'Institution Libre d'Enseignement au moyen de la traduction de Eugenio Jiménez et Manuel Merelo des *Eléments de Mathématiques* de Richard Baltzer, plus moderne et d'un niveau plus élevé que les productions françaises comparables.

Cependant, en même temps que le dernier quart du XX^{e}, entraient dans l'histoire des mathématiques en Espagne des protagonistes remarquables de la transformation que cette profession allait subir au long de la tranche finale de ce siècle et du premier tiers du XX^{e} siècle.

Parmi tous ces personnages, sans doute le plus important dans le cas d'espèce, l'enseignement de mathématiques, et presque pour tout autre affaire concernant l'histoire des mathématiques, est Zoel Garcia de Galdeano (1846-1924), dont le manque d'atouts intellectuels fascistes pour affronter l'histoire -un inconvénient sérieux pour être objectivement évalué en Espagne pendant une bonne partie du XX^{e} siècle - lui a ôté sa dûe renommée. Garcia de Galdeano a été beaucoup plus estimé à l'étranger que dans sa patrie.

Un fait très peu connu jusqu'à présent, qui peut indiquer l'estime que les mathématiciens français ont portée vers Garcia de Galdeano, sont les condoléances que Hadamard a présentées à l'Université de Saragosse à l'occasion de sa mort. La lettre, datée à Paris le 22 Juin 1924, dit[9]

"J'envoi à l'Université de Saragosse, à l'occasion de la perte qu'elle vient de faire en la personne du vénéré professeur Don Zoel Garcia de Galdeano, l'expression de ma profonde et douloureuse sympathie".

J. Hadamard
25, rue Alexandre de Humboldt, Paris (14^{e})

Zoel Garcia de Galdeano est né le 5 Juillet 1846 à Pamplona, la capitale de la Navarre. Malgré la vieille souche de sa famille maternelle, comme celle-ci n'a pas toujours signifié confortable fortune en Espagne, la prématurée mort de son père a détemíné le déplacement de Garcia de Galdeano et sa mère à Saragosse, une ville peuplée d'avantage qui offrait plus de possibilités de survivance et d'études. Garcia de Galdeano raconte dans son *Autobiographie* que, pendant ces années là, il aidait sa mère en donnant des cours de mathématiques, où il expliquait les oeuvres élémentaires de Fernandez Cardin, Fernandez Vallin et Cortazar, utilisées à l'époque dans les lycées et d'autres centres du même niveau académique. Pendant ce temps, dans cette décade des années soixante, il est devenu sous-ingénieur arpenteur, et déjà en 1869, maître.

Les choses avaient alors changé. La révolution de 68, qui a expulsé de l'Espagne l'écervelée reine Isabelle II et a essayé de limiter le pouvoir de sa miraculeuse cour, a déclaré la liberté de l'enseignement, réformé les plans d'études et donné de l'espoir aux expectatives personnelles de beaucoup de citoyens et quelques citoyennes qui s'entêtaient à la liquidation des vieilles structures sociales, politiques et idéologiques espagnoles.

Un échec opportun dans le concours de maîtres l'été de 1869 a mené Garcia de Galdeano à affronter un autre type de futur : grâce aux nouvelles conditions scolaires, en Septembre de cette même année, il est devenu bachelier en qualité d'élève *libre*, et il a aussitôt commencé ses études de Philosophie et Lettres et Sciences, qu'il a finies en 1871.

En 1872, il a contribué à la création du lycée de Calahorra, une ville historique à la Basse Rioja, et c'est à cette époque là qu'il a commencé son oeuvre écrite en mathématiques avec deux travaux assez prémonitoires de sa future trajectoire. Il s'agit de *Consideraciones utiles en el estudio de las matematicas elementales* (1874) et de *El método en la ciencia matematica* (1875). Trois éléments, trois constantes si l'on veut, de la production mathématique de Garcia de Galdeano y sont déjà présents. Le premier montre les avantages d'une vaste formation philosophique et scientifique. Le deuxième révèle sa préoccupation pour l'enseignement. Le troisième, finalement, renvoit à sa préoccupation méthodologique sur la création et le

---

9 Le document se trouve dans le classeur *Profesorado* aux Archives de l'Université de Saragosse, avec tout un tas de papiers sur Garcia de Galdeano.

développement des mathématiques. A l'époque Garcia de Galdeano manquait d'information significative sur les résultats et les débats mathématiques en cours, dont une bonne partie se déroulait dans les domaines de la méthodologie, de l'enseignement des mathématiques et de la réflexion sur le rôle des mathématiques dans les sciences naturelles et dans l'ensemble du savoir. Dans les mathématiques du début du dernier quart du XIX^e siècle on sentait le besoin de surpasser les schémas et critères du XVIII^e siècle pour implanter des modèles plus généraux afin de fournir, même au prix de la splendeur procédurale, efficacité et généralité à l'effort créateur et enseignant. Celle-ci n'a pas été la seule fois où, toujours à mon avis, Garcia de Galdeano a apporté une idée de futur qui n'a pas été notée dans la littérature mathématique générale -peut-être parce qu'il écrivait en espagnol et habitait la province- et qui, énoncée après par quelque mathématicien éminent, a été alors adoptée par tous les professionnels. En tout cas, ce n'est pas question d'exhumer des désirs de gloire ; il ne s'agit que d'une simple constatation qui suffit Garcia de Galdeano et moi-même.

Naturellement, la situation de Garcia de Galdeano était loin de la stabilité et, avec son curriculum, le seul chemin qui s'ouvrait était celui des concours à la mode d'Espagne. Seulement en 1881, après deux échecs, Garcia de Galdeano a gagné la chaire de mathématiques au Lycée de Ciudad Real. A 35 ans, il débordait d'optimisme, une caractéristique qui, sauf en quelques moments spécialement douloureux, ne l'a jamais abandonné. La vraie biographie scientifique de Garcia de Galdeano venait de commencer. Il a passé une année scolaire à Ciudad Real, moins de trois mois à Almeria et plus de six années à Toledo. Finalement, le 4 Juillet 1889 il arrivait à la Chaire de géométrie analytique de la Faculté des Sciences de l'Université de Saragosse.

Une quatrième partie des plus de deux cents titres que Garcia de Galdeano a publié sur des sujets mathématiques est consacrée à l'enseignement, la didactique et la pédagogie. Dans le travail de 1875 sur la méthode il cherchait déjà, sous l'influence directe de Wronski, un *pourquoi supérieur aux raisonnements mathématiques*. La recherche de ce *pourquoi* l'a amené à la formulation de son premier grand outil théorique, *la critique mathématique*, qu'il a fondamentalement développée en 1882 et 1895 dans ses travaux géométriques, dont le contenu a été présenté dans quelques réunions internationales de mathématiciens.

Cependant, la plus importante de ses créations originales a été la *Nouvelle Méthode d'Enseignement de Mathématiques*, publiée dans une brochure de 96 pages intitulée *Ensayos de sintesis matematica y nuevo método de ensenanza matematica* (1910). A partir de ce moment sa préoccupation pour le développement théorique du sujet devient constante, l'application pratique étant antérieure. Cette préoccupation s'est reflétée dans quelques mémoires des années 1911-1913 -quand il a commencé à rédiger un cours de calcul infinitésimal selon sa nouvelle méthode-, 1916 -où il a largement repris le sujet de la synthèse mathématique- et 1919. Les avatars propres des méchancetés fonctionnarielles lui ont empêché d'exposer au Congrès International des Mathématiciens de Cambridge, en qualité de Délégué espagnol de la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique, sa nouvelle méthode dans un cadre international approprié[10], mais elle a été publiée dans *l'Enseignement Mathématique*[11].

La Nouvelle Méthode d'Enseignement est présentée par Garcia de Galdeano comme antidote contre le grave problème du retard mathématique espagnol et elle propose comme remède la bibliographie, la sincérité et la clarté face à la pédanterie et l'ésotérisme des mathématiciens espagnols et l'*ordonnancisme* de la *Gaceta Oficial*. Selon Garcia de Galdeano[12] :

---

10 HORMIGON, Mariano (1991) "El affaire Cambridge : nuevos datos sobre las matematicas en Espana en el primer tercio des siglo XX". In Manuel Valera & Carlos Lopez Fernandez (eds), *Actas del V Congreso de la Sociedad Espanola de Historia de las Ciencias y de la Técnicas*. Murcia, Promociones y Publicaciones Universitarias S.A., vol. I, pp. 135-171.

11 Garcia de Galdeano était aussi membre du Comité de Patronage de cette revue.

12 GARCIA DE GALDEANO, Zoel (1913) *Sumario de mis cursos de calculo infinitesimal*. Zaragoza, p. 21.

"Suivre un interminable fil de déductions, ne voyant que la conséquence simplement déductive et non pas la corrélation, les correspondances, les coexistences, les compénétrations, les analogies, les représentations, ce qui est systématique, ses éléménts enveloppant les diverses hiérarchies d'êtres et ordres de vérités harmonisés et facilement accesibles par la force de l'organisation, voici la manière systématique, beaucoup plus attirante et féconde que la monotone déduction simplement syllogistique qui sèche l'esprit quand elle est sa seule nourriture".

Garcia de Galdeano a marqué le point d'inflexion des préoccupations didactiques dans une Espagne en expansion difficile et tendue et le moment d'un certain désir de modeste contribution originale au patrimoine culturel mondial dans ce domaine aussi.

Teaching Mathematics in German Jesuit Universities*

Dr. Albert KRAYER

It is on purpose that I do not use the definite article in connection with the expression Teaching Mathematics in the title of my paper. Before the teaching of mathematics[1] that was given by Jesuits at German universities can be appreciated comprehensively, before its history can be written, a lot of detail work has to be done. Four different approaches, completing each other, have to be followed, which until now have been explored to different degrees.

Surely the best known sources are the official documents of the order, the *Ratio studiorum* including its formation process, and the instructions of the Superior general, which however contain little specific information about the situation in Germany.[2] Further the rules in the various provinces of the order and the regulations of study in the universitites the Jesuits taught at have to be considered. Secondly there arises the question about the teachers of mathematics. Considerable work has been done in this field by Fischer, who has published catalogues of the professors for a large number of European Jesuit colleges.[3] Until now there are only few results on a third complex, the textbooks and theses that were published in correspondence with the mathematical courses, and the relevant sections of the Jesuits libraries. Finally the most authentic approach to the real teaching in the class-room is provided by the students' lecture notes, which in particular should therefore be taken into consideration.

Before not these sources of information will be made available to at least a certain degree, an attempt like the present can not but remain deficient. On the base of my own research which concentrates concerning the time on the first decades of the Jesuits activity, and concerning the place on Mainz and the Rhine-province[4], my explanations will focus on this time and region. On the other hand I will try to expand my view to those of the other provinces whose areas, at least to a greater extend, lie within today's Germany.[5]

Jesuits at German Universities

On the eve of the Reformation 16 universities existed in the Holy Roman Empire, this

* I would like to thank mrs. Rosemary Ripperger, librarian at the Mainz municipal library, and my sister-in-law Katrin Krayer who helped me with the English translation.

1 It should be kept in mind that the term mathematics in the period I consider was used in a broader sense than today ranging from the pure disciplines Arithmetics and Geometry to applied sciences like Architecture and Mechanics.

2 The major editions of sources connected with the Jesuit education in Germany are G. M. PACHTLER: Ratio studiorum et institutiones Scholasticae Societatis Jesu per Germaniam olim vigintes. 4 Vol, Berlin 1887 - 1894; and Monumenta Paedagogica Societatis Iesu. Edidit, ex integro refecit novisque textibus auxit Ladislaus LUKACS S.I. 5 Vol, Rom 1965 - 1986. The latter contains only material on the years before 1600 but more volumes are being in preparation.

3 Karl Adolf Franz FISCHER: Jesuiten-Mathematiker in der deutschen Assistenz bis 1773. In: Archivum Historicum Societatis Iesu 47(1978), 189-224.

4 Albert KRAYER: Mathematik im Studienplan der Jesuiten. Die Vorlesung von Otto Cattenius an der Universität Mainz (1610/11). Stuttgart 1991 (Beiträge zur Geschichte der Universität Mainz, 15).

5 Without any doubt the exclusion of the provinces of Bohemia and Austria is a kind of an anachronism, but because of my restricted time I couldn't avoid it.

patchwork-carpet of bigger, smaller and smallest territories, 14 of them in areas still German today. Usually they were strongly related to the territory they belonged to. In many cases their foundation had originated from the initiative of the regional sovereign and had been connected with the aim to provide leading civil servants for the respective state. When Luther had failed with his attempt to reform the Roman church and had drawn the consequence to separate from it, the German rulers also faced the alternative, either to stay with the pope or to follow the "apostate". And according to the principle *cuius regio, eius et religio*, which only the ecclesiastical territories were exempted from, the ruled subjects as well as the universities were forced to follow the decision of their respective sovereign. But it was exactly the universities, flourishing because of the humanistic movement, that had contributed essentially to spread criticism of the deplorable state of affairs of the church. Many of the most outstanding humanist scholars at the universities confessed to the ideas of the Reformation and therefore in the case of their universities remaining catholic were forced to find a new place of activity, if they did not want to betray their conviction. Consequently many of the universities in the catholic territories were bled white in the 2nd quarter of the 16th century, the level of instruction fell to a low ebb. The majority of the humanist intelligentsia gathered at the academies that came under Protestant influence.[6]

As an indication from the sector of mathematics education, that points to the superiority of the university training in the Protestant territories, one may refer to the number of editions of the medieval treatise "In sphaeram" by Johannes de Sacrobosco or John of Holywood. Until the end of the 16th century it had been the most important textbook on elementary astronomy. Between 1520 and 1561 it had been printed 19 times in Germany and of these 19 prints only one came to light in a town under catholic influence, in Ingolstadt (Bavaria) and as early as 1526. On the other hand 15 editions appeared in Wittenberg, Melanchthon's domain, who was the most eminent of the Protestant organizers of knowledge and education.

Falling behind to such an extent the rulers of the catholic territories, especially the prince-bishops, faced the necessity to stimulate the teaching at their universities. But besides this aim the fact had also to be taken into account, that now these educational institutions had gained a new responsibility. Not only had they to impart scientific knowledge to the students but also to strengthen their faith to the respective confession of their rulers. In this difficult situation the catholic rulers considered the appointment of members of the Society of Jesus, that had just been founded in 1540, to their universities a suitable solution. The constitutions of the order emphasized the importance of a careful philosophical and theological training of the members, and on the other hand the Jesuits considered themselves linked to the pope as representative of the catholic faith by a special loyalty.

First contacts of Jesuits with the universities in Cologne, Mainz, and Ingolstadt having been established in the 40ies of the 16th century, after 1550 members of the order began to serve as teachers at all of these three places, and additionally in Trier, in the faculties of arts and theology. This process of Jesuit invasion into the universities was by no means without complications, because the old-established professors feared their rights could get cut back. Besides the taking part of Jesuits in the teaching at universities of some tradition, that ranged from the appointment to single philosophical and theological chairs to the control of whole faculties, there were created in the 16th and, to a greater extent, in the 17th centuries with the academies of Dillingen, Paderborn, Molsheim, Osnabrück, and Bamberg universities that were run exclusively by the Society of Jesus. Here the Jesuits had a free hand and did not need to take into consideration any other parties involved. By the middle of the century, in the areas of the provinces I am taking into account not a single catholic university was left, where professors of the order did not shape the philosophical and theological education to a considerable degree.[7]

---

[6] Out of the 14 existing universities Cologne, Erfurt, Mainz, Trier, Ingolstadt, and Freiburg remained catholic whereas Heidelberg, Leipzig, Frankfurt/Oder, Basel, Rostock, Greifswald, Tübingen and Wittenberg changed to Protestantism.

[7] The ways in which the Jesuits gained influence in the different universities are analysed by Karl HENGST: Jesuiten an Universitäten und Jesuitenuniversitäten. Zur Geschichte der Universitäten in der Oberdeutschen und

Ignatius of Loyolas constitutions for his new order are known to contain instructions concerning the subjects a Jesuit was supposed to study. Whereas the chapters that were written first do not mention mathematics, in the later added rules for the schools and universities of the order it was taken into account as part of the philosophical course. Intensive discussions arose about the question, how important the mathematical disciplines should be in the frame of this course. A comparison of the relevant documents shows that the estimation of the subject ran through all ups and downs, starting from an ambitioned three-years-course of mathematics designed by Jeronimo Nadal for college of the Jesuits at Messina down to an order from the early 70ies that the students should at least be made familiar with some knowledge about elementary astronomy.[8]

These discussions culminated during the debate about a generally binding course of study, the so called *Ratio atque institutio studiorum* that was adopted in 1599. And that the faction of those who considered mathematics to be of less importance, in the end gained the upper hand, is proven by a look at the regulations. Within the three-years-course of philosophy mathematics was to be taught daily for three quarters of an hour during the second year, which was dedicated to the Aristotelian natural philosophy as major subject. However, while for the principal philosophical subjects detailed instructions were given regarding the curriculum and a whole article was devoted to the problem of choosing the appropriate teachers, regarding mathematics only some rather indefinite statements are to be found. Euklid was to be explained during the whole year, exclusively for the first two months and afterwards alternately with elementary astronomy, geography or other subjects, the students "like to hear".

This not very ambitious programme did not contain any new demands, at least for the Jesuits working in Germany. In the Rhine-province, to which the universities of Cologne, Trier, Mainz and Würzburg belonged around about 1600, there existed a catalogue of books since 1573 that was to serve as a basis for teaching and the printing of which was to be provided for. The catalogue included, besides Euklid's Elements, Sacrobosco's Sphere and the Geography by Peter Apian, to begin with the subjects explicitly mentioned by the *Ratio*, Pomponius Mela's Cosmography, and Arithmetic and Computus, for these two no authors being given. From the fact however, that in the following years (apart from the four exactly cited works) the Arithmetic by Gemma Frisius and the Computus by Francesco Maurolico were printed in Cologne by two publishing houses closely related to the Jesuits it can be concluded that these books completed the course. Surely in Cologne, but probably also at the other universities of the province in these years mathematics was taught in daily alternation with ethics, to the students of the first and the second year of philosophy together, and normally by the same professor.

Which of these works were actually read in a certain year was left to the decision of the respective rector. Furthermore the canon of disciplines was broadened in the following years, as shown by lecture-notes from Mainz and Würzburg that may be attributed to the last decade of the 16th century, and books obviously printed for the use in classroom. The subjects the cited lectures had in common are only Euklid's Elements and the Sphere of Sacrobosco, whereas in Würzburg John Peckham's Optics and the Astrolab were additionally treated, in Mainz on the other hand it was practical Geometry, Geography according to Glareanus and the construction of sun-dials. Two identical volumes, that in accordance with an entry on the titlepage were acquired by the Jesuits library of Mainz in 1604, each contain a copy of Clavius' Arithmetic and a publication, consisting of Maurolico's Computus, the "Theorica planetarum" by Georg Peurbach, and Glareanus' Geography.

Because the main attention of the Society of Jesus, as far as formation was concerned, was directed to the study of theology, it's not surprising, that hardly 30 years after the founding of the order there was not any mathematical literature available which was written by its members

---

Rheinischen Provinz der Gesellschaft Jesu im Zeitalter der konfessionellen Auseinandersetzung. Paderborn etc. 1981 (Quellen und Forschungen aus dem Gebiet der Geschichte, N.F. H. 2).

[8] For details on the development of the Jesuits' mathematical curriculum see KRAYER (ann. 4), 24-42.

and could serve as a basis for teaching. This was to change soon, for with Christopher Clavius from Bamberg who deserved the epithet "Euklid of the 16th century", the Jesuits could regard as one of their own an outstanding mathematician, who could close the gap quickly. From 1570 on he published manuals for nearly all mathematical disciplines, starting with a commentary on the Sphere of Sacrobosco. Even if most of these were too extensive to be used in classroom, they constituted a rich source for the teachers of mathematics. Only the "Epitome arithmeticae practicae", first published in 1583, was destined for elementary teaching. Just one year later it was reprinted in Cologne and probably replaced the work by Gemma Frisius.

It's not likely that big differences existed between the situation in the Rhine-province and that in the so called Upper German province. In the latter the Jesuits had at their disposal the university of Dillingen[9], where Medicine and, for the time being, Law were not taught though. After lengthy discussions the chairs of philosophy and some of those of theology at the Bavarian state-university at Ingolstadt were also occupied[10]. The lecture tables from the first half century of the Dillingen University are preserved and they name elementary astronomy (sometimes in connection with the Computus), Arithmetic, Euclidean and practical Geometry, Geography and Optics, and a few times also the Astrolab, the Quadrant and Music as subjects. As far as the supply of appropriate literature is concerned, the Upper German Jesuits had to rely on non-local prints, and one may suppose that they fell back upon the works that were published for the Rhine-province in Cologne.

If the afore mentioned mathematical books were actually bought by the students and served as their schoolbooks so that the professors could save the effort of dictating, can not be figured out exactly because of lack of evidence. Anyway, from the end of the century on the preserved lecture notes become more frequent and they show that at least some professors by no means restricted themselves to stubborn dictating of the printed textbooks but were able to perform compilations of their own.

Besides contents of the course and the place of the subject in the curriculum an investigation into the mathematics teaching naturally has to ask about the teachers too. Especially from the circle, that Clavius had formed in Rome it was claimed during the preparation of the *Ratio*, that only those members of the order might be appointed mathematical professors, who had finished their theological studies. This was already the rule in the case of the professors of philosophy and was fixed in the *Ratio* later on. Before and during their study of theology those who were selected because of their talent for mathematics should acquire some more knowledge than what they had been taught during the philosophical course. But like in the description of the curriculum, also in this point the order as a whole was not willing to enhance the status of mathematics. Instead one was content to point to the possibility that if there were appropriate and interested scholastics these could be educated further in private lessons for members of the order only.[11]

So a look into the lists of the professors who taught mathematics in the order's German provinces reveals that the teachers of mathematics changed very often and that it was not unusual that they were appointed for one or two years only before their theological education. At Dillingen no mathematical chair even seems to have existed at all for a long time and the subject seems to have been represented by one of the professors of philosophy. A notable exception is Ingolstadt, the reason for that being the relatively strong integration of the Jesuits into the existing faculty of arts which by tradition acknowledged a chair of mathematics. 10 professors only, amongst them very famous ones like Scheiner, Lanz and Cysat, were sufficient to cover the requirements from 1580 to 1640, when the Thirty Years' War interrupted

---

9 cf. Thomas SPECHT: Geschichte der ehemaligen Universität Dillingen (1549-1801) und der mit ihr verbundenen Lehr- und Erziehungsanstalten. Freiburg 1902.

10 Besides HENGST (ann. 7) for Ingolstadt see also Arno SEIFERT: Die jesuitische Reform. In: Die Ludwig-Maximilians-Universität und ihre Fakultäten, hrsg. von L. Boehm/J. Spoerl. Bd. II, Berlin 1980, 65-89.

11 cf. KRAYER (ann. 4), 40.

the teaching activity. In Cologne on the other hand in the period from 1600 to 1640 14 professors of mathematics had to be called up, to finish the course 24 times, while in 12 out of 40 years no special professor was at their disposal at all. But even the outstanding position of mathematics in Ingolstadt, whose mathematicians eagerly took part in the development of astronomy at the beginning of the 17th century - Scheiner observed together with his pupil Cysat as one of the first astronomers the sunspots in march 1611[12] - even this position could not improve the reputation amongst the brothers and students. So Scheiner in 1613 bitterly complained about the low regard, the professors of the philosophical course showed for his subject; the mathematician and the moral philosopher would be regarded by them as professors of second rank, against the rules dispensations from the attendance at their lectures would willingly be granted, and the students seemed keen to make use of them[13].

Regarding this position of the subject, it's not surprising, that of the reinforced education for mathematically talented Jesuits, that was proposed by the *Ratio*, only slight traces are to be found. Surely Cysats participation in the research of his teacher may be understood in this meaning and may have been no exception; many Jesuit-mathematicians carried out astronomical observations. Secondly lecture notes of a course given at the university of Mainz in the academic year 1610/11 contain a remark that points to an occupation with mathematics that exceeded the elementary training[14]. Though in this early times the personnel catalogues of the order do not know an office like that of the professor for *Mathesis repetita* at the Bohemian and Austrian colleges of the order in the 18th century.

To summarize one can record that despite of various attempts by mathematicians of the order in the period before the 30 Years' War the subject did not play an important role in the education at the German Jesuit universities. Even if it was institutionally established by the *Ratio studiorum* with 5 hours of lecture weekly, what corresponded roughly with the extent it was taught in Germany before the adoption of the worldwide regulations, the subject was not cherished very much. As professors often members of the order were employed, who had no mathematical training exceeding the contents of the lecture course they now had to deliver themselves. And if they had not finished their theological studies they personified, compared to the professors of philosophy who were theologically trained and ordained priests, the low rank of mathematics in contrast to the main philosophical subjects. The main disciplines of the mathematics course consisted of Astronomy, Euklidean and practical Geometry, Arithmetic and Geography, roughly like in the times before the Jesuits. The more recent disciplines such as Algebra and Trigonometry probably were considered too difficult for elementary trainig and left aside. New insights and discoveries however from the disciplines that belonged to the curriculum, especially from the rapidly developing Astronomy and Geography, where Jesuits did research in the front line, had quite a chance to be included into the basic course.

After the 30 Years' War in the various provinces[15] the trend to appoint permanent teachers of mathematics, that had been interrupted by the war, came into effect again at a different pace. The following table for each of the three provinces shows the places where mathematics was taught, the approximate number of given courses from 1648 to 1773, how often the lack of a mathematics teacher is reported in the lists, and finally the number of professors who gave courses in mathematics for ten or more years.

---

12 cf. Ernst ZINNER: Entstehung und Ausbreitung der coppernicanischen Lehre. Zweite Auflage, durchgesehen und ergänzt von Heribert M. Nobis und Felix Schmeidler, München 1988, 346.

13 SEIFERT (ann. 10), 76.

14 KRAYER (ann. 4), 338.

15 The Rhine-province in 1626 was devided in the Upper- and Lower-Rhine-provinces.

Lower-Rhine-province	Cologne, Trier, Paderborn, Osnabrück (1666[16]), Hildesheim (1666), Aachen (1688)	800	37	27
Upper-Rhine-province	Mainz, Würzburg, Molsheim (-1677), Bamberg, Heidelberg (1723), Fulda (1734)	500	40	16
Upper-German-province	Ingolstadt, Dillingen, Freiburg, Innsbruck (1678), Regensburg	500	83	14

As may be seen from this comparison the most regular mathematical teaching took place in the Lower-Rhine-province. Even though the more famous teachers like Caspar Schott, Christian Mayer or Johannes König are to be found in the other two provinces.

While as far as the teachers were concerned the situation of mathematics developed favourably, the Jesuit educational concept as a whole in its rigid form fixed by the *Ratio* already in the 17th century began to get more and more untimely. In the arising age of Absolutism the ideal of an educated man turned from that of the perfect scholar to that of the perfect courtier[17], the latter being intensely criticized by some of the German Jesuits[18]. An eloquent expression of this development the Jesuits could not follow without betraying the way they saw themselves was the foundation of so called academies of knights. Their curriculum was oriented towards the new ideal incorporating living languages, riding and fencing. But that not only the catholic universities had no supply to the new demand shows the rise of totally new universities in the Protestant territories, e.g. at Halle and Göttingen.

For the teaching of mathematics there emerged also new requirements aiming at an orientation towards practically usable knowledge. So its clear that the ban on the teaching of the art of fortification, that was proclaimed by the superior general in 1648, did not help to make the Jesuits' course attractive to young noblemen. The mathematicians of the order, however, were not to be prevented from occupying themselves with the warlike subject. So the "Cursus mathematicus" of Kaspar Schott, the most eminent mathematician and polymath of the Upper-Rhine-province and Professor of mathematics in Würzburg from 1655 to 1666, contained among others two chapters about military architecture and tactics. This work that was published in 1661 and gained importance beyond the borders of the province did not want to be as the title seems to suggest a textbook, but a mathematical encyclopaedia, that allowed its reader to acquire mathematical knowledge by his own.

A lecture course however in the narrow sense Schott did not get printed. Three years after the appearance of the "Cursus" at least the part on practical Arithmetics was reprinted in Würzburg in octavo, the usual size of schoolbooks. In each year, the foreword said in justifying the reprint, this subject would be read and explicated in the mathematics course at the universities of the society. Doubtless besides Arithmetics also Geometry was covered by the mathematical curriculum further on. As basis for the teaching of this discipline the "Elementa geometriae" by the Jesuit Andreas Tacquet may have served. It explicitly aimed at the education of beginners. Their author had taught mathematics for 17 years in Leeuwen and Antverp and the fact, that after the first publication in 1654 many editions of the book came to light until the end of the century and especially that it was printed once more in 1740 at the expense of the university of Würzburg, makes it plausible that it was used. Besides those single publications on different mathematical disciplines, the second half of the 17th century saw an increasing number of

16 In brackets the years of the first or (with -) last course respectively are given, if there was not covered the whole period.

17 cf. Friedrich PAULSEN: Geschichte des gelehrten Unterrichts an den deutschen Schulen und Universitäten vom Ausgang des Mittelalters bis zur Gegenwart, mit besonderer Rücksicht auf den klassischen Unterricht. Zweite, umgearbeitete und sehr erweiterte Auflage. Bd I, Leipzig 1896, S. 491.

18 cf. Clemens MENZE: Die Kritik deutscher Jesuiten am höfischen Bildungsideal in der ersten Hälfte des siebzehnten Jahrhunderts. In: Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Pädagogik 45(1969), 110-139.

compendia, that covered, sometimes in an even larger frame, the whole field of mathematics as far as it was destined to be treated during the course. As examples i'd like to mention here the "Philosophiae ac mathematicae totius institutio" by Pierre Gautruche who taught mathematics in Caen from 1667 to 1680 and the "Vestigia mathematica sive tyrocinium" by Johannes König who after one year of teaching left Dillingen for the famous Portuguese Jesuit university at Coimbra. The library of the Jesuits of Mainz owned several copies of both books.

Compared with the strong uniformity one should expect because of the *Ratio studiorum*, the integration of mathematics into the philosophical course had developed in considerably different ways, that all together do not point to a growing estimation of the subject by the order. The "Academical directory" of the University of Dillingen for instance, where against the *Ratio* mathematics traditionally was read in turn with moral philosophy, obliged only the students of logic, the main subject during the first year of the philosohpical course, to attend the mathematics lecture, while the students of the second year were free to choose between casuistry, civil and ecclesiastical law and mathematics[19]. In the Upper-Rhine province on the other hand in 1664 it was ordered that in future the professors of mathematics should lecture only half an hour a day, what implied an abridgement of a third if compared to the beginning of the century[20].

With this restriction one can hardly expect that in the mathematics course of the jesuits which, with the vage regulations by the *Ratio*, could have been rather open to innovations, a thematic expansion took place towards the mechano-technical disciplines of the *Mathesis mixta*, that had got fashionable during the Baroque period and that had been covered already by Schott's "Cursus". In the "Institutiones mathematicae" by Ernst Vols at least, the textbook which covered the course for teachers of mathematics, established with a special chair in Vienna in 1717, nothing of these new disciplines except a short chapter just about the banned military architecture is to be found. Regarding the simple beginners' course on the other hand one will probably have to reckon with a reduction of the early 17th century's variety to the main disciplines arithmetics, geometry and astronomy. In Mainz for example in the years 1740 and 1741 three books, one on each of the three subjects, were printed that had been specially designed for the mathematical course of the Jesuits. Surely their aim was also to save the superfluous dictating.

Meanwhile several catholic sovereigns had begun to fear that the demands of their states for academically trained civil servants no longer could be satisfied by their universities under Jesuit rule. Therefore they themselves and their advisers facing the shining example of the flourishing enlightened universities at Protestant Halle and, from 1736 on, also at Göttingen again and again attempted to adjust the course of studies to the requirements of the time. This was also intended to stop the increasing migration of students, that was not desirable less for religious but more for mercantilistic reasons. Especially the faculties of law, Jesuits normally did not teach at, found themselves in the center of interest. Their grown importance laid stress on the criticism of the one-sided orientation of the philosophical education by the needs of Theology, a criticism that for a long time had been exercised by jurists. Correspondingly at many universities the philosophical course was cut back to two years; especially the metaphysics, the third year in the Jesuits' course had been devoted to, had been a thorn in the jurists flesh.

At the same time the enlightened sovereigns tried to force a stronger consideration of experimental physics and the applied mathematical disciplines. So at Würzburg in 1731 a new chair for civil and military architecture was established, which typically enough no Jesuit was appointed to[21]. The professorships for experimental physics, however, that were inaugurated

---

19 cf. SPECHT (ann. 9), 191.

20 cf. PACHTLER (ann. 1), 393.

21 cf. Maria REINDL: Lehre und Forschung in Mathematik und Naturwissenschaften, insbesondere Astronomie, an der Universität Würzburg von der Gründung bis zum Beginn des 20. Jahrhunderts. Neustadt a. d. Aisch 1966 (Quellen und Beiträge zur Geschichte der Universität Würzburg, Beiheft 1), 20.

in 1747 at Ingolstadt and in 1749 at Würzburg were filled by Jesuits, in the latter case by the former professor of mathematics Blasius Henner. In general the mathematics teachers who at that time nearly all remained at their position for several years, devoted themselves more intensely to physical experiments than the professors of (natural) philosophy who were actually the ones responsible for physical questions. But for them the teaching activity during the philosophical course was still only a stopping-off place. Around the middle of the century there can be realized as well a revived great interest in astronomical observations, that manifested itself in the foundation and modernisation of observatories.

What effect this exactly had on the elementary teaching of mathematics, may be examinated by further research. Surely the university course was relieved when in the 50ies of the 18th century arithmetics was brougth forward to the gymnasium, so that there may have been time to treat more difficult subjects at the university. A great number of mathematical dissertations, in each of which several students defended theses from applied mathematical disciplines such as optics, mechanics or hydrostatics, demonstrate that there should have been a supply, even if it was not obligatory.

If therefore the Jesuits tried to improve their untimely teaching of mathematics that was imbedded into an outdated philosophical course in the last decades before their suppression, the conclusion would be wrong that the German jesuits in this respect ever had been antiquated. The above mentioned manuscript from Mainz, where the lecture of the master Otto Cattenius is recorded may serve as a counterexample[22]; Cattenius taught mathematics only once in the city on the Rhine and later on two times at the new university of Paderborn. If you look at the canon of subjects touched, like Geometry according to Euklid, root extraction, practical Geometry, Astronomy, Geography, construction of sun-dials, Computus, and Optics, you surely will not consider it especially remarkable. But as far as relevance and originality are concerned the text surpasses to a considerable extent the expectations one would infer from the regulations of the *Ratio studiorum*, the cited 1573 catalogue of books, a 1604 lecturetable from the university of Würzburg and the efforts of the order for standardization. This is particularly valid in the case of the rapidly developing disciplines Astronomy and Geography.

The most obvious example for the relevance constitutes the report about Galileo's telescopic observations that had been performed just in the year of the lecture. Cattenius knew of them because they were incorporated into the edition of Clavius' commentary on the Sphere of Sacrobosco that was going to be published in Mainz in this very year. Moreover, and this does not seem to be self-evident, he was open to new scientific findings, that had not yet been included in Jesuit publications. This is shown by his use of several works by Tycho Brahe, Kepler's "Optical part of astronomy" and the Cosmography by the Dutch Paullus Merula, all of which had been published in the first five years of the 17th century. Especially the strong consideration of Brahe's astronomy and Merula's work, from which besides new geographical details he also took the statements about the only recently invented stellar constellations around the southern pole, distinguishes the Mainz lecture from what you would expect, considering the cited conceptions.

Even more interesting than this consideration of most recent literature by the professor undoubtedly is the clear preference for Brahe's way to explain the celestial phenomena, and this hardly 10 years after he had published it and at a time the Roman censors of the Society still forbade its members to publish approval of the new opinion. After he had first explained the circles on the celestial sphere he tried to convince his students, that Brahe's system was the most reasonable. To this end he set out the three competing planetary systems, the ancient geocentric, the Copernican, and the so called geo-heliocentric by the Dane, and then discussed their compatibility with various more recent astronomical observations. Following Brahe's argumentation he denied incorruptibility of the heavens and the existence of solid celestial spheres, features of the supralunary world that traditionally were connected with the geocentric system, that accordingly he refused. Against Copernicus on the other hand he offered reasons from scripture and terrestrial physics and finally recommended the Dane's system as the most

22 cf. KRAYER (ann. 4), especially 135-159.

likely to be true.

Thus these lecture notes from Mainz are the earliest known text, in which a Jesuit publicly pleaded the case for the geo-heliocentric planetary system, the order was going to accept as official teaching a few decades later and with some alterations by Giovanni Battista Riccioli. Even if this commitment turned out to be a blind alley later on, the fact that a little professor at a second-class university could take up a modern and independent point of view still witnesses that the Jesuit mathematical teaching was quite able to include the impulses coming from the contemporary debate.

THE EUCLIDEAN METHOD [1]

Marta Menghini
Università degli Studi di Roma
"La Sapienza"
Roma. Italy.

After more than 50 years, we have now in Italy proposals for new mathematics programs. But in the syllabuses for 14-16 years-ods, the section on geometry is somewhat vague ; the Commission which has designed them does not appear to have reached agreement either as regards "how much" to say about geometrical transformations nor as regards "how", that is whether to use an axiomatic or an intuitive approach.

"(...) it is advisable to decide upon, (...), a choice of priorities (theorems about plane figures to prove), using the group of transformations or following a more traditional route".

Of course the problem of geometry teaching is an age old one, and even today there are arguments about the choice between "traditional Euclidean geometry" and so-called "transformation geometry".

Italians have always had, at least in the last century, the fame of geometers. But today in technical schools, which correspond to the majority of the schools, geometry is quite disappearing, and the first geometry course at the university is in fact a course of linear algebra, without drawings and without a reference to geometric examples; someone says that Italy is the last stronghold of Bourbakism.

So where does this fame of geometers come from? I would say that there are two main reasons.

At a level of research, in the second half of the last century Italian Algebraic Geometry started life. This school took a path different from that in the rest of Europe. Italian geometers placed greater store in the pure methods of synthetic and intuitive geometry. The algebraic and analytical tools that they used were surely not comparable with those used in Germany and in other countries.

As regards the school programs : at the behest of the same mathematician who gave the new boots to geometric research, Luigi Cremona, with Italian unification not yet completed, in 1867, Euclid's Elements were suggested to be introduced as a textbook. And it was something more than a suggestion. Such a choise has influenced school programs till now.

It is noteworthy how a more intuitive approach, not based exclusively on considerations of rigour, was attacked by Cremona himself in Italy. Felix Klein observes:

"The main input to mathematics teaching came from L. Cremona, known in the scientific field for his development of modern geometry. But for school purposes he advised a logical approach, whilst in his teaching and scientific work he has always stressed intuition. The link between these two visions of Cremona is not clear".

Of course also now there is a great difference between researching and teaching. But perhaps at that time the link was not so unclear: to Cremona it was important to reason in a pure geometrical way, t. i. to reason on geometrical objects and not on algebraic translations of

---

1 Modified version of a talk given in Essen (Germany) in October 1992.

them. In the research the axioms used were only those of projective space; but in the school the euclidean axioms forced to a greater amount of deduction.

But let us go deeper in the question of the school programs. The purpose is to show that the discussions we have now about the teaching of geometry started and were well developped already a century ago.

As we said, in 1867, Euclid's Elements were introduced as a textbook for secondary school students. Geometry, and thus the Euclidean approach, was seen as "mental gymnastics"

The decision was followed in 1868 by several discussions in the Giornale di Matematiche (run by U. Battaglini) by Hirst, Wilson, Brioschi & Cremona.

The translatd articles of Hirst e Wilson do not speak directly of the Italian situation, but refer to a similar situation in England. We find in the discussion criticisms of the didactic value of the choice : instead of "taking advantage of some simple notions already understood by the students", Euclid is based on "vague, unpleasant and difficult" preliminaries which produce "permanent and pernicious effects" of "discouragement" (Hirst).

Then criticisms of the syllabuses :

"...we should try, as far as possible, to combine intellectual rigour with improved knowledge rather than keep arguing about how to master that discipline by means of purely artificial and gymnastic exercises" (Hirst).

And criticisms of the approach to and connections between the various topics, and technical aspects of some errors in Euclid.

Wilson notes that, unlike in geometry, in every other branch of mathematics "as science progresses, new Elements are written". As well as not being a text for schoolchildren, the Elements are an antiquated work: neither a good textbook for teaching nor a good exposition of the science of geometry. And he adds

"France, Germany, Italy and America all agree about geometry teaching as about the teaching of other subjects".

But for Italy this was no more true.

Brioschi and Cremona respond harshly: the arguments against Euclid are the same as those which "in previous centuries were used many times by those seeking a magic way to learn the Elements".

"We believe that the logicial excellence of Euclid lies in the ordering that you wish to criticise, ...our schools are intented to produce cultured men and women. We do not aim to teach technical drawing, nor that they learn to think, to prove, to deduce. Thus, rapid methods are not useful, and neither are books in which geometry is mixed with arithmetic or algebra. Euclid really is the text which best serves our ends".

And they stress one of the central points of the Euclidean approach:

"In agreement with Prof. Hirst, we would accept a revised Euclid so long as it is not a disfigured Euclid and what is done is geometry and not arithmetic".

About ten years later two calls are made for an elementary textbook which "keeps rigidly to the Euclidean approach". In fact the are technical objections to the direct use of the Elements (some erros, lack of rigour), and also general objections : the analysis of foundations no longer permits the acceptance of difinitions and postulates as Euclid presented them.

There remained - and ther remains - the problem as to whether or not, or to what extent, it is right to stick to the Euclidean approach.

There are three main points to consider here:

- The hypothetical-deductive approach and its relationship to geometrical intuition: in particular, no-one denies either the need that students acquire familiarity with geometrical facts before seeing them formalised, or the fact that a good mathematical and geometrical education must include proofs, the problem is then mainly to decide upon the age at which the shift should be made, and wheter it can be done gradually. We know that opinions differ here.

-How one should define the equality of geometrical figures: in particular, the role movements or transformations should play in the analysis of geometrical facts.

- Whether or not geometry should be pure, i.E. should it be mixed with arithmetic and algebra relying (even if not explicity) on some prior knowledge of real numbers, or should it be independent.

Every elementary classical geometry, as it whishes to describe physical reality, must give a concept of equality (criteria for the identification of objects which are, a priori, different).

In Euclid the criteria for the equality of triangles are based on the concept of "rigid body motion" (of superposition).

The definition of equality by means of rigid body motion is circular and makes use of something from outside mathematics ; it is linked to a physical operation.

Let us see how this concept was used in Italy.

At the end of the 19th century many well-known Italian geometers started writing geometry textbooks. Although Felix Klein and David Hilbert's positions were not yet well known (The Erlangen Program, published in 1872, was translated into Italian in 1899, Grundlagen der Geometrie was published in German in 1899) the path chosen was one which we can regard as intermediate between those proposed by Klein and Hilbert. Klein still refers to a physical space, choosing axioms which describe it.

Hilbert rejects such references and constructs an axiomatic system which reflects logical constraints rather than geometrical ones. His axioms are indipendent and implicitly define geometrical objects.

We find two opposite trends in Italy: some authors try to better Euclid as regards rigid body motions, creating new axioms for them. Theses axioms determine the criteria for the equality of figures.

Other authors prefer to avoid the use of rigid body motions to introduce equality and assume the concept of equality between certain objects (generally segments and angles), using the concept of 1-1 correspondence.

We will take as an exemple of the first approach the book of R. de Paolis, for the second approach that of G. Veronese. So the approach of Veronese is similar to the one we will see in Hilbert, where the concept of movement disappeared. Hilbert will have a great influence on later geometry texbooks; De Paolis was a good, but not famous geometer, and his book was much adopted. Veronese was a famous geometer, but his book was less adopted.

The first postulate in De Paolis is about movement :

"Postulate 1

1. Geometrical figures can move throughout all space
2. A figure can move keeping one point fixed

3. A figure can move whilst keeping all of its points on a certain line fixed
4. To fix a figure it is necessary and sufficient to fix three of its points, not all on the same line.

He is talking about isometries (which in space reduce to direct isometries, t.i. those which are effectively practically existent), though he does not illustrate them, in that the properties given here do not allow one in practice to construct the image of a figure under an isometry. Note also that the style would not be considered acceptable today. The concept of isometry and transformation will be perfectionned by Klein also from a didactical point of view. And, I will add, Klein will also speak in favour of the connection between geometry and algebra.

In fact De Paolis will never use this axiom for his deductions. But he explains in a note why he needs it

"XVII. To demonstrate the equality of the two figures, one needs to show that they can coincide. This presupposes that they can move without deformation. The importantce of Post 1 is obvious, since it is used every time that one checks whether two figures are equal or not".

We reported here the axioms which refer to the plane geometry, but the Paolis presents immediately also the axioms for space geometry.

De Paolis' definition of equality

"1. We will say that two figures are coincident when every point of one is a point of the other and vice versa.

2. Two figures are called equal when they can be made to coincide".

Veronese's first postulate is quite different :

"Postulate 1. There exist distinct points".

The second postulate for both is about straight lines.

De Paolis :

"Postulate II

A straight line is a line of indefinite length, defined when two of its points are given.

Each of its points divides the line into two parts.

Each of the parts into which the line is divided by one of its points may rotate about that point in such a way that it passes through any given point in space".

In fact we see that he uses the rotation, which was referred to, but not explicitly defined in axiom 1.

Veronese defines a line as a linear system of points, defines a segment; Veronese's only "primitive concept" is the point.

"Postulate 2. There exists a linear system of points called "straight line" such that

I. If a and b are two segments of the system, considered in a given sense, one or the other of the following holds - in the first case we say that b equals a, and in the second we say that b does not equal a: If b equals a then there is a 1-1 correspondence between them, and in the same way parts of b are equal to the corresponding parts of a.

Every segment is equal to itself. No segment is both equal and not equal to another segment b. If a is equal to b then b is equal to a. And if a is equal to b and b is equal to c then a is equal to c.

II. A segment is not equal to one of its parts. Any segment AB is equal to BA.

III. Given a point A on a line, and any segment XY, there are two segments AB, AC equal to XY".

So Veronese gives in his axiom the equality properties of segments.

Both authors introduce the 'distance' as an idiom. There is no reference to measurement.

"Saying 'points A and B and A' and B' have the same distance' means 'segments AB an A'B'are equal'".

De Paolis tries to include as axioms some initial definitions and some of Euclid's "common notions". He maintains a strong link with the physical world. He refers to intuition, but many questions are not clarified very well.

Veronese's preoccupation seems to found geometry, rather than to write a school book. He is rigourous, geometry is well founded, but not soeasy for a pupil.

As to the equality of figures.

Veronese defines the "1-1 order-preserving corrispondence" between 2 figures F and F'. Then

Def. II. Two figures F and F' made up of straight lines are said to be equal when it is possible to specify a 1-1 order preserving correspondence between their points s.t. segments of one correspond to segments of the other".

But, not having the movement, Veronese has to add something more :

"Post VI. The pair or rays (ab) from vertex O is equal to the inverse pair (ba)".

And to compare angles located generally :

"If two pairs of lines with vertices are equal, the angles between their sides are equal, and vice versa".

The proof makes use of the equality of segments and of a property analogous to the third criterion for the equality of triangles: the equality criteria for triangles are not very important for Veronese. They are just "other properties".

The first criterion for the equality of two triangles ABC and A'B'C' is, for both authors, a theorem. De Paolis uses movements, making one pair of sides coincide, and then proceeds in the classical way (that of Euclid), based on rigid body motions. Veronese refers instead to the equality of angles $B\underline{A}C$ and $B'\underline{A'}C'$.

Veronese finally talks about movement.

"We have already said that for practical construction of equal figures, certain instruments are used, amongst which the simplest are the ruler and compasses, and we have already seen that these are useful in solving practical problems of geometry (solved in theory with lines and circles) when making drawings. Geometrical postulates suffice for theoretical development of geometry, but are not enough for applications of geometry in the real world.

This pratical means is provided by the movement of bodies. Although physical pheonomena in the environment have effects on the geometrical form of bodies, by observing a body in two different positions we infer in general that the body in the second position occupies a space which is, to a good approximation, equal to that in the first position. For all of these reasons we give :

Practical postulate II. A figure may move freely on a line, in the plane and in space, remaining always congruent to itself, even if some of its points are fixed".

For Veronese the two questions are separate, since his postulates refer to theoretical geometry and movements to pratical geometry,

For De Paolis acceptance of the existence of rigid body motions is the foundation of the axiomatic approach :

"N. XIV Helmholtz observes that to convince ourselves of solidity, of the invariable position of bodies and their elements, we can only rely upon experience, because it shows us that they can be superimposed in any location, at any time, before or after movement. However, could it not be that the superimposed bodies which seem solid, including our own bodies, undergo corresponding deformations simultaneously? In this case, we would have to modify the entire system of foundations of geometry".

Pure geometry, or geometry mixed with algebra?

Let us go back in time for a moment, to understand better the situation in which the text of Euclid was introduced.

When it was suggested that the Elements be reintroduced as a textbook, the most widely used geometry texts in schools were directly inspired by (or translations of) Legendre's text Elements de geometry, first published in Paris in 1784, which had many later editions.

Felix Klein compares Legendre's text with Euclid's Elements :

"The main aim (of Legendre) is still an abstract closed system of elementary geometry. There are, however, notable differences :

- Legendre, unlike Euclid, makes knowing use of the elementary arithmetic of his time. He is, then, a "follower" of the fusion of algebra and geometry, and goes so far as to add trigonometry as well.

- Legendre's point of view is different from Euclid's, both logically and intuitively. Euclid bases everything on logical reasoning, which he tries not to mix with intuition - the only things based on intution are assumed in the axioms. For Legendre, this is not important. Even within proofs he sometimes uses intuitive reasoning. (1909)".

In fact for Legendre: "the object of geometry is to measure the extension of figures, and to study their properties"

So right from the beginning, measurement (and thus the use of a numerical environment) is one of the main objectives of geometry, an almost pre-Euclidean outlook.

The use of arithmetic and elementary algebra is found throughout the book: ratios arte between numbers, not between magnitudes, the theory of proportions is directly algebraic, and magnitudes (segments, angles, areas) are explicitly confused with their sizes, even notationally.

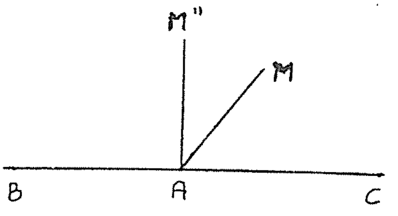
The straight line itself is defined using the intuitive numerical concept of distance. Indeed: "A straight line is indefinite and the shortest path between any two of its points".

So the straight line is the "Line of shortest distance", but 'distance' is never defined.

Legendre uses rigid body motions to prove the first and second conditions for the equality of triangles.

Let us show an example of his intuitive use of 'continuity' :

"Theorem. From a point on a line one may construct a perpendicular, and only one may be construted.



In effect, let use suppose that a line AM, initially lying on AC, rotates about A. It will form two adjacent angles MAB and MAC. MAC, initially the smaller, will grow and grow, whilst the other, MAB, initially greater than MAC, will decrease to zero. MAC, initially smaller than MAB will thus become greater than it. It follows that there will be a position AM" of the moving line such that the two angles are equal, and it is clear that there will be only one (such position)".

At the beginning of his book Legendre presents an 'explanation of terms and symbols'.

Axiom ("une proposition évidente par elle-meme")

Theorem ("une vérité qui devient évidente au moyen d'un raisonnement appelé démonstration")

But nowhere in the book is any proposition explicitly stated to ben an axiom. The (few) axioms always appear as marginal notes, starting with words like "It is evident that...", "We accept that...".

"It will be granted as evident that through a given point only one parrallel to a given line may be constructed".

Legendre's text represented an enemy to be defeated when syllabuses for Licei in a united Italy were written ; an enemy so powerful that only the greatest authority in the field, i.E. Euclid, could oppose him.

The main aspect of "Legendrism" which was attacked was the 'pollution' of geometry with algebra.

But in Italian schools at the moment - in 'liceo scientifico' - geometry is, fundamentally, co-ordinate geometry. "Reasoning" is strongly supported by calculation, and geometrical relations are translated into algebraic formulae.

This is even stronger now than in the past, when Betti and Brioschi denouced it in the preface of their edition of the Elements, criticising texts such as Legendre's : "in place of the rigour of reasoning they have put the mechanical process of arithmetic" (1867).

Similarly 'legendrist' is a possible axiom system for use at secondary school level which makes much use of the structure of the reals (without explaining them rigorously) to assign numerical attributes (e.g. distance) to geometrical facts (e.g. a pair or points), as the one of G. Choquet.

It is not so easy to answer the questions that arose. One has to make a difficult mediation.

As to the first point we mentioned, the distance between the hypothetical-deductive approach and geometrical intuition is not in content, but 8in the difference between creating (making) and teaching (explaining rigorously) mathematics.

INTUITION AND VISUALIZATION ("ANSCHAUUNG") - A FUNDAMENTAL PRINCIPLE OF LEARNING THEORY AND ARITHMETIC INSTRUCTION IN PRUSSIAN ELEMENTARY SCHOOLS IN THE 19 TH CENTURY INTENTIONS AND REALITY

Siegbert Schmidt
(Universität zu Köln, Germany)

1.Theoretical Categories Used as a Basis of Analysis

In a talk in the section "Social History of Mathematics Education" at the ICME-6 in 1988 in Budapest (Hungary) G. Schubring (1989) described theoretical categories for investigations in the social history of mathematics education. The following categories were declared to be basic:

- Neutral knowledge does not exist: Knowledge always is influenced by intentional and social factors.

-The epistemological nature of mathematical knowledge has to be considered in comparison to sciences as well as to the humanities.

- Knowledge develops, knowledge is not static, it is not always the same.

In this paper concrete examples will be discussed with regard to the following aspects which themselves are bound by the categories just mentioned:

- Status of elementary arithmetic within a concept of general education for the "just plain folk".

- Elementary arithmetic and the teaching-learning process in arithmetic instruction in the elementary school:

Steps in arithmetic instruction and the "nature of human mind".

-Some social and political factors of the Prussian system of public education in the 19th century.

Because a piece of history shall be presented that can be sufficiently empirically founded some decisions had to be made, thus getting some further contextual constraints:

- We will talk about arithmetic instruction in the elementary school in Prussia between the beginning of the 19th century and 1872 - thus considering the time between the decline of Prussia because of the victory of Napoleon, but also the beginning of reforms in Prussia, on the one side, and the unification of Germany as an empire under the leadership of Prussia in 1871 and some essential changes in the elementary school system and the pre-service training of elementary school teachers in 1872, on the other side.

- We want to make concrete the essential features of our analysis by considering some details of the thoughts and proposals of two formerly very famous arithmetic educators - namely A. Diesterweg (1790-1866) and E. Hentschel (1804-1875).

- By crystallizing the analysis around intuiton and visualization ("Anschauung") - in this short version we must omit discussing these notions in detail - we have chosen one of the two main categories of the contemporary pedagogical discussion on education and instruction in the elementary school - namely 'intuition' (Anschauung) and 'self-directed activity' (Selbsttätigkeit).

2. Prussia Between 1806/07 and 1872: Its Elementary School System within the Frame of Political and Socio-economic Development and a New Thinking in Pedagogy

After the decline of the "Holy Roman Empire of German Nation" in 1806 and the crushing defeat of Prussia inflicted by Napoleon in 1807 a remarkable period of reforms began in Prussia: Reforms concerning the socio-economic situation, reforms of the organization of the government, reforms of the army, and reforms of the educational system were initiated between 1807 and 1814. The time after the Congress of Vienna (1814/15), however, was dominated by a conservative or even reactionary relapse. Simultaneously, we can observe an economic development in Germany -[in particular in Prussia and clearly becoming visible between about 1845 and 1873]- that has to be considered as the 'German version' of the "Industrial Revolution". This contrast between the development concerning the distribution of political and military power, on the one side, and the economic development, on the other side, marks two simultaneous but different lines of development of the order of the society. Considering our subject matter within the perspective of a social history of mathematics education we have to take into account as an essential part of the underlying frame the following features concerning the relationship between the state and public education in Prussia between 1810 and 1872:

- The system of public education as a factor of modernization and the maintainance of the pre-revolutionary[1] order of society and politics:

On the one side the authorities of the state favoured the modernization of the educational system: Economy as well as administration needed better educated people. On the other side the same authorities strictly tried to avoid the consequences of this modernization for the political power as well as for the order of the society.

- During the 19th century the states in Germany become, in fact, the rulers of the school system:

Increasingly it is the state that fixes the regulations for the different levels of the system of public education. - For the elementary school the authorities of the state in Prussia still accepted - up the 1870s - that this control should be performed in accordance and in coordination with the church.

Considering the different levels of the system of public education in Prussia during the 19th century we have to take into account that the sub-system of the elementary school was strictly separated from the sub-system of higher or advanced education. While the teachers for the Gymnasium had to study at a university, and in 19th century in Prussia these teachers were regarded as scholars (cf. G. Schubring 1991) the elementary school teachers got their training at teacher training colleges which did not not belong to the domain of higher scientific oriented education.

During the transition from the 18th to the 19th century peadgogy in Germany underwent an essential change; the following principles were parts of the anthropological basis of this new orientation of pedagogy - including education and instruction in the elementary school:

---

[1] In this context the notion "pre-revolutionary" refers to the French Revolution of 1789 - thus marking those key ideas of the "right order" of society and government of the era of absolutism.

◆ Principle of self-determination:

In contrast to the pre-revolutionary view a human being should get his/her status in society himself/herself by means of education - and no longer by birth and membership of a certain class and its rank in the "right order" of society.
"It is education that is the main vehicle by the means of which a human being becomes a human being" (F.H.C. Schwarz, 1805).

◆ Principle of self-education:

All educational efforts can only be considered as stimuli, as challenges for real education, i.e., for education by oneself.
"Al education is only making someone to educate oneself" (K. Weiller,1802).

It is evident that such principles were in rather sharp contrast to those who strictly tried to maintain the pre-revolutionary order of society and political power.

Considering, especially, education in the elementary school one educator is of outstanding importance - the Swiss educator J.H. Pestalozzi (1746-1827):

- According to Pestalozzi also each member of the "just plain folk" has the right of getting educated as a human being, and only such an education as a human being could be the basis for all other forms of education and training concerning the everyday life as a citizen and the life within a professional domain.

- Within this basic orientation Pestalozzi tried to find the "absolute basis of knowledge" - thus, as he was convinced, gaining the "essence of instruction":
"I have fixed the highest, uppermost principle of instruction in the recognition of intuition (Anschauung) as the absolute foundation of all knowledge ... thus trying to find the archetype by means of which the education of our race has to be determined by nature itself" (J.H. Pestalozzi, 1801).

These educators were reflecting on education convinced that they were searching for - and finding - absolute foundations of human cognition by revealing the 'nature', the 'essence' of the human mind - insofar being quite opposite to a modellistic epistemological perspective of nowadays.

3. MAIN EDUCATIONAL OBJECTIVES FOR ARITHMETIC INSTRUCTION According to the Didactical Conceptions of A. Diesterweg (1829) and E. Hentschel (1842)

The main educational objective for arithmetic instruction in the elementary school in the sense of A. Diesterweg is this:

" ... [it is] formal education [allgemeine Bildung], that arithmetic instruction shall aim at everywhere. This latter (main) purpose only can be achieved if the student everywhere in mental arithmetic as well as in written arithmetic (...) is compelled to exert his thinking power.

It is much more challenging, better for education and therefore more important that a problem is treated and solved in six different manners than to give six different problems" (A. Diesterweg 1829).

And as consequences for instruction he considers:
- "The student shall recognize the particular ideas, concepts, laws, rules by intuition and he shall find them intuitively, and by intuition he shall achieve general and abstract ideas" (A.Diesterweg 1829).

- "Everywhere one shall stimulate the student to be self-acting, ..." (A. Diesterweg 1829).

- Instruction has to be well-grounded: To give arguments already on an intuitive level has to be an essential part within the arithmetic learning of the students - also in the elementary school.

The main educational objective for arithmetic instruction in the elementary school in the sense of E. Hentschel is included in the follwing quotation:

"The student shall learn *to do arithmetic by thinking*,
and he/she shall learn *to think by doing arithmetic* - that is one;
besides insight (comprehension) he/she shall acquire that skill, too, that life is demanding - that is the other" (E. Hentschel, 1842; emphasises in the original).

Consequences for instruction:

"The first demands *completeness, intuition, and a wide varietey* of instruction; skill, however, is only to be acquired by frequent, continuous practice (exercises)" (E. Hentschel, 1842; emphasises in the original).

4. Intuition and Visualization and the Very Beginning of Arithmetic Instruction According to the Didactical Conceptions of A. Diesterweg (1829) and E. Hentschel (1842)

◆ A. Diesterweg (1829): Extracted of the first exercise:

The teacher draws a stroke on the blackboard and speaks: |
"That is *one* stroke."
The students speak: "That is one stroke."

The teacher draws another stroke and speaks: | |
"That is another stroke; one stroke and still another stroke are *two* strokes."
The students speak: "One stroke and one stroke are two strokes."

This has to be continued up to ten. The following survey shall also be fixed on the blackboard:

|
| |
...
| | | | | | | | | |

A. Diesterweg emphasises: "The purpose of this exercise is that the students learn to represent, to think and to name the numbers from one to ten intuitively/in a visualized manner [anschaulich]".

◆ E. Hentschel (1842): Extracted of the first exercise:

The teacher makes developing the basic numbers openly to the students by iteration of the one:

First he draws a stroke on the blackboard |
and makes the students speak: "This is one stroke."

He draws a stroke under the first one and then another one beside it:

|
| | ;

the students speak: "One stroke and one stroke are two strokes."

This has to be continued until:

|
| |
. . .
| | | | | | | | | | ;

The students end: "Nine strokes and one stroke are ten strokes."

The visualization also should be realized by - e.g. - points, circles, crosses, blocks, beans, balls etc. E. Hentschel emphasizes: "Do not miss a variety - it is important."

After having made acquaintance with the basic numbers - in the cardinal aspect as well as in the ordinal aspect - and after having got to know the digits the continuation of instruction follows this pattern - E. Hentschel is a bit more explicit and consequent than A. Diesterweg:

visualized mode - mental mode - written mode - applications: using numbers and measures in word problems - conncections with all the other numbers and operations considered up to now.

Addition and subtraction (according to E. Hentschel, 1842): The number 2
(E. Hentschel recommends to use blocks (cubes) or balls.)

▷ *Visualized mode*:

Teacher: How many blocks are there?
Students: Two.

Teacher (moves the blocks apart):

What is this?
Students: Two is one and one.

Teacher (pushes the blocks together):

Students: One and one is two.

Teacher (takes one block away):
What is this?

Students: Two take away one is one.

Teacher (takes the left block away, too):
What is this?
Students: Two take away two is nothing.

▷ *Mental mode*:

Questions of the teacher: How much is one plus one?
How much is two take away one?
How much is two take away two?
How much ist one take away one?

▷ *Application* (here presented in the mental mode)
Charles got a birthday present, and Santa Claus brought another present.
How many presents has he got now?

▷ *Written Mode*
1 + 1 = , 2 - 1 = , 1 - 1 = , 2 - 2 = .

It is a feature of the conception of E. Hentschel, that addition and subtraction as well as multiplication and division are considered simultaneously whereas A. Diesterweg treats one after the other and combines them afterwards. But there he recommends to make the students formulate arguments for the solutions of problems in an amnner preforming logical inferences - e.g., 6+4+-3=7:
Since 6+4=10 and 10-3=7, therfore 6+4-3=7.

In accordance with the Swiss educator J.H. Pestalozzi there was a broad consensus of opinion in arithmetic education that intuition had to be the real foundation of knowledge, and, hence, every teaching-learning process in arithmetic instruction in the elementary school had to start on an intuitive level. Insofar the relevance of intuition in arithmetic instruction in the elementary school was beyond doubt.

J.H. Pestalozzi was convinced that the "equilateral quadrilateral" (square) and the "straight line" - as he called it - were basic objects, and as such basic objects they represented "pure intuition"; they were considered as being free from any other concreteness - thus representing the unit as such within the formation of the number concept. Insofar the "equilateral quadrilateral" (square) and the "straight line" had to be the privileged forms for visualized representations in arithmetic instruction in the elementary school. According to J.H. Pestalozzi working with his "table of units" activated the "power of the intuition of the pure relations of numbers".

This kind of representing whole numbers was introduced by J.H. Pestalozzi in 1803 in the first volume of his "Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse" ["Teaching the relations of numbers by intuition"]. Using lists of strokes as a basic visual representations for the first whole numbers by both arithmetic educators - namely, A. Diesterweg and E. Hentschel - is due to J.H. Pestalozzi.

But analyzing the meaning of intution at E. Hentschel (1842) and A. Diesterweg (1829) in more detail reveals that there are indicators for differences; and these differences can be interpreted to have consequences for the teaching-learning process.
The role of intuition / visualization in the didactical conception of E. Hentschel (1842) when learning the first whole numbers can be summarized like this:

◆ The teacher is drawing and manipulating
- graphic representations - like strokes, points, circles, crosses

or

- concrete homogenous materials - like blocks, beans, rods, balls;
and he is speaking
- giving informations - e.g.: There are five strokes -

or

- asking a questions - e.g.: What is this?

◆ The students are perceiving
- the objects - as a result of the teacher's actions (the graphic representations or concrete materials)

and

- the actions of the teacher - e.g.: | | | | | → | | . | | | ;

and they are speaking
  - repeating what the teacher has said - e.g.: There are five strokes;

or
  - answering a teacher's question - e.g.: Five is two and three.

Referring to the Piaget's difference between the figurative aspect and the operative aspect there are indicators so that we can state for E. Hentschel (1842):

- The emphasis is on the figurative aspect of thinking.

- There is no evidence that can be interpreted as an implicit aknowledgement of the importance of the operative aspect of thinking.

For example, E. Hentschel (1842) explictly states:

"The visual representations do not belong to the slates of the students contrary to the problems with digits."

Therefore the lists of strokes as visual representations of whole numbers have to be drawn only on the blackboard.

The situation is different when considering the description of the learning process of A. Diesterweg (1829). At first glance this difference seems to be marginal: In his hints for the teacher for realizing the first exercise he recommends that the students should also use their slates in order to draw lists of strokes. But combining this with a "short psychology" in a handbook for elementary school teachers (1835) this opens the door for quite another perspective of the cognitive functioning being basic here.

The role of intuition / visualization in the didactical conception of A. Diesterweg (1829) when learning the first whole numbers can be summarized like this:

◆ The teacher is drawing and manipulating
  - graphic representations - e.g.: | | | | |
    [concrete homogenous materials are allowed, too]

  and he is speaking
  - giving informations - e.g.: There are five strokes -

  or
  - asking a questions - e.g.: What is this? / How many ...?

◆ The students are perceiving
  - the objects - as a result of the teacher's actions (the graphic representations or concrete materials) - e.g., | | | | | | | -

  and
  - the actions of the teacher - e.g.: | | | | | → | | | | | | | ;

  and they are speaking
  - repeating what the teacher has said - e.g.: There are five strokes;

  or
  - answering a teacher's question - e.g.: There seven strokes now.

But then the students have to act according to oral utterances of the teacher - using their own slates and also putting questions and problems to the others; insofar there is a second phase of visual representation in which the students have to activate their intuition.

A. Diesterweg interprets the human cognitive mecanisms - in particular concept attainment and concept representation - in the light of the epistemology of the famous German philosopher I. Kant: In a form mediated by another German philosopher J. Fries he used the epistemology of I. Kant as it was published in the "Kritik der reinen Vernunft" (Critic of pure reason) as a psychological frame in order to describe and to analyse cognitive processes, as a theoretical background for his view of teaching-learning processes. According to this, a successful concept attainment for - let us say - the whole number five had to comprise these components:

- Numeration step by step of a manifold of homogenous objects -
  here: one (|), and still another one (|), and another one (|),
  and another one (|), and still another one (|);
- synthesis of this manifold -
  here: union of the strokes as a list - | | | | | ;
- idea of this synthesis of a manifold as a new unit -
  here: Thinking of the list of strokes as a new object -

here: Thinking of the list of strokes as a new object - $\boxed{|\ |\ |\ |\ |}$;

the latter comprises the faculty to have at disposal a method to produce a list of strokes or points or signs whatsoever as a picture, as a technical exterior representation of the number five.

This idea of a general procedure to produce a picture for a concept is called the "schema of the concept" within the epistemology of I. Kant; and such a schema is always considered as a product of the spontaneity of the human mind - a schema is rooted in the human mind but not in the objects. Sensory stimuli are necessary because the human imaginative faculty / imagination is only activated on the occasion of sensory perceptions. It is essential for a successful concept attainment that the arithmetic learning human subject

- is becoming conscious of this enumeration of the units, of the synthesis of the manifold of these units, and of the idea of this manifold as a new object

and

- is able to activate the schema to produce a new list of strokes as an exterior representation of a number whenever this is appropriate.

Therefore, using the own slates by the learners gets an essential value!

Referring again to the Piaget's difference between the figurative aspect and the operative aspect we can state for A. Diesterweg (1829):

- The emphasis is on the operative aspect of thinking.
- A. Diesterweg does not know this difference explicitly and so we have to assign him an implicit aknowledgement of the importance of the operative aspect of thinking.
  In a more principal perspective we can compare the epistemological positions of E. Hentschel (1842) and A. Diesterweg (1829) in this way:
- E. Hentschel (1842) is in line with the epistemological tradition founded by Aristotle:
  - Concepts are achieved by abstracting from sensory perceptions.
  - The essence of a concept is already contained in the sensory perceptions - but only latently contained; and it is the turn of the activity of the human mind to remove what is only accidental.
  - Constructive activity of the learner consists of the activity to abstract the concept from the perceived entities - here: The concept of whole number. Getting conceptual knowledge is due to active mapping on the side of the learner.

A. Diesterweg (1829) is in line with the epistemology of I. Kant:

- Concepts are achieved by constructing of the human mind.

  The basic conceptual components are within the human mind as a cognitive structure a priori, and concepts are revealed if the mind becomes conscious of what it is doing on the occasion of sensory perceptions - or remembrances of them. Sensory perceptions are shaped by the apriori forms of space and time; and, in particular, the apriori form of time is basic for the concept of whole number.

  - Constructive activity of the learner consists of the activity of his/her mind by activating cognitive schemas that mediate between the aprirori forms and categories and the sensory perceptions. Getting conceptual knowledge, therefore, is due to the cognitive construction of the learner - the sensory material is not considered as the real cause for concepts but only as the occasion.

Both epistemological positions have in common that imagery is in a privileged position: Every knowledge must have passed in its genesis the imagery and its forms of internal representation. Modern trials of theorizing the role and the functioning of imagery within the scientific paradigm of cognitive psychology do not make the assumption that all thought processes involve imagery or that imagery is in a privileged position as a form of internal representation.

5. Can We Learn From such an Epistemologic-Historical Analysis ?

Despite the epistemological differences there are common structural features of the basis of learning theory of A. Diesterweg and E. Hentschel:

- Intuition as an anthropological feature

A. Diesterweg and E. Hentschel - as other progressive contemporaries - were convinced that

  - intuition was a property of the human mind because intuition was a part of the "nature", of the "essence" of man;
  - intuition was a well-defined property of the human mind.

- Privileged position of intuition in cognition

  Intuition was considered as being principally involved in every knowledge that claimed to be true knowledge.

This universal and anthropological anchoring of intuition had - historically speaking - two progressive functions:

- This anchoring served as the basis for two statements:

  - Education - as general or formal education - has to be available even for all members of the 'just plain folk'.

  - Education - as general or formal education - is - at least for the first steps - also attainable for all members of the 'just plain folk'.

- In this perspective instruction in the elementary school got a certain 'pedagogic dignity':

  Instruction in the elementary school on the basis of intuition - and self-directed activity - could be considered as an essential contribution to education and not only as a training of some useful skills to cope with everyday life and professional situations. (But we should not have an too idealistic idea of the reality in the classroom: In 1835 in the Rhineland, e.g., one teacher hat to teach 91 students of all age groups! And we should keep in mind that the elementary school teachers were not well paid.)

On the other side this universal and anthropological anchoring contains the danger of a dogmatic stabilization in mathematics instruction, namley concerning the relation between embodiments and graphic representations on the one side and mathematical notions and structures on the other side:

- According to the 'mapping perspective' of the Aristotelian tradition one can be inclined to consider embodiments and graphic representations as carriers of unequivocal meanings -thus establishing a one-to-one-correspondance between the embodiments and praphic representations on the one side and the mathematical notions and structures on the other side.

- According to the 'constructing perspective' of the Kantian tradition one can be inclined to assign unequivoval meanings, too, to the embodiments and graphic representations - but here referring to the arguemnt that the "nature of human cognition" constructs the same ideas and notions on the occasion of certain exterior representations.

Meanwhile, however, we have sufficient empirical evidence that we cannot suppose that students - in particular in the primary school - get the same ideas/images in their minds when looking at or acting with the same embodiments or graphic representations (cf. J.H. Lorenz 1991). Also findings in the field of neurophysiology can be summarized that even the processes of visual perception are essentially constructive (cf. G. Roth 1992).

References

Diesterweg, Adolph; Heuser, Peter: Methodisches Handbuch für den Gesammt-Unterricht im Rechnen. Als Leitfaden beim Rechenunterrichte und zur Selbstbelehrung. Elberfeld: Büschlersche Verlagsbuchhandlung, 1. Theil, 1829; 2. Theil, 1830-1831.

Diesterweg, Adolph u.a.: Wegweiser zur Bildung für Lehrer und die Lehrer werden wollen und methodisch-praktische Anweisung zur Führung des Lehramts. Essen: G.D. Bädeker, 1835.

Diesterweg, Adolph; Heuser, Peter: Praktisches Rechenbuch für Elementar- und höhere Bürger-Schulen. Elberfeld-Bonn: Büschlersche Verlagsbuchhandlung, 1. Übungsbuch, 1825; 2. Übungsbuch, 1826; 3. Übungsbuch, 1828.

Hentschel, Ernst: Aufgaben zum Kopfrechnen. Entworfen für preußische Volksschulen und nach unterrichtlichen Grundsätzen geordnet. Weißenfels: Carl Friedrich Meusel, 1. Heft, 1842; 2. Heft, 1844

Hentschel, Ernst: Aufgaben zum Zifferrechnen. Entworfen für preußische Volksschulen und nach unterrichtlichen Grundsätzen geordnet. Weißenfels: Carl Friedrich Meusel, 1. Heft, 1842; 2. Heft, 1843.

Hentschel, Enrst: Lehrbuch des Rechenunterrichts in Volksschulen. Weißenfels: Carl Friedrich Meusel, 1. Theil: Die Grundrechnungsarten in ganzen Zahlen nebst der Regel de tri, 1842; 2. Theil: Die Brüche. Fortsetzung der Regel de tri. Kettensatz. Vielsatz. Besondere Rechnungsfälle des Lebens, 1844.

Jeismann, Karl-Ernst; Lundgreen, Peter (Hgg.): Handbuch der deutschen Bildungsgeschichte. Bd. III: 1800-1970. Von der Neuordnung Deutschlands bis zur Gründung des Deutschen Reiches. München: Verlag C.H. Beck, 1987.

Kant, Immanuel: Kritik der reinen Vernunft. Hamburg: Verlag Felix Meiner, 1956 (Original versions 1781, 1787).

Lorenz, Jens Holger: Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung. Göttingen: Hogrefe, 1991.

Pestalozzi, Johann Heinrich: Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse. Zürich-Bern-Tübingen: Heinrich Geßner - J.G. Cottasche Buchhandlung, 1. Heft, 1803; 2. Heft, 1803; 3. Heft, 1804.
Pestalozzi, Johann Heinrich: Wie Gertrud ihre Kinder lehrt. 1801

Roth, Gerhard: Das konstruktive Gehirn: neurobiologische Grundlagen von Wahrnehmung und Erkennntis. In: S.J. Schmidt (Hg.): Kognition und Gesellschaft. Der Diskurs des Radikalen Konstruktivismus 2 (stw 950). Frankfurt/Main: Suhrkamp, 1992

Schmidt, Siegbert: Rechenunterricht und Rechendidaktik an den rheinischen Lehrerseminaren im 19. Jahrhundert. Eine Studie zur Fachdidakik innerhalb der Volksschullehrerbildung an Lehrerseminaren, 1819-1872. Köln-Wien: Böhlau Verlag, 1991.

Schubring, Gert: Theoretical categories for investigations in the social history of mathematics education and some characteristic patterns. In: Mathematics, Education, and Society (Reports and papers in the 5th day special programme on "Mathematics, Education, and Society" at the 6th ICME, Budapest, 27 July - 3 August 1988). Paris: UNESCO, 1989, 6-8

Prof. Dr. Siegbert Schmidt
Seminar für Mathematik und ihre Didaktik
Universität zu Köln
Gronewaldstraße 2
D - 50931 K ö l n
Germany

A CONFLICT AT THE GRAMMAR SCHOOL OF LEYDEN

H.J. SMID, T.U. Delft

Introduction

In the first half of the 19th century - in the years 1821-1823 to be more precisely - a conflict arose between the mathematics teacher and the rector of the grammar school of Leyden.

Leyden is a town in the Netherlands with, at that time, about 30,000 inhabitants. In Leyden the òldest university of the Netherlands is situated, a detail of some importance for our story.
Conflicts in schools are not unusual; twenty years later for instance another conflict between a new math teacher and a new rector of the same school arose. But there is something special about the conflict mentioned first. The math teacher involved - his name was Jacob de Gelder - can be described as the key figure in the development of math teaching in the first half of the 19th century in the Netherlands. The rector, Frans Anthoni Bosse, was described after his death as a perfect example of what a rector of a grammar school should be. The circumstances of the conflict are highly illuminating for the difficult position in that period of math teaching in the Netherlands. In this paper I shall use this conflict to illustrate this position.

The historical situation

To understand fully the events I will describe it is useful to know something about the circumstances under which they took place.

The Netherlands had from the end of the 16th century until 1795 formed a republic. This republic, which in the 17th century had played a major role in Europe, both politically and cultural, had been an interesting mixture of old and new. Some of its aspects, such as the tolerant intellectual climate, can be considered as well ahead of the time. But the internal organization of the state was rather old fashioned. While other European countries were heading toward a centralized, powerful government, in the Netherlands the central government remained weak.

Education was run by the cities and villages themselves. Only the province of Holland issued a regulation for the grammar schools of that province, but that regulation, dating from 1625, was never accommodated to the changing circumstances. And for the grammar schools the circumstances did change, and not for the best. For instance, the grammar school of Leyden had in the 17th century more than 100 pupils - the most famous was no doubt Rembrandt van Rhijn, the painter -, but at the end of the 18th century there were only about 25 left. There were some larger grammar schools at that time, but most of the about 60 grammar schools were smaller, some of them having only 5, or even less pupils. But the local governments stubbornly kept alive their grammar schools; they considered having a grammar school as a matter of prestige.
There were some reasons for the decline of the number of students of the grammar schools. Due to the improvement in the primary school system, parents did not send anymore their children to the lower classes of the grammar school just to learn read and write, as was not unusual before. In the field of the secondary education private schools, the so called French schools, offering a more modern program, including modern languages, attracted many more pupils than the old fashioned grammar schools. There is no reason to suppose that the Dutch population was less well educated than the century before. But the grammar schools remained

the schools for the elite, the upper class. The decline of the grammar schools was seen by that class as a symbol for the decline of the state.

In 1795, with the assistance of French troops under general Pichegru, the old Republic was overthrown. A new republic was established, with a stronger central government, and more modern, Enlightenment based ideas about education. But, unlike in most European countries, the government focused on primary education. Several laws on primary education were passed, but in the field of secondary education, nothing was achieved. From 1806 - 1810 the Netherlands formed the Kingdom Holland under one of Napoleons brothers, and from 1810 - 1813 it was a part of the French empire. Plans were made to introduce the French system of the university imperiale, but the political events made an end to all these plans.

In 1813, the Netherlands regained their independence. The country became a kingdom under the house of Orange. When the new kingdom was established, no legislation existed for secondary education.

The situation after 1813

The return of the ancien regime did not mean a return to the old situation. The law on primary education for instance remained in force. For higher education a Royal Decree was issued, and in that decree also new rules about the grammar schools were stated. As we can learn from the fact that the rules for the grammar schools were contained in the decree that referred mainly to the universities, grammar schools were seen as the first step to the university. For the type of secondary education that attracted most pupils, the French schools, in theory belonging to the primary education, until the second half of the century almost nothing was arranged by law.

In the Royal Decree of 1815, for the first time the teaching of other topics than Latin and Greek was made compulsory. Some history, geography and mythology should be taught, and also, as was said, "the first principles of mathematics". Nothing more was said about program, content matter, nor to which pupils this lessons should be given, and by whom. The decree only said that these new topics should be taught after the daily lessons in Latin and Greek, thus, as every teacher knows, at an unfavorable time of the day.

We may presume that the obligation of teaching mathematics caused problems for the majority of the grammar schools. Most of them were small, having only one or two teachers. Sometimes the parish minister was the only -part time - teacher, but even when there were more professional teachers, they usually had none or only inadequate knowledge of mathematics. So at some schools a special teacher for math was appointed. Regarding schools where no special teacher was appointed we may have serious doubts about the way mathematics was taught, if it was taught at all. Such a math teacher was often not very heartily welcomed by the regular teachers. First of all, the teaching of mathematics took time away from the teaching of the classics, an idea they did not like. Secondly, often the math teacher - sometimes just the local schoolmaster - did not belong to the class of "learned people", and often did not understand Latin himself. The other teachers felt that such a person should not teach on a grammar school, and sometimes the pupils were of the same opinion. Finally, the appointment of a special teacher costed them money. Such a teacher was often paid with the money that they could have earned themselves, if they had been able to teach math.

An instruction from 1817

We can learn something about the way math teaching was handled from an " Instruction for the mathematics teacher", dating from the year 1817, issued by the board of governors of the grammar school of Franeker. Franeker is a small town in the north of the Netherlands, but at that time it was a university town. We may assume that the teaching in such a town was not at the bottom level. I will quote some relevant articles from the instruction. I. The math teacher shall teach twice a week, in the building of the school, to all the pupils together, on every Wednesday and Saturday, from 11 until 12 hour, all the year long.

II.......

III. He is not allowed to teach the common arithmetic.

IV. But he will in the first place teach thoroughly the decimal fractions.

V. Followed by a thorough explication of the new system of measurement ,weights and money.

VI. And then he will learn the pupils to apply the decimal fractions to these new systems, because that's important for daily life, and he will train them in converting between the new system and most common old systems.

VI. Only hereafter he will proceed to the principles of geometry, but not before he has instructed and trained his pupils in the use of letters instead of numbers.

VII In the geometric instruction he will begin to learn all pupils all geometric figures, and explain their most simple properties, and gradually use them to rigorous proofs. He will learn them to make geometrical drawings and, for the use in daily life, he will learn them the formula's for the volumes of the solid figures.

We can learn several things from this instruction. First, all students were taught together - possibly all being on different levels of age, knowledge and ability. A complete grammar school comprised six classes. Since there was admission twice a year, in theory there could be 12 levels. Usually a class had his own teacher, teaching Latin and Greek, although due to the fact that most schools were very small a teacher usually combined several classes. So the math teacher in Franeker had to combine all the six classes. The teaching should take place in the school building; we may suspect that the governors had their reasons to state this so explicitly. Second, we note that in this school all students were taught mathematics. That was not self evident. The Royal Decree said nothing about this point, and it was possible to teach for instance only the highest classes. Since "the principles of mathematics " is a very vague expression, one could easily accommodate the program .As we shall see, part of the conflict in Leyden consisted of a disagreement on this point.

Third, we can be surprised by the emphasis laid on practical things, such as decimal fractions and the new decimal system - introduced by the French - of money, weight and measurement. This is not just a local deviation. The archives of the grammar school of Leyden contain a letter of a high government official, pointing out to the board of governors the importance of these subjects and urging the governors to see that these things are properly taught. The importance in "daily life" was then a point being considered in shaping the math curriculum, as it is in the Netherlands today.

Fourth, the teaching of "common arithmetic" was not allowed, so some entrance level was expected from the pupils. The situation that the grammar school served as a primary school with some additional Latin should not return.

All together we may say that the start of math teaching at the Dutch grammar schools was on a low level, and that mathematics teaching hold only a marginal position. In no way for instance the Dutch situation can be compared with the situation at the Prussian gymnasia after the Von Humboldt reform.

Jacob de Gelder

Jacob de Gelder, the principal character of our story, was born in Rotterdam in 1765. He was what might be called of low birth. He went to school for the first time when he was already 9 years old, but by then could read already. It soon came out that he was a talented boy. When he was eleven he entered a French school, a private school, where he learned modern languages and mathematics, for which he had a special gift. After some years he changed from pupil to an auxiliary teacher, now earning his own living. In his spare time he studied mathematics. He was an autodidact; never attending a grammar school nor an university. Some years later he started a school of his own, with a special program for sailors with topics as navigation and astronomy.He was no the only one in this respect, there were more schools of that type established in those years.

During the French period, a time of great economic problems in the Netherlands, his school broke down and De Gelder had great difficulties in earning his money. He had for a while a part time job as a mathematics teacher for some gentlemen society- he had to teach math to their sons - and participated in a surveying project. This project brought him in contact with military men, and that proved to be important for his further career. In 1814, the new king established a military school, especially for engineers, in Delft. Although De Gelder had encountered some problem with the military, he was appointed as professor to teach mathematics and its applications. But again he got into trouble. He disapproved the way the commanding general managed the school and he was so foolish to write his complaints directly to the king. Although he was presumably right, it was impossible to maintain him at the school. So he lost his job. But nevertheless, he had still friends within the government, perhaps the king himself. In 1819 he was appointed as an extraordinary professor at the Leyden university. There was no urgent need for such a professor, so we may assume that this appointment was a personal favor to De Gelder. At the university he was a bit an odd man out. He never attended a grammar school; although he had learned enough Latin himself to be able to lecture in that language, as was common in the Netherlands until the middle of the 19th century. He also never attended university, so he did not have an university degree. So the first thing the senate of the university did was award to De Gelder a honorary doctorate in the newly formed faculty of Mathematics and Natural Sciences.

The grammar school in Leyden

During the 18th century the Leyden grammar school was on the whole in a steady decline. Around 1800, the number of students was dropped well under 30, with less then 5 new students each year. But under the new rector Frans Anthoni Bosse, who became conrector in 1802, and rector in 1809, things improved a bit.

Teaching methods, only for Latin and Greek of course, were modernized, discipline was better maintained. Maybe due to this measures, or for some other reasons, the number of students slowly increased again. In 1810 a third teacher was appointed. But the increase remained small; when in 1815 one of the teachers was appointed as professor at the university, he was not replaced.

In 1816, as a result of the Royal Decree, a special teacher for mathematics was appointed. The archives of the school contain, except for his name, nothing about his person, nor his teaching. But we can be sure that 5 years later, in 1821, he had left the job. For then De Gelder was asked by he board of governors to become the mathematics teacher of the grammar school.

The conflict at the grammar school in Leyden

We don't know why the board asked him, nor how the governors hit upon the idea to ask De Gelder. De Gelder already had published some schoolbooks and he had on several occasions expressed his ideas about teaching mathematics. So perhaps they thought that by appointing De Gelder they could be sure that they had appointed a man fully qualified for the job. Maybe they also thought that by appointing a professor they enhanced the status of the school.

Why did accept De Gelder the job?. Being a university professor, he could consider it below his dignity. One of the reasons of course why he did accept may have been he needed money. The French period had been a difficult time for him and although his salary as an extraordinary professor was supplemented up to the level he had earned in Delft, he perhaps could use some extra. He had ample time, the university did not really need him. Later on De

Gelder himself stressed that he had wished to put into practice his ideas about teaching, but also that he had missed teaching.

The most complete account of his ideas he wrote down some years later, in 1826, as a chapter in a book on mathematics. The chapter is called "Modus Docendi". We may assume that when entering the grammar school in Leyden as a teacher he had already more or less the same ideas. In this chapter he suggests to divide all students of a grammar school into three groups. To the lower group one should teach the theory of proportions, root extraction, theory and use of logarithms and arithmetical and geometrical series. To the middle group the principles of algebra should be taught, which includes solving linear and quadratic equations and the handling of rather complicated algebraic expressions. In the third group the principles of geometry should be taught, including cosmography. Its easy to see that this is a far more ambitious program than for instance the one of Franeker of some years ago.

The motive is also different. The importance for daily life is no longer emphasized. What matters for De Gelder in teaching mathematics in a grammar school is the "formative value" of mathematics, to learn the proper ways of thinking. In this respect De Gelder represents the new way of thinking about mathematics: not only the practical value but in particular the "formative" value is emphasized.

Until that time, as far as we know, the rector, Bosse, had not expressed himself in public on the subject of the teaching of mathematics in a grammar school. In his welcome speech to De Gelder, Bosse said that he was happy that such a renowned mathematician and excellent teacher as De Gelder would fulfill the job and he said he was sure that his colleague and he himself could learn a lot from De Gelder.

But immediately when De Gelder tried to bring into practice his ideas about teaching, the difficulties began. De Gelder wanted to teach all students, like in Franeker, but divided in two groups. Maybe at that time he did not have already the idea of three groups, or perhaps he thought it was wiser to start less ambitious. His idea was to combine the three lower classes of the conrector with the lowest class of the rector into one group, and to combine the two highest classes of the rector into another group. That idea was unacceptable to Bosse: he wanted De Gelder to teach only his combined three upper classes.

But then De Gelder found an unexpected ally: Delfos, the teacher of the lower classes, felt that his students were discriminated by the rector by not allowing them to attend the mathematics lessons. After an exchange of angry letters between all involved Bosse and Delfos closed their ranks and compromised: De Gelder should teach for two groups, one consisting of the three classes of Bosse, and one of the highest class of Delfos. So the two lower classes should not be taught mathematics.

De Gelder at first refused, and wanted to resign, but he was persuaded at last to accept the arrangement and start teaching. But the atmosphere between De Gelder and Bosse was already spoiled. In one of his letters to the governors Bosse had hit De Gelders Achilles' heel: he described him as an autodidact, clearly implying that De Gelder lacked the background a grammar school teacher should have. Teaching remained troublesome. It seems that De Gelder had difficulties in maintaining order and later on De Gelder complained that Bosse stiffened the pupils in their refusal to work properly. In the fall of 1822 the problems came to a crisis. Because of the difficulties between De Gelder and his pupils Bosse was present at all the lessons De Gelder took care off. During one of the incidents, caused by the fact that the students had not done their homework, the students made a mockery out of De Gelder and, according to him, Bosse joined at the laughter. De Gelder infuriated left the class and again wrote a letter offering his resignation. After some time he regretted his step and wrote to the governors that it was just done in a bad humor and that he wanted to go on teaching. But the board of governors did not agree. They were clearly tired of the constant problems around the math teaching, and they appointed a new mathematics teacher.

De Gelder bitterly wrote that they now had appointed somebody with whom the rector could do what he wanted. In a long letter to the governors De Gelder laid out his complaints about Bosse and sketched his ideas about the way the mathematics teaching should be organized. But the governors were not interested. The chairman described to one of his colleagues the letter of De Gelder as nonsense and a bunch of lies. There is no doubt that Bosse not only disagreed in organizational matter with De Gelder, but that he also wanted to minimize the content of the mathematics teaching as much as possible. That does not mean that Bosse was only a stubborn conservative. Some years later he proposed the teaching of modern languages on his school; something not prescribed by the law, but considered by Bosse as useful for his students. But in the view of De Gelder mathematics was not taught for his usefulnes, but for its "formative" value. The classical languages had the same claim. In an biography published after Bosse's death it is stressed that Bosse did not have a high opinion about the "formative value" of mathematics, compared with Latin and Greek. He was of course forced by the Royal Decree to accept mathematics teaching at his school, but emphasized that the decree spoke only about the principles of mathematics. In Bosse's view there was therefore no reason to spend much time on mathematics in a grammar school.

An epilogue

It seemed that Bosse had triumphed, but it was a Pyrrhic victory. The problems around the math teaching were not restricted to Leyden. In 1826 the government felt that it was necessary to issue a new Royal Decree, stating a bit more elaborated program for mathematics at grammar schools. The decree shows the influence of the ideas of De Gelder, who after his debacle in Leyden had remained active in propagating his ideas. The decree issued the following program: the principles of arithmetic, the first grounds of algebra, including equations of second degree, and geometry, until plane trigonometry. The government even explicitly recommended the textbooks of De Gelder, in this way also making more clear the content of the program.

The mentionning of arithmetic presumably does not mean the return of the "common arithmetic", that was already not supposed to be taught in Franeker. De Gelders book on arithmetic contains two volumes. The first contains the common arithmetic and extensive training in he decimal system. Considering De Gelders ideas, these topics should be taught in primary school. The second volume contains just those topics mentionned by De Gelder in his program for the lowest group of the grammar school: proportions, arithmetical and geometrical series, root extraction and logarithms. This second volume on arithmetic and his books on algebra for the middle group,and geometry for the highest group form together a complete series for the teaching of mathematics in a grammar school.

In an other decree the government required an university degree in math for a mathematics teacher. But since the government could give dispensation from this requirement, and it often did, this decree was not so important as it seems at first sight .

In a way De Gelder even returned to the Leyden school. In 1828, after some new troubles about the teaching of mathematics, the city government took action. They appointed a special governor to look after the math teaching and, no doubt to the regret of Bosse, they appointed De Gelder. Luckily by that time there was a new board of governors, and also the math teacher who had succeeded De Gelder had disappeared. The new math teacher that was appointed was a pupil of De Gelder, and he reorganized the math teaching according to the ideas of De Gelder. For the next 10 years there were no problems on the grammar school in Leyden. But on the national level the situation remained unsatisfactory. The final exams of the grammar schools, the ius promovendi, remained a local affair, dominated by the teachers of classical languages. One could also avoid these exams by passing an entrance test organized by the university, where the requirements for math were still easier than at most grammar schools. In the first half of the 19th century students meant money for a professor, so they were not inclined to pose too much difficulties to enter the university. Mathematics therefore stayed in a marginal position at most schools.

Only after the legislation of the secondary schools in 1863 and that of the modernized grammar school in 1876 mathematics teaching received a satisfactory position at the school, with standard programs, controlled exams and qualified teachers. De Gelder had paved the way for that situation. He did this with his publications on mathematics teaching, the writing of his schoolbooks and the advices he gave to the government on teaching mathematics. He also played a role in the development of vocational training, an aspect of his activities paid no attention to in this paper All this makes him a figure of importance in the history of mathematics education in the Netherlands, worth paying some attention to.

Literature:

The literature on the history of mathematics education in the Netherlands is in Dutch. I mention here only some more general works accesible for an international audience.

P.P. Bockstaele, Mathematics in the Netherlands from 1750 to 1830. Janus, 1978, pag. 67-95

V. Cousin, De l'instruction publique en Hollande. Bruxelles 1838

W. Frijhoff, La societé Neerlandaise et ses graduees, 1575-1814. Tilburg 1981

W. Schmale en N.L. Dodde, Revolution des Wissens? Bochum 1991

THE MATHEMATICAL CURRICULUM AND PEDAGOGY IN ENGLAND 1780 - 1900: SOCIAL AND CULTURAL ORIGINS.

Leo Rogers
Roehampton Institute
London SW 15 5 PH

1. The Influences on Education in England in the late Eighteenth Century.

The debates of the seventeenth century scientific revolution had produced significant changes in the popular views about the place of man in the physical universe, and the nature of that universe itself. In the next century, the views of English philosophers like Locke, Hume, Mill and Bentham, with their theories about the nature of man, of society, and of our acquisition of knowledge began to have some far-reaching influences on political and educational ideas in the latter part of the eighteenth century.

With the growth of the population of England from six million in 1750 to nine million in 1800, and with the great change from urban to industrial communities, and the hopes that industry would improve the conditions of life, the philosophy of utilitarianism was developed in the belief that society should seek to obtain and provide the "greatest good for the greatest number". At the same time, "laissez- faire" economics was promoted, with the purpose of regulating society by allowing the interplay of free forces in economics and society and monitoring their effects with minimal legislative interference. These benefits and forces, it was assumed, would be controlled by educated people making the right judgements about moral, political, and economic issues.

This belief that education was the real key to the improvement of the human condition was very strong. Philosophers emphasised human perfectibility; the idea that man is born without knowledge and becomes what education makes him, and that with the growth of knowledge and better education he is continually improving. Thus, education could do everything in influencing human beliefs, attitudes, morals and conduct. In fact, Locke's views on education were generally accepted by the "philosophes" of the enlightenment, and they appear to have had an influence on early French revolutionary politics from about 1790.

During this period, from the late 1700s to about 1850, we see a gradual development of the professionalisation and institutionalisation of mathematics teaching. Set against the considerable changes in social organisation and the economic development of the time, the kind of mathematics, the people who taught it, and the places where it was taught all underwent significant changes. One of my themes is that the isolation from industrial growth and technical improvement of the universities with their classical traditions was maintained and even increased, and the need for the practical applications of science and mathematics was answered by other sources and other institutions. In very broad terms, the division between the old universities and the other institutions where mathematics was taught was closely linked to the class system, and the established English intellectual and social attitude of the time. The industrial needs which brought about the social and institutional changes in the late eighteenth and early nineteenth century are the origin of the social and educational divisions still to be found in the English educational system.

2. The Schools.

In England at this time there was no state organised education. A few grammar schools existed, some of them founded as far back as the fourteenth century, where sons of the lesser noblemen and landowners learnt the classics. Since these schools had been founded by Royal Charter, their curriculum could not easily be changed, and few taught any mathematics; perhaps the first two books of Euclid, and some simple arithmetic.

Any other kind of education was locally organised, usually by well-meaning clergymen and public benefactors. These were called Dame Schools or Charity Schools. In these schools it was possible to learn reading, writing, ciphering (elementary arithmetic), and the catechism. Some clergymen took private pupils, possibly to earn some extra income, than from any purely educational motive and this tradition continued well into the next century.

By the late 1780s Sunday Schools were established for the poor, in order "to educate them in the principles of religion and the duties of their state in life." Not surprisingly however, the schools had the opposite effect that the establishment required. Due to the Sunday School teachers' concern for the health and welfare of their pupils, the "poor" were actually prepared through this rudimentary education for various public duties, and the teachers unwittingly "created thought in the unthinking masses".

Not until the 1830s do we begin to see the development of the English Public School system (ecoles privees) which prepared boys from middle and upper class families for the universities and their eventual careers in the church, the civil service or the army. The amount of mathematics and science taught in these schools was very variable, since the teachers trained in the old universities had very strong classical traditions, and schools like Eton, Harrow and Rugby did not appoint mathematics masters until the 1830s when they began to be challenged by some of the newly founded schools.

3. Non-Conformist Middle Class Education and the Private Schools

From 1766 a group of gentlemen held informal meetings in Birmingham every month to discuss and experiment in the new ideas of natural philosophy. This became known as the "Lunar Society". Among its early members were Boulton, Watt, Priestly, Galton and Erasmus Darwin (the grandfather of Charles Darwin). This was probably the best known of a number of "Literary and Philosophical Societies that were founded about this time. The new middle class who became members of these societies were often forward looking individualists, scientists or innovators with many interests in the practical applications of the new ideas of natural philosophy.

Later, more liberal interests developed, and they encouraged not only the advancement of science and technology, but also social and political education. To these ends, the new middle class founded a number of private academies whose role was to educate the sons of the Non-conformists (Wesleyan and Methodist) for their place as leaders of the new industrial developments.

The Private or "Dissenting" Academies were born in the industrial midlands of England, (cities like Manchester, Sheffield, Birmingham and Liverpool), and were the places where Non-conformists could go to be educated since Oxford and Cambridge would only admit those who were prepared to swear an oath of allegiange to the King as head of the Church of England. In any case the curriculum of the universities of the time was of no interest to young industrialists.

The earliest of these Private Academies was Warrington Academy, founded in 1757. Unlike the universities, the curriculum was intended to prepare the students for life in an industrialised society, and so the subjects that were taught had obvious practical applications.

Another famous college, Manchester College of Arts and Sciences was founded in 1783 by members of the Manchester Literary and Philosophical Society. This institution became later Owens College in 1853, and then finally in the 1890s, Manchester University.

The College of Arts and Sciences taught sciences and practical arts most relevant to local industry. Its syllabus contained classical languages, grammar and rhetoric, mathematics (including trigonometry), mechanics, natural philosophy, (including astronomy and chemistry) English composition, French, commercial and economic geography, history, politics, writing, drawing, book-keeping and shorthand.

Subjects like these became the standard curriculum, and most of the important cities of this time developed their independent educational institutions in this manner. There was a great demand for applied science in many areas, and the "mixed mathematics" (that is, practical geometry, measurement, arithmetic and sometimes fluxions) (Nicholson 1823, Cook 1981) became a central subject in the curriculum.

The situation becomes even more complex when we consider that many other private schools had been founded to cater for the special needs of business and industry. Schools of navigation had grown up in the major ports, and military academies provided an education for the entrants to the army. Probably the best known of these, was Woolwich academy, where Bonnycastle and Hutton taught, and where the syllabus in 1800 consisted of arithmetic: fractions, roots and powers, proportion, interest, permutations and combinations; algebra: arithmetic and geometric progressions, logarithms, simple, quadratic and cubic equations; geometry: plane trigonometry, mensuration, surveying, conic sections; dynamics, projectiles, hydrostatics, hydraulics and fluxions. (Howson 1982 p.68)

4. Self-Education of the workers.

From the 1790s onwards artisans, small tradesmen and labourers began to study and learn by direct participation in political struggles; by reading the radical press and attending lectures of agitators and propagandists. Organisations which supported this activity were called the "corresponding societies", and while on the one hand they were often the centres for political agitation, on the other they provided organised and disciplined opportunities for study for ordinary working people.

In contrast to the aims of the Sunday Schools, their aims were (i) to inform people of the reasons for their condition and the state of society and industry; and (ii) to encourage the progress of human reason and place instruction within the reach of every citizen.

The teaching methods encouraged self-confidence, clear thinking and the capacity for self expression, and the organisers realised the importance of combining systematic education with mass political agitation. Books and newssheets were shared: an individual would be asked to take a book home, read a passage and prepare to talk about it to the group at the next meeting. The book would then be passed on to someone else and the process repeated. Many subjects, including elementary mathematics (which was principally arithmetic) were learnt in this way.

As a result of this self-education movement which developed from the rank and file of workers, there came men able to master and comprehend some of the most advanced political thinking of the time, who could be informed, and critical leaders of the new working class movement. This was recognised as a threat by the establishment (the ruling aristocracy, the Church and the upper middle classes), so that in 1799 an Act of Parliament was passed and in section 15 we find that one of the purposes of the Act is:

"..for the more effectual suppression of societies for seditious purposes.."

5. The English Radicals: Science as a Foundation for Education.

In 1798 Tom Paine published "The Rights of Man", an attack on the established social order and what he saw was its exploitation of the poor and the working classes. In that year also we have Thomas Edgworth, a well known English Educator criticising the methods of rote learning and the narrowness of the grammar school syllabus. The radicals saw the Church as the main obstacle to political reform in its indoctrination of the people which reinforced the strong social stratification and kept people "in their place". The radicals began to replace this religious indoctrination of children with a form of rational education through the Sunday Schools. Further ideas were spread by the radical press with journal names like "Black Dwarf" and "The Cap of Liberty", which was clearly a reference to political changes in France. By 1817 there were clear popular demands for a rational secular education for all as the necessary foundation for good government; an essential part of radical reform.

Paine had demanded the teaching of science which was directly applicable, instead of dead languages which had no use, but more importantly science was regarded as the cornerstone of a rationalist philosophy. While it was politically safe to be a rationalist philosopher if you were a member of the upper classes (it was regarded as an intellectual fashion, without any threat to the established structure of society), rationalism in the market place was seen as a serious threat.

All this activity was of great concern to the establishment, and in 1817 a House of Lords Secret Committee reported on the unprecedented circulation of "publications of the most seditious and inflammatory nature, marked with a peculiar character of irreligion and blasphemy, and tending not only to overturn the existing form of government and order of society, but to root out those principles upon which alone any government or any society can be supported."

To prevent the circulation of such newspapers, the Stamp Act was made law, which required the registration and taxing of all newspapers and journals. This was immediately regarded as a tax on popular knowledge. As a result, the radical newspapers were forced to carry on their crusade underground.

In 1821 Richard Carlisle published his "Address to Men of Science". It was inspired by Tom Paine's "Age of Reason", and Carlisle was sent to prison for his dangerous radical views. The "Address" appeals to scientists (especially chemists and astronomers) to make their philosophical implications known. If it is true that "matter cannot be created or destroyed", then creation is an inappropriate word to use, and so the study of Astronomy exposes the futility of religious cosmologies.

The call to establish a new kind of education was very strong and the radicals and rationalists demanded that religion, (by which they meant the learning of the catechism and the maintenance of the strict social order), should be abandoned and that people should study scientific subjects.

They demanded a curriculum which contained reading, writing, the use of figures (i.e. arithmetic, geometry, algebra, mechanics), elements of astronomy, geography, natural history and chemistry so that children may "at an early period of life form correct notions of organised and inert matter, instead of torturing their minds with metaphysical and incomprehensible dogmas about religion" They believed that science was the key to knowledge and freedom, and that these subjects were best studied by observation and experiment. They put forward a materialist psychology, and demanded free discussion and example instead of repetition and superstition.

6. The Education of Girls

Girls were hardly provided for at all. They sometimes appear as pupils in the elementary schools, but are generally not regarded as worth educating in anything more than the most elementary skills. However, those girls who were lucky enough to have brothers, and whose parents employed private tutors, were often taught alongside their brothers, and some profited from this opportunity.

The "Ladies Diary" which was published from 1704 to 1841 was noted for the mathematical problems it contained. Many women contributed to the solution of these problems, and we assume that many of them would have been taught by private tutors. However, many women published under male or Latin pseudonyms, perhaps feeling that they had a better chance of being heard if they disguised their femininity. From about the 1860s we find a growing movement for the elimination of sex differences in education, particularly in mathematics and science.

Opportunities for further education were severely limited. There was no admission of women to the colleges of Oxford and Cambridge before the beginning of this century, and the private academies were considered to be no place for girls. The Victorian attitude to the mental capabilities of women, and their low social status, together ensured that there were very few opportunities. However, this was to change slowly with the publication of the "Educational Times" in 1847, where subjects like the importance of women in society, and the qualities of women's minds were intelligently discussed and freely promoted. The College of Preceptors, founded in 1846 played a major role in the support of women, and as the teacher training institutions developed in the latter part of the nineteenth century, young women took advantage of this situation to educate themselves and to raise their social status.

7. The Mechanics Institutes (c. 1820 - 1860)

Most of the Literary and Philosophical Societies either supported or evolved into the Mechanics Institutes, which were founded in many English industrial cities and initially became the focus for the growing working class movement for self education. The Mechanics Institutes (Inkester 1975, Royle, 1971) were founded principally to provide some elementary education to the semi-literate workers, they introduced science, literature and the arts; deliberately excluded politics and religion, and provided lectures, evening and day classes, and libraries. There was a substantial demand for reading; the reading of scientific (and clandestinely also political) texts was first of all organised on a self-help basis where the books were passed from one to another, and people took it in turn to hold meetings in their house. Those who had the necessary skills taught others to read and led meetings where workers in turn read, interpreted and discussed the ideas in the texts with the members of the group. The Mechanics Institutes provided a focus for this activity with the establishment of the reading rooms and loan systems.

Many of the public lectures and demonstrations were quite spectacular and generated great interest in various subjects showing ordinary people the wonders of science.

The working people became aware that science would be a determinant of general technical change and the quality of living in the future. The lectures however, were seen to be part of a total learning process where special classes and personal reading in the particular subject area were also important. The Prospectus of the Sheffield Mechanics Institute states; "The object of this Institute is to supply, at a cheap rate, to the classes of the community, those advantages of instruction, in the various branches of Science and Art which are of practical application to their diversified avocations and pursuits."

However, a later statement clearly points out that "controversial subjects" like religion and politics were not to be studied in the Institutes since they were intended to be ".a voluntary association of a portion of the humbler classes of the town or locality assisted by a few of the leading and wealthy inhabitants, to raise, by means of small periodical contributions, a fund to be expended in the instruction of the members in science, literature and the arts to the exclusion of controversial divinity, party politics, and subjects of local dispute, by means of a library of circulation, lectures, evening or day classes, and a reading room."

The curriculum structure and content was largely based upon what was judged to be "useful" to workers, and many lectures were related to practical applications and the consideration of local engineering and manufacturing problems. There was a clear recognition that any advanced learning depended on the basic skills of reading, writing and arithmetic. Also, the concept of "progressive instruction" was established thus guaranteeing some continuity of instruction for the workers, and employment for the lecturers. Advanced classes were given in a selection of subjects like Grammar, French, Latin; Science, Chemistry, Electricity; Mixed Mathematics, Algebra and Mensuration. The demand for these varied, and further study depended on the level of acquisition of the basic skills. For example, at Manchester in 1856, more people studied the "three R's" (reading, writing and arithmetic), than all the other subjects combined.

Provision for science also meant that collections of apparatus and specimens began to be built up, and whereas before, the professional lecturer often supplied his own apparatus, the Institute now employed the services of local instrument makers. Another aspect of this institutionalisation of learning is that the lecturers themselves, instead of moving from place to place to give their lectures in village halls to anyone who would listen (and who could afford to pay), now began to settle into posts in the new institutions where they had much greater chances to establish courses, to develop curricula and write texts.

At the same time, workers deprived of their jobs saw science and technical innovations as a means of cutting wages and producing unemployment, and parallel to the scientific interest, considerable political activity continued outside these institutions. Since the demand for political education and the discussion of religious issues was not met within the Mechanics Institutes, the clientele of the Institutes began slowly to be made up more and more of people from the "lower middle classes", whose social and employment situation was generally more stable than the "labouring classes". In this way the Institute's programme was often rejected by the class for whom it was intended. They became places where the middle classes heard lectures on "middle class subjects", and where young men of low social status but relatively secure economic status could obtain an elementary education.

8. Changes in the Universities

Although Robert Woodhouse had published his "Principles of Analytical Calculation" which introduced the Leibnizian differential notation to English mathematicians in 1803, it had very little effect. In fact, in complete contrast, in 1801, John Colson had published an English translation of the well-known but rather out-dated "Instituzioni Analytiche" of Agnesi originally published in 1748, apparently ignoring all the texts of the French mathematicians of the 1790s. The turning point for the revision of university mathematics in England is generally taken to be the formation of the Analytical Society at Cambridge in 1813. The translation into English of the 1802 edition of Lacroix using the Leibniz notation, and the introduction of the Lagrangian approach to the calculus was a significant event. The central figure in the reform was George Peacock, who during his appointments as moderator of the Cambridge examinations, ensured that the differential notation was used in the examination questions. The first entirely English text book on the calculus was Lardner (1825). From then on, through the early nineteenth century, we have a process where English university mathematics was catching up with the standard of colleagues on the continent so that by the 1860s, we have mathematicians of the calibre of Cayley, Sylvester, Hamilton, Hirst and Clifford influential positions in the universities.

In 1826 the Liberal politicians finally broke the monopoly of Oxford and Cambridge, and University College London was founded. Its statutes avoided any religious affiliation, and the principal figure involved was Jeremy Bentham, the humanist philosopher and reformer.

In 1828 Augustus De Morgan was appointed the first professor of mathematics. While perhaps not regarded as a first rank mathematician, he was certainly a thoughtful, idealistic and energetic educator whose text books and pedagogical writings show a deep concern for the problems of learning and teaching mathematics. Also in 1828, after considerable agitation to provide a religious foundation in London, another university college, King's College London was founded.

De Morgan's pedagogical texts (De Morgan 1831) had wide circulation through journals like the "Penny Cyclopaedia", which was the main publication of the "Society for the Diffusion of Useful Knowledge" (SDUK), and which serialised his "Differential and Integral Calculus" in some twenty five weekly parts. The calculus was later published as a single volume in 1842. A number of other writers like Dionysius Lardner (Lardner 1825) and Olinthus Gregory also contributed to the popularising of scientific and mathematical knowledge in this way, and Isaac Todhunter's book (Todhunter 1852) became the standard calculus text for the rest of the century.

It was still the case however, that the university of Cambridge dominated the educational system, and in 1850 the fact that Cambridge required a knowledge of Euclid for its entrance examinations, made the other universities follow suit. So, while the mathematics within the universities was bringing itself into the same league as that of the continent of Europe, the changes in the schools were almost non existent.

In 1851, at the time of the Great Exhibition, the Royal College of Science, and the Royal School of Mines were founded under the patronage of Prince Albert. These later became Imperial College, and as the names imply, applied mathematics featured highly in the curriculum.

Towards the end of the nineteenth century we see a strong movement in the colleges outside the universities where advocates of practical mathematics were designing new courses and writing new textbooks. These authors were often the new professors of science and engineering in the universities who were wanting to reform the curriculum and the teaching methodology in the schools and colleges because they considered that the mathematics education that students had undergone was inadequate for the new university courses. Prominent among these was Perry (Perry 1899), a significant figure in the reform of mathematics teaching at this time.

A wider discussion of the development of the mathematics curriculum and its pedagogy in the latter part of the century can be found in Price (Price 1983). However, the full story of the earlier part of the century and the role of institutions like the College of Preceptors, journals like the Educational Times, and the individuals behind them has yet to be told. I am indebted to Janet Burt, John Fauvel, Mike Price and many other colleagues in the British Society for the History of Mathematics for their interesting conversations and the opportunities we have to discuss some of these issues at our meetings.

Appendix 1

Select Chronology of Educators and Educational events.

1741 Royal Military Academy Woolwich Founded Bonnycastle, Barlow, Gregory, Hutton, Thos. Simpson, J.J. Sylvester.

1757 Warrington Academy founded.

1766 First meetings of the Lunar Society.

1783-9 Thomas Day. The History of Stanford and Merton. Popular childrens book containing radical educational and social ideas. 50 editions up to the 1890s.

1783 Manchester College of Science and Arts.

1798 R.L. and M. Edgworth. Practical Education 2 vols. Criticism of rote learning and narrow grammar school curriculum.

1799 Act of Parliament section 15 "..for the more effectual suppression of societies for seditious purposes..".

1799 Cambridge final examination requires the first book of Euclid, Arithmetic, Vulgar and decimal fractions and Simple and Quadratic Equations.

1800 Woolwich Academy mathematics syllabus: Arithmetic (including fractions, roots, powers, proportion, interest, permutations and combinations), arithmetical and geometrical progressions, logarithms, simple, quadratic and cubic equations),geometry, plane trigonometry, mensuration,surveying, conic sections, dynamics, projectiles, hydrostatics, hydraulics and fluxions.

1813 Analytical Society at Cambridge Babbage, Herschel, Peacock, Whewell.

1815 Formation of the "Hampden Clubs"

1817 House of Lords Secret Committee

1819 James Mill. "Education" in Supplement to Encyclopaedia Britannica London 1819.

1821 Richard Carlisle - "Address to Men of Science"

1826 Liberal Politicians break the monopoly of Oxford and Cambridge: University College London Founded ("that heathen place")

1826 Society for the Diffusion of Useful Knowledge (SDUK)

1828 De Morgan. Appointed first Professor of Mathematics at University College London.Inaugural lecture" On the Study of Mathematics".

1828 Kings College London Founded

1831 British Association for the Advancement of Science

1833 Factory Act. Employers must release children for 2 hours school each day

1836 William Whewell: "Thoughts on the Study of Mathematics as Part of a Liberal Education."

1837 Compulsory Registration of Births.

1839 Privvy Council Committee on Education.

1840's University Examination systems established Oxford, Cambridge and London adopt Euclid as a standard text for elementary geometry.

1843 Lord Shaftesbury.Speech on manufacturing industries and the lack of provision of education for the working class.

1844 Factory Act.Schooling increased to 3 hours each day.

1845 Whewell, J. "Of a Liberal Education"

1846 College of Preceptors founded

1846 Kay, Joseph."The Education of the Poor in England and Europe"

1847 Educational Times published

1850 Public Libraries Act.Local tax to subsidise library provision.

1852 The Great Exhibition of Sciences and Arts.

1853 Foundation of the Government Department of Science and Arts

1855 Newspaper Tax abolished

1860 By this time mathematics as "arithmetic, algebra and geometry" is fairly well established as part of a "liberal education" for boys.

1861 to 1866 Darwin's voyage in the "Beagle"

1861 Spencer, H. Education, Intellectual, Moral and Physical. Science is the most valuable kind of knowledge.

1861 Clarendon Commission appointed to Inquire into the State of Popular Education in England

1862 Kay-Shuttleworth, James: "Four Periods of Public Education."

1865 London Mathematical Society

1868 Taunton Commission appointed to report on and advise the government of the state of schooling.

1868 Trades Union Congress founded

1869 Report of the First General Meeting of the National Education League

1870 First Education Act establishes public elementary education.

1871 Foundation of the Association for the Improvement of Geometrical Teaching (AIGT). Later to become the Mathematical Association.

1870's Department of Science and Art examinations encourage the use of drawing instruments and the use of practical geometry.

1886 Royal Commission appointed to enquire into the working of the Elementary Education Acts

1899 Perry's lectures "On practical mathematics to working men".

Appendix 2

Types of Activity in Nineteenth century Mathematics Teaching.

1. Independent practitioners.

These were the Instrument Makers, Cartographers, Surveyors, etc. they used, and were able to communicate a fairly high level of specialised mathematics as applied arithmetic, geometry, trigonometry, algebra and in some cases fluxions.

2. Apprentice Masters.

At all levels of industry where established trades were being used, or were finding new applications, for example where the barrels originally made by the coopers for beer were used to transport pottery, or where new skills were being developed, as in the conversion and use of the wood lathe for metal work. Generally elementary and specialised calculations.

3. Private Tutors.
These were sometimes "practitioners", but more usually they were employed exclusively for the education of one family, and lived in that family house. This was the preferred course for the "sons of Gentleman", and if this was too expensive, their sons were put out to lodge with the local vicar who might supplement his income by educating two or three boys.The private tutors who were employed by families often taught the girls the same subjects as the boys, and thus a number of girls learnt arithmetic and Euclid.During this time the tradition of the English country clergy as tutors became established. They had been educated at Oxford or Cambridge, and many of them made considerable contributions to English mathematics particularly in the latter part of the nineteenth century.

4. Grammar Schools.
Originally founded by Royal Charter, and formerly providing for the sons of the "gentry", these often had a long established tradition with a strong classical emphasis. If any mathematics was taught, it was some arithmetic, and some of the first two books of Euclid. Their charter usually prohibited any variation in their curriculum, which had ben set up a considerable time ago.

5. Specialised Institutions.
Schools of Navigation were run by the Navy or the Trading Companies (though much of this instruction was done at sea), while some Grammar and Public Schools in the great Ports taught mathematics and navigation. Military Academies like Woolwich taught various aspects of applicable mathematics, and Mechanics Institutes were the "evening institutes" providing basic education and practical scientific knowledge to the working man. Many of these evolved, along with the Private or "Dissenting".

Academies into the Technical Institutions of the late nineteenth and early twentieth century..

6. Private or Dissenting Academies.
Originally establish to educate the Non-Conformist (Calvinist, Wesleyan and other Protestant) ministers, they quickly became the most important institutions for educational change. This is where the industrialists of the Midlands sent their sons, and as forward-thinking and liberal minded individuals they had an influence on the curriculum. Their basic philosophy was that the advancement of knowledge depends upon its application, and that learning should be put to social use. Many of them later evolved into Mechanics Institutes.

7. Public Schools.
From the middle to latter part of the nineteenth century there was a gradual development of these private institutions by more liberal minded (upper class, Church of England) individuals, who were on the whole more aware of the needs of society, and who attempted to bring more science and mathematics into the curriculum for pupils from upper middle class and aristocratic backgrounds.

8. Popularisers and Writers.
Many of these taught mathematics in the Academies, Colleges, Institutes and in the new Universities. A few important names are Olinthus Gregory, Dionysius Lardner, Thomas Tate, Augustus de Morgan and Mary Boole. Their subjects and motivations varied considerably. Textbooks were written as handbooks for schoolmasters and teachers in the Academies or Institutes, or as special texts and sets of questions to help pass examinations or as serialisations of practical and applicable mathematics for popular consumption. Quite often a writer would be promoting particular educational principles, or a particular philosophy of mathematics, or of mathematics teaching.

9. Societies.
A large number of "Literary and Philosophical Societies" flourished in the early part of the century. Most evolved into institutions which became the Technical Institutes in the latter part of the century. For example, the Manchester Lit. and Phil. Society is regarded as the ancestor of Manchester University. The "Society for the Diffusion of Useful Knowledge" (SDUK) was

founded by liberal middle class teachers, lawyers, clergy and members of parliament to provide cheap mass education through a number of serial publications. The "Penny Cyclopaedia" was the principal serial. For example, De Morgan's Differential and Integral Calculus was serialised in 25 parts.
Specialist societies arose like the Cambridge Philosophical Society (1824), and the London Mathematical Society (1865)

10. Publications.
There were many newspapers, serials, journals, encyclopaedias, all carried articles on mathematics of varying quality. Some of the best known are The Ladies Diary, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Nature, Transactions of the Manchester Literary and Philosophical Society, and the Penny Cyclopaedia.

11. Teacher Training Institutions.
These gradually evolved as a means of training Primary teachers and writers like the Edgworths, Erasmus Darwin and Joseph Priestly justified mathematics by its "utility" and included it in the basic school curriculum. Later, specialist teachers organisations like the Association for the Improvement of Geometrical Teaching (AIGT 1871) were organised and protested against the traditional university based curricula.

12. Government Encouraged Institutions and Departments.
These were set up after the Great Exhibition of 1851 to encourage the greater exploitation of ideas in industry. The Department of Science and Arts was the first official government body, and The Royal College of Science (now Imperial College) and the Royal School of Mines were created. Government also sponsored grants for individuals and industries where mathematics was applied.

13 Examinations
Final examinations at Oxford and Cambridge became written tests in the eighteenth century. By about 1830 the universities of London, Oxford and Cambridge all required examinations as a means of establishing the "basic knowledge" required for a university course. However, the standards were very variable. Entrance examinations for the universities began in about 1850 when Cambridge decided that a knowledge of Euclid was necessary for a university course in mathematics.

Bibliography

Cook, I. (1981)
"Geometry for a Carpenter in 1800" in Mathematical Gazette 65 (433) Oct 1981 (193-195).

De Morgan, A. (1831)
On the Study and Difficulties of Mathematics London.

De Morgan, A. (1842)
The Differential and Integral Calculus. London.

Dubbey, J.M. (1979)
"British Mathematics 1800-1830 I The General Decline, II The Analytical Society". in Bull. I.M.A. 15 (51-58) and (82-88).

Howson, G. (1982)
A History of Mathematics Education in England. Cambridge University Press.

Inkester, I. (1975)
"Science and the Mechanics Institutes, 1820-1850, the case of Sheffield." in Annals of Science 32 (5) 1975 (451-474).

Lawson, J. and Silver, H. (1973)
A Social History of Education in England. Methuen, London.

Nicholson, P. (1823)
A Popular Course of Pure and Mixed Mathematics for the use of Schools and Students. London.

Lardner, D. (1825)
An Elementary Treatise on the Differential and Integral Calculus.London.

Lawson, J. and Silver, H. (1973)
A Social History of Education in England. Methuen, London.

Locke, J. (1693)
Some Thoughts Concerning Education. London
French translation 1695.
15 English editions by 1777

Perry, J. (1899)
Practical Mathematics. Summary of Six Lectures Delivered to Working Men at the Museum of Practical Geology. February and March 1899. Dept. of Science and Art. London.

Royle, E. (1971)
"Mechanics Institutes and the Working Classes". in Historical Journal 14 (2) 1971 (305-321).

Simon, B. (1960)
The Two Nations and the Educational Structure: 1780-1870. London.

Todhunter, I. (1852)
A Treatise on the Differential Calculus and Elements of the Integral Calculus. Cambridge.

Whewell, W. (1835)
Thoughts on the Study of Mathematics as Part of a Liberal Education. Cambridge.

THEME 4

TOPIC 4

Relations entre épistémologie et questions didactiques et pédagogiques

Epistemology audits relationship to didactics and pedagogy

EXPOSES - WORSHOPS

CONSTRUCTIVISM, EDUCATION AND THE PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

Pier Luigi Ferrari
Dipartimento di Matematica, Università di Catania

Dans les dernieres années le paradigme constructiviste a acquis une vaste diffusion dans l'éducation mathématique. D'autre part, les philosophies failliblistes des mathématiques ont été décrites et analysées dans nombre de livres et d'articles. Le but principal de ce travail est de discuter les relations entre la philosophie des mathématiques et les paradigmes de l'éducation mathématique (en particulier le constructivisme). Je cherche a démontrer que le paradigme constructiviste n'a pas besoin d'une philosophie failliblistе des mathématiques ni, peut-être, d'aucune philosophie, et que les attitudes des enseignants vers les mathématiques ne decoulent pas entièrement de la philosophie des mathématiques (au moins si celle-ci concerne la fondation de la certitude mathématique).

1. INTRODUCTION

In the last years the attention towards the philosophy of mathematics has considerably increased. Even in mathematics education the role of general paradigms has grown more definite. These paradigms are often related to major trends in epistemology, even though they take on ideas and motivations from other settings as well. A consequence has been the need for going deeper into the exploration of the links between the philosophy of mathematics and the theoretical frames of the research on mathematics education. In particular this has concerned constructivism, whose epistemological and philosophical roots are manifest. Some parallel has been drawn in the past between constructivism in education and constructivism as a foundational school in mathematics.[1] More recently, some studies (for example, Lerman 1989) have pointed out the differences between the two theoretical frames and the links between constructivism as a theory of learning and the fallibilist philosophy of mathematics. This issue has been widely developed in the book of Ernest (1991), in which he presents the fallibilist philosophy as a philosophical frame adequate to constructivism.

The main object of this paper is to discuss Ernest's conclusions following two main strands: from one hand, I point out some failures of the fallibilist philosophy that in my opinion make it inadequate as a philosophy of mathematics; on the other hand I try to argue that the acceptance of the fallibilist philosophy is not necessary for a constructivist researcher or educator and that there are no close links between the philosophy of mathematics and educational research and practice.

2. THE CONSTRUCTIVIST PARADIGM IN MATHEMATICS EDUCATION

The following have been recognized as the main assumptions of constructivism (Kilpatrick 1987, Vergnaud 1987, Lerman 1989):

---

[1] By *constructivism* in mathematics it is generally meant a wide area of foundational trends and studies including Brouwer and Heyting's intuitionism, recursive analysis, E.Bishop's constructivism (also known as explicit mathematics) and many others. In the remainder of the paper by 'constructivism' it is meant the theory of learning.

(1) Knowledge is actively constructed by the cognizing subject, not passively received from the environment.

(2) Coming to know is an adaptive process that organizes one's experiential world.

(3) Coming to know does not discover an independent, pre-existing world outside the mind of the knower.

The acceptance of (1) only is sometimes called 'trivial constructivism', whereas the acceptance of (1), (2) and (3) is called 'radical constructivism'. There is people, for example Vergnaud, accepting (1) and (2) but not (3). The constructivist paradigm, which is very popular among researchers in mathematics education, fits very well the need for a shift in perspective on mathematical knowledge: aspects as creativity and ability at planning are more and more regarded as inherent to mathematical competence; moreover, it seems a theoretical frame adequate to the purpose of extending mathematical education to students of different cultures and styles of learning.

One of the most striking features of constructivism is its flexibility, that is the opportunity of being combined with other theoretical frames, even though conflicting as regards philosophical assumptions[1]. Various research groups in different countries adopt research frames borrowing ideas from both constructivism and Vygotskij's theories, or other theories assuming social interaction as a fundamental step in the process of construction of mathematical knowledge[2]. This means that constructivism is more used as a wide frame which can include and strengthen different ideas and practices than as a reference theory from which carefully draw all possible implications on teaching, learning and the related research. As a matter of fact, it has been argued that "as a theory of knowledge acquisition, constructivism is not a theory of teaching", that "there is no necessary connection between how one views knowledge as being acquired and what instructional procedures one sees as optimal for getting that acquisition to occur"[3] and that "epistemologies are descriptive, whereas theories of teaching must necessarily be theories of practice"[4]. Nonetheless, von Glasersfeld has identified five consequences for educational practice that follow from a radical constructivist position[5]:

(a) teaching becomes sharply distinguished from training;
(b) processes inferred as internal become more interesting than overt behavior;
(c) linguistic communication becomes a process for guiding a student's learning, not a process for transferring knowledge;
(d) students' deviations from the teacher's expectations becomes means for understanding their efforts to understand;
(e) teaching interviews become attempts not only to infer cognitive structures but also to modify them.

Kilpatrick's opinion is that "all five consequences fit the constructivist stance, but they appear to fit other philosophical positions as well". He argues that constructivist positions, in itself, do not lead to a way of teaching radically different from the other ones; the only difference is one of focus. In his opinion, the contrast between the two different perspectives on the acquisition of knowledge (construction versus transport) is only a contrast between metaphors. In particular, in opposition to the constructivist argument asserting that students' misconceptions are better understood when seen as arising from alternative constructions of meaning than as failures in communication, he remarks that both the models 'alternative construction' or 'failure

---

1 A comparison of activity theory and radical constructivism can be found in Bauersfeld, 1990.

2 For example see Lerman, 1992. A survey of research in such direction can be found in Bartolini Bussi, 1991.

3 Kilpatrick, 1987, p.11.

4 Kerr, 1981, reported in Kilpatrick, 1987, p.11.

5 von Glasersfeld 1983, reported in Kilpatrick, 1987, p.12.

in communication' can lead to attempts to find out what the student is thinking.

In my opinion it is quite correct to avoid strict links between learning theories and the educational practice; an educational product is affected by the results of research in different fields, such as the epistemology of the subject matter, psychology, pedagogy and so on. Moreover, the dimension of the so called 'didactical phenomena' has to be taken into account. The mechanical transposition of theories or pieces of theories to educational practice has generally yielded poor results, such as, in Italy, modern mathematics or even misunderstood portions of Piaget's theories.

As regards the role of metaphors, any construction process is affected by the context (including linguistic communications that take place), and sometimes the influence of the context may be so strong to make the metaphor of transmission convincing. There are situations, even in mathematics, where external clues seem a necessary condition for the construction of knowledge.

But in some aspects the constructivist paradigm seems more fruitful. The transition from the metaphor of transmission to the metaphor of construction is not only a shift of emphasis but sometimes allows teachers and researchers to better understand the processes involved. This applies to misconceptions too, because often they are by no means removed by the careful iteration of transmissions. In students' misconceptions there is often much more than what has been actually transmitted, as far as already existing mental models or schemes are involved.

3. THE FALLIBILIST PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

3.1. An outline of fallibilist views

The fallibilist philosophy is a wide area of attitudes, opinions and studies mainly related to the papers of Lakatos, Hersh and Davis, Putnam, Tymoczko and others. The main fallibilist assumptions have been summarized in the book of Ernest; in brief, their claim is that mathematical knowledge is not absolute but fallible and corrigible and formalization does not fulfils its role of warrant but rather hinders the development of knowledge. Moreover, the development of mathematics is regarded as parallel to natural sciences; in mathematics as well as in natural sciences the emphasis is not on the transmission of truth from true premises to conclusions, but on the re-transmission of falsity from falsified conclusions (falsifiers) to hypothetical premises. Apart from formal contradictions such as $p \wedge \neg p$, the potential falsifiers of a theory are the informal theorems of the (assumed) pre-existing informal theory. In fallibilist views informal mathematics is of crucial importance, because as a product it is the source of all formal mathematics. Theories are not equally likely to be falsified: elementary group theory is harder to falsify because the original informal theory has been radically replaced by the axiomatic theory. Set theory is a different question as it is "the dominant, unifying theory in which all available mathematical facts have to be explained."[1] From the focus on informal mathematics follows that the history of mathematics is of paramount importance as well.

Ernest proposes a new philosophy of mathematics called social constructivism, "which is largely an elaboration and synthesis of pre-existing views of mathematics, notably those of conventionalism and quasi empiricism."[2] I try to give a brief account of Ernest's views, especially of those I intend to criticize. I apologize for the unavoidable oversimplification; the interested reader is referred to Ernest's book for a more detailed and proper account. Social constructivism, which develops most of fallibilist views, is claimed to be a descriptive (and not prescriptive) philosophy of mathematics. Mathematics is regarded as a human construction because "the basis of mathematical knowledge is linguistic knowledge, conventions and rules,

[1]Lakatos, 1967, p.39-40

[2] Ernest, 1991, p.42.

and language is a social construction"[1]; furthermore "interpersonal social processes are required to turn an individual's subjective mathematical knowledge, after publication, into accepted objective mathematical knowledge"; finally "objectivity itself will be understood to be social"[2]. Any logical system of knowledge depends on a set of primitive propositions or terms and "for objective mathematical knowledge these propositions and terms are to be found in the objective knowledge of natural language". So one "cannot question the fact that 'A and B' entails 'A' or that 1+1=2 without withdrawing some of the possibility of communication." Ernest claims that "our use of the key logical terms 'not', 'and', 'or', 'implies', 'if, and only if', 'entails', 'there exists', 'for all', 'is a', and so on, strictly follows linguistic rules....These rules fix as true basic statements such as 'if A, then A or B', or rules of inference such as 'A' and 'A implies B' together entail 'B'. ... Thus reasoning ... rests on the shared rules of language. The rather more abstract and powerful forms of logic used in mathematics also rest on the logic embedded in natural language use."

3.2. Some drawbacks in fallibilist arguments

In this section some fallibilist positions are criticized. In particular I focus on three issues: Lakatos' parallel between mathematics and natural sciences, the role of proofs in mathematics and the connection between mathematical logic and natural language exposed in the last paragraph of the previous section. All these points concern mathematics education and the related research, but the third one seems to me the more directly connected to practice as it involves not only the role of mathematical logic in the curriculum of primary and middle school, but also a particular perspective on language and so on learning processes.

MATHEMATICS AS A NATURAL SCIENCE

The assimilation of mathematics to natural sciences is not convincing. At this regard, Cobb's remark about the lack in mathematics of something corresponding to dismissed theories (as falsified by experimental facts)[3] seems quite correct. Mathematics cannot be regarded only as a process of discovery of mathematical truths. Mathematics is made up of theories and models and studies their properties and relationships. Discovering mathematical facts not compatible with some previous theory means formulating new theories. In mathematics, theories are to be regarded as a whole, it does not make much sense to take into account statements outside the theoretical context they are included. For example, it is not very sensible, from a mathematical point of view, to ask how many are the parallels to a given line through a given point, and which answer is a necessary mathematical truth. In the same way, it is not so interesting to ask whether the Boolean law 1+1=1 and the arithmetic fact 1+1=2 are contradictory or not.[4] The similarity between the two formulas is only apparent because they belong to different theories and then symbols are forced to assume different meanings. Even the theory of potential falsifiers is questionable. In some theories, such as group theory, the hypotetico-deductive structure is evident: xy=yx is not a necessary (or unnecessary) truth, but is introduced to separate two different classes of structures. Any substantial change in the axioms of group theory would not lead to an *improved group theory* but to *another* theory. It would not change

---

1 ibidem

2 ibidem

3 Cobb, 1989, p.37.

4 Ernest, 1991, p.52. In effect neither formula is valid, for they are both atomic formulas. '1+1=1' is a theorem (usually an axiom) of the elementary theory of boolean algebras. In '1+1=2' two non primitive (1 and 2) symbols occur. If we assume standard arithmetic definitions, i.e. 1=succ(0) and 2=succ(succ(0)), then '1+1=2' becomes a theorem of first order arithmetic. I do not know any reasonable mathematical theory including both formulas as theorems. Observe that 1+1=0 is a theorem of the theory of fields of characteristic 2, 1+1=2 is a theorem of the theory of the category of sets and $\neg$(1+1=2) is a theorem of the theory of the category of all categories. This variety of interpretations is an enrichment for mathematical knowledge, not a limitation.

the idea of group, but would construct a different idea. The only discussion could be on which of the two theories deserves the appellation *group theory,* but this is not a very important question. The old theory should not be dismissed, maybe it could be disregarded, if the new is more interesting and promising. Most likely, the analysis of the relationships between the two theories would become a new research field. As regards sets, the question is not very different. The notion of set is largely determined by the mathematical theory. I cannot understand what informal set theory could be like. Naive set theory is contradictory, as Lakatos himself concedes. What will happen in the informal theory to those set theoretical problems posed as a consequence of the efforts to provide a suitable axiomatization? In other words, in informal set theory is replacement schema true, or one has to bound oneself to separation? And what about the axiom of choice? And what happens to the notion of set deriving from principles of choice different from AC? Which cardinals do exist for the informal theory? Why the informal theory should not be constructive? I cannot imagine how some set theory, say ZF, could be falsified by an informal theorem, but I cannot help thinking that this should produce nothing more than another set theory. We have already different set theories that provide different ideas of set. Moreover, the notion of set is not so dominant in mathematics that all available mathematical facts should be explained in it. Sets may be replaced, at least in principle, by other concepts, such as categories, topoi, or different kinds of sets could be used, such as recursively enumerable ones. The mathematical idea of set does not seem more natural than the idea of group.

THE ROLE OF PROOF IN MATHEMATICS

In my opinion the main object of proofs is not to warrant the certainty of mathematical knowledge, but to determine the domain where mathematical results hold, for any interpretation of constants, functions and predicates, and to make explicit the links among the different properties. The goal of the search for constructive proofs, for example, is not so much to increase the certainty of a theorem, but to analyse the relationship among different mathematical systems, or even to extract an algorithm. A proof may be interesting due to its simplicity and elegance, or because it is easily translated into an algorithm, or works in some weak theory or within a weak logical frame. In other words a proof belongs to mathematics, is not a warrant for it. A thorough discussion on these and other related questions may be found in Lolli (1987).

Another question is related to the meaning of a statement such as "mathematics is fallible and corrigible". If it is regarded from an anthropological perspective[1], it roughly means that mathematical theories can change or turn out inadequate or even be disregarded, which is widely acceptable. A different question is the claim that results within a specific theory are fallible: for example, if I state that in a specific theory, within a specified logical frame, some theorem holds, one thing is to claim that such theorem makes no sense, or embodies no bright idea, or is not useful, or the proof is ugly, another thing to claim that it is not a theorem in that theoretical and logical context. The first claim seems to belong to the anthropological context, the second to the experiential one[2]. In other words, for a given a theorem, I cannot be sure that it is interesting for mathematical knowledge on my own, but I can be sure myself that it is actually a theorem, at least as much as I am sure of my address or my phone number.

MATHEMATICAL LOGIC AS BASED ON NATURAL LANGUAGE

According to Ernest, it is natural language that guarantees the basis of objectivity in mathematics as well as in mathematical logic. I do not understand why we cannot question facts such as 'A and B entails A' or '1+1=2' without consequences for the possibility of communication. These formulas hold in some 'language game' and do not in some other. I doubt that they remain in force in our meta-language. Why should we be compelled to carry out our reasoning within the frame of classical logic? Why not another logic, say a non-monotonic

---

[1] Cobb, 1989.

[2] ibidem.

one? And why standard arithmetic should apply to such a large domain? I completely disagree with the opinion that axioms and rules of mathematical logic should reflect the use and the meaning of the terms involved. The everyday use of words such as 'not', 'and', 'if... then...' and so on is by no means the same as in classical logic. In classical propositional calculus, for example, the truth of a complex statement is a function of the truth of the atomic statements involved. This does not happen in the natural language, which has a different semantics, also based on factors including context, purposes and shared culture. So statements of the form 'if A then B', when A is false and B true, are true according to the truth-functional semantics of mathematical logic, but they are perceived as false, and also a bit foolish, in most of 'language games'. Further examples in this vein can be found in Freudenthal, 1989.

On the other hand there is evidence supporting the idea that human reasoning is content dependent and not based on rules.[1] The view of reasoning as resting on the (assumed) shared rules of (verbal) language contrasts with the growing interest and success of research on visual reasoning.[2] On the other hand, the idea that logical competence is the basis for mathematical knowledge has been refuted by both epistemological analysis and experimental findings. There is no need of recalling here the failure of most of the attempts to teach (mathematical) logic to children as it were a tool for reasoning or solving problems. By the way, social constructivism seem more prescriptive than descriptive at this regard, as it rejects (or overlooks) forms of reasoning widely used and studied, even by constructivist teachers and researchers. In spite of the social roots of mathematical knowledge, the model of reasoning proposed is absolutist and detached from everyday experience.

4. MATHEMATICS EDUCATION AND THE PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

4.1. The role of teachers' perspective

According to Ernest (1992), problem-solving (which is a fundamental component of mathematics education) "... is assimilated to the teacher's mathematical perspective. In other words, what a teacher understands by problem solving is largely a function of that teacher's personal philosophy of mathematics."[3] Absolutism, Progressive Absolutism and Fallibilism are recognized as the three main philosophies of mathematics held by school and college teachers of mathematics. Absolutist philosophies, which are the most widespread ones, regard mathematics as a body of fixed and certain, objective knowledge. In Ernest's view, logicism, formalism and, to a large extent, platonism are absolutist. Teachers with an absolutist view of mathematics will regard problem solving "... as the carrying out of non-routine teacher imposed tasks with determinate right answers. Problem solving is thus an activity which follows on from the transmission of mathematical content, and provides the means to apply previously learned knowledge and skills."[4]

The progressive absolutist position also views mathematics as made up of certain, objective knowledge, but in addition it accepts that new knowledge is continually being created by human activity. Popper's epistemology and the intuitionist philosophy of mathematics are included in this class. Progressive absolutist teachers "... will view problem solving as the means to develop and employ the strategies and the processes of mathematics, and to uncover the truths and structures of mathematics."[5]

The fallibilist position has been already presented in 3.1. A fallibilist teacher "... will view

---

[1] See Jonson-Laird, 1983.

[2] A survey may be found in Dreyfus, 1991.

[3] Ernest, 1992, p.294 (thesis 2).

[4] ibidem, pp.294-295 (thesis 2.1).

[5] ibidem, p.295 (thesis 2.2).

problem solving as the appropriate pedagogy to employ in the classroom. In particular, it is seen as a socially mediated process of problem posing and solution construction, requiring discussion for the negotiation of meanings, strategies and proofs."[1]

In the book of Ernest, teachers' perspectives are related to philosophy of mathematics, which, in turn, is linked with the problem of mathematical certainty and then with the studies on foundations (which, besides attitudes and perspectives, produce theorems as well). I cannot see such a close link among teachers' perspectives, their opinions on mathematical certainty and the results of foundational research. In other words I reject the assimilation of teachers' perspectives to their philosophy of mathematics, which Ernest[2] seems to identify with their acceptance of one out of three main classes of opinions about mathematical certainty. Opinions on mathematics and its certainty no doubt affect teachers' attitudes, but this is not necessarily related to their even implicit awareness of the foundational debate and of the positions of the different schools. In Italy there exist teachers with well defined attitudes (dogmatic or relativistic) who hardly have heard something definite about the philosophy of mathematics or the foundational research. My feeling, exaggerating a little, is that most teachers' attitudes would hardly change had Gödel proved, in place of one of his well known theorems, that ZF+ "any cardinal one can think does exist" is consistent, showing some recursive model. Joking apart, what I mean is not that teachers have no general opinions about mathematics, but that these opinions do not mainly concern the problem of mathematical certainty nor the results of foundational studies and research paradigms.

In my opinion, the factors affecting teachers' attitudes are mostly other, more complex ones[3]. In Italy, for example, the custom of regarding mathematics in some curricula as a model of abstract knowledge, detached from applications, is less an outcome of opinions about the foundations of mathematics than of fascism's cultural policy in the 20s, largely influenced by dominant Gentile's neo-idealist philosophy and by the need of maintaining society under control. Another aspect, which is a consequence of the previous one, is the role of mathematics in the curriculum: in Italy, for a long period, mathematics has contributed, more than other subject matters, to students' selection, excluding part of them from the continuation of studies. Related to these aspects, there are either absolutist or relativist teachers, but these attitudes are only partially determined by their acceptance of some philosophy of mathematics. Their role in the instructional system and in society is an influential variable as well.

4.2. Philosophy of mathematics, foundations and mathematical certainty

The fact is that the relationship between mathematics and society is very complex, and does not involve only pure mathematics, let alone foundational issues. Applied mathematics is more and more widely used in everyday life as well as technologies, such as computers, which are generally regarded as closely connected with mathematics; this most likely affects people's attitudes more than the traditional quarrels on foundations or on mathematical certainty. It is strange that a philosophy of mathematics asserting the social construction of mathematical knowledge should assume such a narrow view of the relationship between mathematics and society.

On the other hand, the empirical evidence provided to support such claims[4] is not conclusive, as the author himself concedes, as far as the classification of teachers' perspectives seems to be

---

1 ibidem, p.295 (thesis 2.3).

2 Ernest, 1991.

3 About the complexity of the relationships between teachers' conceptions and educational practice see Thompson, 1984.

4 Ernest, 1991, p.297-298.

based on their behavior, and the link with the three main philosophies of mathematics is taken for granted and not proved at all.

In conclusion, I do not argue that social constructivism is a completely false philosophy of mathematics education. It is a very promising frame which can contribute to better explain a number of questions, such as the role of history and social interaction in learning processes. I think it presents an oversimplified view of mathematical knowledge and its relationships with teaching and learning. The analysis of Cobb (1989) pointing out the need for multiple perspectives seems quite correct and useful at this regard. In his view, "In experiential terms, mathematical objects are experienced as being practically real. ... if we view Platonism and mathematical truth as experiential aspects of consensually constrained mathematical activity, then, as a constructivist mathematics educator, I want students to experience intuitions of a mind-independent mathematical reality ... If students do not act as Platonists when they do mathematics they are left with nothing but empty formalisms."[1] Something analogous applies to mathematical certainty as well: many mathematical properties are experienced as being practically certain. This happens when students (groups or singles) check a computation, proof a theorem, build a model or a counterexample in their own way, following their own paths to knowledge. Non-absolutist mathematics educators may want to give students the opportunity of directly handling mathematical ideas and properties as objective, socially accepted knowledge, and they are aware that processes of this kind are an important component of mathematical acculturation.

REFERENCES

Bartolini Bussi, Maria: 1991, 'Social interaction and mathematical knowledge', *Psychology of Mathematics Education, Proceedings of the XV Conference,* vol.I, 1-16.

Bauersfeld, Heinrich: 1990, *Activity Theory and Radical Constructivism - what do they have in common and how do they differ,* occasional paper 121, Universität Bielefeld - IDM.

Bishop, Errett: 1967, *Foundations of Constructive Analysis,* Mc Graw Hill

Cobb, Paul: 1989, 'Experiential, Cognitive and Anthropological Perspectives in Mathematics Education', *For the Learning of Mathematics,* 9/2, 32-42.

Dreyfus, Tommy: 1991, 'On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education', *Psychology of Mathematics Education, Proceedings of the XV Conference,* vol.1, 33-48.

Ernest, Paul: 1991, *The Philosophy of Mathematics Education,* The Falmer Press.

Ernest, Paul: 1992, 'Problem Solving: Its Assimilation to the Teacher's Perspective' in J.P.Ponte *et al.* (eds.), *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies,* Springer-Verlag, 287-300.

Freudenthal, Hans: 1988, 'Logic as a subject or as an attitude', *Atti degli Incontri di Logica Matematica,* vol.5, 27-38.

von Glasersfeld, Ernst: 1991, 'Outline of Radical Constructivism', summary of a lecture held in Trento at the school on *Psychology of Learning and Mathematics Learning.*

Johnson-Laird, Philip N.: 1983, *Mental Models. Towards a Cognitive Science of Language, Inference and Consciousness,* Cambridge University Press.

Kilpatrick, Jeremy: 1987, 'What Constructivism Might be in Mathematics Education', *Psychology of Mathematics Education, Proceedings of the XI Conference,* vol.I, 3-27.

Lakatos, Imre: 1967, 'A Renassaince of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics' reprinted in Tymoczko, T. (ed.) *New Directions in the Philosophy of Mathematics,* Birkhäuser, 1986, 29-48.

Lerman, Stephen: 1989, 'Constructivism, Mathematics and Mathematics Education', *Educational Studies in Mathematics,* 20, 211-223.

Lerman, Stephen: 1992, 'The function of language in radical constructivism: a Vygotskian perspective', *Psychology of Mathematics Education, Proceedings of the XVI Conference,* vol.II, 40-47.

---

[1] Cobb, 1989, p.

Lolli, Gabriele: 1987, *La macchina e le dimostrazioni,* Il Mulino.
Thompson, Alba Gonzalez: 1984, 'The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice', *Educational Studies in Mathematics,* 15, 105-127.
Tymoczko, Thomas: 1986, *New Directions in the Philosophy of Mathematics,* Birkhäuser.
Vergnaud, Gerard: 1987, 'About constructivism' *Psychology of Mathematics Education, Proceedings of the XI Conference,* vol.I, 42-54.

L' HISTOIRE DE LA VALEUR ABSOLUE ET SA TRANSPOSITION DIDACTIQUE.

Athanassios Gagatsis - Ioannis Thomaïdis
Département des Mathématiques
Université Aristote de Thessaloniki
54006 Thessaloniki - GRECE

Introduction

Pourquoi la valeur absolue? En effet la valeur absolue est une "petite notion" puisque sa définition prend deux lignes avec un vocabulaire élémentaire; en plus elle occupe une place tout à fait à part dans l' enseignement.

Pourtant cette petite notion crée de grands problèmes aux élèves de tous âges et même aux étudiants en mathématiques. Les recherches publiées à propos d' erreurs commises par les élèves sur les exercices portant sur la valeur absolue insistent sur les obstacles épistémologiques et en particulier sur les obstacles cognitifs au niveau de la compréhension de ce concept. Elles examinent non seulement la compréhension de la définition formelle de la valeur absolue, mais aussi son mode d' utilisation dans les situations telles que la résolution d' équations avec valeur absolue.

Par exemple, Duroux propose d' interpréter ces erreurs sur la base de l' hypothèse qu' elles sont dûes aux conceptions - obstacles par rapport à un nombre relatif (Duroux, 1983). Chiarugi et al. (Chiarugi, 1990) affirment que les fautes proviennent d' obstacles provoqués par des représentations erronées et les malentendus quant aux concepts algèbriques fondamentaux, comme la variable et la fonction.

Notre propre recherche a mis en évidence des erreurs comparables, et ce dans les trois niveaux de l' éducation scolaire grecque: dans l' enseignement secondaire, dans l' enseignement supérieur non mathématique et dans l' enseignement supérieur en Mathématiques.

Ainsi des études expérimentales auprès des élèves Français, Grecs et Italiens mettent en évidence un large éventail d' erreurs commises par ces élèves; ce qui interroge: **"jusqu' à quel point ces erreurs sont - elles dues aux obstacles qui sont les éléments constitutifs du savoir mathématique et, par voie de conséquence, jusqu' à quel point proviennent - elles des interventions didactiques?**

Nous essaierons de répondre à cette question par l' intermédiaire d' une étude historique (l' étude de la transposition didactique n' est pas présentée ici).

Etude historique

Pour saisir la nature des problèmes à partir desquels se forma le concept de valeur absolue et précisèrent ses fonctionnements, nous avons eu recours à un grand nombre de textes historiques dont l' étude nous permit de jalonner quatre principales phases d' évolution (Gagatsis et Thomaïdis, à paraître).

Dans **la première phase,** la valeur absolue apparaît comme une notion implicite strictement liée à une conception du nombre relatif en tant que nombre commum muni d' un signe. Cette conception, pour un nombre positif ou négatif, a fonctionné de manière efficace et pendant longtemps comme outil de résolution de problèmes arithmétiques, et algébriques; par exemple pour construire des tables logarithmiques (Napier) ou pour élaborer une théorie générale des équations polynômiales (Descartes, Newton); p.e. Descartes introduit dans son travail les nombres positifs et négatifs comme solutions des équations $x - 2 = 0$ ou $x + 5 = 0$ et utilisant les termes "vraie solution 2" et "fausse solution 5". Parallèlement cette même conception a ouvert un champ théorique dans l' étude des nombres relatifs autorisant la libre transposition de modèles exo - mathématiques, comme le "gagner" ou le "perdre" (Euler). Dans les textes de cette période, nous avons pu reconnaître le concept de la valeur absolue en tant que concept du "nombre sans son signe", ou de la distance à partir de zéro sur la droite arithmétique".

Mais rien ne semblait alors imposer, pour ce concept, une étude spécifique et son utilisation particulière.

Dans la **seconde phase d' évolution**, la valeur absolue assure une fonction explicative dans le contexte du calcul algébrique, et notamment au niveau de l' algèbre des inéquations. Plurielles sont ses applications dans la résolution des équations du calcul approché (calcul d' erreurs) et dans la théorie des nombres (Lagrange, Gauss). Par exemple une des premières références de ce type peut être trouvée dans un article de J. L. Lagrange à propos de la résolution de l' équation diophantienne $A = u^2 - Bt^2$ (A, B entiers et u, t rationnels) qui a été présentée en 1768 à l' Académie de Berlin.

Lagrange note:

> "Au reste il faut remarquer, pour éviter toute équivoque, que quand nous disons que a doit être $< \frac{A}{2}$, nous entendons que a et A soient **pris positivement,** quoiqu' ils puissent être d' ailleurs positifs ou négatifs; de sorte qu' on ne doit avoir égard, dans cette comparaison, des nombres a et A, qu' à leur valur absolue".
>
> (Lagrange, 1768 p. 390).

Cette condition nécessaire est utilisée systématiquement par Lagrange par la suite, au cours de l' étude théorique de cette équation.

La troisième phase d' évolution du concept de la valeur absolue est étroitement liée au changement conceptuel fondamental relatif au concept du nombre; c' est - à - dire au passage progressif qui va de la compréhension empirique du nombre en tant que moyen pour mesurer des quantités, jusqu' au concept abstrait du nombre en tant qu' élément d' un système mathématique caractérisé par les propriétés fondamentales de ses éléments et par l' absence de contradiction. Les nombres négatifs et positifs acquièrent un sens automone et se distinguent, en arithmétique, du nombre commun muni d' un signe. La valeur absolue commence ainsi à se donner comme un concept spécifique, défini pour chaque nombre positif et négatif tandis que, parallèment, est affirmée sa relation avec le concept de la mesure d' un nombre complexe, introduit durant la même période (Argan, Cauchy). Un travail caractéristique, dans lequel ces nouvelles conceptions sont exprimées explicitement, est le petit essai de R. Argand: "Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques". Ce concept est utilisé de façon systématique dans les différentes applications de l' algèbre des inéquations, et notamment dans les techniques d' "epsilon" proposées par Cauchy en 1821 au niveau de l' analyse.

Dans les préliminaires de "Cours d' Analyse" Cauchy essaie de distinguer les concepts du nombre et de la quantité:

> "Nous appellerons **valeur numérique** d' une quantité le nombre qui en fait la base, quantités **égales** celles qui ont le même signe avec la même valeur numérique, et quantités **opposées** deux quantités égales quant à leurs valeurs numériques, mais affectées de signes contraires...
>
> ... Enfin on dit qu' une quantité est **plus grande** ou **plus petite** qu' une autre, suivant que la différence de la première à la seconde est positive ou négative. D' après cette définition, les quantiés positives surpassent toujours les quantités négatives, et celles - ci doivent être considérées comme d' autant plus petites que leurs valeurs numériques sont plus grandes.
>
> (Cauchy, 1821, p. 28).

Ce concept de valeur absolue est relié plus tard par Cauchy au "module" des nombres complexes (op. cit., p. 161).

Dans le "Note II" de son travail intitulé "Sur les formules qui résultent de l' emploi du signe > ou <, et sur les moyennes entre plusieurs quantités" Cauchy définie la moyenne:

> "... on appelle **moyenne** entre plusieurs quantités données une nouvelle quantité comprise entre la plus petite et la plus grande de celles que l' on considère"

(o.p. cit., p. 365)

Après quelques autres passages sur les moyennes (p. 370), "sur la résolution numérique des équations" et sur la convergence des séries, Cauchy présente la relation entre valeur numérique et module:

> "... Mais ce qui a été dit à l' égard de ces séries peut également s' appliquer au cas ou leurs termes deviennent imaginaires pourvu qu' alors on écrive partout **expression imaginaire** au lieu **de quantité**, et **module** au lieu de **valeur numérique**".

(op. cit., p. 448)

Cauchy se servit du concept de valeur absolue comme d' un objet mathématique ordinaire, pouvant être soumis aux transformations analytiques; mais dans les démonstrations des théorèmes sur la convergence de séries, il utilise d' une matière indirecte tous les concepts fondamentaux qui constitueront la théorie contemporaine de la valeur absolue. A ce stade, ne manquent encore qu' un symbolisme simple et la formalisation des propriétés du concept au moyen de ce symbolisme.

La **quatrième et dernière phase** d' évolution correspond très précisément à ce processus vers la formalisation, vivement nécessitée par l' évolution de l' analyse complexe. Ce besoin on le sent déjà par les "Cours d' Analyse" de Cauchy, p.e. dans la définition de la continuité d'une fonction

> "... la fonction f (x) sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction **continue** de cette variable, si pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence f (x + a) - f (x) décroit indéfiniment avec celle de a"

(Cauchy, 1821, p. 43)

Cependant le symbole actuel, qu' a introduit Weierstrass en 1841 pour exprimer les mesures d' une variable complexe et certains concepts topologiques, ne sera communément accepté qu' à partir du dernier quart du XIX^{e} siècle. Après 1850, il y eut au moins six différents symbolismes pour exprimer la valeur absolue, ce qui n' a pas été sans provoquer certaines difficultés de communication:

$|x|$ (Cantor, 1874; Kronecker, 1887; Hilbert, 1893)

mod. x (Tchebychef, 1844, Liouville, 1851, Hermite, 1980);

Gordan, 1893).

x. num (Grassmann, 1862)

M (x) (Dedekind, 1878)

abs (x) (Lindemann, 1882)

val. abs (x) (Laurent, 1894)

La formalisation des propriétés de la valeur absolue et sa compréhension comme fonction de R dans R+ ont joué un rôle conséquent pour certaines des grandes généralisations du début du XX^{e} siècle, comme le concept de la distance dans la théorie des espaces métriques et le concept de l' estimation, dans la théorie des corps.

Conclusions

Sur la base de l' étude historique présentée dans le paragraphe précédent, nous proposons d' interpréter les fautes des élèves en terme d' obstacles.

Le **premier obstacle**, qui est lié à l'existence même de la valeur absolue, concerne la conception du nombre comme moyen pour mesurer des quantités. Cette conception constitue un obstacle pour la notion du nombre relatif en général, et plus particulièrement pour l'ordre des nombres sur la droite réelle. L'étude historique nous a clairement montré que cette conception rend caduque une notion particulière de la valeur absolue puisque la fonction de cette dernière s'exerce de manière implicite mais effective par le nombre arithmétique qui produit un nombre positif ou négatif (Napier, Descartes, Newton). Comme dans l'histoire, cet obstacle se manifeste avec les erreurs qui concernent la manipulation de variables algébriques dans les inéquations; par exemple dans l'inéquation $x^2 > 9$ les élèves donnent comme réponses: $x > 3$ ou $x > \pm 3$.

Le dépassement de la conception quantitative du nombre est lié à l'apparition d'une notion primitive de la valeur absolue qui, historiquement, a été exprimée par "abstraction faite du signe". Mais en même temps cette attention portée au signe constitue un **deuxième obstacle**, lié d'une part à la reconnaissance de la valeur absolue comme notion indépendante et d'autre part au besoin de sa représentation. Comme l'étude de la transposition didactique l'a mis en évidence, la définition et le symbolisme dans ce stade primitif servent à une nécessité interne de l'enseignement, en particulier l'architecture en spirale du programme, et non aux situations dans lesquelles l'utilisation de la valeur absolue est nécessaire. La conception selon laquelle la valeur absolue est "le nombre sans son signe" apparaît souvent plus tard dans les textes des étudiants et se manifeste par des erreurs du type $|-x| = x$ ou avec la suppression du symbole de la valeur absolue.

Le dépassement de la conception de "abstraction faite de signes" correspond aux premières tentatives pour l'expression analytique de ce concept et l'intervention d'un symbolisme particulier. Ici apparaît un **troisième obstacle** qui concerne la notion de fonction et plus particulièrement l'identification de cette dernière à un type algébrique. Cet obstacle de "type algébrique", ou plus généralement "procedural rule", semble être à l'origine de certains malentendus concernant le concept de fonction, comme plusieurs recherches récentes l'ont montré. "Les étudiants initialement voient les fonctions comme des procédures, comme si elles disaient ce qu'on devait faire avec x" (Dreyfus et al., 1990, in Gagatsis A., Thomaïdis I., 1991). Dans le cas de la définition formelle de la valeur absolue comme fonction, cet obstacle se manifeste par des erreurs du type $|x| = \pm x$. Dépasser cet obstacle devient donc nécessaire pour acquérir la définition formelle de valeur absolue.

Le **quatrième obstacle** est lié à cette conception que la valeur absolue est un symbole "qui doit être supprimé". En effet, comme l'étude de transposition didactique l'a montré, il n'y a pas de liaison entre le traitement de ce concept et les conceptions qui, historiquement, ont justifié sa construction et son utilisation. A leur place apparaissent des exercices et des problèmes créés sur des critères didactiques, comme les équations et inéquations avec valeur absolue. Une caractéristique fondamentale de ces exercices est que leur résolution est a priori liée à la suppression du symbole de valeur absolue. L'enseignement est ainsi conduit à une contradiction évidente: en essayant d'enseigner un concept mathématique à un niveau d'abstraction élevé, il introduit des situations-problèmes où ce concept non seulement va ne pas être utilisé, mais constitue un obstacle à supprimer pour parvenir à une solution. Cette contradiction devient l'un des traits permanents de l'enseignement quand les enseignants - et c'est la situation en Grèce - accordent une grande importance à la valeur absolue et au traitement algorithmique des exercices. Ce traitement algorithmique caractérise les étudiants en mathématiques qui, appliquant impeccablement la procédure de suppression du symbole de la valeur absolue par une équation, parviennent à des solutions arithmétiques calculées mais ne satisfaisant pas toujours aux conditions initiales posées par la suppression du symbole de la valeur absolue. Leur tendance à aborder de manière algorithmique ces exercices a pour conséquence que 29 % d'entre eux seulement déclarent que l'équation $||x-2|-7| = -3$ est impossible.

Le comportement donc des étudiants (et des élèves) grecs face aux exercices avec valeur absolue possède tous les traits d'une obéissance mécanique aux règles d'un contrat didactique (Brousseau, 1984) (qui, ici, reflète cette injonction: "dehors le symbole de valeur absolue !"). La seule issue, à terme, paraît être la rupture de ce contrat, c'est-à-dire la création de nouvelles situations didactiques où la valeur absolue va acquérir son sens réel et sa fonction propre.

Références

BROUSSEAU G. (1984), "Le Rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques", 3ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, Orléans.

CHIARUGI I., FRACASSINA, G., FURINGHETTI F. (1990), "Learning difficulties behind the notion of absolute value", in G. Booker, P. Cobb and T.N. De Mendicutti (eds), Proccedings of the P.M.E., 14, 3, Oaxtepec, Mexico.

DUROUX A. (1983), "La valeur absolue". Difficultés majeures pour une notion mineure". Petit x, n^{o} 3, pp. 43-67.

GAGATSIS A., THOMAIDIS I. (1991), Erreurs faites par de futurs enseignants en Mathématiques sur des exercices scolaires sur la valeur absolue, Educational Revue, 14/15, pp. 87-106 (en grec).

GAGATSIS A., THOMAIDIS I. (1993), A study on the historical evolution and didactical transposition of the concept of absolute value, preprint, Thessaloniki.

GAGATSIS A., THOMAIDIS I, (1994), Une étude multidimentionnelle du concept de valeur absolue, 20 ans de Didactique des Mathématiues en France (à paraître).

GAGATSIS A., THOMAIDIS I., Eine Studie zur historischen Entwicklung und didaktischen Transposition des Begriffs "absoluter Betrag" (soumis à publication).

REFLEXIONS EPISTEMOLOGIQUES A PROPOS DU CONCEPT DE TANGENTE A UNE COURBE

M. Grand'Henry-Krysinska et C. Hauchart

1. Présentation du groupe et du projet AHA.

AHA signifie Approche Heuristique de l'Analyse. Ce sigle est la copie quasi conforme de HAHA par lequel M. Gardner (1979) désigne l'éclair de compréhension mathématique. L'adjectif *heuristique* est emprunté à I. Lakatos (1976), qu'il utilise pour qualifer un enseignement dans lequel on ne construit techniquement les concepts que quand cela devient nécessaire ou très utile dans les démonstrations.

Le groupe AHA est composé de P. Bolly, A. Chevalier, M. Krysinska, C. Hauchart, D. Legrand, N. Rouche et M. Schneider. Le travail du groupe s'inscrit dans le cadre d'une collaboration entre les Facultés Notre Dame de la Paix à Namur et le Groupe d'Enseignement Mathématique de Louvain-La-Neuve.

1.1. Idées directrices.

En rédigeant ce projet d'enseignement de l'analyse, ce groupe est parti de l'observation suivante : *concentrer* l'enseignement de l'analyse sur des *calculs routiniers masque la substance des concepts et de la théorie.* Nous avons voulu produire un ensemble de situations-problèmes qui *montrent le sens des concepts et de la théorie.* On y trouvera donc peu d'exercices de "drill" (que l'on trouve par ailleurs sans peine dans beaucoup d'ouvrages).

Notre idée est de partir des *notions et des intuitions premières*, même si ces dernières peuvent apparaître incomplètes ou imparfaites à l'égard de la théorie achevée. Au contraire, nous voulons les laisser émerger, et bâtir sur elles pour ne les mettre en question que plus tard, sur des exemples significatifs. C'est ainsi que les *objets mentaux et les notions* se transforment progressivement en *concepts.* En ce sens, nous luttons contre un formalisme prématuré.

On peut dire que le groupe AHA cherche à comprendre pourquoi un concept de l'analyse s'est construit (soit dans l'histoire, soit chez l'individu) et cherche ensuite des situations-problèmes à proposer aux élèves qui, d'une part s'énoncent simplement, si possible dans un contexte, et d'autre part forcent à théoriser (exhibant ainsi le sens de la théorie).

Parmi les personnes qui nous ont inspiré d'une façon ou d'une autre, on peut citer

- **P. Hilton** qui fait la distinction éclairante entre *illustration* et *application.* Il dit en substance : une *illustration* est quelque chose qui aide à comprendre la théorie; une *application* est quelque chose que la théorie aide à comprendre.

- **M. Kline**, au sens où il lutte contre une formalisation prématurée. "*Avant qu'on puisse apprécier la formulation précise d'un concept ou d'un théorème, on doit savoir quelle idée y est formulée et quels pièges sa formulation même essaie d'éviter. Donc, on doit être capable de s'appuyer sur une grande richesse d'expérience acquise avant de s'attaquer à la formulation rigoureuse. Comment la découverte peut-elle se produire quand on demande aux étudiants de travailler avec des idées déjà surchargées de sophistication et de raffinement ?*"

- **H. Freudenthal** qui montre l'intérêt et la nécessité de travailler d'abord avec des objets mentaux, des notions, avant de passer aux concepts plus formalisés.

- **I. Lakatos** qui montre que les différents concepts se construisent *l'un par l'autre* et *l'un pour l'autre pour les besoins de la démonstration.* Par exemple, il n'y a pas d'abord le concept de nombre réel qui s'installe puis celui de limite, puis celui de dérivée, ... La théorie toute faite et linéairement présentée telle qu'on la trouve dans les traités ne correspond pas à la façon dont une théorie s'est construite : c'est notamment avec la formulation du concept de limite que l'on voit apparaître dans l'histoire la théorie des nombres réels.

1.2. Un enseignement en spirale.

L'enseignement rédigé par AHA est conçu en deux boucles d'apprentissage. Les problèmes de la première phase sont posés dans un contexte familier; on y travaille davantage les objets mentaux que les concepts. A la fin de la première phase, on se pose de nouvelles questions, le stock de fonctions envisagées est plus grand, l'intérêt s'est déplacé de questions plus restreintes à des questions plus générales et plus abstraites.

1.3. Un parallèle avec l'histoire.

Notre projet d'enseignement s'éclaire d'un jour intéressant si on le situe par rapport au développement historique de l'analyse. On peut y voir en gros trois étapes.

Depuis Eudoxe jusque vers le milieu du XVIIème siècle, les problèmes de quadratures (et cubatures) n'avaient pas de rapport avec la recherche des tangentes, ni avec celle des maxima et des minima ou l'étude des vitesses. Il s'agissait là de secteurs distincts des mathématiques. Qui plus est, à l'intérieur de chaque secteur, chaque problème recevait une solution particulière même si certains principes de raisonnement tels que l'exhaustion ou la méthode de Cavalieri revenaient éventuellement d'un problème à l'autre. Il s'est ainsi constitué au fil des siècles un stock de résultats situés dans des contextes divers.

Avec la découverte du théorème fondamental par Newton et Leibniz dans la deuxième moitié du XVIIème siècle, on réalise la parenté profonde quoiqu'insoupçonnée jusque-là des résultats antérieurs. Ils sont dorénavant justiciables d'une méthode unique et routinière qui éclipse l'exhaustion et la méthode de Cavalieri. Mais cette méthode nouvelle mobilise, en un certain sens, plutôt des objets mentaux que des concepts : le rapport ultime, l'approximation linéaire, les aires qu'on ne définit pas mais qu'on calcule à l'aide de primitives, etc. Pendant un siècle et demi, les résultats s'accumulent tandis que s'approfondit le malaise sur les fondements du nouveau calcul.

Au début du XIXème siècle, le stock de fonctions prises en compte par l'analyse s'est considérablement augmenté (les études sur la corde vibrante et la propagation de la chaleur y ont beaucoup contribué) et les difficultés théoriques s'accumulent. Une troisième phase du dévelop-pement de l'analyse débute avec Bolzano et Cauchy. Les *concepts* de fondement apparaissent : la limite au sens de Cauchy qui sera formalisée par Weierstrass, la continuité techniquement définie et qui va être discernée de la continuité uniforme, l'intégrale qui se constitue de Cauchy à Riemann et fournit la définition de l'aire.

1.4. Introduction à l'exposé proprement dit.

Dans ce qui suit, nous regarderons plus en détail le chapitre de notre projet qui donne une première préfiguration de la dérivée : on y aborde la notion de *tangente* et d'*approximation affine d'une fonction*. Comme on l'observera, *il n'y est nullement question de quotient différentiel.* Ce dernier apparaîtra dans un chapitre ultérieur dans un contexte de mouvement : il s'agira alors de vitesse instantanée ou de débit instantané, cet instantané qui sera à la fois source de difficulté ontologique (quel espace peut-on bien parcourir *en un instant* ou quel volume peut bien s'écouler en *un instant?* On se retrouve là avec la difficulté du "zéro sur zéro") et qui nous amènera très proche de la dérivée comme quotient différentiel.

Le plan de l'exposé est le suivant : dans un premier temps, nous observerons le concept de tangente à différents moments de l'histoire; dans un second temps, nous exposerons l'approche de la tangente telle qu'elle se trouve dans notre projet d'enseignement.

2. La tangente à quatre moments de son histoire.

2.1. Le cas du cercle. Chez Euclide : la tangente en un point P du cercle est la droite par P qui est perpendiculaire au rayon (Fig.1).

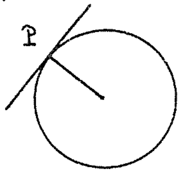


Fig.1.

Cette droite est à la fois la droite qui rencontre le cercle en un seul point, celle qui "frôle" le mieux le cercle en ce point, celle sur laquelle le cercle "atterrit en douceur", ...

2.2. La méthode de Fermat. On trouve dans la *Méthode pour la recherche du maximum et du minimum* de Fermat une approche de la dérivée dont nous nous sommes inspirés.

Voici un exemple :

"Soit à partager la droite AC en E, en sorte que $AE \times EC$ soit maximum (Fig.2).

Fig.2

Posons $AC = b$; soit a un des segments, l'autre sera $b-a$, et le produit dont on doit trouver le maximum : $b.a - a^2$. Soit maintenant $a + e$ le premier segment de b, le second sera $b - a - e$, et le produit des segments : $b.\,a - a^2 + b.\,e - 2.\,a.e - e^2$;

Il doit être adégalé au précédent : $b\,a - a^2$;

Supprimant les termes communs : $b\,e \approx 2\,a\,e + e^2$;

Divisant tous les termes : $b \approx 2\,a + e$;

Supprimez e : $b \approx 2\,a$.

Pour résoudre le problème il faut donc prendre la moitié de b. Il est impossible de donner une méthode plus générale".

Fermat décrit sa méthode de la façon suivante :

"Toute la théorie de la recherche du maximum et du minimum suppose la position de deux inconnues et la seule règle que voici :

Soit a une inconnue quelconque de la question (qu'elle ait une, deux ou trois dimensions, suivant qu'il convient d'après l'énoncé). On exprimera la quantité maxima ou minima en a, au moyen de termes qui pourront être de degrés quelconques. On substituera ensuite $a + e$ à l'inconnue primitive a , et on exprimera ainsi la quantité maxima ou minima en termes où entreront a et e à des degrés quelconques. On adégalera, pour parler comme Diophante, les deux expressions de la quantité maxima ou minima de part et d'autre. Cela fait, il se trouvera que de part et d'autre tous les termes seront affectés de e ou d'une autre de ses puissances. On divisera tous les termes par e, ou par une puissance de e d'un degré plus élevé, de façon que dans l'un au moins des termes de l'un quelconque des membres e disparaisse entièrement. On supprimera ensuite tous les termes où entrera encore e ou l'une de ses puissances et l'on égalera les autres, ou bien, si dans l'un des membres il ne reste rien, on égalera, ce qui revient au même, les termes en plus aux termes en moins. La résolution de cette dernière équation donnera la valeur de a, qui conduira au maximum ou au minimum, en reprenant sa première expression".

En quoi cette méthode de recherche des maximas et minimas d'une fonction rejoint-elle la tangente à une courbe? On trouve dans Montucla (Histoire des mathématiques-Tome II), le commentaire suivant :

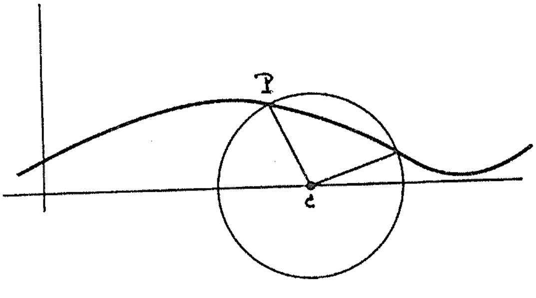
[...] La méthode de *maximis et minimis* de Fermat, est fondée sur ce principe déjà aperçu par Kepler dans sa *Stereometria dolorium*, savoir que lorsqu'une grandeur, par exemple l'ordonnée d'une courbe, est parvenue à son *maximum* ou son *minimum*, dans une situation infiniment voisine, son accroissement ou sa diminution est nulle. En faisant usage de ce principe, dont il est facile d'apercevoir la vérité, nous allons voir naître la règle de Fermat. Car supposons qu'une ordonnée y, exprimée par une équation en x, soit parvenue à son *maximum*, il s'ensuivra qu'en supposant dans cette équation l'abscisse x augmentée ou diminuée d'une quantité infiniment petite comme e, ces deux valeurs de y seront égales. Par conséquent si on les égale, qu'on en retranche les termes communs, qu'on divise par e autant qu'il est possible, et qu'enfin on supprime les termes où e se trouve (car ils sont nuls à l'égard des autres à cause de la petitesse infinie de e) , on aura enfin la valeur de x, à laquelle répond la plus grande ordonnée.

[...] De même que la règle de Descartes pour les questions de *maximis* et *minimis*, est sujette à quelques limitations particulières, celle de Fermat a aussi les siennes. Sa nature étant de donner les points d'une courbe où deux ordonnées infiniment proches sont égales, elle donne tous ceux où la tangente est parallèle à l'axe. [...] Il faudra donc, après avoir déterminé ces points, les examiner chacun en particulier, et voir si au-delà l'ordonnée continue à croître ou à diminuer; [...]

Relevons, pour terminer cette section, la remarque de Fermat concernant la généralité de sa méthode : selon lui, "on ne peut trouver de méthode plus générale", alors qu'elle ne convient en fait que pour des fonctions telles que le passage à la limite dans le quotient différentiel, $\dfrac{f(a+e)-f(a)}{e}$, se résolve par une simple simplification, (ce qui est le cas pour les polynômes).

2.3. La tangente chez Descartes. Pour calculer la tangente en un point P d'une courbe, (Fig.3), Descartes suggère de considérer le cercle passant par P et centré en un point (c,o) quelconque de l'axe des x. On calcule les intersections, (en général deux), du cercle et de la courbe, puis on détermine la valeur c_0 de c pour laquelle les points d'intersection sont confondus. Le cercle centré en c_0 est alors tangent à la courbe en P et le calcul de la tangente à la courbe est ramené à celui de la tangente à un cercle. Cette méthode est algébrique au sens où elle se ramène à la recherche de la condition sur c_0 pour que les deux points d'intersection soient confondus. Les limitations de cette méthode sont évidentes : si l'équation de la courbe est compliquée ou de degré élevé, il sera généralement impossible de résoudre les équations ultérieures auxquelles elle aboutit.

Fig.3.



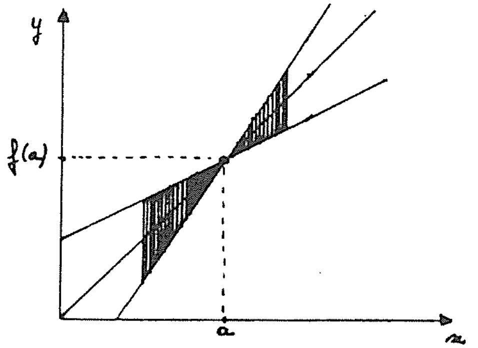
2.2.4. La tangente au sens de Chilov. Faisons maintenant un saut dans le temps et considérons un point de vue beaucoup plus sophistiqué de la tangente, comme on trouve par exemple chez Chilov. Selon ce point de vue, une droite d (sopposons qu'elle soit de pente p) sera tangente en un point d'abscisse a à une courbe d'équation $y = f(x)$ si

> au voisinage de a, la courbe $y = f(x)$ est "bien approximée" par la droite d

c'est-à-dire si

> quelle que soit l'ouverture de "l'étau" que l'on se donne, il existe un voisinage de a sur lequel le graphe de f est entièrement dans l'étau.

Fig.4.



En d'autres termes si,

> pour tout ε positif, il existe un voisinage de a sur lequel les inégalités suivantes sont vérifiées

$$f(a) + p.(x - a) - \varepsilon.(x - a) \leq f(x) \leq f(a) + p.(x - a) + \varepsilon.(x - a)$$

ou encore, en posant $(x - a)$ égal à h,

> pour tout ε positif, il existe un voisinage de a sur lequel les inégalités suivantes sont vérifiées

$$f(a) + p.h - \varepsilon.h \leq f(a + h) \leq f(a) + p.h + \varepsilon.h$$

ce qui s'écrit encore

pour tout ε positif, il existe un voisinage de a sur lequel les inégalités suivantes sont vérifiées

$$-\varepsilon \leq \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - p \leq \varepsilon$$

soit

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a + h) - f(a)}{h} - p.h\right) = 0$$

c'est-à-dire

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = p.$$

Ce dernier point de vue est celui de l'approximation affine d'une courbe. Pour en arriver là, les premières intuitions de tangente comme droite qui rencontre la courbe en un seul point ou de droite qui frôle la courbe ont dû évoluer au sens où il a fallu affiner ce que l'on entendait précisément par *frôler*, *atterrir en douceur* ou encore *bien approximer*.

3. L'introduction de la tangente dans notre projet :

Dans cette section, on lira le fil conducteur de la démarche proposée aux élèves. Les parties du texte qui se trouvent dans un cadre sont extraites, en substance, du document pour les élèves.

Juste frôler une courbe.
(Tangentes et approximations affines.)

3.1 Vers les tangentes.
Partie invisible d'un mât.

On considère une montagne stylisée surmontée d'un mât vertical (Fig. 5). Le mât est suffisamment haut pour qu'on puisse en voir la partie supérieure depuis l'origine des coordonnées. Mais quel en est depuis cet endroit la partie invisible?

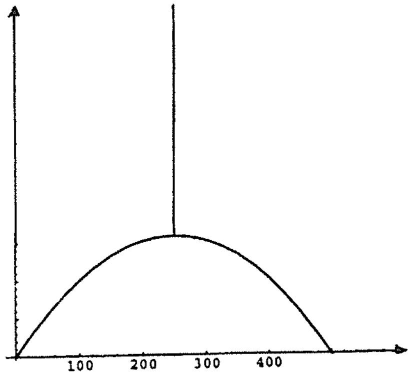


Fig.5.

Cette question qui est davantage une illustration qu'un problème, amène l'idée de tangente en un point comme celle de la "première" droite passant par ce point et ne rencontrant la courbe qu'en ce point (Fig.6).

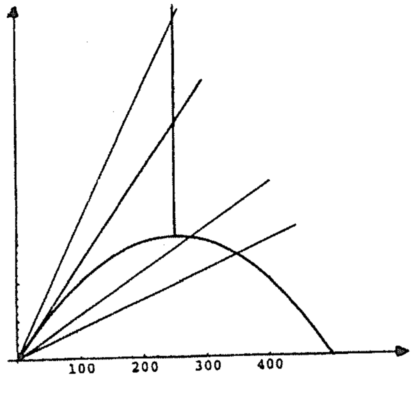


Fig.6.

3.2. Tangente en $x = 0$.
3.2.1. La tangente à l'origine à $y = x^2$.

Les trois courbes a), b) et c) apparaissant à la fig.7. semblent représenter des fonctions différentes. En fait, il n'en est rien : il s'agit chaque fois du graphe de la même fonction $y = x^2$ mais dans des échelles différentes. Les figures a), b) et c) peuvent être obtenues l'une à partir de l'autre par agrandissement ou réduction. On peut les voir aussi comme les graphes de la même fonction vue de plus ou moins loin.

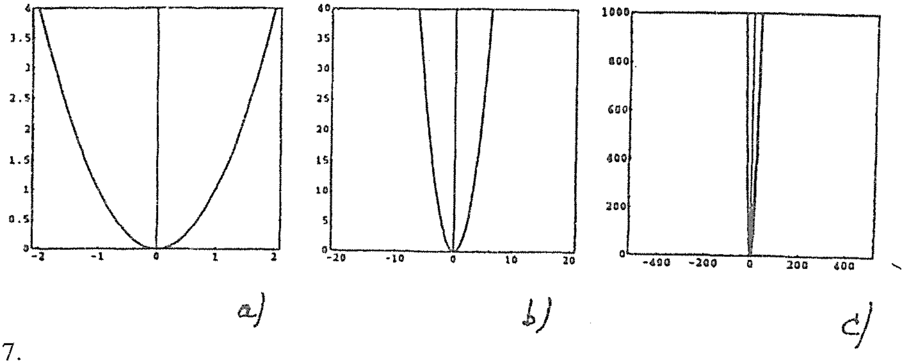


Fig.7.

Même si la notion de droite qui "frôle une courbe" n'est pas encore nette, nous posons tout de même la question suivante : que peut-on accepter comme droite qui "frôle la courbe" $y = x^2$ à l'origine?

L'axe des x est évidemment un candidat. Quant à savoir si d'autres droites ($y = a\,x$ avec $a > 0$) pourraient faire l'affaire, la perception varie selon la façon (a), b) ou c)) dont on regarde le graphe de la fonction : certaines droites qui sembleraient convenir à première vue (Fig.8.c)), s'avèrent inadéquates quand on les regarde selon le point de vue b) ou a).

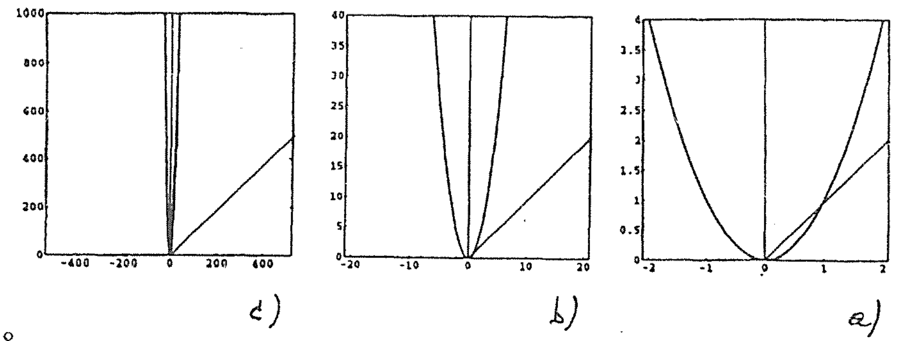


Fig.8.

Cette observation graphique amène à conserver l'axe des x comme seule candidate tangente, observation confortée par le calcul. Aussi petite que soit la pente a (positive pour fixer les idées) de la candidate tangente, cette candidate traverse la parabole en deux points,

$$x = 0 \text{ ou } x = a$$

points entre lesquels la droite est franchement au-dessus de la parabole.

3.2.2. La tangente à l'origine à $y = kx^2$.

Que deviennent ces considérations dans le cas des paraboles $y = kx^2$? Par exemple, $y = 1000\,x^2$? Remarquez que les graphes qui ont ci-dessus (Fig.7.) représenté $y = x^2$ peuvent tout aussi bien représenter $y = 1000\,x^2$.

Les deux axes de chacun des graphes de la Fig.9. portent la même unité, mais la longueur de cette unité diffère selon les graphes. Indiquez sur chacun d'eux la longueur à donner à l'unité pour qu'ils représentent la fonction $y = 10\,x^2$.

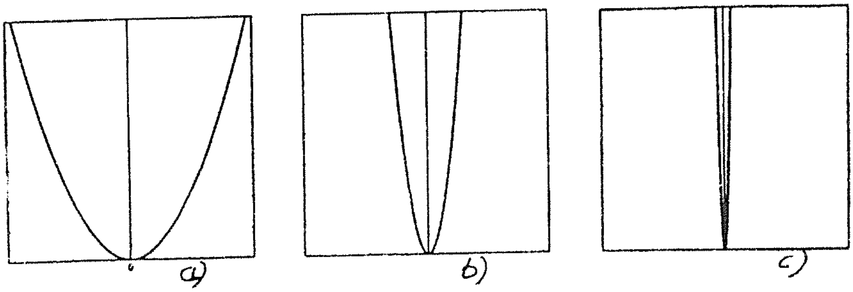


Fig.9.

Des réflexions sur 3.2.1. et 3.2.2., il résulte que pour $y = kx^2$ aussi, seul l'axe des x reste comme candidate tangente à l'origine.

3.2.3. La tangente à la courbe "somme" d'une parabole et d'une droite.

La Fig.10. montre la droite $y = 1 + x$ et la courbe $y = x^2$. Tracez la courbe d'équation $y = 1 + x + x^2$. En déduire la tangente en $x = 0$ à cette courbe.

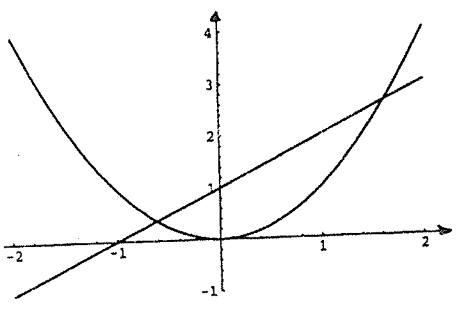


Fig.10.

Le point 3.2.3. rappelle la construction graphique d'une somme de deux fonctions : cela revient ici à aligner les "indivisibles" qui constituaient le graphe de x^2 non plus sur l'axe des x, mais sur la droite $y = 1 + x$ (voir Fig.11.). Puisque la courbe $y = x^2$ "atterrissait en douceur" sur l'axe des x en $x = 0$, on en déduit que la courbe $y = 1 + x + x^2$ "atterrit " de même en douceur sur la droite $y = 1 + x$. On a donc établi moralement la conservation de l'"atterrissage en douceur" d'une fonction "atterrissant en douceur" sur l'axe des x par sommation avec une fonction du premier degré.

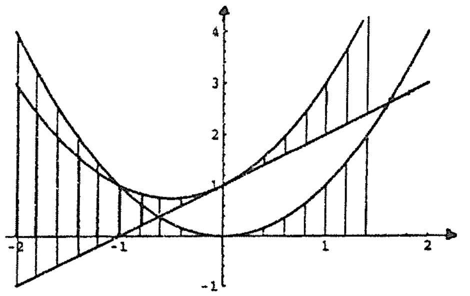


Fig.11.

3.2.4. La tangente à la courbe $y = x^3$.

Où se trouve la courbe $y = x^3$ par rapport aux deux courbes $y = x^2$ et $y = -x^2$? Déduisez-en la tangente à $y = x^3$ au point (0,0).

Avec cette question on traite moralement le résultat suivant : si on intercale le graphe d'une fonction entre une courbe et sa tangente à l'origine, alors ce graphe aura la même tangente à l'origine. On pourrait paraphraser ce résultat de la façon suivante : si entre deux objets déjà proches, on en intercale un troisième, il sera forcément proche des deux premiers.

Dans le cas de la question posée, on déduit que l'axe des x est la tangente à la fonction $y = x^3$ puisqu'elle est dans la zone hachurée de la Fig.12.

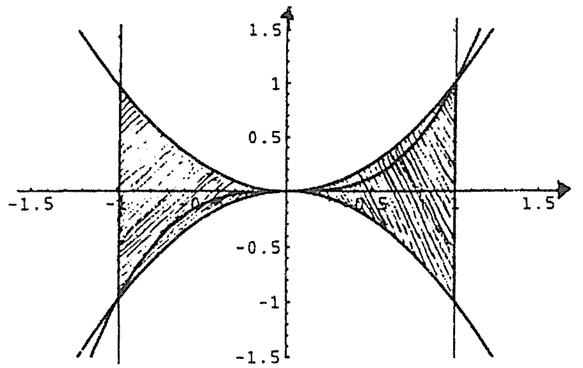


Fig.12.

3.2.5. La tangente à la courbe "somme" $y = x^3 + x^2$.

Construisez la courbe $y = x^3 + x^2$ par sommation des graphes de $y = x^2$ et $y = x^3$. Déduisez-en la tangente à l'origine de la fonction somme.

Après avoir effectué la sommation des graphes, nous réalisons que la courbe se trouve dans la zone hachurée à la Fig.13. : elle est ainsi coincée entre x^2 et sa tangente à l'origine et possède donc la même tangente (l'axe des x) à l'origine.

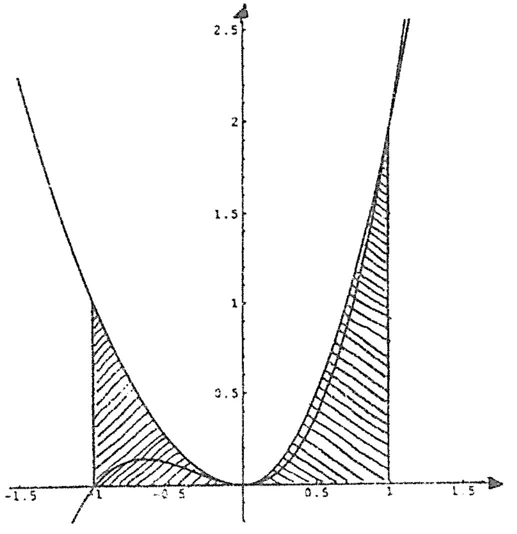


Fig.13.

3.2.6. Encore la tangente à une courbe "somme".

Soient les courbes d'équations $y = 1 - x$ et $y = x^3 + x^2$. Quelle est la tangente à l'origine de la courbe somme $y = 1 - x + (x^3 + x^2)$?

Cet énoncé met à nouveau (voir 3.2.3.) en oeuvre la conservation de "l'atterrissage en douceur" par addition d'une fonction du premier degré : si une courbe "atterrit en douceur" sur l'axe des x alors en "ajoutant" cette courbe à une droite, on a encore l'atterrissage en douceur de la courbe-somme sur cette droite (Fig.14.).

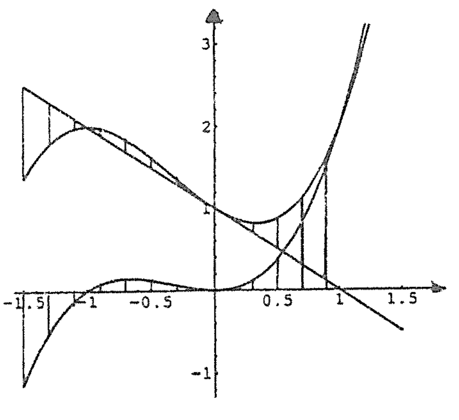


Fig.14.

3.2.7. Vers une définition de la tangente à l'origine à une courbe polynomiale.

Toutes les courbes que nous avons traitées jusqu'ici ont une équation de la forme

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

où les a_i sont des coefficients réels parfois nuls. Dans chaque cas, nous avons observé que la tangente en $x = 0$ avait pour équation

$$y = a_0 + a_1 x .$$

Ce n'est pas là le fait du hasard, puisque $a_2x^2 + a_3x^3$ atterrit en douceur sur l'axe des x. Jusqu'ici nous ne cernions la tangente (mise à part celle du cercle) qu'au travers de constatations intuitives : la droite qui "frôle le mieux" la courbe, la droite sur laquelle la courbe "atterrit en douceur", ... Adoptons maintenant en plus une définition : nous dirons que la tangente à la courbe

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

au point $(0,a_0)$ est la droite

$$y = a_0 + a_1 x .$$

a) Considérons maintenant la courbe

$$y = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

où n est un naturel et les a_i, des coefficients réels. Le problème serait résolu si on pouvait coincer cette courbe entre une parabole $y = kx^2$ et sa tangente ou entre deux paraboles de même tangente à l'origine (voir Fig.15).

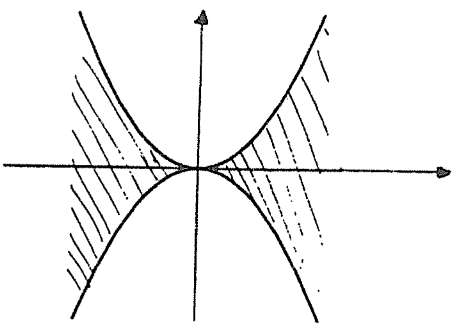


Fig.15.

Cherchez donc un nombre k > 0 tel que

$$-k x^2 \leq a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n \leq k x^2.$$

b) Déduisez-en la tangente en $x = 0$ de la courbe $a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$ et celle en $x = 0$ de la courbe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$.

Nous terminons ici la relation détaillée du document. Après avoir ainsi établi que l'équation de la tangente à l'origine d'un polynôme se réduisait à la somme de ses termes de degré 0 et de degré 1, on passe dans le document à la tangente en un point quelconque. L'idée principale y est de se ramener au cas précédent par une translation (Fig.16.).

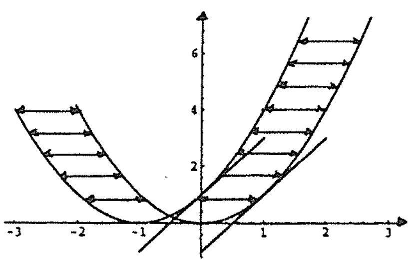


Fig.16.

La suite du chapitre passe aussi par une section intitulée "*Mais qu'est-ce donc qu'une tangente?*" où l'on discute de l'acceptabilité d'énoncés comme par exemple "la tangente à une courbe est une droite qui ne rencontre la courbe qu'en un point", ou encore "la tangente à une courbe en un point est une droite qui frôle la courbe en ce point et qui ne la traverse pas", ...

Bibliographie

AHA, Une approche heuristique de l'analyse in *L'enseignement de l'analyse aux débutants*, coord. Hauchart - Rouche, Académia, Editions Erasme, 1992.

Borceux, *Invitation à la géométrie*, CIACO Ed., 1985.

C. Boyer, *The history of the Calculus and its Conceptual Development*, Dover Publ., N.Y., 1949.

Chilov, *Analyse Mathématique Fonction d'une variable*, Ed. Moscou, 1973.

Perspectives sur l'enseignement des mathématiques dans la Communauté Française de Belgique, rapport de la **commission scientifique d'étude de l'enseignement des mathématiques et des sciences**, Ministère de l'Education, Bruxelles, 1990.

A. Deledicq, *Cours d'Analyse Infinitésimale élémentaire (non standard)* - Preprint, juin 92, IREM de Paris 7.

H. Freudenthal, *Mathematics as an educational task*, Reidel, Dordrecht, 1973.

H. Freudenthal, *Didactical epistemology of mathematical structures*, Reidel, Dordrecht, 1983.

M. Gardner, **HAHA**, Belni, Paris, 1979.

C. Hauchart, *Sur l'approximation des concepts de suite et de limite de suite*, thèse de doctorat, Louvain-la-Neuve, 1985.

IREM de Toulouse, *Des problèmes d'extrema chez Fermat à la notion de dérivée*, MATPEN Toulouse, 1989.

M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, 1972.

I. Lakatos, *Proofs and refutations : the logic of mathematical discovery*, Oxford Univ. Press, 1975.

M. Schneider-Gilot, *Des objets mentaux "aire" et "volume" au calcul des primitives*, thèse de doctorat, L'UCL, 1988.

M. Schneider-Gilot, *Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente*, in Repères - IREM, n° 5, octobre 1991.

Spivak M., *Calculus*, Benjamin, Inc., New York, 1967.

LES ENJEUX ÉPISTÉMOLOGIQUES DES NOMBRES NÉGATIFS

GERT SCHUBRING

Dans l'historiographie des mathématiques on était longtemps convaincu que les nombres négatifs étaient bien acceptés comme concepts mathématiques - dès les débuts des Temps Modernes, et plus précisément dès les publications de François Viète. Cependant, plusieurs recherches des dernières années ont montré que ce n'était pas le cas et qu'il fallait jusqu'au 19ème siècle pour arriver à une acceptation générale. Mais, dans ces études, on constate la diversité et la longévité des problèmes avec un étonnement déconcerté: on hésite de croire que des mathématiciens importants étaient incapables de comprendre un concept aussi simple et fondamental. Ce déconcertement est du à la conception continuiste adoptée, en général, pour concevoir l'évolution des mathématiques dans le temps.

Plus précisément, cette évolution est conçue selon le modèle des trois stades developpé par Bachelard et Piaget, et on s'explique les problèmes d'acceptation des nombres négatifs par une "incapabilité" de franchir le seuil entre le deuxième et le troisième stade, c'est-à-dire, d'accomblir le passage du stade des opérations concrètes au stade des opérations formelles. On retrouve maintenant presque partout l'expression "stagnation au stade des opérations concrètes" pour expliquer le fait que le concept des nombres négatifs ne fut pas compris (voir Glaeser 1981). Ici, on utilise aussi la notion de 'obstacle' pour qualifier cette incompréhension.

Or, des recherches plus précises montrent que l'histoire du développement conceptuel des nombres négatifs n'était pas un processus continu, un progrès toujours accumulant les acquis des stades antérieurs pour arriver à la notion moderne. Plutôt, on peut constater des <u>ruptures</u> - ruptures qui sont spécifiques pour les cultures particulières. En même temps, on constate des différences bien nettes entre les diverses cultures, même en Europe. Ces résultats amènent donc à ne pas attribuer les problèmes surgis dans l'évolution du concept aux "incapabilités" de quelques personnages, à l'inabilité de penser strictement, etc. Plutôt, ces ruptures constituent des indicateurs marquant des décisions épistémologiques sur la nature des mathématiques, sur son architecture, sur la vue des relations entre l'algèbre et la géométrie, etc. (cf. Schubring 1986).

Une des dimensions mathématiques sous-jacentes à l'émergence du concept du nombre négatif est la transition de la notion de <u>quantité</u> (et de <u>grandeur</u>) comme concept fondamental de toutes les mathématiques à la notion de nombre, qui est aussi fondamentale, mais restreinte à l'algèbre. Cependant, cette différenciation et spécialisation impliquent aussi une applicabilité restreinte des concepts - une perte qui n'a pas été accepté par tous, en particulier en ce qui concerne l'enseignement. Une telle acceptation dépend donc des conjonctures des valeurs sociales, culturelles et philosophiques.

Suite à ces considérations générales, je veux faire un survol très rapide sur la "pré"-histoire des nombres négatifs:
Le problème en est, tant qu'on s'occupe exclusivement des <u>grandeurs</u>: si on peut admettre des solutions négatives ou non. D'abord, elles sont rejetées comme absurdes, mais aussitôt qu'on s'occupe de problèmes plus abstraits, on desire une "réinterpretation" de la solution. Pour donner un exemple des Indiens: Bhaskara II (autour 1200) n'accepte pas une solution où on utilise -2 comme valeur intermédiaire: dans ce problème, il s'agisssait des singes. Mais dans le cas d'un problème géometrique il réinterprète une solution négative comme ayant une autre direction.

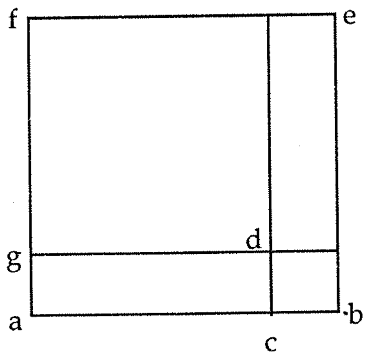
En fait, on trouve des différences entre diverses cultures aussi sur l'acceptabilité des valeurs négatives comme <u>intermédiaires</u> dans le calcul: elles sont acceptées, contrairement aux

Indiens, déjà chez les Chinois, dans le fameux manuel "Chiu-chang suan-shu " (Les Mathématiques presentées en Neuf Chapitres", ca. -250). Aussi, l'Italien Leonardo Pisano (ca. 1170-1250) accepte le calcul pour des stages intermédiaires, mais pas comme une solution définitive (il s'agit toujours de problèmes concrets rencontrés avec des grandeurs). La première acceptation d'une solution négative se trouve dans un manuscrit provençal d'environ 1430, découvert par Sésiano il y a quelques années: il s'agissait de resoudre un système d'équations linéaires avec des nombres purs (cf. Sesiano 1984)

L'étape très importante qui suit est representée par le manuel de Nicolas Chuquet "Triparty en la science des nombres" (1484). Chuquet admet des solutions négatives à des problèmes abstraits (donc comprenant des nombres purs et non pas des grandeurs) où une valeur est considérée comme solution à fur et à mesure qu'elle satisfait l'équation. Plus encore, il élabore même des procédures pour additioner et pour soustraire de tels nombres. Il explique aussi le sens changé des opérations arithmétiques:

"Et qui adjouste ung moins avec ung aultre nombre, ou qui d'icellui le soustrayt, l'addicion se diminue et la soustraction croist" (cité selon Sesiano 1985, 136).

Comparée à cet état du développement, l'œuvre publié par Cardano 60 ans plus tard marque une première rupture. Cardano polémise contre l'opinion commune (et adoptée d'abord par lui-même) selon laquelle *moins* multiplié par *moins* donne *plus*. Il donne une démonstration que *moins* par *moins* donne *moins* et non pas *plus*. Je peux recommander de présenter cette démonstration aux élèves.



Il raisonne comme suit: Si on a un carré avec $ab = 10$, et si on veut savoir l'aire du carré df, avec $cb = 2$, il faut soustraire de 100 l'aire de deux rectangles gc et de, donc 16 et 16. Parceque $100 - 16 - 16 = 68$, il faut encore soustraire 4 ; donc on a -4 et non $+4$! Le raisonnement est convaincant seulement à première vue parceque

$64 = 100 - 2 \times 16 - 4$ n'a rien à faire avec l'équation réellement en question:

$(10-2)(10-2) = 100 - 2 \times 10 \times 2 + 4$ (Cardano 1662, 399; traduction française: Marie 1883, p. 263)

La raison principale pour la refutation de "l'opinion commune" est épistémologique: Pour Cardano, le positif et le négatif constituent deux domaines, deux mondes séparées: on ne peut pas les méler ou changer de l'une à l'autre: "quia nihil potest ultra vires suas" (parceque rien ne peut dépasser ses forces): une opération entre *plus* et *plus* doit rester dans le domaine de *plus*, et une opération entre *moins* et *moins* doit rester dans le domaine de *moins* (Cardano 1662, 400). Il avait même entreprit d'expliquer pourquoi la multiplication de *moins* par *moins* semble donner *plus*, selon l'opinion commune et comment en doit entendre cela et comprendre qu'essentiellement le résultat est *moins* (ibid., 399-400).

Un des effets les plus remarquables que Cardan a pu obtenir avec cette position se trouve dans le fameux manuel "Nouveaux Elémens de Géométrie" par Antoine Arnauld (dont la première édition date de 1667, la seconde de 1689, et qui a connu plusieurs rééditions après). Le cas de Arnauld est particulièrement intéressant parcequ'il s'agit de la première discussion connue et explicitement controverse entre deux mathématiciens sur le concept des nombres négatifs: une discussion entre Arnauld, représentant de l'École de Port Royal, et Prestet, disciple du philosophe Malebranche. Cette discussion aboutira à un changement significatif de la seconde édition du manuel d'Arnauld en ce qui concerne la règle des signes.

Dans la première édition, exposant les quatre cas de la règle des signes, Arnauld avait dit, apparemment incité par Cardan:

> "MOINS en *moins* donne *plus*: c'est à dire que la multiplication de deux termes qui ont tous le signe de *moins* donne un produit qui doit avoir le signe de plus. [...] Cela paroist bien étrange, et en effet il ne faut pas s'imaginer que cela puisse arriver autrement que par accident. Car de soy-même *moins* multiplié par *moins* ne peut donner que *moins*"(Arnauld 1667, 13).

Dans son texte, Arnauld n'explique pas cette contradiction. Plutôt, il donne une démonstration assez traditionnelle pour le résultat *plus*, en multipliant deux nombres "complexes", c'est-à-dire deux termes (a-b) et (c-d): En soustraiant $2bc$, on ôte trop et il faut donc ajouter bd .

Cette proposition contradictoire a evidemment suscité l'étonnement des lecteurs. On connait les reactions d'un lecteur qui adressa une lettre à Arnauld, lui proposant de changer le texte de ce paragraphe. C'était le père Jean Prestet (1648-1690), de l'Oratoire. En répondant, Arnauld exposa quatre problèmes qu'il voyait s'opposer contre la règle des signes:

- il déclare comme "inconcevable" qu'on puisse retrancher sept toises de cinq toises (il s'agit donc du problème des grandeurs <u>concrètes</u>);
- puis il déclare comme inconcevable que le carré de -5 pourra être égal au carré de +5;
- troisièmement, il introduit un nouvel argument: l'argument des proportions qui persistera pour longtemps:

Comment peut il être que la proportion $+1 : -4 = -5 : +20$ puisse être correcte? +1 etait plus grand que -4, mais -5 est plus petit que -20, et:

> "Dans toutes les autres proportions, si le premier terme est plus grand que le second, le troisième doit être plus grand que le quatrième".

- dernièrement, il s'exprime contre des solutions négatives isolées et déclare une solution négative acceptable seulement si on peut établir une certaine relation avec quelque grandeur positive (voir Schrecker 1935, 85-86).

Prestet, par contre, envisage une conception opératoire: Bienque -2 toises n'existent pas, l'expression <u>indique</u> une opération mathématique. De même, Prestet ne voyait pas de séparation entre le domaine positif et le domaine négatif, et ne trouvait pas de difficulté que $(-5)^2$ soit égal à $(+5)^2$, expliquant cela à Arnauld dans le cadre d'une notion particulière de multiplication que Arnauld adopta par la suite. Et l'argument sur les proportions était rejeté par Prestet en postulant que les proportions ne dépendent que des valeurs absolues. (ibid., 89) Les arguments de Prestet impressionaient Arnauld et il changea le texte dans la seconde édition de son manuel.

Il ne prétend plus que la règle des signes soit valable seulement par accident. Cependant, il utilise maintenant quatre pages pour "démontrer" que moins par moins donne plus. Son raisonnement est fondé sur l'analyse conceptuelle de la multiplication comme addition itérée. Pour effectuer cela, Arnauld distingue entre <u>multipliant</u> et <u>multiplié</u> dans le produit, le multipliant étant un nombre pur (un scalaire) et le multiplié étant une grandeur (concrète). Pour cette démonstration, Arnauld discute les quatre cas séparément:

1. $+\times+$
2. $+\times-$
3. $-\times+$
4. $-\times-$

Dans les deux premiers cas, on a un multipliant positif; il s'agit donc du sens ordinaire de la multiplication: comme addition itérée du multiplié. Dans les cas 1. et 2., le signe du multiplié reste donc conservé. Pour les deux derniers cas, par contre, il s'agit d'un nouvel sens de la multiplication, un sens élargi: la signification est celle d'une soustraction du multiplié: il faut le soustraire autant de fois qu'indique le multipliand. Pour ces deux derniers cas il faut donc changer le signe du multiplié. Pour justifier ce raisonnement, Arnauld raisonne come suit:

> "dans le 4.e cas où le multiplié a *moins*, le produit doit avoir *plus*; [...] multiplier -3 par -5, c'est ôter 5 fois -3 . Or ôter une fois -3 , c'est mettre +3 , comme il a été dit sur le sujet de la soustraction; donc l'ôter 5 fois, c'est mettre +15 ; ce qu'il falloit prouver" (Arnauld 1690, 18).

Bien que l'approche est plus sophistiquée et plus explicite que chez d'autres auteurs, cette "démonstration" est capable de rendre plausible la règle des signes, mais elle n'est pas une preuve véritable , parceque la dernière raison présuppose déjà ce qui doit être prouvé. En outre, elle ne reflète pas les conséquences résultant de la distinction entre les deux facteurs du produit pour la commutativité de la multiplication qu'il avait postulé comme axiome ("supposition générale") au début de son manuel (ibid., p. 2).

Dans une longue note, Arnauld mentionne son raisonnement sur les proportions: il déclare de ne plus adhérer à celui comme réfutation de la règle des signes, mais sa justification pour la validité de la proportion est assez faible et ad-hoc (il s'agirait d'une autre sorte de multiplication) et son raisonnement a donc pu être repris plus tard par d'Alembert de nouveau comme réfutation (ibid., p. 19).

Mais pour l'instant, les auteurs contemporains des manuels se sentent satisfaits et appliquent les notions de Arnauld en présentant la doctrine des quantités négatives et positives. En particulier, son raisonnement sur la différentiation entre le multipliand et le multiplié est accepté.

Comme exemple bien révélateur de l'évolution déjà accomplie je mentionne le manuel "La Science du Calcul" (1714) du Père Reyneau. Il écrit que les grandeurs positives et négatives sont des grandeurs opposés, qu'elles peuvent s'annuler mutuellement et qu'on les appelle positives ou negatives selon la convention choisie (Reyneau 1739, p.14).

Reyneau explique les nombres relatifs non seulement par l'exemple traditionel des biens et des dettes, mais aussi par des notions géométriques: par des droites qu'il montre aussi bien horizontales que verticales dans ses figures, en évoquant la notion de direction.

Le zéro, pour lui, n'est pas une limite absolue, mais le terme entre les grandeurs positives et négatives; c'est l'origine où commencent les unes et les autres (ibid., p. 15).

Chez Reyneau, on trouve aussi une distinction claire entre signe d'opération et signe d'une quantité, et il discute les relations entre ces deux significations du signe (ibid., p.16-17). Un pas supplémentaire dans ce processus de stabilisation des opérations et d'approfondissement conceptuel en France constitue le manuel "Elemens des mathematiques" par le Père Rivard, de 1732, accepté pour l'Université de Paris et reédité plusieurs fois: il expose la notion des quantités négatives par le concept des grandeurs opposées et souligne que les unes et les autres sont également réelles:

"Il faut bien remarquer que les quantités négatives sont des grandeurs opposées aux quantités positives. [...] De cette notion des quantités positives et négatives, il s'ensuit que les unes et les autres sont également réelles, et que par conséquent les négatives ne sont pas la négation ou l'absence des positives; mais que ce sont certaines grandeurs opposées à celles que l'on regarde comme positives" (Rivard 1744, 66).

Et Rivard accepte des solutions négatives isolées. En fait, pour lui, la soustraction ne présuppose pas que le minuend soit plus grand que le nombre à soustraire; soustraire est defini chez lui bien généralement comme ôter une quantité d'une autre. Il explique que le cas de soustraction d'une quantité négative est en effet une addition (ibid., 69).

Vu cette stabilisation conceptuelle, les attaques de d'Alembert des années 1750 contre l'existence des quantités négatives constituent une nouvelle rupture. Sa position, exposée dans l'article "Négatif" de l'*Encyclopédie* et donc dans une publication ayant une énorme diffusion, est bien connue: Il reproche aux auteurs des manuels d'avoir regardé les quantités négatives "les uns comme *au-dessous de rien*; notion absurde en elle-même: les autres, comme exprimant des *dettes*; notion trop bornée, et par cela seule peu exacte" (D'Alembert, 1965, p. 301). Par contre, il n'admet les quantités négatives que comme fausses positions qui doivent être traduites par des quantités positives:

"Il n'y a donc point réellement et absolument de quantité négative isolée: -3 pris abstraitement ne présente à l'esprit aucune idée; mais si je dis qu'un homme a donné à un autre -3 écus, cela veut dire en langage intelligible, qu'il lui a ôté 3 écus" (D'Alembert 1765, p. 73).

On ne s'est pas demandé sur les raisons de cette rupture chez d'Alembert. On peut trouver les raisons dans ses conceptions des logarithmes et des nombres imaginaires. Il est bien connu que D'Alembert opposait Euler qui avait dit que les logarithmes des nombres negatifs sont imaginaires. Pour contredire Euler, D'Alembert développa une notion propre à lui des logarithmes et des nombres négatifs (D'Alembert 1756).

Selon sa conception, les quantités négatives ne sont pas moins grand que zéro (exclu chez lui par des raisons métaphysiques), mais elles sont essentiellement identiques aux quantités positives: seulement indiquant une position "opposée", une qualité pas précisée par d'Alembert. En raisonnant ainsi, d'Alembert pouvait maintenir que L(-x) = L(x), et que le logarithme des nombre négatives soit donc réel.

En fait, l'utilisation augmentée des nombres imaginaires a incité des réflexions critiques aussi sur la légitimité des nombres négatifs.

En Angleterre, ce mouvement est devenu particulièrement fort: dès le milieu du 18e siècle, plusieurs traités ont refusé un statut mathématique aux quantités négatives. Un traité typique de ce genre est celui de Francis Maseres de 1758: "A dissertation on the use of the negative sign in Algebra".

Maseres s'exprime catégoriquement contre des solutions négatives. Par conséquent, il dit que les équations quadratiques ont une seule solution. Pour lui, chaque combinaison des coéfficients constitue un autre type d'équation quadratique. Une autre conséquence: il n'y a que trois types des équations du second degré; le type $x^2+ax+b=0$ en est exclu afin d'éviter des solutions négatives (Maseres 1758, p. 20). Les équations du troisième degré sont traitées selon les mêmes principes: il n'y a pas plusieures solutions; toute combinaison des coéfficients et de leurs signes est discutée comme un nouvel cas où on évite soigneusement des solutions négatives.

Un autre exemple pour les nouvelles tendances en Angleterre est constitué par le livre de William Frend: "Principles of Algebra" (1796). Pour nous, lire ce traité est assez fatiguant: La méthode de parcellement où la solution des équations se trouve separée en un nombre immense de cas isolés est encore perfectionnée eu égard au traité de Maseres. Cependant, je voudrais souligner qu'on devrait se garder de qualifier ces mathématiciens comme étant rétrogrades ou incompétents ou stagnant au stade concrète. Il faut voir dans leurs conceptions une vue des mathématiques désirant de rester maître des opérations mathématiques, et de ne pas être porté par l'automatisme des opérations algébriques à des résultats dont on pourrait douter la nature mathématique. Pour mieux apprécier cette position, je vous rappelle la dissatisfaction de beaucoup de mathématiciens sur la démonstration du théorème de quatre couleurs par Haken: la démonstration utilise des procédures de machines eléctroniques qui ne peuvent plus être saisi directement.

Pour retourner à la rupture effectuée par d'Alembert, on peut dire que son effet sur la France resta d'abord restreint. Ceci est déja visible dans l'*Encyclopédie* qui contient deux articles parallels et contraires sur les négatifs: l'un par d'Alembert et l'autre par l'Abbé de la Chapelle qui proposa la doctrine traditionelle. En fait, les manuels pour le public universitaire ne furent pas affectés par le raisonnement de d'Alembert, tandis que les manuels pour le nouvel secteur des écoles militaires transmettaient la conception selon laquelle le problème doit être réformulé si l'on arrive à une solution négative. Les manuels les plus importants de cette direction étaient ceux de Bezout.

Une nouvelle rupture encore plus radicale fut effectuée par Lazare Carnot dès 1801: il rejéta entièrement les quantités négatives et les remplaça par une nouvelle doctrine géometrique: la *Géométrie de Position* (1803), basée sur les termes de quantités directes et inverses comme des nouvelles concepts. L'epistémologie de Carnot réside dans le rejet d'une fonction indépendente de l'algèbre vis-à-vis la géométrie. Sa conception est en partie motivée par l'opposition au manuel d'algèbre d'Euler.

Je discuterai l'épistémologie de Carnot et l'évolution de ces conceptions dans une autre publication. Caractéristique pour l'effet immédiat dans l'enseignement scolaire est la modification brusque dans la 7^{e} édition 1808 des "Elemens d'Algèbre" de Lacroix - le manuel principal de l'époque (voir Schubring 1986).

Est-ce-que les ruptures en France et en Angleterre ont été suivies en Allemagne par un mouvement analogue?

Comme tendance générale, on peut constater une continuité dans l'acceptation antérieure des quantités négatives. Très révélatrice en est la refutation de la rupture en France par Metternich, le traducteur du manuel d'algèbre de Lacroix dans sa nouvelle forme. Bien que n'étant que son traducteur, Metternich utilise ce "forum" pour exposer la conception généralement répandue en Allemagne. Caractéristique est son rejet de l'approche de réformuler le problème lorsqu'on arrive à une solution négative: il ne serait pas dans le pouvoir des mathématiciens de changer le problème - ils devraient le resoudre tel comme il est donné (Lacroix/Metternich 1820, p. 129).

Pour résumer, on peut dire que des ruptures sont largement causées par des choix épistémologiques, et non pas par un manque des compétence necessaire pour franchir des obstacles mathématiques.

En concluant, je voudrais mentionner l'article *Négatif* dans le *Dictionnaire des mathématiques élémentaires* édité par Stella Baruk. On y trouve l'assertion que - si l'y en a toujours des problèmes à comprendre la notion des nombres négatifs - ce n'est pas la faute de la mathématique mais de la pédagogie (voir la didactique), parce que la mathématique ait déjà longtemps résolue ces problèmes. Cette assertion constitue une nouvelle mystification - en fait, les mathématiciens ont toujours évités, jusqu'à la fin du 19^{e} siècle, d'avouer ou d'expliquer qu'il faut des <u>conventions</u> quand on étend la domaine des nombres et ne pouvant pas prouver des conventions.

BIBLIOGRAPHIE

D'Alembert, J.: *Opuscules Mathématiques*, Tome Premier, Sixième Mémoire: sur les Logarithmes des quantités négatives, Paris 1756, 180-230.
D'Alembert, J.: Article "Négatif", *Encyclopédie, ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, Arts et des Métiers,* Tome 11, 1765, 72-74.
D'Alembert, J.: *Essai sur les élémens de philosophie,* XI.: Eclaircissement sur les élémens d'algèbre, édition Olms, Hildesheim 1965
Arnauld, Antoine: *Nouveaux Elémens de Géométrie*, Paris 1667. Seconde Edition Paris 1690.
Baruk, Stella: *Dictionnaire de Mathématiques Elémentaires*. Paris 1992.
Cardano, Girolamo: *Opera Omnia*. The 1662 Lugduni edition. With an introduction by August Buck. New York, London 1967.
Carnot, L.: *De la Corrélation des Figures*, Paris an IX (1801).
Carnot, L.: *Géométrie de Position*, Paris an XI (1803).
Försteman, W. a.: *Über den Gegensatz positiver und negativer Größen*, Nordhausen 1817.
Frend, W.: *Principles of Algebra*, London 1796.
Glaeser, G.: "Epistémologie des nombres relatifs", *Recherches en didactiques des mathématiques*, 2(1981), 303-346.
Lacroix, S. F.: *Elémens d'algèbre*. Septième édition, revue et corrigée, Paris 1808. Traduction allemande: M. Metternich: *Anfangsgründe der Algebra*. Nach der siebten Auflage übersetzt und mit erläuternden Anmerkungen und Zusätzen vermehrt. Mainz 1811.
Marie, Maxim.: *Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques*. Tome II. Paris 1883.
Maseres, Fr.: *A dissertation on the use of the negative sign in algebra*, London 1758.
Prestet, J.: *Nouveaux Elémens des Mathématiques*. Seconde édition, Paris 1689.
Reyneau, Ch.: *La Science du Calcul des Grandeurs en général*. Seconde édition, Paris 1739.
Rivard: *Elémens de Mathématiques*. Quatrième édition, Paris 1744.
Schrecker, P.: "Arnauld, Malebranche, Prestet et la théorie des nombres relatifs", *Thales* (Paris), 2(1935), 82-90.
Schubring, G.: "Ruptures dans le statut des nombres négatifs", *petit x* (Grénoble), no. 12, 1986, 5-32.
Schubring, G.: "Discussions épistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leur représentation dans les manuels allemands et français de mathématiques entre 1795 et 1845", *Actes du Premier Colloque Franco-Allemande de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*. Ed. C. Laborde (Grenoble, éditions sauvage 1988), 137-145.
Sesiano, J.: "Une Arithmétique médiévale en langue provençale", *Centaurus*, 27(1984), 26-75.
Sesiano, J.: "The Appearance of Negative Solutions in Mediaeval Mathematics", *Archive for History of Exact Sciences*, 32.2 (1985), 105-150.

THEME 5

TOPIC 5

L'Histoire des mathématiques dans la formation initiale et continue des enseignants

History of mathematics in initial teacher training and in-service courses

ATELIERS - WORSHOPS

TABLE RONDE 2 - PANEL 2

The use of Mathematics History and Epistemology in Mathematics Education of Teachers

Gertrudes Amaro
High School of Education of the Polythecnics
Institute os Castelo Branco, Portugal

Abstract: The paper is intended to show the presence of the History of Mathematics in Teacher Education in Portuguese Universities and Schools of Education. The topics That are taught at some universities are described. Results of teachers' knowlegde concerning the history of Mathematics are shown. The knowledge of prospective mathematics teachers at the university entrance is discussed. One experience with a teaching course on mathematics history is described and results are discussed.

1. The History of Mathematics and Teacher Education

1.1. The Mathematics Teacher

The use of mathematics history on the teaching of mathematics, could be analysed based on teachers' preparation at the university/polythecnics level, teachers' willingness, and training.

At the middle and secondary level, there are a lot of teachers that are not specificaly qualified to teach maths. This means that some of them have a university degree, but not in maths (engeneering and economy are the most commom) and a professional diploma, and some of them don't have any specific degree. The mathematics teachers for middle schools (5 th and 6 th grade, age 10/11) belong, mainly, to the 1st group.

Teachers with maths degree are mainly teaching 10th, 11th and 12th grades (age 14/15 - 17/18).

If we assume that mathematics teachers start working as professionals at the age of 24 and reach retirement only at the age of 70 years old, the mean age will be 47 years old. It implies that their mathematics preparation at university starts on the late fifties or early sixties. That was the age of " modern mathematics " in Portuguese Universities and the mathematics courses were intended to prepare mathematicians and not to give any special attention to the preparation of teachers.

According to some published materials (gazeta da Matemática nº 68-69, Set/Dez 1957 and Gazeta da Matemática nº 100, Julho/Dez 1965) the recommendations from international meetings (Recomendação nº 43 da Conferencia Internacional da Instrução Pública, e Conclusões e Recomendações do Simpósio Internacional sobre o Ensino Escolar da Matemática) stated that the mathematics courses (1956-1965) must consider:

- Mathematical Logic and Set Theory
- Algebra
- Topology
- Geometry (axiomatics and its implications)
- Analysis
- Mathematical Theory of Probability and Statistics
- History of Mathematical Thinking

In general these topics have been stressed, in University Courses, until today. Concerning specif preparation for teaching only in 1972, a diploma in the teaching of Mathematics was created. Its curriculum includes courses in didactics, methodology and phsychology of learning. Mathematics History is, in general, a semester course.

For a long period (about 1952 - 1974) the secondary school curriculum has been devoted to basic skills in calculus, geometry algebra and analysis, and is supposed to prepare pupils to attend university courses. From 1974 - 1992 the secondary school mathematics curriculum was modified (set theory and algegric structures were include) but general objectives were simplified and the scope of contents was reduced. In both periods, some courses on the didactics of mathematics have taken place but only a few teachers (teachers' supervisors and inspectors) have attended them. The opportunity to attend seminars, summer courses, or short term courses is also difficult for teachers. On the other hand there wasn't a strong educational policy for implementing in service teachers' courses to give teachers expertise on contents such as mathematics history and geometry.

1.2. Prospective Teachers Training Courses at Universities and Polythecnics

These are some examples of the courses that are given at the university level. It's duration could vary between one or two semesters. In what concerns the preparation given to prospective teachers, at the Higher Schools of Education (Polythecnics), it must be said that only some aspects of the history of mathematics are included in courses dealing with the didactics of mathematics.

. **University of Coimbra**
Course Title: "The History of Mathematical Thinking"

main aspects

. The study of Portuguese Mathematicians and the development of mathematical knowledge:

. Pedro Nunes (XVI century) and the solution of equations and geometric problems

. Anastácio da Cunha (1744- 1787) and the study of mathematical sequences and others concepts developed in his book " Principia Mathematica" .

. The study of written materials (textbooks, conferences, articles) by Portuguese mathematicians, such as José Sebastião e Silva (1914- 1972) and Bento de Jesus Caraça (1901- 1948).

(These authors have related the teaching and learning of Mathematics with the use of mathematics history in the development of mathematical activities for pupils).

The contribution of educational reforms for the development of the study of mathematics since 1773.

ressources: original texts and selected Bibliography

. **University of Minho - Braga**
Course Title: "Mathematics History"

main aspects

- Mathematics History Methods
- Egyptian and Babylonian Mathematics
- Greek Mathematics : the Pythagoreans, the Eleatic school, the Aristotle's influence upon Mathematics, Plato's Philosophy of Mathematics, Euclid's Elements .
- Euclid , the Theory of Parallels and the birth of Non - Euclidean Geometry,
- Hilbert's " Foundations of Geometry"
- The history of Mathematics in Portugal

ressources: original texts , selected Bibliography.

1.3.In service Teachers training courses

Mainly in service teachers' training courses are devoted to give a professional diploma. The courses are on the Phsychology of Learning, Curriculum Development, School Management and Didactics of Mathematics.

The specific content or areas of study are established by the didactics course mentors. In general, this study is devoted to scientific knowledge and to the development of instructional activities based on the secondary curriculum for secondary school education.

In the last two years, due to the curriculum reform, some universities and professional unions have given short courses (1 day or 1 week) on mathematics history.

2. The teaching of the Mathematics History at secondary school level, teacher's knowledge, teacher's resources and pupils' knowledge

2. 1. The New National Mathematics curricula for Primary, Middle and Secondary Schools

The new Portuguese Mathematics curricula for primary and secondary education states, concerning methodological aspects to meet general objectives, that teachers must:
- develop activities concerning the growth of human knowledge ;
- teach concepts according to the way they were developed by the human being(genetic approach)
- organize instructional activities that develop the student knowledge about the contribution of mathematics to the comprehension and solution of human problems over time (through the centuries);
- establish the relationship between mathematics historical steps and the growth of humanity;

Maths curricula also give examples about the way that some aspects of Mathematics history must be developed:

"- when exploring the Pythagorean theorem it would be useful to refer some aspects of Mathematics History (the contribution of Greeks and Eghipciens, the tewlve nodes rope episode, the concept of proof in Mathematics History , etc);
- pupils must do some group work on projects dealing with equations and the way solutions are found over time (in Ancient Greece, in The Mathematics of the XVI century and using the work of Pedro Nunes (Portuguese Mathematician 1492 - 1577), the use of symbols and their contribution to the development of equations' solution, and their application and use.)
- Historical aspects of Trigonometry (ex: how Eratosthenes found the earth sphere radius)
- Historical aspects of geometry (the understanding of axioms, theorems and proof)

These are some of the demands teachers have by now, but with the lack of materials, resources, and knowledge about how to develop learning activities, teachers very soon will forget this kind of methodological demands.

2.2. Resources

Secondary schools teachers very often rely on the mathematics texbook to develop their teaching activities. Knowing this, texbook authors start in 1991 introducing some historical aspects in textbooks, mainly called "curiosities ". But teachers need more specific information for their own preparation and for the construction of learning materials. Having this in mind, Silva (1993) has prepared a bibliograghy list with 68 references, and comments that there are only four good books written in Portuguese.

A survey on the mathematics texbooks that have been used for the last 12 years, show that about 70% have little episodes or biographies and the last 30% don't have any reference to historical events or to mathematicians biographies.

2.3. Teachers knowledge about concepts : an exemple " The number π "

The introduction to the concept of π starts at grade five when perimeter and area of the circle are studied. Further explorations concerning the number π as a real number are done on 8th /9 th grade. However teachers are not very aware of the dimension of number π use and applications. This statement is supported by a questionnaire applied to 29 teachers at the start of a one day course on " the number π".
The questionnaire results are presented in the following table:

The number π is associated with:	% of correct answers	% of incorrect answers	% of blank answers
1. the perimeter of the circle	100 %	0%	0%
2.the computing of areas and volumes	100 %	0%	0%
3.an infinite product of rational numbers	56%	12%	32%
4.trigonometric functions and infinite series	42%	17%	41%
5.the limit value of the serie of reciprocals of the odd integers with alternating signs	15 %	52%	33%
6.the sum of the reciprocals of the squares of the positive integers	4 %	42%	54%
7.the area under the Gaussian curve	37%	21%	42%
8.the probability of a lattice point , chosen at random, to be visible from the origin	23%	31%	46%
9.to the probabiblity of two integers , chosen at random, beeing relatively prime	8%	37%	55%

2.4. Students' knowledge

Based on the survey about mathematics history on textbooks, it's hypothesized that some knowledge about mathematic events, concepts and mathematicians' biographies had been acquired by students at the university entrance.

To develop the study, a questionnaire was modeled after the historic references found on the textbooks studied. The preliminary results show that sentences like:

. Claudius Ptolemy (85 - 165) and René Descartes (1596 - 1650) divided the glory of having created the Cartesian Geometry;

. the use of straightedge and compasses starts with Arabs studies in astronomy and navigation in the IX century;

. the Indu - Arabic numeral system was developed by the ancient Greeks.

The better results, among the 14 questions, obtained were those described in the table which correspond to the questions:

Questions	1	2	3	4	5	6
% of correct answers	28 %	50 %	40 %	32 %	40 %	32 %

1. - The mathematics language
 . arises from the commom language
 . only establishes relationships between numbers
 . results from abstract thinking upon real life problems

2. - The Analytic geometry allows:
   - the arithmetization of geometry
   - the use of coordinates to represent a point on a plane
   - to describe geometric figures by the use of equations.

3. - The learning of the Roman numbers:
   - as a curiosity
   - to understand ancient documents and inscriptions
   - as path towards the number systems comprehension.

4. - The name of Pythagoras is connected with:
   - the proof of geometric properties of the right triangle
   - the dependence of musical intervals upon numerical ratios
   - the discovery of mathematic formulas that gives the distance between the earth and the moon.

5. - To the Greek mathematician Euclid is ascribed:
   - the writing of the " Elements".
   - the first mathematician that was paid for his work
   - the study of prime numbers properties and the algorithm to find the greatest commum divisor between two numbers.

Note: Each question was considered correct when all three statements were signed properly (true or false).

The results obtained by this exploratory study , suggest that prospective teachers need :
- to be prepared to face mathematics not only as a structured scientific knowledge but also as human science and to know the cultural connections of mathematics in the sense that mathematics doesn't develop in a vacuum.
- to develop a better appreciation and understanding of mathematical problems and procedures.
- to have knowledge about the history of the mathematic subjects they are supposed to teach.
- to develop their ability to communicate their own personal enjoyment of mathematics.

3. A course on History and Didatics of Mathematics for prospective teacher (High School of Education - Castelo Branco)

Population

Prospective teachers in the last year of curricular studies of a Maths/Science degree. Students develop teaching practices at pre-secondary schools at the same time.

Aims

- To construct a basic knowledge about the development of mathematical thinking with respect to numbers, numeral systems, early computing, fractions, and geometry.
- to foster an understanding of how mathematics is used and why it is needed in society
- to develop an understanding of the nature of mathematics
- to give a deep insight into mathematical reasoning: hypothesizing, proving, generalizing, etc.
- to develop teaching and learning skills, based on the study of specific aspects of mathematics history, using computer devices and audio-visual technics.

Course organization

1. Student's work

Prospective teachers choose a topic from the curricullum syllaby of the 5th or 6th grade (Ex: rational numbers; numbers and properties; quadrilaterals), and are expected:

(a) to begin an on-going exploration of the literature which is relevant to have a good knowledge of the history of mathematics related to the subject they choose .
(b) to devise a plan for a learning unit wich must connects mathematics history and learning activities and which also includes assessment devices.
(c) to study films, cartoons, articles and software and other everyday materials to devise learning materials for classroom use.
(d) to devise a sequence of lessons for the learning unit with a detailed description of learning activities that must incorporate the use of instructional aids such as computers, videotapes and manipulative materials (ex: cuisenaire rods, geoboard) and with mathematics history.

2. Time schedule

3/4 of a school year, 3 hours a week.

3. Methodological aspects

To perform (a), (b), and (c), lectures are given on the nature of mathematics as a subject, on research into the learning of mathematics, and on maths history. Textbooks, journal articles, videotapes and software are explored in group work. To present their conclusions, groups must give small written reports. They can also use posters or other kinds of visual aids.

Part (d) is an individual work. Its structure and contents are discussed with the teacher, and each activity is carefully analyzed. A tutorial work is developed.

Results

Each student used a different approach in developing their final work. These will be summarized by topic, major characteristics of the work produced, resources and prospective teachers attitudes developed.

① Topic ②Number of references	Major characteristics of the work	Connecting historical events with lessons' plans materials	Student commitment
①Fractions (concept, equivalence, ordering and algorithms) ② 3	. historical narrative (primitive counting and egyptian use of fractions) . Kieren levels of instruction	Learning activities don't have any relationship with historical events	Not very strong
①Angles and triangles ② 2	Historical narrative (Pytagorian and Egyptian procedures)	Learning activities don't have any relationship with historical events	Not very strong
①Perimeter and Area ② 4	Historical narrative (From primitive concepts to Hilbert)	Learning activities don't have any relationship with historical events	Not very strong
① Polygons ② 4	Historical narrative (Euclidean constructions)	Historical episodes are used in lessons' plans	Strong
① Statistics ② 5	Historical narrative (From Roman census to XVII century)	Learning activities don't have any relationship with historical events	Strong

① Integers and their properties ② 2	Historical narrative (The use of numbers in ancient China, India, Greece and its development until XVII century)	Historical episodes are used in lessons' plans	Not very strong
① Problem solving for broadcasting programs ② 8	Historical narrative dealing with the context or the content of the problem	Each program was planned with three issues - the problem, the historical connection and the discussion of the problem solution	Very, very strong
① Instructional Aids: the compass, the ruler, the straightedge ② 5	Historical narrative dealing with the use of the compass, ruler and straightedge by Greeks and the famous unsolved problems	The constructed piece of software enables the exploitation of the historical context and the understanding of the use of these tools	Very, very strong
① Exploring textbooks for secondary level ② 15	A survey on historic events presented and the way they are explored	Problem solving activities based on the arithmetic / algorithms progress through the centuries (Egyphtian, Russian and Fibonacci computation, numbers series)	Very strong
① Exploring the number π using a video cassette ② 4	Construction of a framework of historical events, their selection and translation	Learning activities and instructional materials were constructed according to selected historical episodes	Very, very strong

Materials

.Students questionnaires developed by the author
.Teachers questionnaires developed by the author
.Textbooks on mathematics history, school manuals, journal articles
.The videotape on "the story of π", program guide and workbook, written by Tom M. Apostol. Project Mathematics, California Institute of Tecnology.
.Individual student plans developed during the course.

Approches des notions de nombres rationnels et irrationnels à partir de textes grecs et latins

Michel Ballieu et Jean-Michel Delire
Centre Altaïr d'histoire des sciences et des techniques,
Université Libre de Bruxelles

INTRODUCTION.

Cet article ne résulte pas, comme tel, d'une expérience d'utilisation en classe de textes grecs et latins en vue d'éclairer certains points délicats ou fondamentaux du cours de mathématiques. Il relate cependant des expériences partielles dans ce sens. D'une part, certains (extraits de) textes, grecs en particulier, ont été abordés en 1991-92 et en 1992-93 comme versions non vues par des élèves de 15-16 ans en section gréco-latine. Ils ont pu l'être grâce à la collaboration de deux professeurs de grec, pour la traduction et le sens général[1], et du professeur de mathématiques pour leur exploitation dans le cadre de son cours. Mais ils l'ont été de manière non thématique, répartis sur l'année scolaire en fonction de l'occasion, ce qui est souvent inévitable dans un travail interdisciplinaire. D'autre part, certains outils, développés dans le cadre de l'article en relation avec les textes, comme les fractions continues, ont été utilisés par l'enseignant de mathématiques parce qu'ils sont riches à la fois historiquement et pédagogiquement, même s'ils ne figurent pas au programme de mathématiques.

Mais cet article se veut surtout une incitation à tenter de telles expériences. Il fournit, pour ce faire, d'autres textes grecs et latins à proposer aux collègues de langues anciennes, ainsi qu'un fil conducteur (rationalité/irrationalité) qu'il ne faut surtout pas prendre au pied de la lettre, le but recherché étant simplement que les enseignants qui le liront puisent largement et selon leur goût dans cet ensemble (et dans les quelques références que nous citons) pour donner aux mathématiques cette dimension humaine à laquelle on les associe trop rarement.

1. LA CLASSIFICATION GRECQUE DES NOMBRES « RATIONNELS ET IRRATIONNELS ».

Traditionnellement un nombre rationnel est défini comme égal au rapport de deux entiers, mais la manipulation fréquente, en classe, d'approximations rationnelles (comme 1,4; 1,41421; pour $\sqrt{2}$ par exemple) amène les élèves à des confusions qu'il est nécessaire de dissiper.

On pourrait, par exemple, démontrer qu'un nombre typique des irrationnels comme $\sqrt{2}$ ne peut être exprimé comme rapport de deux entiers. C'est à une telle démonstration, connue déjà peut-être de certains pythagoriciens, que fait allusion le texte α[2] :

Texte α : Aristote, *Premières analytiques*, I.23,41 a 26-27

Πάντες γὰρ οἱ διὰ τοῦ ἀδυνάτου περαίνοντες τὸ μὲν ψεῦδος συλλογίζονται, τὸ δ' ἐξ ἀρχῆς ἐξ ὑποθέσεως δεικνύουσιν, ὅταν ἀδύνατόν τι συμβαίνῃ τῆς ἀντιφάσεως τεθείσης, οἷον ὅτι ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος διὰ τὸ γίνεσθαι

Traduction

En effet, tous ceux qui achèvent le raisonnement jusqu'à l'impossible concluent d'abord à l'erreur et la déduisent ensuite des fondements, de l'hypothèse, quand une impossibilité survient parce qu'une hypothèse contradictoire a été

* Chercheur attaché à l'Institut de Philologie et Histoire Orientales de l'Université Libre de Bruxelles.

[1] Que soient ici remerciées, pour avoir osé inclure ces textes dans leurs cours de grec, Mmes Olivier et Labrique, professeurs de langues anciennes à l'Athénée Charles Janssens (Bruxelles).

[2] Tous les textes grecs présentés ci-dessous proviennent de l'excellent **Greek Mathematical Works**, translated by Ivor Thomas, 2 vol., Loeb Classical Library, Cambridge, Mass. & London, 1980 (première édition 1939).

τὰ περιττὰ ἴσα τοῖς ἀρτίοις συμμέτρου τεθείσης. Τὸ μὲν οὖν ἴσα γίνεσθαι τὰ περιττὰ τοῖς ἀρτίοις συλλογίζεται, τὸ δ'ἀσσύμετρον εἶναι τὴν διάμετρον ἐξ ὑποθέσεως δείκνυσιν, ἐπεὶ ψεῦδος συμβαίνει διὰ τὴν ἀντίφασιν.

posée. De même que la diagonale est incommensurable /avec le côté du carré/ par le fait que les impairs sont égaux aux pairs si elle est supposée commensurable[3]. Donc, il est d'abord conclu que les impairs sont égaux aux pairs et il est ensuite montré, contrairement à l'hypothèse, que la diagonale est incommensurable, puisque l'erreur survient du fait de l'hypothèse contradictoire.

La démonstration en question est la suivante (en termes modernes) :

Si $\sqrt{2} = a/b$ (avec a et b naturels premiers entre eux) alors $2b^2 = a^2$, ce qui implique a pair (et donc b impair). En posant $a = 2a'$, il vient $2b^2 = 4a'^2$, ou $b^2 = 2a'^2$. b serait donc à la fois pair et impair, une contradiction.

Ce texte d'Aristote est intéressant à plusieurs égards.

- Il introduit le principe de la démonstration par l'absurde : « l'achèvement (rigoureux) d'un raisonnement jusqu'à l'impossible » oblige de conclure au caractère « contradictoire de l'hypothèse », c'est-à-dire à la vérité de l'hypothèse contraire. Ainsi, supposer que la « diagonale » (du carré de côté 1, donc $\sqrt{2}$) puisse être un rationnel a/b, commensurable avec le côté du carré, implique que b est à la fois pair et impair. $\sqrt{2}$ est donc forcément irrationnel.
- Il permet d'expliciter quelque peu cette « bizarre » opération logique qu'est l'implication $P \Rightarrow Q$, fausse seulement quand P est vraie et Q fausse.
- Il rappelle la répartition pythagoricienne du monde en deux classes opposées, représentées ici par le pair et l'impair, ailleurs par l'humide et le sec, voire même par la femme et l'homme.

C'est d'ailleurs aux pythagoriciens que l'on attribue les premières recherches concernant le caractère rationnel ou irrationnel d'un nombre, comme le précise le texte β.

Texte β : Euclide, *Eléments X*, scholie 1, éd. Heiberg v.415.7-417.14.

Ἦλθον δὲ τὴν ἀρχὴν ἐπὶ τὴν τῆς συμμετρίας ζήτησιν οἱ Πυθαγόρειοι πρῶτοι αὐτὴν ἐξευρόντες ἐκ τῆς τῶν ἀριθμῶν κατανοήσεως. κοινοῦ γὰρ ἁπάντων ὄντος μέτρου τῆς μονάδος καὶ ἐπὶ τῶν μεγεθῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν οὐκ ἠδυνήθησαν. αἴτιον δὲ τὸ πάντα μὲν καὶ ὁποιονοῦν ἀριθμὸν καθ'ὁποιασοῦν τομὰς διαιρούμενον μόριόν τι καταλιμπάνειν ἐλάχιστον καὶ τομῆς ἀνεπίδεκτον, πᾶν δὲ μέγεθος ἐπ'ἄπειρον διαιρούμενον μὴ καταλιμπάνειν μόριον,

Traduction

Dès l'origine, les pythagoriciens se dirigèrent vers la recherche de la « rationalité[4] » après l'avoir extraite, les premiers, de l'observation des nombres. Alors qu'en effet, la mesure de l'unité est commune à tous /les nombres/, ils ne purent trouver une mesure commune aux grandeurs. La raison en est que tout nombre, quel qu'il soit, lorsqu'il est découpé par des divisions, quelles qu'elles soient, laisse quelque plus petite partie qui n'admet pas de division alors que

[3] Nous avons traduit *sym-metros* et *a-sym-metros* par leurs équivalents français, dérivés du latin, com-mensurables et in-com-mensurables. De manière générale, nous traduirons les termes spéciaux du texte grec par des mots français proches en évitant, quand c'est possible, les expressions «rationnels» et «irrationnels» puisque, nous le verrons, les concepts grecs ne recouvrent pas parfaitement les représentations qu'évoquent ces termes pour nous.

[4] Nous traduisons ici sum-metria par « rationalité » et non « com-mensurabilité »; ce dernier terme, en effet, ne peut être utilisé qu'en référence à deux objets que l'on compare.

ὃ διὰ τὸ εἶναι ἐλάχιστον τομὴν οὐκ ἐπιδέξεται, ἀλλὰ καὶ ἐκεῖνο ἐπ'ἄπειρον τεμνόμενον ποιεῖν ἄπειρα μόρια, ὧν ἕκαστον ἐπ'ἄπειρον τμηθήσεται, καὶ ἁπλῶς τὸ μὲν μέγεθος κατὰ μὲν τὸ μερίζεσθαι μετέχειν τῆς τοῦ ἀπείρου ἀρχῆς, κατὰ δὲ τὴν ὁλότητα τῆς τοῦ πέρατος, τὸν δὲ ἀριθμὸν κατὰ μὲν τὸ μερίζεσθαι τῆς τοῦ πέρατος, κατὰ δὲ τὴν ὁλότητα τῆς τοῦ ἀπείρου . . . τῶν γὰρ Πυθαγορείων λόγος τὸν πρῶτον τὴν περὶ τούτων θεωρίαν εἰς τοὐμφανὲς ἐξαγαγόντα ναυαγίῳ περιπεσεῖν.

toute grandeur, lorsqu'elle est divisée sans arrêt, ne laisse pas de partie qui n'admet pas de division du fait qu'elle est la plus petite, mais bien une /partie qui/, divisée sans arrêt, donne des parties innombrables, dont chacune pourra être divisée sans arrêt. En un mot, la grandeur appartient à l'ordre de l'illimité pour la division, mais du limité pour la totalité, tandis que le nombre /appartient à l'ordre/ du limité pour la division, mais de l'illimité pour la totalité. ... Une histoire /raconte/ que le premier des pythagoriciens qui a rendu publique l'étude de ces sujets est tombé /à l'eau/ lors d'un naufrage.

Ce texte introduit la distinction, classique depuis les mathématiques grecques, entre nombre et grandeur. Elle n'est plus aussi claire aujourd'hui, où nous connaissons la notion de coupure et où nous associons aisément un nombre à un segment sur une droite munie d'un repère. Dans le contexte qui nous occupe, cette distinction équivaut à l'opposition entre nombre rationnel, qui peut être représenté par un «vrai» nombre, et nombre irrationnel, qui doit être représenté par un segment (par exemple, la diagonale d'un carré comme nous l'avons vu pour $\sqrt{2}$) incommensurable avec l'unité.

Plus remarquable encore est ce « découpage par des divisions » (il s'agit en fait de l'algorithme d'Euclide) qui attribue à un nombre le caractère limité, fini et à une grandeur le caractère illimité, infini. Si l'on se place du point de vue de la représentation décimale des nombres (et c'est ce que feront les élèves, qui ont appris que les rationnels ont un développement limité ou illimité périodique et les irrationnels un développement illimité non périodique), il semble y avoir une contradiction.

La dernière partie du texte rappelle une autre caractéristique des pythagoriciens: le secret auquel ils étaient tenus au sujet des découvertes de la secte. On ne nous dit pas cependant si l'indiscret, en « tombant » à l'eau, a été puni par les dieux ou par les hommes.

Texte γ : Platon, *Théétète*, 147 D -148 B

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Περὶ <u>δυνάμεών</u> τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, <u>τῆς</u> τε <u>τρίποδος</u> πέρι καὶ <u>πεντέποδος</u> [ἀποφαίνων] ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο. ἡμῖν οὖν εἰσῆλθέ τι τοιοῦτον, ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ <u>δυνάμεις</u> ἐφαίνοντο, πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἕν, ὅτῳ πάσας ταύτας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Ἦ καὶ ηὕρετέ τι τοιοῦτον;

ΘΕΑΙ. ἔμοιγε δοκοῦμεν, σκόπει δὲ καὶ σύ.

Traduction

Théétète : A propos des carrés, Théodore nous décrivait quelque chose à l'aide de figures, prouvant à propos /du côté/ de celui de 3 pieds et /de celui/ de 5 pieds qu'ils ne sont pas commensurables en longueur avec le (côté de longueur 1) pied, et ainsi de suite /les/ prenant un par un jusqu'à celui de 17 pieds. A celui-ci, il fut retenu en quelque manière.

Ainsi, nous est venue /l'idée/, puisque les /côtés irrationnels de/ carrés semblaient en nombre illimité, d'essayer de /les/ rassembler par la pensée en un /ensemble/ à l'aide /du nom/ duquel nous désignerons tous ces /côtés irrationnels de/ carrés.

Socrate : Et avez-vous trouvé un tel /ensemble/ ?

ΣΩ. Λέγε.
ΘΕΑΙ. Τὸν ἀριθμὸν πάντα δίχα διελάβομεν τὸν μὲν δυνάμενον ἴσον ἰσάκις γίγνεσθαι τῷ τετραγώνῳ τὸ σχῆμα ἀπεικάσαντες τετράγωνόν τε καὶ ἰσόπλευρον προσείπομεν.

ΣΩ. Καὶ εὖ γε.
ΘΕΑΙ. Τὸν τοίνυν μεταξὺ τούτου, ὧν καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε καὶ πᾶς ὃς ἀδύνατος ἴσος ἰσάκις γενέσθαι, ἀλλ'ἢ πλείων ἐλαττονάκις ἢ ἐλάττων πλεονάκις γίγνεται, μείζων δὲ καὶ ἐλάττων ἀεὶ πλευρὰ αὐτὸν περιλαμβάνει, τῷ προμήκει αὖ σχήματι ἀπεικάσαντες προμήκη ἀριθμὸν ἐκαλέσαμεν.

ΣΩ. Κάλλιστα. ἀλλὰ τί τὸ μετὰ τοῦτο;

ΘΕΑΙ. ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν τετραγωνίζουσι, μῆκος ὡρισάμεθα, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη, δυνάμεις, ὡς μήκει μὲν οὐ συμμέτρους ἐκείναις, τοῖς δ'ἐπιπέδοις ἃ δύνανται. καὶ περὶ τὰ στερεὰ ἄλλο τοιοῦτον.

Thééthète : Il me semble. Juge /-s-en/, toi-même.
Socrate : Parle.
Théétète : Nous avons réparti tous les nombres en deux /ensembles/. D'abord, les /nombres/ capables d'être égaux un nombre égal de fois, après /les/ avoir comparés au carré pour la forme, nous les avons déclarés carrés et équilatéraux.
Socrate : Et c'est bien !
Théétète : Ensuite, les nombres dans l'intervalle de ces derniers, parmi lesquels 3, 5 et tous les /nombres/ incapables d'être égaux un nombre égal de fois, mais qui sont supérieurs un nombre inférieur de fois ou inférieurs un nombre supérieur de fois et que comprennent des côtés toujours supérieur et inférieur, après /les/ avoir comparés à leur tour aux rectangles, nous /les/ avons déclarés nombres oblongs.
Socrate : Bien, mais ensuite ?
Théétète : Des lignes qui construisent en carré un nombre plan et équilatéral, nous /les/ avons définies « rationnelles », et /des lignes/ qui /construisent en carré/ un /nombre/ oblong, /nous les avons définies/ « irrationnelles » parce qu'elles n'ont pas de commune mesure avec les premières en longueur, mais bien par les surfaces /carrées/ qu'elles produisent. Au sujet des solides, /on a/ un autre /cas/ analogue.

Du point de vue historique, nous apprenons ici que Théodore a découvert pour $\sqrt{n}$ (où *n* est un nombre non carré, inférieur à 17) une démonstration d'irrationalité. Cette extension de la découverte pythagoricienne permet à Platon de se poser la question de l'existence d'une classe de nombres irrationnels dont le carré est rationnel et il propose pour les dénommer le terme *dynamis*, qu'il détourne ainsi de son sens premier de « puissance » (deuxième, puisque le verbe associé à *dynamai* signifie « être capable en carré », particulièrement dans l'expression du théorème de Pythagore[5]), pour en faire l'ancêtre de notre « racine carrée ».

[5] Diogène Laerce, viii, 11-12 : (...) τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα πλευρὰ ἴσον δύναται ταῖς περιεχούσαις. **Traduction**: Le côté hypoténuse du triangle rectangle est égal en carré aux /côtés/ entourant /l'angle droit/; Plutarque, *Vie d'Epicure*, 11, 1094 B.: (...) περὶ τῆς ὑποτεινούσης ὡς ἴσον δύναται ταῖς περιεχούσαις τὴν ὀρθήν (...) **Traduction**: au sujet de l'hypoténuse vu qu'elle est égale en carré aux /côtés/ entourant l'/angle/ droit . On en trouve aussi une utilisation à la fin du texte γ: τοῖς δ'ἐπιπέδοις ἃ δύναται. **Traduction**: par les surfaces qu'elles produisent en carré. Il est intéressant de suivre l'évolution du sens du mot dynamis dans le texte γ luimême: en ligne 1, περὶ δυνάμεων peut être traduit « au sujet des carrés »; en ligne 2, δυνάμεως est sous-entendu, auprès de l'article τῆς et des adjectifs τρίποδος (καὶ) πεντέποδος, comme substantif introduit par la préposition περί mais il ne peut s'agir encore ici de carrés puisqu'ils sont dits μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, c'est-à-dire « incommensurables en longueur avec le côté unité (le pied) »,

Ce dernier texte va plus loin que le précédent dans l'analyse des grandeurs puisque Théétète y distingue les grandeurs commensurables en ligne (celles qui « construisent en carré un nombre équilatéral ») qu'il nomme ici mèkoi[6] et non plus simplement summetroi, des grandeurs incommensurables en ligne, mais commensurables « par les surfaces /carrées/ qu'elles représentent », qu'il nomme donc dynameis et non plus simplement asummetroi.

Cela confirme l'impression que nous avions déjà à la lecture du texte précédent, à savoir que les Grecs semblent découper les nombres plus finement que nous, non pas en deux catégories, rationnels et irrationnels, mais en trois (plus encore si on considère la dernière phrase comme allusion à la création d'un nouvel ensemble, celui des racines cubiques d'entiers).

Le texte δ le montre plus clairement encore.

Texte δ : Euclide, *Eléments*, X, Définitions.

α'. Σύμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα, ἀσύμμετρα δέ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

β'. Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν τὰ ἀπ'αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρῆται, ἀσύμμετροι δέ, ὅταν τοῖς ἀπ'αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐνδέχηται χωρίον κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

γ'. Τούτων ὑποκειμένων δείκνυται, ὅτι τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι αἱ μὲν μήκει μόνον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει. καλείσθω οὖν ἡ μὲν προτεθεῖσα εὐθεῖα ῥητή, καὶ αἱ ταύτῃ σύμμετροι εἴτε μήκει καὶ δυνάμει εἴτε δυνάμει μόνον ῥηταί, αἱ δὲ ταύτῃ ἀσύμμετροι ἄλογοι καλείσθωσαν.

Traduction

1. Sont dites commensurables les grandeurs mesurées par la même mesure et incommensurables, celles dont une mesure commune ne peut exister.
2. Des droites sont commensurables en carré quand les carrés /construits/ à partir d'elles sont mesurés par la même /unité de/ surface et incommensurables quand une mesure commune de surface ne peut exister pour les carrés /construits/ à partir d'elles.
3. Il est démontré, à partir de ces principes, que, par rapport à une droite donnée, existent des droites, illimitées en nombre, commensurables et incommensurables, les unes en longueur seulement, les autres en carré. Que la première droite soit donc nommée « dicible » ainsi que (dicibles) les /droites/ commensurables avec elle, soit en longueur et en carré, soit en carré seulement, tandis que les /droites/ incommensurables avec elle, qu'elles soient nommées « indicibles ».

Ici, les grandeurs, qu'Euclide nomme rapidement « droites », sont à nouveau de deux sortes : les droites commensurables avec une droite de référence, soit directement (les mèkoi de Platon), soit par l'intermédiaire des carrés qu'elles produisent (les dynameis de Platon), et celles qui ne sont pas commensurables ni directement ni en carré. Les premières sont nommées rhètai « dicibles » par Euclide, les secondes alogoi « indicibles ».

Mais comme il a été déjà vu ci-dessus, la classe des « dicibles » ne coïncide pas avec la classe des rationnels (puisque les dynameis $\sqrt{n}$ y appartiennent), ni celle des « indicibles » avec les irrationnels (pour la même raison).

---

comme l'a montré Théodore (de même <u>δυνάμεις</u> en ligne 8). Par la suite, le texte opposera les longueurs des côtés qui construisent en carré un nombre équilatéral (carré) aux longueurs des côtés qui construisent en carré un nombre oblong (non carré, mais commensurables avec le côté unité). Ce sont ces derniers que caractérise le terme δύναμις et que nous traduisons imparfaitement par (côtés) irrationnels (de carré) puisqu'il s'agit d'une classe particulière d'irrationnels.

[6] Ce terme signifiait à l'origine « longueur ; mesure » et Théétète le récupère ici pour l'opposer à dynamis et exprimer le segment dont la mesure est commensurable directement avec le segment unité.

Essayons maintenant de voir d'où provient cette division des nombres chez les Grecs et, bien que nous sachions qu'il y a là-dessous l'algorithme d'Euclide, posons-nous la question (comme se la poseraient peut-être les élèves) de savoir si une représentation positionnelle des nombres peut amener une telle division.

En fait, nous aussi, d'une certaine manière, nous pouvons partager les nombres en *trois* classes :

- les nombres à développement décimal limité, comme 1/5 = 0,2 ;
- les nombres à développement décimal illimité périodique, comme 1/3 = 0,333...;
- les nombres à développement décimal illimité non périodique comme $\sqrt{2}$, π.

mais ces trois classes ne sont pas les mêmes que chez les Grecs et, en fait, elles dépendent de la base de numération choisie. En effet,

- en base 2, 1/5 = 0,0011 0011 0011... est un illimité périodique ;
- en sexagésimal (base 60), 1/3 = 0,20 est un limité !

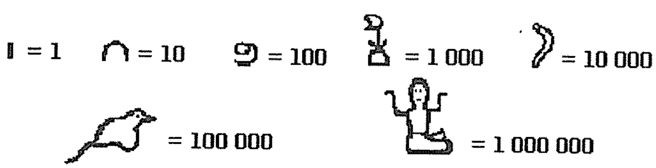
Ce type de classification n'est donc pas vraiment « raisonnable » ; elle n'est d'ailleurs pas utilisée. Pour en arriver avec les élèves à cette conclusion, il est évidemment souhaitable, dans les années antérieures -car c'est une matière que l'on peut aborder relativement tôt- d'étudier quelque peu les systèmes de numération[7].

2. QUELQUES SYSTEMES DE NUMERATION.

Certains concepts « attrayants pour de jeunes élèves » peuvent être abordés, comme la numération égyptienne, qui date d'environ deux millénaires avant J.-C. et qui est un des systèmes les plus primitifs. L'écriture de 9 999, par exemple, nécessite l'emploi de trente-six symboles! Notre connaissance des mathématiques égyptiennes ne repose que sur un très petit nombre de documents, parmi lesquels le fameux *Papyrus Rhind* (BM 10057 et BM 10058), copié vers 1650 av. J.-C. par le scribe Ahmès, à partir d'un texte datant du dix-neuvième siècle avant notre ère. C'est l'un des plus intéressants papyrus mathématiques ; il contient fort probablement quatre-vingt-quatre problèmes d'arithmétique et de géométrie (avec solutions) ainsi qu'une table de décomposition de certaines fractions en somme de fractions dont les numérateurs valent 1 et dont les dénominateurs sont tous différents deux à deux (fractions dites *égyptiennes*). Ce type de fraction est, comme on le verra, lié à la méthode utilisée par les calculateurs égyptiens pour opérer une division.

Le papyrus fut découvert vers le milieu du siècle dernier dans une petite construction proche du temple mortuaire de Ramsès II. Il fut acheté à Luxor, avec d'autres antiquités égyptiennes -- notamment le *Rouleau de cuir des Mathématiques égyptiennes* (BM 10250) -- en 1858 par l'écossais Alexander Henry Rhind (1833-1863). Ce jeune avocat était venu là pour raisons de santé. Les deux documents précités furent vendus en 1865 au *British Museum* où on peut toujours les voir.

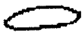
Le système de numération égyptien est *décimal non positionnel.* En lecture de droite à gauche, les symboles suivants sont utilisés :

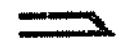


[7] Il n'est nullement question, bien sûr, de faire un exposé historique complet de ces systèmes; ceux qui désirent en savoir plus consulteront entre autres :
G.Ifrah, **Histoire universelle des chiffres**, Laffont, 1994.
G.Guitel, **Histoire comparée des numérations écrites**, Flammarion, 1975.

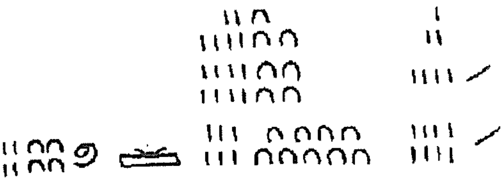
Exemple :  = 12 345

Fractions :  $= \frac{1}{3}$

 se prononce *rè* et signifie ouverture, bouche, porte.

Il existe deux exceptions :  $= \frac{2}{3}$ et  $= \frac{1}{2}$

Les Egyptiens opéraient la multiplication par « duplications » successives. Le problème 32 du papyrus Rhind illustre cette « technique » pour calculer 12 x 12.



	1	12
	2	24
/	4	48
/	8	96 le résultat est 144

Le scribe coche les « composantes » en base 2 du multiplicateur.

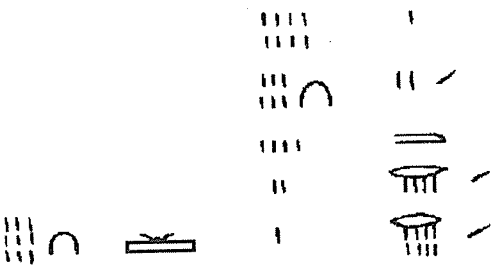
 Ce symbole signifie: « le résultat est ».

Quant à la division, le scribe la réalise en utilisant le fait que c'est l'opération inverse de la multiplication. Considérons le problème 24 du *Papyrus Rhind*, qui s'énonce : *une quantité plus son septième fait 19; que vaut la quantité?*

Pour le résoudre, le scribe utilise -on est en tout cas tenté de le croire- la méthode de *fausse position simple* ; il suppose que la solution est 7 (pourquoi ?), ce qui donne

$$\text{quantité} + \frac{1}{7}\ \text{quantité} = 8 \qquad \text{(et non 19)}$$

et ainsi, autant de fois il faut multiplier 8 pour obtenir 19, autant de fois il faudra multiplier 7 pour obtenir la réponse au problème. Ceci conduit le scribe à devoir diviser 19 par 8. Voyons comment il procède :



	1	8
/	2	16
	$\frac{1}{2}$	4
/	$\frac{1}{4}$	2
/	$\frac{1}{8}$	1 le résultat est 19.

Le résultat de la division de 19 par 8 est ainsi $2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$. Nous remarquons le rôle des «fractions égyptiennes». Maintenant, il reste au scribe à multiplier 7 par ce résultat ; il obtiendra $16\frac{1}{2}\frac{1}{8}$ qui est la solution du problème 24.[8]

Intéressons-nous à un passé plus récent. Chacun de nous a entendu parler de numération «littérale», entre autres chez les Grecs et les Latins. Considérons donc l'exemple le plus connu, celui des «chiffres romains» en oubliant bien sûr tout à fait notre système à nous et essayons d'opérer - sans tricher - l'addition suivante :

CCCLXXI + MCCVII + MDCXXXVI + DVIII

Même avec l'écriture ci-dessous, la réponse correcte semble tenir du « miracle » :

			C	C	C	L	X	X	I
				M	C	C	V	I	I
		M	D	C	X	X	X	V	I
					D	V	I	I	I
M	M	M	D	C	C	X	X	I	I

Le système de numération utilisé par les Grecs n'était pas, lui non plus, positionnel. Les unités de 1 à 9, dizaines de 10 à 90 et centaines de 100 à 900 étaient simplement représentées par les lettres de l'alphabet grec, comme le montre le tableau ci-contre. Cet alphabet ne comptant que vingt-quatre lettres, les Grecs reprirent de l'alphabet phénicien les lettres qu'ils n'avaient pas encore utilisées. Ainsi le *waw*, qui n'avait servi que dans certains alphabets grecs très archaïques, nota le 6. Il prit plus tard le nom de *stigma*, du fait de sa ressemblance avec la ligature byzantine de *sigma* et *tau*. Le *qoppa*, qui dérive du *qof* phénicien sert à noter 90 et le *sade*, qui servait dans certains alphabets archaïques à noter le son « *s*» mais fut supplanté rapidement par le *sigma* dérivant du *sin* phénicien, a été réutilisé pour noter 900. Son nom actuel de *sampi* provient de sa ressemblance avec la ligature byzantine entre *sigma* et *pi*.

1	α´	70	ο´
2	β´	80	π´
3	γ´	90	ϛ´
4	δ´	100	ρ´
5	ε´	101	ρα´
6	ς´	102	ρβ´
7	ζ´	200	σ´
8	η´	300	τ´
9	θ´	400	υ´
10	ι´	500	φ´
11	ια´	600	χ´
12	ιβ´	700	ψ´
13	ιγ´	800	ω´
14	ιδ´	900	ϡ´
15	ιε´	1000	͵α
16	ις´	2000	͵β
17	ιζ´	3000	͵γ
18	ιη´	4000	͵δ
19	ιθ´	5000	͵ε
20	κ´	6000	͵ς
21	κα´	7000	͵ζ
22	κβ´	8000	͵η
30	λ´	9000	͵θ
40	μ´	10000	͵ι
50	ν´	20000	͵κ
60	ξ´	100000	͵ρ

Les «mots» ainsi formés étaient pourvus d'un signe diacritique (') en haut à droite ou surmontés d'une barre horizontale pour les distinguer du texte grec lui-même. Au-delà de 1000, on recommençait avec α, pourvu cette fois d'un signe en bas à gauche. Ce système aurait pu être appliqué jusqu'à 999.999, mais la myriade (10.000) était la «grande» unité de base pour les Grecs. C'est pourquoi les nombres supérieurs à une myriade étaient plutôt notés de façon à mettre en évidence le nombre de myriades. Ainsi, 424.281 était noté: $\overset{\mu\beta}{\mathrm{M}}$,δσπα', soit quarante-deux myriades et quatre mille deux cent quatre-vingt-un. Cette notation facilitait la lecture, comme le fait notre point quand nous lisons quatre cent vingt-quatre mille deux cent quatre-vingt-un.

[8] Pour d'autres exemples, on se reportera au livret accompagnant le film vidéo **Les comptes de Bastet** réalisé par l'IREM de Toulouse.

Ces exemples permettent de mettre en évidence quelques réalités historiques :

- le peu de progrès effectué dans l'art du calcul;
- la raison des techniques de multiplication et division par « duplications» successives (cf. Egypte);
- la nécessité d'utiliser des auxiliaires de calcul (abaque, boulier, ...) même pour résoudre des problèmes qui nous paraissent élémentaires;
- la considération que le commun des mortels avait pour les « abacistes », etc...

La découverte du principe de position n'a manifestement pas été évidente puisqu'elle a échappé à pas mal de civilisations. Le monde occidental a dû attendre qu'il lui fût transmis par les Arabes, qui étaient eux-mêmes allés le «pirater» chez les Indiens. Avant cela, on trouve ce principe positionnel chez les savants de Babylone (-2000 av.J.-C.), chez les astronomes Mayas, sans doute à l'époque dite classique, entre le troisième et le neuvième siècle de notre ère, ainsi que chez les savants chinois, un peu avant le début de notre ère. Ces trois systèmes étaient cependant assez imparfaits en comparaison de la numération indienne d'où est issue la nôtre.

G.Ifrah signale que la première numération positionnelle écrite de base 10, dont les symboles ont préfiguré nos chiffres actuels, est née en Inde septentrionale voici près de quinze siècles; on trouve ces symboles, dit-il, dans des gravures sur cuivre (chartes légales rédigées en sanskrit). De nos jours, l'authenticité de ces documents sur cuivre est contestée. La prudence et l'honnêteté de l'historien des sciences (modèle fin de vingtième siècle) l'engagent plutôt à situer cette numération dans une fourchette allant du cinquième au huitième siècles.
C'est probablement Abdallah Mûhammad ibn Mûsâ al-Khwarîzmî al-Magûsî (v.780--v.850), savant d'origine persane ayant vécu à la Cour du Calife abbasside al-Ma'mûn, qui contribua le premier à faire connaître, aux Arabes d'abord, aux peuples de l'Occident chrétien ensuite, la numération indienne positionnelle. Son traité d'arithmétique (al-Hisab al-Hind c'est-à-dire *le Calcul à l'indienne*) est en effet le premier ouvrage arabe connu dans lequel sont développés cette numération et le calcul selon la méthode des Indiens. La seule copie qu'on en connaisse à l'heure actuelle est le manuscrit Cambridge Ii.Vi.5 (XIVè siècle) conservé à la Bibliothèque de l'Université de Cambridge. Nous donnons ci-dessous la traduction française du folio 104 de ce manuscrit, établie à partir de la traduction anglaise. Une des caractéristiques du manuscrit est que les «chiffres nouveaux» ne sont en général pas transcrits: il y a des «blancs» dans le manuscrit. Pourquoi?

Chez nous, cette numération ne s'est imposée que fort lentement: il est toujours très difficile de bouleverser les habitudes. De plus, l'usage de ces nouveaux chiffres est désapprouvé par le «Pouvoir», peut-être simplement parce qu'ils nous viennent tout droit de chez les «Infidèles». Une autre raison, sans doute de la méfiance à leur égard: leur forme n'est pas bien fixée! La responsabilité en incombe peut-être à Gerbert d'Aurillac. Né en Aquitaine vers 945, ce dernier étudia les mathématiques et l'astronomie lors d'un séjour en Espagne. Moine, il termina sa vie comme pape (celui de l'an mille!) sous le nom de Sylvestre II (de 999 à 1003). Il est notamment «l'instigateur» d'un abaque à jetons (*apices)* où les *calculi* de valeur 1 étaient remplacés par lesdits *apices* sur lesquels il y avait un chiffre (indo-arabe). La forme ronde de ces jetons leur permettait d'accomplir des rotations si bien que l'écriture des chiffres en devenait imprécise. Signalons encore, pour terminer, qu'en ce qui concerne les chiffres dits arabes, il existe deux graphies différentes:

- la graphie hindi (هندي) utilisée par les arabes d'Orient :

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠

- la graphie ghubar (غبار) utilisée par les Occidentaux :

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Le mot arabe *ghûbar* signifie «poussière:» et fait allusion à la poussière dont on remplissait une tablette pour s'en servir comme d'une ardoise (on traçait les chiffres avec les doigts dans la poussière de la tablette.)

Texte I : *Thus Spake al-Khwarîzmî: A Translation of the Text of Cambridge University Library Ms.Ii.Vi.5*, by John N. CROSSLEY & Alan S. HENRY, **Historia Mathematica**, 17 (1990), 103-131

Traduction française du folio 104:
[Fol. 104r] Algorizmi a dit: Louange à Dieu, notre guide et défenseur, Lui qui mérite d'une part, qu'on lui rende Son dû, d'autre part, qu'on Le loue sans réserve; supplions-le de nous guider dans le chemin de la rectitude, de nous faire approcher la vérité; de plus, qu'Il nous aide, dans Sa bienveillance, à présenter et à révéler ce qui suit: à propos de la numération des Indiens au moyen de IX symboles (*literae*) grâce auxquels ils proposent leur système général de numération, dans un souci de facilité et de concision, (...)
Algorizmi a dit: ayant remarqué que les Indiens avaient conçu IX symboles pour leur système général de numération, afin de les disposer selon un schéma établi, j'ai voulu révéler, à propos de leur usage, quelque chose qui peut aider ceux qui apprennent, si Dieu le veut.(...)
Ainsi, ils ont conçu IX symboles, dont les formes sont: < 9 8 7 6 5 4 3 2 1 >.(...) Et déjà, j'ai signalé dans le livre d'algèbre et d'al-muqâbala, c'est-à-dire de restauration et d'opposition [Rosen 1831], que tout nombre est composé et obtenu à partir de l'unité. Ainsi, on trouve un dans tout nombre et c'est ce qui est dit dans un autre traité d'arithmétique [Aristote, *Métaphysique*, 987b]. Car un est la racine de tout nombre et est un nombre «à part». C'est la racine du concept de nombre parce qu'on trouve tout nombre grâce à lui. Mais c'est un nombre «à part» parce qu'on le trouve à partir de lui-même, c'est-à-dire sans l'aide d'aucun autre nombre. Mais le reste des nombres ne peut être trouvé sans le «un». Car lorsqu'on dit un, puisqu'on le trouve à partir de lui-même, il ne dépend d'aucun autre nombre. Mais le reste des nombres nécessite {nécessite} un, parce qu'on ne peut pas dire deux ou trois si l'on de dispose pas, a priori, de un. Un nombre n'est ainsi rien d'autre qu'une collection d'unités et, comme nous l'avons dit, on ne peut dire ni deux, ni trois si un ne précède; nous n'avons en fait pas discuté d'un mot mais d'un objet. Car [Fol.104v] deux ou trois ne peuvent exister si on ignore un. Mais un peut exister sans le deuxième ou le troisième. Ainsi, deux n'est rien d'autre que le double ou la répétition de un; et de la même manière, trois n'est rien d'autre que le triple de cette même unité; et c'est ainsi que tu dois l'entendre pour le reste des nombres. Mais maintenant, revenons-en au traité.
J'ai trouvé, a dit Algorizmi, que tout ce qui peut s'exprimer en termes de nombre, est également ce qui va depuis un jusqu'à IX, c'est-à-dire ce qui est entre IX et un; ainsi, un est doublé et il en vient deux et de la même manière, un est triplé et il en vient trois; et ainsi de suite pour le reste jusqu'à IX.
¶ Alors on met X à la place de un et on double et on triple X comme on l'avait fait pour un; de son double, il vient XX, de son triple, XXX, et ainsi de suite jusqu'à XC ¶. Après ceci, C (cent) recule à la place de un et est doublé, triplé, exactement comme il a été fait dans le cas de un et de X; et il en viendra CC et CCC etc. jusqu'à DCCCC (neuf cents). De nouveau, mille est mis à la place de un et en doublant et triplant, comme nous l'avons dit, il vient IImille et IIImille etc. jusqu'à l'infini, en utilisant cette méthode. Et j'ai remarqué que les Indiens travaillaient selon les positions ci-dessous: la première de ces positions est celle des unités, ...

Fibonacci (Léonard de Pise) a, lui aussi, donné une description de la notation décimale positionnelle des nombres dans son célèbre *Liber Abbaci*:

Texte II : *Liber Abbaci compositus a Leonardo filiorum Bonaccii pisano in anno m cc ii et correctus ab eodem in (m cc) xx viii.*

Incipit capitulum primum.

Nouem figure yndorum hee sunt .9 8 7 6 5 4 3 2 1. Cum his itaque nouem figuris et cum hoc si(n)gno .0. quod arabice zephyrum appellatur scribitur quilibet numerus ut inferius demonstratur. Nam numerus est unitas perfusa collectio siue congregatio unitatum que per suos in infinitum ascendit gradus. Ex quibus primus ex unitatibus que sunt ab uno usque in decem constat. Secundus ex decenis que sunt usque in centum sit. Tertius sit ex centenis que sunt ad centum usque in mille. Quartus sit ex millenis que sunt a mille usque in decem milia et sic sequentium graduum in infinitum quilibet ex decuplo sui antecedentis constat. Primus gradus in descriptione numerorum incipit a destera. Secundus uero uersus sinistram sequitur primum. Tertius secundum sequitur. Quartus tertium. Et quintus quartum. Et semper sic uersus sinistram gradus gradum sequitur. Figura itaque que in primo reperitur gradu se ipsam representat hoc est si in primo gradu fuerit figura unitatis unum representat. Si binarii duo si ternarii tria. Et ita per ordinem que secuntur usque si nouenarii .nouem. Figure quidem que in secundo gradu fuerint tot decenas representant quot in primo unitates. Hoc est si figura unitatis secundum occupat gradum denotat decem si binarii viginti si ternarii triginta et si nouenarii nonaginta.
Figura namque que in tertio fuerit gradu tot centenas denotat quot in secundo decenas uel in primo unitates ut si figura unitatis .centum. ...

Traduction

Ici commence le chapitre un.

Il existe neuf figures indiennes .9 8 7 6 5 4 3 2 1. Et ainsi, avec ces neuf figures et avec le symbole .0. que les Arabes appellent zéphyr, on écrit n'importe quel nombre comme il est montré ci-dessous. Car tout nombre est unité ou collection abondante c'est-à-dire ensemble d'unités qui s'élève jusqu'à l'infini par la position de celles-ci.
La première de ces positions est constituée des unités qui vont depuis un jusqu'à dix. La seconde se compose des dizaines qui s'étendent de dix à cent. La troisième, des centaines qui vont de cent à mille. La quatrième, des milliers, depuis mille jusqu'à dix mille et ainsi, dans l'infinité des positions suivantes, n'importe quelle figure représente le décuple de son antécédent. La première position dans l'écriture des nombres commence à droite. La seconde, en fait, suit la première dans la direction de la gauche. La troisième suit la deuxième; la quatrième, la troisième; la cinquième, la quatrième et ainsi, toujours vers la gauche, une position suit une position. C'est ainsi que la figure qu'on trouve en première position est l'image d'elle-même, c'est-à-dire que si, en première position, on a mis la figure de l'unité, elle représente un; si on a mis celle des deux unités, deux; si c'est celle des trois unités, trois et ainsi, elles se suivent dans l'ordre jusqu'à neuf unités; mais ces neuf figures, mises en deuxième position, représentent autant de dizaines que d'unités en première position c'est-à-dire que, si la figure de l'unité occupe la deuxième position, elle désigne dix; si c'est celle des deux unités, vingt; si c'est celle des trois unités, trente; si c'est celle des neuf unités, nonante.
Et de fait, la figure qu'on a mise en troisième position désigne autant de centaines que de dizaines en deuxième position ou d'unités en première; ainsi, si la figure est celle des unités, elle représente cent

3. REPRESENTATIONS DES FRACTIONS (CONTINUES ET UNITAIRES) ET ALGORITHME D'EUCLIDE DANS QUELQUES TEXTES LATINS MEDIEVAUX.

Les textes grecs α à δ nous avaient introduit à la problématique de la classification des nombres en Grèce ancienne. La raison de cette classification, différente de la nôtre exprimée dans les systèmes positionnels, réside dans l'algorithme d'Euclide dont nous aborderons la description à l'aide des fractions continues. Les textes grecs qui utilisent des fractions étant rares[9], nous utiliserons encore des extraits du Liber Abbaci pour illustrer certaines représentations historiques de fractions continues et unitaires (égyptiennes).
Disons tout de suite que la notation des fractions chez Fibonacci peut, a priori, sembler assez curieuse. En fait, elle est liée à la technique de calcul utilisée pour opérer des divisions. par exemple, pour diviser 224 par 75, Fibonaccicommence par rechercher la *regula* de 75 c'est-à-dire une espèce de décomposition de 75 en facteurs premiers (décomposition qui privilégie cependant les puissances de 2 constituées d'un seul chiffre, de même que le facteur 10).

$$75 = 3x5x5$$

ce que Fibonacci note $\frac{1.0.0}{3.5.5}$ (Attention: les points séparent, ils ne multiplient pas)

La division de 224 par 75 se présente alors ainsi:

224÷3 = 74	reste 2
74÷5 = 14	reste 4
14÷5 = 2	reste 4

Fibonacci note le résultat: $\frac{2.4.4}{3.5.5}$ 2, qui signifie:

$$2+\frac{4}{5}+\frac{4}{5x5}+\frac{2}{3x5x5}=2+\frac{4+\frac{4+\frac{2}{3}}{5}}{5}$$ (Ici, les *x* indiquent bien des multiplications)

C'est ce que Léonard de Pise appelle *fractiones in gradibus*.

Un autre exemple: $\frac{1.5..7}{2.6.10}=\frac{7+\frac{5+\frac{1}{2}}{6}}{10}$

Texte III: Liber Abbaci.

...Item si sub quadam alia uirgula sint .2. et .6. et .10. et super .2. sit .1. et super .6. sint .5. et super .10. sint .7. ut hic ostenditur $\frac{1.5..7}{2.6.10}$ septem que sunt super 10 in capite uirgule representant .septem decenas. et .5. que sunt super

Traduction

...De même si sous un certain trait, on a 2, 6 et 10 et que, au-dessus du 2 soit 1, au-dessus du 6, 5 et au-dessus du 10, 7 comme on le montre ici $\frac{1.5..7}{2.6.10}$, le sept qui se trouve au-dessus du 10 au début du trait représente sept dixièmes; le 5

[9] Sur ce sujet, on consultera avec profit les articles de Fowler et Vitrac dans P.Benoît, K.Chemla, J.Ritter (éd.). **Histoires de Fractions, Fractions d'Histoire**, Birkhaüser, 1992.

6 denotant 5 sextas unius decime partis et quod est super 2 denotat medietatem sexte unius decime partis et sic singulariter de singulis intelligatur. Tamen monendum est ut semper minores numeri sint uersus sinistram sub eadem uirgula. Sed si plures fuerint uirgule rupti unius uirgule non respondent ruptis alterius et illa uirgula que est maior pars integri semper est ponenda uersus dexteram manum. Dicuntur quidem fractiones que sunt in una uirgula esse in gradibus. Et est primus gradus earum fractio que est in capite uirge a dextera parte. Secundus est fractio sequens uersus sinistram partem. Uerbi gratia in suprascripta uirga scilicet in $\frac{1.5..7}{2.6.10}$ sunt $\frac{7}{10}$ in primo gradu ipsius uirge. Et $\frac{5}{6}$ sunt in secundo. Et $\frac{1}{2}$ est in tertio hoc est in ultimo gradu eiusdem uirge et sic quot sunt numeri sub uirga tot sunt gradus eiusdem...

qui est au-dessus du 6 indique cinq sixièmes d'une dixième partie; le 1 qui est au-dessus du 2 signifie la moitié du sixième d'une dixième partie et c'est ainsi qu'il faut l'entendre isolément pour chacun des nombres. Cependant, faisons remarquer que les nombres les plus petits sont toujours à gauche sous un même trait. Mais s'il y a plusieurs traits, les morceaux de l'un des traits n'ont aucun rapport avec les morceaux de l'autre; le trait qui représente la plus grande partie de l'unité doit toujours être placé à main droite. En fait on dit des fractions qui comportent un seul grand trait, qu'elles sont «en degrés». Le premier degré de ces fractions est celui qui se trouve au début du trait, du côté droit. Le second est la fraction qui suit vers la gauche. Par exemple, dans le trait ci-dessus, à savoir $\frac{1.5..7}{2.6.10}$, $\frac{7}{10}$ est le premier degré du grand trait, $\frac{5}{6}$, le deuxième et $\frac{1}{2}$, le troisième, c'est à-dire le dernier degré de ce trait; ainsi, il y a autant de nombres sous un trait que de degrés dans ce trait...

La décomposition d'une fraction en fraction dite *égyptienne* est longtemps restée bien ancrée dans les moeurs; dans le *Liber abbaci*, on trouve encore :

Texte IV: *Liber Abbaci.*

...est huius differentie regula ut diuidas maiorem numerum per minorem et cum ipsa diuisio integra non fuerit considera inter quos duos numeros illa diuisio ceciderit. Si inter 3 et 4 ceciderit scies quia minor numerus de maiori est minus quam $\frac{1}{3}$ et plus quam $\frac{1}{4}$ ipsius. Et si inter 4 et 5 ceciderit erit minus $\frac{1}{4}$ et plus quam $\frac{1}{5}$ et sic intelligas de omnibus duobus numeris inter quos illa diuisio ceciderit deinde accipe maiorem partem que minor numerus fuerit de maiori et residuum quod inde remanebit serua quod si fuerit ex aliqua supradictarum differentiarum operare per eam. Et si illud residuum non fuerit ex aliqua su-

Traduction

... la règle de ce «type» est de diviser le plus grand nombre par le plus petit, et lorsque cette division ne donne pas un entier, tu dois constater entre quels deux nombres elle se situe. Si c'est entre 3 et 4, tu sauras que le plus petit nombre vaut moins que $\frac{1}{3}$ et plus que $\frac{1}{4}$ du plus grand. Si c'est entre 4 et 5, il vaudra moins que $\frac{1}{4}$ et plus que $\frac{1}{5}$; c'est ainsi que tu dois l'entendre en ce qui concerne les deux nombres qui encadrent le résultat de la division; ensuite prends la plus grande partie multiple du plus petit nombre dans le plus grand et ce qui reste, mets-le de côté; ce qui correspond à un des «types» décrits plus haut, tu le traiteras comme il t'a été enseigné. Et si prascriptarum differentiarum. Tunc ex ipso residuo accipies maiorem partem et hoc facies donec remanebunt partes alicuius suradictarum differentiarum uel donec habueris omnes singulares partes que minor fuerit de maiori.

...

...Item hunc eumdem modum de $\frac{17}{29}$ uolumus demonstrare diuisis quidem 29 per 17 exiit 1 et amplius quare cognoscimus $\frac{17}{29}$ magis esse medietate unius integri et notandum est quia tres tertie uel quatuor quarte uel $\frac{5}{5}$ uel $\frac{6}{6}$ faciunt unum integrum similiter $\frac{29}{29}$ faciunt unum integrum ex quibus si acceperimus medietatem scilicet $\frac{1.14}{2.29}$ et extraxerimus eas de $\frac{17}{29}$ remanebunt $\frac{1..2}{2.29}$ hoc est $\frac{5}{58}$ quare $\frac{17}{29}$ sunt $\frac{5}{58}\ \frac{1}{2}$ de quibus $\frac{5}{58}$ oportet facere singulares partes scilicet per hanc eamdem differentiam quare diuide 58 per 5 exibunt 11 et amplius. Unde cognoscitur quod $\frac{1}{12}$ est maior singularis pars que sit in $\frac{5}{58}$ unde accepiatur $\frac{1}{12}$ de $\frac{58}{58}$ scilicet de integro erunt $\frac{5..4}{6.58}$ a quibus usque in $\frac{5}{58}$ deest $\frac{1..0}{6.58}$ hoc est $\frac{1}{348}$ et sic habebis pro $\frac{17}{29}$ tres singulares partes $\frac{1}{348}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{2}$.

ce qui reste ne correspond à aucun des «types» précités, alors prends la plus grande partie de ce résidu; tu agiras ainsi jusqu'à ce qu'il reste des parties d'un des «types » traités ci-dessus ou bien jusqu'à ce que tu aies les parties unitaires du plus petit nombre dans le plus grand

...

... De même, par cette méthode, nous voulons présenter $\frac{17}{29}$. Après avoir divisé 29 par 17, il vient 1 et plus; c'est pourquoi nous savons que $\frac{17}{29}$ valent plus que la moitié d'une unité; remarquons que trois tiers ou quatre quarts ou $\frac{5}{5}$ ou $\frac{6}{6}$ font une unité; semblablement, $\frac{29}{29}$ font une unité de laquelle, si nous prenons la moitié, à savoir $\frac{1.14}{2.29}$ et si nous l'extrayons de $\frac{17}{29}$, il restera $\frac{1..2}{2.29}\ \frac{5}{58}$; c'est pourquoi $\frac{17}{29}$ font $\frac{5}{58}\ \frac{1}{2}$; avec ces $\frac{5}{58}$ il faut faire des parties unitaires, bien entendu, en utilisant le même type de méthode; pour cette raison, on divise 58 par 5; il viendra 11 et plus. D'où on sait que $\frac{1}{12}$ est la plus grande partie unitaire qui se trouve dans $\frac{5}{58}$ et ainsi, on prend $\frac{1}{12}$ de $\frac{58}{58}$, à savoir de l'unité; il viendra $\frac{5..4}{6.58}$ pour lesquels, jusqu'à $\frac{5}{58}$ il manque $\frac{1..0}{6.58}$, c'est-à-dire $\frac{1}{348}$ et ainsi, tu auras pour $\frac{17}{29}$ trois parties unitaires : $\frac{1}{348}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{2}$.

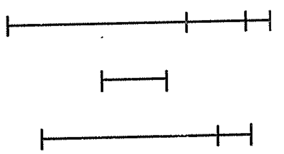
Venons-en maintenant à l'algorithme d'Euclide qui est une procédure basée sur des soustractions successives et réciproques et qui se ramène, en fait, à une suite de divisions. Ce processus porte le nom d' *anthyphérèse*, (du grec ἀνθυφαιρέω,ῶ: ἀντί -idée d'échange, en face de-, ὑπό -sous, en dessous- et αἱρέω,ῶ -enlever, supprimer, soustraire-) c'est-à-dire *soustraire graduellement et réciproquement.*

Cette idée est développée dans les propositions 1 et 2 du Livre VII des *Eléments* d' Euclide. On retrouve encore l'anthyphérèse au Livre 10, mais elle est appliquée là aux grandeurs géométriques.

Le texte V est extrait de la version II d'Adelard de Bath des *Eléments* d'Euclide; il date du douzième siècle; c'est l'un des textes les plus connus parmi Adelard de Bath, version I, Hermann de Carinthie et Gérard de Crémone. A l'heure actuelle, certains historiens des sciences attribuent cette version à Robert de Chester (vers 1140). Le texte qui suit a été établi à partir de soixante-et-un manuscrits (Birkhaüser, 1992, edited by Busard & Folkerts).

Texte V: Euclide, *Eléments* (version latine)

<VII.1> Si a maiore detrahatur minor donec minus eo supersit, ac deinde de minore ipsum reliquum donec minus eo relinquatur, itemque a reliquo primo reliquum secundum quousque eo minus supersit, atque in huiuscemodi continua detraccione nullus fuerit reliquus qui ante relictum numeret usque ad unitatem, eos duos numeros inequales contra se primos esse necesse est.



Ut autem non solum intellectui, verum eciam oculis pateat quod dicitur, huiusmodi numeri inequales duabus lineis figurentur, maiorque illorum numerorum ubicumque minoris numeracionem deficere per ypotesim proponi libeat resecetur. Similiter et minor secundum mensuracionem eius quod de maiore superfuerit, puncto signetur, sed et reliquum primum ad modum reliqui secundi et ad hunc modum donec libeat finem detraccionis facere ponendo tandem reliquam porciunculam esse unitatem. Hac igitur disposicione premissa indirecta raciocinatione proposicio roboretur, scilicet numeros illos esse incommensurabiles, hoc modo. Si enim fieri potest, sit numerus unus amborum mensura communis qui et ipse lineuncula indivisa subnotetur. Hic igitur si minorem numerat, tunc et de maiore quantum minor numerabat. Sed si totum maiorem numerat

Traduction

<VII.1> Si d'un plus grand (nombre), on enlève un plus petit jusqu'à obtenir un reste plus petit; ensuite, du plus petit, on retranche ce reste jusqu'à un reste plus petit et de même, du premier reste, on ôte le second jusqu'à ce que le reliquat soit plus petit et si la soustraction continuelle de la même manière ne laisse aucun reste qui mesure le reste qui le précède et cela, jusqu'à ce qu'on atteigne l'unité, nécessairement, les deux nombres inégaux sont premiers entre eux.

...

Ainsi, pour ouvrir non seulement à l'intelligence, mais certainement aux yeux ce qui vient d'être dit, représentons les nombres inégaux, de cette manière, par deux lignes; que le plus grand de ces nombres soit toujours diminué du plus petit et que, par l'hypothèse proposée, la mesure du plus petit fasse toujours défaut. Semblablement, avec le plus petit, selon sa mesure, on marque d'un point ce qu'il reste du plus grand et on continue ainsi à passer du premier reste à la mesure du second et à cette mesure qui marque la fin du retranchement tout en sachant bien que la petite portion qui restera sera l'unité. Alors, à partir de cette disposition préalable, grâce à un raisonnement indirect, on démontre la proposition, à savoir que les nombres sont incommensurables. En effet, s'il peut arriver qu'un nombre soit commune mesure des deux, notons-le par une ligne non divisée. Ainsi donc, puisque celui-ci[10] mesure le plus petit et que le plus petit mesurait une partie du plus grand mais que celui-ci mesure le plus

[10] «celui-ci» désigne systématiquement le nombre représenté par la ligne non divisée.

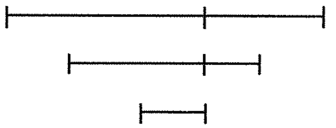
(concessum est enim ambos numerare), numerabit et reliquum. Quare et de minore quantum reliquum ipsum maioris numerabat. Sed quia totum minorem, numerabit et reliquum. Quare et de reliquo maioris primo videlicet quantum minoris reliquum numerabat. Sed quia totum maioris reliquum, numerabit et reliquum reliqui. Sic igitur ex necessitate convincitur unitatem numero illo numerari et esse numerum. Quod est impossibile. Necesse est igitur numeros propositos esse incommensurabiles.

grand tout entier (car on l'a supposé mesurer les deux nombres), il mesurera le reste (du plus grand). Et parce que le reste du plus grand mesurait une partie du plus petit, mais que celui-ci mesurait tout le plus petit, il mesurera aussi le reste (du plus petit). Et parce que le reste du plus petit mesurait une partie, évidemment du premier reste du plus grand mais que celui-ci mesurait tout le reste du plus grand, il mesurera aussi le reste du reste. Ainsi donc, on en arrive à constater que l'unité est mesurée par ce nombre et (en fait) c'est un nombre, ce qui est impossible. Il faut donc nécessairement que les deux nombres proposés soient incommensurables.

<VII.2> Propositis duobus numeris ad invicem compositis maximum numerum communem eos numerantem invenire. <Corollarium> Unde eciam manifestum est quia omnis numerus duos numeros numerans numerat numerum maximum ambos numerantem.

<VII.2> Étant donnés deux nombres non premiers entre eux, trouver le plus grand nombre qui en soit une commune mesure. <Corollaire> D'où, de plus il est évident que tout nombre mesurant deux nombres mesure le plus grand nombre mesurant ces deux nombres.

...



Si minor illorum maiorem numeret, patet, quia ipse est quem queris, quoniam et ipse se numerat, nec maior eo eum numerare posset. Quodsi minor maiorem non numerat, fiat mutua eorum predicto modo detraccio. Eritque necessarium aliquem ante unitatem reliquum inveniri qui proximum antea relictum numerat, quoniam positi sunt commensurabiles esse. Alioquin incommensurabiles essent, ut premissa asserebat. Hic igitur, qui primus occurret, ipse est quem queris. Alioquin eo maior per premisse argumentacionis similitudinem ipsum eum numerare convicetur. Quod est impossibile....

Si le plus petit de ces nombres mesure le plus grand, il est clair que c'est celui que tu recherches, puisque lui-même se mesure et qu'il n'y en a pas de plus grand qui puisse le mesurer. Mais si le plus petit ne mesure pas le plus grand, opère le retranchement entre eux selon la méthode qui vient d'être exposée. Et nécessairement, on trouvera un reste avant l'unité qui mesure celui qui le précède puisqu'on a supposé les nombres commensurables. Sans quoi, ils seraient incommensurables, comme on l'avait montré plus haut. Ainsi donc, celui qui le premier se présente est celui-là que tu cherches. Sans quoi, on en arriverait à montrer, en utilisant une argumentation semblable à celle qui précède, qu'un plus grand (nombre) mesure celui-là. Ce qui est impossible.

...

Exemple : pgcd(316,88) = 4 car

316 - 88	=	228	
228 - 88	=	140	
140 - 88	=	52	(< 88)
88 - 52	=	36	(< 52)
52 - 36	=	16	(< 36)
36 - 16	=	20	
20 - 16	=	4	(< 16)

$$\begin{aligned} 16 - 4 &= 12 \\ 12 - 4 &= 8 \\ 8 - \underline{4} &= \underline{4} \end{aligned}$$

4. FRACTIONS CONTINUES, REDUITES ET EXPLOITATION AU COURS DE MATH.

Considérons encore l'exemple suivant emprunté à Aristarque de Samos (env. -310 à -230). Appliquons donc l'anthyphérèse à 7921 : 4050.

$$\begin{aligned} 7921 &= \underline{1} \times 4050 + 3871 \\ 4050 &= \underline{1} \times 3871 + 179 \\ 3871 &= \underline{21} \times 179 + 112 \\ 179 &= \underline{1} \times 112 + 67 \\ 112 &= \underline{1} \times 67 + 45 \\ 67 &= \underline{1} \times 45 + 22 \\ 45 &= \underline{2} \times 22 + 1 \\ 22 &= \underline{22} \times 1 + 0 \end{aligned}$$

C'est-à-dire 7921 : 4050 = [1,1,21,1,1,1,2,22] = $1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{21+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{22}}}}}}}$

lorsqu'on exprime l'anthyphérèse en termes de fraction continue.

Si on tronque l'anthyphérèse (calcul des réduites de la fraction continue),

$$[1] = 1 \qquad [1,1] = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

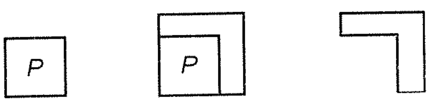
$$[1,1,21] = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{21}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{22}{21}} = 1 + \frac{21}{22} = \frac{43}{22}$$

$$[1,1,21,1] = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{21+\cfrac{1}{1}}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{22}} = 1 + \frac{22}{23} = \frac{45}{23}$$

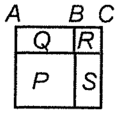
Les réduites d'une fraction continue (ou d'un nombre quelconque développé en fraction continue) convergent vers la valeur exacte de cette fraction alternativement par défaut et par excès. On a ici:

$$1 < \frac{43}{22} < \ldots\ldots < \frac{7921}{4050} < \ldots\ldots < \frac{45}{23} < 2$$

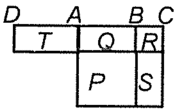
On peut aussi s'attaquer à $\sqrt{2}$ par exemple. On arrive à 1+ $\sqrt{2}$ = [2,2,2,...] ou $\sqrt{2}$ =[1,2,2,...] notamment grâce à la technique du **gnomon** illustrée ci-dessous:
P représente l'aire du carré unité et le «grand» carré est celui de côté $\sqrt{2}$



= **gnomon**



$AB = 1 \quad AC = \sqrt{2} \quad BC < AB$
car si $BC = AB$, le gnomon vaut $3P$, ce qui est trop.



$AD = AB$ donc $DC = 1 + \sqrt{2} \quad DC/AB = (1 + \sqrt{2}) : 1 = 1 + \sqrt{2}$
Or $DC - 2.AB = BC$ avec $BC < AB$
Ainsi, $DC/AB = 2 + BC/AB = [2, AB/BC]$
Mais $AB/BC = DC/AB$ (c'est-à-dire $AB^2 = DC.BC$),

et finalement:

$$AB^2 = P = DC.BC = T + Q + R = S + Q + R \quad (car\ T=S)$$

Le «grand» carré a une aire dont la mesure est le double de celle de P; ceci achève la démonstration.

En classe, les fractions continues constituent un excellent moyen d'amener les élèves à manipuler les approximations, les suites de nombres ou encore les équations du second degré.

La machine à calculer permet très facilement, à l'aide de deux opérations seulement - ôter la partie entière et inverser ensuite- de trouver le développement en fraction continue d'un nombre rationnel ou de prédire celui d'un irrationnel solution d'une équation du second degré (*dynamis* de Théétète).

Ainsi, on calcule aisément à la machine le développement en fraction continue de √2, obtenu plus haut par le *gnomon*. Pour √3, il vient :

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}} = [1,1,2,1,2,1,\ldots]$$

Remarquons que $\sqrt[3]{2} = [1,3,1,5,1,1,4,1,1,8,1,14,1,7,1,\ldots]$ pas de période!

Les réduites de ces fractions continues permettent de construire des suites convergentes de nombres rationnels, que l'on pourra utiliser par la suite pour étudier les notions de limite ou de convergence de suites. Ainsi, on calcule aisément que la fraction continue (du développement de√2), supposée périodique, a pour suite de réduites $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \ldots$ mais très vite, il s'avère nécessaire (par exemple pour prouver la convergence vers √2 de la suite) de trouver une «formule» permettant de calculer directement une réduite à partir de la précédente. Ce défi, que les élèves d'aujourd'hui ne manquent jamais de relever, a bien entendu aussi été envisagé par les Grecs, comme le montre le texte suivant:

Texte ε: Proclus, *Commentaire à la République de Platon*, éd. Kroll, ii.27.11-22.

Προετίθεσαν δὲ οἱ Πυθαγόρειοι τούτου τοιόνδε θεώρημα γλαφυρὸν περὶ τῶν διαμέτρων καὶ πλευρῶν, ὅτι ἡ μὲν διάμετρος προσλαβοῦσα τὴν πλευράν, ἧς ἐστιν διάμετρος, γίνεται πλευρά, ἡ δὲ

Traduction

Les Pythagoriciens proposaient (de cela), à propos des diagonales et des côtés, le théorème élégant que voici~: la diagonale, lorsqu'elle s'est adjointe le côté dont elle est la diagonale, devient côté, tandis que le côté, lorsqu'il a été πλευρὰ ἑαυτῇ συντεθεῖσα καὶ προσλαβοῦσα τὴν διάμετρον τὴν ἑαυτῆς γίνεται διάμετρος. καὶ τοῦτο δείκνυται διὰ τῶν ἐν τῷ δευτέρῳ Στοιχείων γραμμικῶς ἀπ'ἐκείνου. ἐὰν εὐθεῖα τμηθῇ δίχα, προσλάβῃ δὲ εὐθεῖαν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ ταύτης μόνης τετράγωνα διπλάσια τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσληφθείσης.

ajouté à lui-même et s'est adjoint sa diagonale, devient diagonale.
Et cela est démontré à l'aide des \'Eléments, dans le deuxième /livre/, par lui (Euclide).
Si une droite est coupée en deux et /si/ on ajoute une droite, les carrés /construits, l'un/ à partir de la /droite/ entière avec la /droite/ ajoutée et /l'autre/ à partir de cette dernière seule /sont/ doubles des /carrés construits, l'un/ à partir de la moitié /de la droite de départ/ et /l'autre/ à partir de /la droite/ composée de la moitié et de la /droite/ ajoutée.

La première partie du texte concerne ce que les Grecs nommaient les valeurs rationnelles de la diagonale du carré et permet de construire une suite de «carrés» dont le rapport de la diagonale au côté approche $\sqrt{2}$. Ainsi, si un «carré» initial a $c_0 = 1$ pour côté et $d_0 = 1$ pour diagonale, le «carré» suivant aura $c_1 = 1+1=2$ pour côté et $d_1=1+2=3$ pour diagonale, le suivant $c_2=2+3=5$ pour côté et $d_2=2+5=7$ pour diagonale. On reconnaît les réduites de $\sqrt{2}$ avec en prime les relations $c_{n+1} = c_n + d_n$ et $d_{n+1} = 2.c_n + d_n$. Les «carrés» en question ne sont pas des vrais carrés bien entendu (leur diagonale d et leur côté c ne respectent pas la relation $d^2 = 2.c^2$) mais ils s'en approchent aussi près que possible[11] (avec des nombres entiers) puisqu'ils réalisent l'égalité $d^2 - 2.c^2 = \pm 1$. Une telle équation est aujourd'hui appelée équation de Pell-Fermat (forme générale $x^2 - D.y^2 = \pm 1$) du nom du premier mathématicien qui les a résolues, Fermat, et de celui qui les a diffusées, Pell.

On montre que l'équation de Pell-Fermat n'a pas de solutions entières x,y si D est un carré parfait et en a une infinité si D n'est pas un carré parfait (ce qui démontre définitivement que Théétète avait raison dans son classement des nombres). Plus précisément, on démontre que l'équation $x^2 - D.y^2 = \pm 1$ a une infinité de solutions entières si le développement en fraction continue de $\sqrt{D}$ a une période impaire (c'est le cas de $\sqrt{2}$ puisque seuls des 1 apparaissent sous les barres de fraction). Par contre, si la période de $\sqrt{D}$ est paire, alors seule l'équation $x^2 - D.y^2 = 1$ a des solutions entières; c'est le cas de $\sqrt{3}$.

La seconde partie du texte fait référence à un théorème (II.10) des *Eléments* d' Euclide qui permet de démontrer que des nombres construits selon les relations $c_{n+1} = c_n + d_n$ et $d_{n+1} = 2.c_n + d_n$ satisfont toujours la relation $c^2_{n+1} - 2.d^2_{n+1} = \pm 1$ si c_0 et d_0 la satisfont.En effet, si l'on nomme $2x$ la longueur de la première droite et y la longueur de la seconde, le théorème est équivalent à:

$$(2x + y)^2 + y^2 = 2[x^2 + (x + y)^2], \text{ c'est-à-dire } \quad y^2 - 2x^2 = 2(x + y)^2 - (2x + y)^2$$

Si $c_0 = 1$ joue le rôle de x et $d_0 = 1$ celui de y, alors on a $y^2 - 2x^2 = -1$ et donc:

$$(2\, c_0 + d_0)^2 - 2(c_0 + d_0)^2 = d_1^2 - 2\, c_1^2 = 1$$

On remplacera alors x et y par $c_1 = 2$ et $d_1 = 3$, ce qui permettra de démontrer que c_2 et d_2 satisfont l'équation de Pell-Fermat, et ensuite, par récurrence, que c_{n+1} et d_{n+1} la satisfont pour toute valeur de n.

[11] En fait, on démontre que les réduites d'un nombre irrationnel sont, d'une certaine manière, les meilleures approximations rationnelles de ce nombre. pour plus de détails, on peut consulter C.D. Olds, **Continued Fractions**, Random House, Yale University, 1963.

On peut aussi, à un niveau plus élémentaire, envisager de «démontrer» (mais sans entrer dans le problème de la convergence) que la fraction continue [1,2,2,...], supposée périodique, est bien égale à $\sqrt{2}$. Cela se fait à l'aide d'une équation du second degré.

En effet, si $x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\dots}}$ (x est > 0 mais est-il égal à $\sqrt{2}$?), alors $x = 1 + \dfrac{1}{x+1}$

ou encore $x^2 - 1 = 1$, équation dont la seule solution positive est $x = \sqrt{2}$.

De même, pour $x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\dots}}}}}$, on a $x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x+1}}$, d'où l'on déduira bien entendu $x^2 = 3$.

D'autres fractions continues plus simples comme $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\dots}}$ donneront des équations du second degré plus faciles à établir mais nécessitant des élèves l'application de la résolution complète ($b^2 - 4ac$, etc.). En l'occurrence, il s'agit de l'équation $x^2 = x + 1$, dont le nombre d'or et son inverse sont les solutions. Les réduites successives de cette fraction continue sont les rapports de deux nombres consécutifs de la suite de Fibonacci 1,1,2,3,5,8,13,21,...

Enfin, il n'est pas inutile d'aborder aussi en classe la «bonne vieille» méthode d'extraction de racine carrée «à la main», ne serait-ce que pour déstabiliser quelque peu la trop grande confiance que les élèves ont parfois en leur machine à calculer, faire une comparaison entre la manière imprévisible dont les décimales apparaissent et la belle régularité que présentent les fractions continues et montrer finalement que les systèmes de numération que nous employons, aussi parfaits qu'ils soient, ont aussi leurs limites.

Cette méthode d'extraction est liée aux systèmes positionnels, puisque les Indiens l'ont utilisée (elle est décrite dans un texte d'Aryabhatta daté du 5ème siècle d.n.è., dans des termes (le mot sanskrit sthâna 'position' y apparaît) qui font supposer aux historiens des mathématiques (modèle indianiste fin de vingtième siècle) que c'est à cette époque au plus tard qu'il faut faire remonter l'invention du système positionnel décimal par les Indiens) ainsi que les Grecs de l'époque alexandrine, lorsqu'ils commencèrent à utiliser le système de numération sexagésimal babylonien. Théon, dans le texte suivant, exprime en mots le fonctionnement de cette méthode pour la base 60.

Texte ϛ: Théon d'Alexandrie, *Commentaire à la Syntaxe (Almageste) de Ptolémée*, i.10, éd.Rome, **Studi e Testi**, lxxii (1936), 469.16-473.8.

Ὥστε καὶ καθόλου ἐὰν ζητῶμεν ἀριθμοῦ τινος τὴν τετραγωνικὴν πλευρὰν ἐπιλογίσασθαι, λαμβάνομεν πρῶτον τοῦ σύνεγγυς τετραγώνου ἀριθμοῦ τὴν πλευράν. εἶτα ταύτην διπλασιάσαντες καὶ παρὰ τὸν γινόμενον ἀριθμὸν μερίσαντες τὸν λοιπὸν ἀριθμὸν ἀναλυθέντα εἰς πρῶτα ἑξηκοστά, καὶ ἀπὸ τοῦ ἐκ τῆς παραβολῆς γενομένου ἀφελοῦμεν τετράγωνον, καὶ ἀναλύοντες πάλιν τὰ ὑπολειπόμενα εἰς δεύτερα

Traduction

De sorte que, en général, chaque fois que nous cherchons (à considérer) le côté «carré» d'un certain nombre, nous prenons d'abord le côté du nombre carré tout proche. Ensuite, après avoir doublé ce dernier et avoir divisé par le nombre obtenu le nombre restant résolu en premiers soixantièmes, nous enlevons le carré du rapport obtenu. En exprimant encore le reste en deuxièmes soixantièmes et divisant par le double des parties et soixantièmes, nous aurons au ἑξηκοστά, καὶ μερίζοντες παρὰ τὸν διπλασίονα τῶν μοιρῶν καὶ ἑξηκοστῶν, ἕξομεν ἔγγιστα τὸν ἐπιζητούμενον τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου χωρίου ἀριθμόν.

plus près le nombre recherché du côté de l'aire carrée.

Voici, traduit en base décimale, le procédé décrit par Théon, appliqué à l'extraction de √200:

calculs	**extraits du texte (« dixièmes » remplace « soixantièmes »)**
200	« côté du nombre carré tout proche » = 14
-196	soustraction du carré (non décrite par Théon, mais sous-entendue par « nombre restant »)
40	« nombre restant résolu en premiers dixièmes »
-1x28	« après avoir doublé ce dernier (2x14 = 28) et avoir divisé par le nombre obtenu le nombre restant résolu en premiers dixièmes (40/28 = 1,...) », étape[12] qui permet d'obtenir 1, mais la soustraction n'est pas décrite par Théon, comme ci-dessus. L'approximation devient 14,1.
120	
-1	« nous enlevons le carré du rapport obtenu »
1190	« nombre restant résolu en premiers dixièmes »
-4x282	« après avoir doublé ce dernier (2x141 = 282) et avoir divisé par le nombre obtenu le nombre restant résolu en premiers dixièmes (1190/282 = 4,...) ». L'approximation devient 14,14.
620	
-16...	« nous enlevons le carré du rapport obtenu »...

[12] Cette étape se présente généralement sous la forme d'un « essai-erreur » dans notre procédé, mais Théon cherche à exposer sa méthode de manière systématique, comme en témoigne aussi la répartition de chacune des étapes de notre procédé (« on ajoute deux zéros , etc. ») en deux étapes de « résolution en premiers dixièmes », l'une pour évaluer le chiffre additionnel de l'approximation suivante et soustraire le double produit, l'autre pour soustraire le carré du chiffre additionnel.

UN STAGE EN FORMATION CONTINUE SUR LA DÉMONSTRATION À PARTIR DE TEXTES D'HISTOIRE ET DE PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES.

J. GUICHARD - IREM de Poitiers

I. PRESENTATION GENERALE DU STAGE.

Cadre : au programme des stages 92-93, proposés par l'IREM de Poitiers à la MAFPEN de Poitiers et inscrits au PAF [1], stages dits "d'offre", faisant l'objet de candidatures individuelles.

Titre : STATUT DE LA DÉMONSTRATION EN MATHÉMATIQUES

Objectif du stage : s'interroger sur les origines et l'histoire de la démonstration, pour analyser ses articulations avec la notion de *preuve*, ses différentes *fonctions*, et les perspectives didactiques qu'elles permettent d'ouvrir.

Public : enseignants de mathématiques et de philosophie.

Supports : travail à partir de textes empruntés à l'histoire et à la philosophie des mathématiques.

Durée : 12 h en deux sessions :

J1 : axé sur "LE RETOUR AUX SOURCES"

J2 : axé sur LES FONCTIONS DE LA DÉMONSTRATION
= points de repères sur "la démonstration au fils des âges" pour balises didactiques.

Idée directrice : DÉMONSTRATION = UN TYPE DE PREUVE PARTICULIER
(discursif, met le raisonnement en jeu) :

- qui par conséquent n'est pas le seul,
- qui a une fonction "primordiale" : justifier ce qu'on avance,
- qui a une histoire,
- qui ne va pas de soi et qui s'apprend ;

⇒ sur le plan didactique s'éclairer sur : pourquoi fait-on - et fait-on faire - des démonstrations.

---

1 MAFPEN : Mission Académique à la Formation des Personnels de l'Education Nationale. PAF : Plan Académique de Formation.

II. PLAN DETAILLE DES DEUX SESSIONS.

J1 : "LE RETOUR AUX SOURCES"

1.MATH. PREUVE ET DÉMONSTRATION

Etude comparative de 4 documents :

1.1. Les deux greniers : textes de mathématiques préhelléniques. *Texte 1* [2].
1. 2. Un texte euclidien. *Texte 2*.
1. 3. Les jetons. *Texte 3*.

Dans la yhfoforiva la proposition IX 21 a l'aspect que voici :
soit AB = 4, BC = 6, CD = 10, DE = 2 et AE = 22.

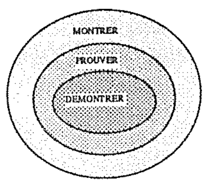
(1) ○○●● ○○○●●● ○○○○○●●●●● ○●
(2) ○○●●○○○●●●○○○○○●●●●●○●
(3) ○○○○○○○○○○○●●●●●●●●●●●

A. SZABO

2.MONTRER / PROUVER / DÉMONTRER

Le point théorique :

2.1. sur l'extension des concepts
2.2. sur le sens étymologique : l'idée de nécessité indubitable. *2 schémas.*



latin : de - monstratio <-- de - monstrare
grec : apo - deixis <-- apo - deikvnuml
montrer, faire voir, indiquer
de (hors de, à partir de...)

produire au dehors, faire voir par des preuves ou des raisonnements, démontrer

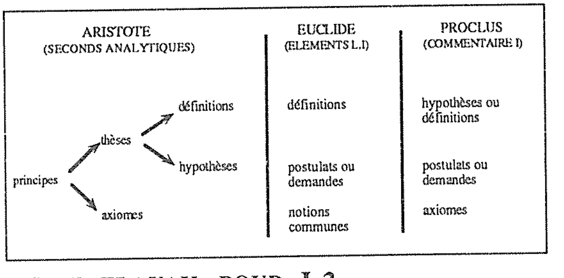
deixis : sens premier = fait de montrer, d'indiquer avec la main (l' index)

3. REPÈRES HISTORIQUES SUR LE RECOURS A LA DÉMONSTRATION

3.1. Causes externes : partiellement éclairantes.
3.2. Les nécessités opératoires : "la découverte des irrationnelles" :
- démonstration par l'absurde de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. EUCLIDE L.X, prop. 117.
Textes 4 & 5.

4. LA THÉORIE DE LA DÉMONSTRATION

4.1. Préliminaires platoniciens :
la démarche hypothético-déductive.
Texte 6.
4.2. La théorie d'ARISTOTE :
le syllogisme scientifique. *Texte 7.*
4.3. Le statut des points de départ :
ARISTOTE, EUCLIDE, PROCLUS.
Texte 7 - 8 - 9. *2 schémas.*



5. BILAN DE LA JOURNÉE. PERSPECTIVES DE TRAVAIL POUR J.2

5.1. Esquisse de la suite du programme
5.2. Idées de travaux inter-stage, pour prolonger, à tester avec les élèves : ex. travail sur PLATON : MÉNON 82a-85c.

---

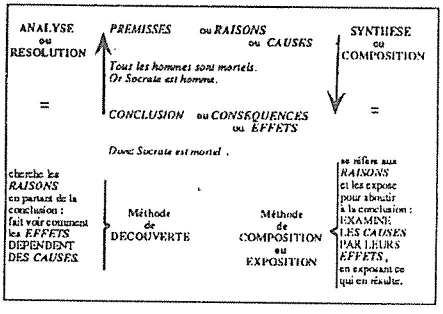
2 Cf. ci-dessous : III. INDEX des EXTRAITS de TEXTES. Extraits et commentaires sont disponibles dans une publication de l'IREM de Poitiers : STATUT ET FONCTIONS DE LA DEMONSTRATION EN MATHEMATIQUES : QUELQUES REPERES. J. GUICHARD. Juin 1993, 66 pages.

J2 : FONCTIONS DE LA DÉMONSTRATION

1. LE POINT sur J1 et sur les travaux inter-stage

2. DEUX GRANDS TYPES DE DÉMONSTRATION

2.1. "La manière de démontrer est double : ...**analyse** ou **résolution**, ...**synthèse** ou **composition**". DESCARTES R. *Texte 12.*
2.2. ... et le reproche de DESCARTES aux Anciens.*Texte 12.*
2.3. Retour à PAPPUS *Texte 11*, et au syllogisme scientifique d' ARISTOTE. *Texte 7. 2 schémas*



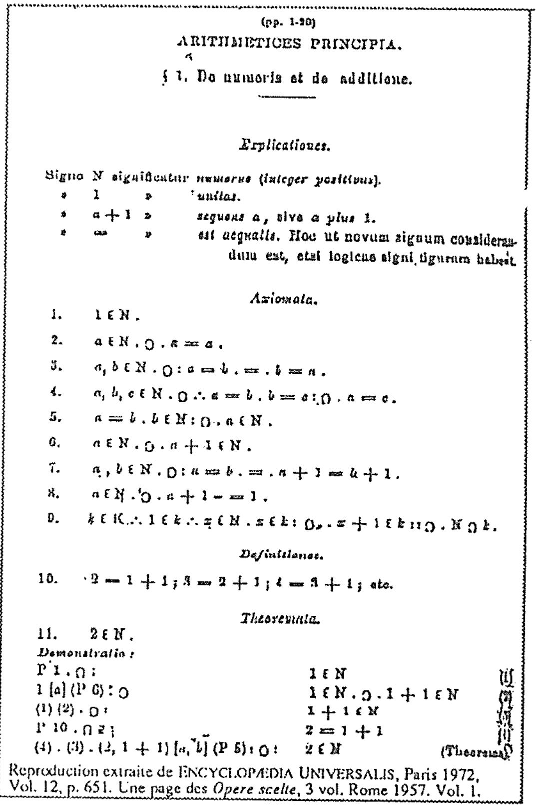
"(...) que nous connaissons. la cause par laquelle la chose est"	=	la raison qui fait que Socrate est mortel : l'attribut *homme* qu'il a en commun avec tous = moyen terme, qui est la raison de la conclusion
"que nous savons que cette cause est celle de la chose"	=	que nous établissions une relation entre la raison et la conclusion.
et "qu'en outre, il n'est pas possible que la chose soit autre qu'elle n'est."	=	nécessité de la conclusion : exclusion de tout autre possibilité.

3. FONCTION(S) DE LA DÉMONSTRATION ?

3. 1. convaincre ou éclairer ?...
Les préoccupations "pédagogiques" du XVII[ème] siècle : ARNAULT ET NICOLE. *Texte 13.*
3. 2. ... ou fonder le savoir mathématique ?
Les préoccupations de rigueur et de fondement du XIX[ème] siècle :
B. BOLZANO. *Texte 14.*

4. DÉMONSTRATION ET AXIOMATIQUE : L'AXE D'EUCLIDE AUX TEMPS MODERNES :

4. 1. d'une axiomatique non formalisée...
LES ELEMENTS D'EUCLIDE. I. - *Texte 8* -
... aux axiomatiques formalisées.
G. PÉANO. *Texte 16.* Cf. ci-contre.
R. BLANCHÉ. *Texte 15.*
4. 2. axiomatisation et formalisation .
L'AXIOMATIQUE. R. BLANCHÉ. *Texte 17.*



(pp. 1-20)

ARITHMETICES PRINCIPIA.

§ 1. De numeris et de additione.

Explicationes.

Signo N significatur *numerus (integer positivus).*
» 1 » *unitas.*
» $a+1$ » *sequens a, sive a plus 1.*
» = » *est aequalis.* Hoc ut novum signum considerandum est, etsi logicae signi figuram habeat.

Axiomata.

1. $1 \varepsilon N$.
2. $a \varepsilon N . \supset . a = a$.
3. $a, b \varepsilon N . \supset : a = b . = . b = a$.
4. $a, b, c \varepsilon N . \supset \therefore a = b . b = c : \supset . a = c$.
5. $a = b . b \varepsilon N : \supset . a \varepsilon N$.
6. $a \varepsilon N . \supset . a + 1 \varepsilon N$.
7. $a, b \varepsilon N . \supset : a = b . = . a + 1 = b + 1$.
8. $a \varepsilon N . \supset . a + 1 -= 1$.
9. $k \varepsilon K \therefore 1 \varepsilon k \therefore x \varepsilon N . x \varepsilon k : \supset_x . x + 1 \varepsilon k :: \supset . N \supset k$.

Definitiones.

10. $2 = 1 + 1$; $3 = 2 + 1$; $4 = 3 + 1$; etc.

Theoremata.

11. $2 \varepsilon N$.

Demonstratio :

P 1 . $\supset$:	$1 \varepsilon N$	(1)
1 [a] (P 6) : $\supset$	$1 \varepsilon N . \supset . 1 + 1 \varepsilon N$	(2)
(1) (2) . $\supset$:	$1 + 1 \varepsilon N$	(3)
P 10 . $\supset$:	$2 = 1 + 1$	(4)
(4) . (3) . (2, 1 + 1) [a, b] (P 5) : $\supset$:	$2 \varepsilon N$	(Theorema)

Reproduction extraite de ENCYCLOPÆDIA UNIVERSALIS, Paris 1972, Vol. 12, p. 651. Une page des *Opere scelte*, 3 vol. Rome 1957. Vol. 1.

5. SYNTHÈSE : un type particulier de preuve :

Cf. Idée directrice (I.).

III. INDEX des EXTRAITS de TEXTES

ED509: a course in history and psychology for second year university mathematics students

David Nelson
School of Education, University of Manchester
England

Abstract

The decline in the quality and quantity of mathematics graduates entering the teaching profession has been a matter of acute concern to mathematicians in the U.K. in recent years. In 1990 the Mathematics Department of Manchester University requested a 2 semester course in Mathematics Education for inclusion as an option in the second year of their three year degree course. The author responded with a course which for 1 semester discusses the early history of mathematics and for the second semester examines psychological studies of (i) learning mathematics (ii) mathematical activity. This paper discusses the genesis of the course, its content, assessment, and the work and opinions of the students who have taken it.

Introduction

Mathematics students at English universities who wish to become teachers usually take a 1 year Postgraduate Certificate of Education (PGCE) after completing their 3 year degree course. The need to maintain an adequate flow of mathematics graduates into school teaching has been a matter of concern in recent decades: see (1), (2), (4), (6), (7). For example, the Cockcroft Committee reported that in 1979 only one third of mathematics teaching in secondary schools was being done by mathematics graduates.

In the 70's and 80's mathematics graduates had many job opportunities other than teaching. The majority went into commerce or industry and the percentage entering teacher training fell from 32% in 1962 to 7.5% in 1984. Moreover there was growing concern about quality : "Not only are insufficient numbers coming forward but the quality of those who do enter teacher training, as judged by degree results, is low in mathematics and physics in relation to other subjects" (7).

At Manchester the situation was slightly better than average -10% entering teacher training in 1984, some of whom were very well qualified. Nevertheless we too were concerned and decided to investigate the attitude of our mathematics students to teaching as a career.

There appeared to have been few such studies at the time. The Cockcroft Committee (1982) took its evidence on attitudes from the Association of Graduate Career Services. Later, in 1986 the Department of Education and Science commissioned a study and obtained a qualitative investigation based on 35 interviews with 110 students in the final year of mathematics or physics degrees at 6 universities and 3 polytechnics (3).

In 1987, after careful discussion and with the energetic co-operation of the Mathematics Departments at Manchester University and UMIST (University of Manchester Institute of Science and Technology) we put a 10-item questionnaire to all third year mathematics students and 157 out of 204 completed it. The same questionnaire was given to third year students in 1988 and 138 out of 207 responded. Overall the response rate was 72%.

In both years about 8% stated that teaching was their first choice of career, describing it as a rewarding, challenging occupation. The 272 (92%) who did not put teaching as first choice were asked to rank various reasons for not putting teaching first. The following table shows how important each reason seemed to the students.

Reason	Rank 1: frequency	Rank 1-3: frequency
pay levels too low	81	185
poor work conditions in school	31	106
low status of teaching	17	106
too hard a job	17	38
mathematically undemanding	12	37
little job satisfaction	35	65
too time consuming	3	19
little career prospects	33	148
other	24	37

(19 students failed to complete this item)

So this table shows that 31 students gave `poor work conditions in school' as their principal reason for not wishing to teach and 106 gave it as one of their 3 main reasons. The antiquity of this complaint is borne out by the comment on Roman Education by Juvenal who

> "...represents it as one of the hardships of a teacher's life that he has to breathe air in his schoolroom poisoned by the smoke of the many lanterns which the pupils brought before dawn." (8)

The main reason given under "other" was "unsuited to working with children" (given rank 1 by 21 students).

These findings are in line with those of the qualitative study mentioned earlier where the negative image of teaching was characterised by "The low salaries, poor status, unattractive work, remoteness from the degree subject and other negative perceptions...". (3)

Two responses to teacher shortage

It has been said that `ignorance breeds fear and fear breeds resentment' and it was partly a desire to provide more information about teaching that led to two developments at Manchester University.

The first was the establishment of a scheme, in partnership with 12 schools, which enabled undergraduates in mathematics (and later physics) to visit a local school regularly to observe and assist the teaching of mathematics. The scheme began in 1987 and continues to run successfully. Students who have been in recent contact with life in schools and enthusiastic teaching feel they are better placed to make informed decisions about their careers and this has helped recruitment to teaching.

The second initiative grew around the hypothesis that an academic course could also show students mathematics education is a skilled, intellectually interesting and challenging occupation. So it was decided to introduce a 2-semester optional course of mathematics education into the second year of the degree and provide a demanding rigorous course which bore comparison with the students' other courses. For one should always remember the remark reported by Polya "The mathematics department offers us tough steak we cannot chew and the school of education vapid soup with no meat in it." (5) Thus the course ED509 Mathematics and Education was launched in 1990 and allowed students to devote one sixth of their second year to the study of mathematics education.

The course structure

We assumed that mathematics students who intended to teach would probably take this course but there would be others who did not want to teach but wished to include educational studies in their degree. We also knew that some students, but not all, would be participating in the school experience scheme mentioned above.

We took into account the fact that two areas which tended to excite our PGCE students were the history of mathematics and the psychology of learning mathematics and solving problems. These students often chose to base their main mathematics education project in one of these areas. Moreover, informal discussions with former students and local teachers confirmed that they would have welcomed foundation courses in history and psychology as part of their degree.

Thus in 1990 we offered the following course which gives a 12 week semester to each area. It attracts about 10 students each year.

First semester <u>History of Mathematics</u>

1. *Early History*
   Babylon and Egypt, Greece and Alexandria, India and China, Arabia and Europe to 1202.

2. *Selected Topics*
   (i) The general solution of the cubic in the sixteenth century.
   (ii) The development of Non-Euclidean Geometry.

Second semester <u>Mathematics and Psychology</u>

1. *Problem Solving*
   Gestaltist, Associationist and Information Processing approaches. Heuristics and expertise.

2. *Psychology of Learning Mathematics*
   The work of Piaget, Skemp, Krutetskii and others, and its relation to the National Curriculum for School Mathematics.

The students receive two one-hour lectures and one examples class or tutorial each week.

In the first semester, 8 weeks are given to Early History and 2 weeks to each Special Topic. The emphasis on Early History is deliberate. The mathematics of this period is not yet too technical for students and they can reflect on a number of questions we believe to be important in the education of a teacher: (i) How did mathematics begin? (ii) What has been the purpose of mathematics? (iii) How has mathematics evolved in Europe and in non-European cultures? (iv) Who were the key figures in its development?

The two special topics were selected because they involve problems of major importance which have ancient origins and yet take the student at least into nineteenth century mathematics. They are taught by Peter Eccles and Mike Prest of the Mathematics Department.

The psychology component is divided into Problem Solving (6 weeks) - the classical approaches to general problem solving, the work of Polya and Schoenfeld with respect to mathematics - and Psychology of Learning Mathematics (6 weeks) - essentially an introduction to some constructivist thinkers, cognition, learning theory, symbolisation and studies of children's mathematical abilities. The component is taught with some reference to the National Curriculum for England and Wales and to current teaching practice in our schools e.g. with respect to problem solving.

A sheet of examples is given out at the start of each week and discussed in the examples class, after which the solutions are provided. Here are three problems taken from sheets for the Early History, Problem Solving and Psychology components respectively.

Ex.1. Problem 31: of the Rhind Papyrus. "A quantity, its 2/3, its 1/2 and its 1/7 added together become 33. What is the quantity?" Solve by the method of false position.

Ex.2. Find the volume of the unit sphere in 4-space.

Ex.3. Give examples from your own learning experience when new knowledge was (i) assimilated into an existing schema and (ii) accommodated by extending or adapting a schema.

Examination arrangements

To allow students to follow up their interests, 40% of the final work is for a historical essay and for a problem solving project. Historical topics range from individuals: Brahmagupta, Leonardo of Pisa, Lobachevski to subjects such as Paradoxes of the Infinite, the Peruvian quipu and Algebraic Notation. For many students this is their first opportunity to write about mathematics.

For the psychology project, students normally make a detailed study of subjects in a problem solving situation, sometimes school children but more often undergraduates and lecturers (maybe asking them to attempt a problem such as Ex.2. above). Though some of these projects are replications or variants of old experiments, many break new ground for, as Graham Hitch has pointed out, the students have the mathematical sophistication to explore areas of mathematical behaviour which most experimental psychologists do not reach.

To complete the assessment the students take a 3 hour written examination at the end of the course. This counts for 60% of the total and the mark usually matches the coursework mark quite closely.

Course Evaluations

The course was evaluated by the students of 91-92 and 92-93. In each year the course was rated as very interesting, slightly easier than mathematics courses, and appeared to be valued intrinsically rather than as a preparation for teaching. A number of students said they took the course because of an interest in history (or psychology) and were surprised to find the psychology (or history) so interesting. When asked whether they would prefer a course devoted entirely to history (or psychology) the majority felt the present mixture should be maintained - "the psychology complements the history." This perhaps highlights a key feature, namely, that the first half is primarily concerned with how a culture builds mathematical knowledge and solves problems whereas in the second half the emphasis is on how the individual and the child in particular develops knowledge and solves problems.

Concluding Remarks

The course has had an encouraging reception from students and a number of them have decided to enter teaching as a result of it. In 1993, in response to requests from the Mathematics Department we launched another course, ED510, which continues the programme into the first and second semesters of the third year of the degree.

I am grateful to Brian Hartley, John Reade, John Walters and Chris Williams for generous assistance with the 1987,88 surveys and to Peter Eccles, Mike Prest and Graham Hitch for helping teach and examine the course.

References

(1) Department of Education and Science (1963) "Report of the Committee on Higher Education (The Robbins Report) London: HMSO

(2) Department of Education and Science (1982) Mathematics Counts (The Cockcroft Report) London: HMSO

(3) Department of Education and Science (1986) Report by Social and Community Planning Research, internal document.

(4) Howson, A.G. (1987) Challenges and Change Bulletin of the Institute of Mathematics and Its Applications, 23, pp 177-83.

(5) Polya, G. (1965) Mathematical Discovery, Volume 2 New York: Wiley.

(6) Smithers, A. and Robinson, P. (1988), The Shortage of Mathematics and Physics Teachers, University of Manchester: Department of Education.

(7) Straker, N. (1987) The Decline of School Teaching as a Career Destination for Mathematics Graduates, Teaching Mathematics and Its Applications, 6, pp151-6.

(8) Wilkins, A.S. (1905), Roman Education, Cambridge: Cambridge University Press.

L'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants de mathématiques en France

Évelyne BARBIN
Responsable de la Commission inter-IREM
Épistémologie et histoire des mathématiques
IREM Paris 7

Depuis une vingtaine d'années, l'histoire des mathématiques connaît un grand regain d'intérêt auprès des professeurs de mathématiques en France. Ce phénomène est largement redevable aux activités menées dans les IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques). Aussi, un recul historique paraît nécessaire pour rappeler les conditions de création de ces Instituts et de la Commission inter-IREM Épistémologie.

En mai 1968, des professeurs de mathématiques français sont eux aussi dans la rue : ils réclament une réforme de l'enseignement des mathématiques et des instituts de formation pour accompagner cette réforme. Quelques années plus tard, leurs vœux seront exaucés. Les IREM vont être créés selon une "formule magique" qui explique en grande partie leur richesse :

1. les IREM sont des instituts universitaires à la fois de recherche et de formation
2. les IREM rassemblent à la fois des professeurs du secondaire (collèges et lycées) et des universitaires.

La "réforme des mathématiques modernes", qui a présidé à la création des IREM, fut rapidement considérée comme un échec, en particulier au sein même de ces instituts. Cet échec était celui d'un enseignement dogmatique et formel, où les mathématiques étaient enseignées comme un langage universel et réduites à des structures, alors même que les mathématiques devenaient la discipline de sélection. Les IREM ont donc très vite entrepris des recherches qui permettaient de dépasser le débat "moderne" et "ancien".

En 1975, Jean-Louis Ovaert propose à l'Assemblée des directeurs d'IREM la création d'une Commission nationale consacrée à l'épistémologie des mathématiques. Une première réunion se tient à Paris le 10 mai 1975 rassemblant quinze personnes. Les premières réflexions sont animées par un esprit critique vis-à-vis d'un enseignement des mathématiques qui se présente aux élèves et aux étudiants comme un spectacle et par un intérêt pour les relations entre mathématiques et société. Elles se rapportent aux mathématiques en tant qu'activité, une activité située dans un contexte historique et social.

Ces origines expliquent sans doute trois caractéristiques des recherches historiques menées dans les IREM :

1. elles sont motivées par un intérêt épistémologique : histoires des concepts, des idées, des problèmes ;
2. elles sont interdisciplinaires : les IREM se sont rapidement adjoints des enseignants de philosophie, d'histoire et de sciences physiques ;
3. elles sont menées avec un souci méthodologique : le recours à la lecture des textes anciens.

La constitution de groupes locaux dans les différents IREM s'est faite graduellement, ces groupes se sont réunis autour de problématiques diverses. Les équipes locales ont ensuite proposé des stages de formation continue dans les différentes académies. L'existence de réunions nationales permettaient de confronter les différentes recherches et expériences de formation, et de mener des travaux d'intérêt commun : mise au point de bibliographie, réédition de textes anciens. La Commission inter-IREM s'est élargie et compte maintenant une soixantaine de participants, elle accueille des conférenciers et publie des ouvrages à l'intention des professeurs et des élèves.

Le premier colloque inter-IREM s'est tenu à Caen en 1977, et son thème, qui était l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques, indique une préoccupation qui s'est imposée d'emblée dans les IREM. Depuis, un colloque se tient tous les deux ans dans une ville de province réunissant une centaine de personnes : le dixième colloque inter-IREM se tiendra de nouveau dans l'Académie de Caen en 1994. A partir de 1984, la Commission inter-IREM a alterné la tenue des colloques avec l'organisation d'universités d'été : la première université d'été s'est tenue au Mans, la cinquième université d'été de Montpellier a été organisée à l'échelon européen. Toutes ces manifestations permettent de diffuser les réflexions et les travaux historiques des IREM auprès des enseignants.

Ainsi, l'histoire des mathématiques est devenue un élément considéré comme essentiel dans la formation continue des enseignants, et ces derniers ont commencé à utiliser l'histoire dans leur enseignement auprès des élèves. La mention de "l'introduction d'une perpective historique" apparaît dans les programmes de mathématiques en 1986. Les manuels se sont mis aussi à l'histoire avec des notes ou des biographies de mathématiciens. Lors de la création des IUFM, des membres des IREM ont proposé des modules de formation ou des séances consacrés à l'histoire des mathématiques, introduisant ainsi cet élément dans la formation initiale.

La situation aujourd'hui est donc marquée par un intérêt croissant des enseignants et des élèves pour l'histoire de leur discipline. Mais les recherches épistémologiques et historiques ont aussi ouvert tout un champ de réflexion sur les mathématiques qui jouent un rôle croissant dans la perception des enseignants pour l'enseignement de leur discipline : construction des savoirs, rôle des problèmes, rôle de la démonstration, rôle de l'erreur, rôle de l'évidence, relations entre mathématiques et réalité, etc.

Ces recherches interviennent dans deux débats actuels de l'enseignement français des mathématiques. Le premier concerne la discipline elle-même : doit-elle être enseignée comme une discipline utilitaire jouant un rôle sélectif ou bien doit-elle être enseignée comme une activité créative dans laquelle peuvent intervenir le plaisir et les aspects culturels? Le second concerne la formation initiale des enseignants dans les IUFM : la formation doit-elle être divisée de façon hermétique en formations disciplinaire et pédagogique ou bien doit-on concevoir une formation professionnelle incluant des apports à la fois épistémologiques, didactiques, psychologiques et sociologiques?

SUMMARY OF CONTRIBUTION TO PANEL DISCUSSION ON THE PLACE OF THE HISTORY OF MATHEMATICS IN INITIAL AND IN-SERVICE TEACHER TRAINING

HEIEDE Torkil

Since mathematics and its history cannot be seperated, history should appear in some form everywhere in mathematics education, and all mathematics teachers should be able to make it appear. This puts great demands on the education of mathematics teachers, and even greater on their in-service education if one wishes to make history of mathematics more prominent in school mathematics than it has been in the past.

This has become more important than ever before in Denmark, since the ministry of education in 1988 issued new regulations for the upper secondary level, making it obligatory that every topic on the mathematics curriculum should be taught with due regard to its history. The teachers at this level are university educated, and the courses in history of mathematics at the universities have multiplied and are attended by more students than before, and also in-service courses on historical themes occur more often now for these teachers. But even if history of mathematics is not (yet) obligatory at the primary and lower secondary levels, one can register a growing interest for it both at the seminariums, where the teachers for these levels are educated, and among present teachers. Their in-service education is mostly taken care of at the Royal Danish School of Educational Studies, with its main branch in Copenhagen and its 8 provincial branches, and at the Copenhagen branch I have in the last ten to fifteen years been able to give many in-service courses on the history of mathematics, the shortest ones in the form of a full-time, one-week course of 28 hours in all, the longest ones covering a whole year (33 weeks) with three hours per week. In my courses I always try to include something about non-Euclidean geometry, because it might well have far-reaching consequences on the participants' understanding of what mathematics really is.

Teachers of mathematics are not and cannot be professional historians of mathematics, and I am not one myself. So we have to rely on secondary or even tertiary sources, and therefore there is a risk that we tell colourful but untrue historical anecdotes, or that we reproduce historical arguments whith wrong points or whith anachronistic twists etc. We should not misrepresent history, but can we completely avoid to do it? Maybe one could say that at least we should not knowingly misrepresent history. The best way to make history of mathematics attain its proper place in mathematics education is presumably through education and in-service education of mathematics teachers, through many courses in every country, and more summer universities like this one.

Référence

Torkil Heiede, "History of Mathematics and the Teacher". A paper presented at the conference arranged by the International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics, in Toronto, August 12-14 1992. This paper is under publication in a volume edited by Ronald Calinger and published by the Mathematical Association of America, containing papers from the above-mentionned conference and from the sessions arranged by the same Study Group at the Seventh International Congress on Mathematical Education, in Québec, August 17-23 1992.

The place of the history of mathematics in teacher training. The situation in The Netherlands.

Jan van Maanen*
University of Groningen, Dept. of Mathematics,
P.O. Box 800, NL-9700 AV Groningen)

Playing with the Dutch saying "There are many ways leading to Rome', we may safely say: "There are many ways leading to a teaching degree'. Actually, there are two different degrees. The lower of the two, the 'second degree' qualifies for teaching at the lower secondary level (which applies to scondary schools which have a four-years programme, and the first three classes of schools which have a five- or six-years programme; with the existence of different types of schools for the same age groups the Dutch system differs from most of the other European countries). The higher of the two, the 'first degree' qualifies for all secondary education.

Universities grant the first degree without a previously obtained second degree, after 5 years (4 years of mathematical studies and 1 year of in-service teacher training). After having obtained the second degree a student can continue the study for the first degree at a university, but generally one starts to teach, and has to do further studies in the evening hours. There are five Polytechnics (at Amsterdam, Leeuwarden, Rotterdam, Tilburg and Utrecht) which offer a part-time programme leading to the first degree (one day or two evenings a week plus a tough portion of home-work during 3 years). One can also work through the obligatory subjects via self-study and apply for a state-examination (the so-called M.O. B examination).
Remains the question "How to earn the second degree?". This degree is granted by a great number of Polytechnics all over The Netherlands, after a programme of 4 years, which a student can take on a full-time basis, but also on a part-time basis. The programme consists of mathematical and theoretical educational studies alternating with an amount of practical teaching in schools which increases during the years.

How is history of mathematics represented in these institutions?
At the Universities history of mathematics is taught at Amsterdam (Free University), Delft and Enschede (both are Technical Universities), Groningen and Utrecht, but as an optional part of the mathematics curriculum, and not directly with the perpective of training teachers.
The M.O. B examination does not require knowledge of the history of mathematics. Of the five Polytechnics which grant the first degree Central Netherlands Polytechnic at Utrecht has an obligatory course of 60 contact hours, in which history of mathematics is studied in its own right, but students also have to give it a go as an educational tool. The other four do not have regular courses in the history of mathematics, but at some of them students may do optional work in history on an individual basis. An inquiry along the Polytechnics which grant the second degree shows a broad spectrum:

- "No special course, but some historical topics integrated in the mathematics lessons" (Leeuwarden),

- "Students are obliged to do 3 weeks of self-study after which they present the results of their work. In the middle of the period there isone guest-speaker who gives an overview." (PTH Eindhoven)

- "We do not offer a structural course, but regularly individual students write a paper about a historical subject" (Algemene Hogeschool Amsterdam)

---

*Contribution to the 'table ronde' about the place of history of mathematics in initial and in in-service teacher training at the Summer University, Montpellier July 19--23, 1993

- "History appears with other subjects in the course "About Mathematics", 40 H.S.W. (= hours of students work) in total" (Hogeschool Holland, Amsterdam),

- At Tilburg and Sittard the same course is taught, from a text that was developed at Tilburg. Subjects: Babylonian, Egyptian and Greek period up to 500 A.D., little about the Middle Ages (apart from some attention to the Arab period), algebra in 16th C Italy, the origin of the differential and integral calculus). At Tilburg 80 H.S.W., at Sittard 120 H.S.W.

- At Utrecht there are two courses (both 80 H.S.W.), one in the 2nd year, with contents comparable to Tilburg and Sittard, and one in the 3rd year called "Old mathematics in modern education". Central in the latter course is the question how to use history in mathematics teaching (as far as I know this is the first regular HiMEd course in The Netherlands). Students first read articles about the subject and study existing texts in which history is used to teach mathematics. Then they work in groups on the task to develop some HiMEd lessons, which, at the end of the course, they present to the other students in their class. In preparing these lessons they can use a collection of historical sources selected and xeroxed for this purpose in the University Library (in an earlier year two students had compiled this collection as their final work before getting their degree).

- Also at Zwolle a course is taught comparable to the ones at Sittard and Tilburg. Here the original Dutch version *Van Ahmes tot Euclides* of the book by Bunt, Jones and Bedient *The historical roots of elementary mathematics* is used for the ancient period, and it is supplemented by various more recent topics (solving equations in relation with complex numbers, geometrical constructions and Galois theory; the origin of probability theory and the needle experiment; non-Euclidean geometry).

In general the teachers of these course describe their students as active and enthousiastic. Teaching these courses is heavy, they say, but rewarding.

THEME 6

TOPIC 6

Mathématiques Méditerranéenne

Mediterranean Mathematics

EXPOSES - WORSHOPS

CONFÉRENCE - PLENARY LECTURE

BOUGIE MEDIEVAL : CENTRE DE TRANSMISSION MEDITERRANEEN

Djamil AISSANI et al (*)
Association GEHIMAB
Université de BEJAIA (Algérie)

RÉSUMÉ :

La première partie de cette communication analysera la structuration du milieu scientifique à Bougie au moyen âge, ainsi que les "*particularités méditerranéennes*" ayant joué un rôle dans le développement d'activités mathématiques.

La deuxième partie concernera le rôle de la ville en tant que centre d'influence et d'échanges avec la chrétienté. Le processus de transmission sera évoqué à travers une douzaine de savants (al Qurashi, Fibonacci, Raymond Lulle, Ibn Khaldun...), originaires de différentes régions de la Méditerranée et versés dans des disciplines "mathématiques" diverses.

INTRODUCTION :

Le rôle de certaines villes méditerranéennes dans la transmission du savoir au moyen âge a été suffisamment étudié. C'est le cas notamment de Tolède et Salerne pour les traductions. Il en est de même pour certaines cités maghrébines en ce qui concerne l'assimilation des connaissances. Nous pensons notamment à Marrakech en Occident musulman, et à Tunis en Ifrikiya. Par contre, le rôle des villes du Maghreb central est beaucoup moins connu.

Pourtant l'une d'entre elles, qui a "*contribué à la fin du XII^e siècle à la formation du génie mathématique d'un Léonard de Pise*" (2), avait la particularité importante d'être un point de "passage obligé" (voir (9)). Il s'agit de Bougie [(1)].

En fait, plus qu'un lieu de passage, cette ville apparaît comme un lieu de rencontre. Mais ces rencontres ne se font pas en circuit fermé et entrainent donc des rapports de communautés (voir (9)). C'est cet élément qui va jouer un rôle essentiel dans le processus de transmission. Transmission du savoir des différentes régions du monde musulman (Andalousie, Occident musulman, Ifrikiya, Egypte, Orient...) à l'Occident chrétien mais également transmission du savoir européen aux pays de l'islam, à travers les savants de toutes ces contrées, qui passent par la ville et y séjournent plus ou moins longtemps.

I - LE CONTEXTE POLITIQUE

Fondée en 1067 par le prince berbère al Näsir, Bougie sera tout à tour capitale d'un état indépendant puis chef lieu de province d'un empire [(2)]. Sa population est constitutée en majorité de Kabyles et d'Andalous. Il y a également un fort groupement de juifs ainsi qu'une colonie chrétienne (voir (9)). Son rôle naval va atteindre son apogée après la conquête de la Sicile par les normands (1091). Quant aux relations officielles et commerciales avec les républiques chrétiennes de Gênes, Pise, Venise, Marseille, Catalogne et enfin Majorque, elles sont caractérisées par la signature de traités de commerce, de paix, traités sur le bien des naufragés....(1).

II - LES PARTICULARITÉS DE LA VILLE

Plusieurs de ces particularités ont joué un rôle dans le développement d'activités mathématiques. Parmi elles :

- la présence d'une forte communauté andalouse "*naturalisée*", notamment après la pénétration almoravide en Espagne puis au XIII^e siècle lors de la reconquista ;

- L'essor exceptionnel du commerce international en raison des avantages douaniers et de la sécurité ;

- Le très haut niveau des études religieuses illustré tout au début par les enseignements des "*princes de la sciences*" (3) ;

- Le rayonnement intellectuel (voir (1), (2), (3)) ;

-L'étape obligée sur la route Espagne-Orient, notamment pour accomplir le pèlerinage et pour études ;

La présence dans la ville de communautés et de groupement (favorisées par l'exemption d'impôts) a plutôt joué un rôle dans les conditions et le processus de transmission.

III - CIRCULATION DES SAVANTS

Plusieurs témoignages font états d'une intense circulation des savants de Bougie sur le pourtour méditerranéen, en particulier dans les républiques chrétiennes et même dans les territoires conquis par les chrétiens (Sicile, Espagne). C'est le cas de Taqi ad Din qui fût reçu en Sicile avec "*honneur et distinction par le chef des chrétiens qui portait le nom d'empereur*"(4).

D'un autre côté, des savants de "*toutes les contrées*" venaient séjourner ou s'installer à Bougie. Citons le savant iranien Abu l'Abbas Ahmad, natif d'Ispahan et qui avait visité la Chine, l'Inde et les défilés de l'Arménie. Parfois ces séjours avaient des raisons précises. Ainsi ,

- l'italien Fibonacci y accompagne son père pour s'initier aux méthodes de calcul et aux techniques commerciales des pays de l'islam ;

- l'andalous al Qurashi y arrive probablement en raison de la reconquista en Espagne. Il s'agit donc d'un exode ;

- le marocain Abu l'Hassan Ali vient s'y livrer à des observations astronomiques ;

- le catalan Raymond Lulle y séjourne pour y "*disputer*" (c'est-à-dire pour confronter ses connaissances et sa méthode de raisonnement avec celles des savants de la ville) ;

- le "Tunisien" Ibn Khaldun y arrive pour des raisons politiques : il est nommé premier ministre.

IV - STRUCTURATION DU MILIEU SCIENTIFIQUE

En ce qui concerne le XIII^e siècle, D. Urvoy propose une analyse intéressante en se basant sur l'ouvrage bio-bibliographique d'al Gubrini (5) (5). Il fait un graphique sur l'articulation d'un certain nombre d'éléments entre-eux. Il remplace les relations individuelles par des ensembles et fait ressortir la présence de communautés (voir figure en annexe).

Il semble donc qu'au XIII^{e} siècle le monde des savants puisse être réparti en deux ensembles. L'un constitué d'éléments indépendants (6) et l'autre qui se compose de groupes. Ces derniers sont structurés autour d'éminents savants. Les liens à l'origine de ces groupes sont significatifs d'une "*activité intellectuelle*".

D. Urvoy schématise cette vie intellectuelle sous la forme d'un regroupement de trois tendances sous l'autorité des trois principales personnalités de la fin du XII^{e} siècle (3). Le groupe du mathématicien al Usuli est le seul qui bénéficie de liens étroits. Malheureusement ce groupe se trouve sans postérité directe.

La deuxième et troisième génération vont être confrontées à de nouvelles influences. Ainsi la tendance incarnée par l'historien Ibn Hammad (1150-1230) est confronté avec la tradition d'enseignement de la Qal'a (7).

De l'autre côté, se constitue un groupe très important dont les membres, notamment sous l'influence d'al Hirrali (voir V -§.5), s'intéressent aux mathématiques et aux différentes formes de spéculations. Ibn Rabi, qui en est le centre a suscité l'admiration d'Ibn Sab'in (voir V - §.2).

V - QUELQUES "ACTEURS" DE LA TRANSMISSION

Les savants que nous allons évoquer symbolisent tous une discipline particulière. Les deux premiers sont choisi en raison de l'influence qu'ont eu leurs travaux sur Raymond Lulle. Les Quatre suivants, qui sont les seuls à apparaître dans la structuration du milieu scientifique évoquée précédemment, permettent de situer le niveau atteint à Bougie dans le domaine des mathématiques. Les derniers vont caractériser le phénomène de transmission. Pour les savants dont l'oeuvre est aujourd'hui bien connue (voir (12)), nous nous limitons à mettre en évidence les liens éventuels avec la ville.

1 - MÉTAPHYSIQUE : Ibn Arabi

Ibn Arabi (Murcie 1165 - Damas 1241) est l'une des principales personnalités du *sufisme* (8) et apparaît notamment comme le "*pivôt*" de la pensée métaphysique en islam (12). Plusieurs faits importants le lie à Bougie. Tout d'abord, l'un de ses maîtres Yusuf al Qaysi avait été un disciple d'Abu Madyan (8). Par ailleurs sa première femme, la pieuse Myriam, qui joua un rôle important dans sa conversion au *sufisme* appartenait à la grande famille bougiote des Ibn Abdun.

Ibn Arabi séjourna à Bougie vers 1200 et probablement vers 1193. Il y eut divers contacts, notamment le *shaykh* kabyle Abu Zakariya Yahia (mort en 1215) qui enseignait à la grande mosquée (2). C'est juste après son dernier séjour qu'il rédiga son *Insa ad Dawa'ir* (Tunis, 1201). Il appelait Abu Madyan "*notre shaykh et imam...le maître des maîtres*" et se référait souvent à lui.

2 - LOGIQUE : Ibn Sab'in

Ibn Sab'in (Murcie 1217 - Bougie (la Mecque ?) 1270), philosophe et *sufi* est célèbre pour avoir répondu aux questions philosophiques que l'empereur Frederik II de Hohenstanfen avait adressé au sultan almohade Abd al Wahid al Rashid. C'est à Bougie qu'il rencontra ash Shushtari (1213-1269) qui deviendra le plus fidèle de ses disciples.

L'*isnad* (9) de la méthode d'Ibn Sab'in (*tariqas sab'iniyya*) est donné par ash Shushtari dans l'une de ses *Kasidas* (poêmes). Il montre l'imbrication de deux cultures grecque et musulmane, telle que l'acceptaient les adeptes d'Ibn Sab'in. Il semble que son cours ait eu un grand succès à Bougie (9).

3- MUSIQUE : al Usuli

Al Usuli, qui est le "centre" d'un groupe très important (voir figure), a rédigé un traité de musique d'après Ibn Sina (Avicenne). Rappelons que si cette discipline appartient aux mathématiques pures, elle ne se sépare pas totalement de la philosophie. Il est possible que son audience ait été réduite (voir figure) en raison de sa proximité d'Averroès (voir (9)).

4 - SCIENCE DU CALCUL : al Mansur al Qal'i

Dans son ouvrage *Unwan ad-Diraia* (5), le biographe de Bougie al Gubrini écrit à propos du mathématicien al Mansur al Qal'i (mort en 1271) : "*il maitrisait la science du calcul, dépassant les meilleurs. Si al Hassar et Ibn Wahb et d'autres encore l'avaient rencontrés, ils n'auraient pu qu'apprendre de lui*".

Ce témoignage permet de faire connaître les mathématiciens qui apparaissaient comme des références au XIII^e^ siècle : al Hassar, Ibn Wahb et d'autres encore. Il permet également de situer le niveau des connaissances d'al Mansur al Qal'i. En effet, si nous n'avons pas retrouver de traces d'Ibn Wahb, l'article de Suter (8), publié en 1901, a permis de faire connaitre al Hassar. Il semble avoir vécu au XII^e^ siècle, mais sa vie et ses activités sont méconnues.Son petit traité intitulé *Kitab al Bayan wa t -Tadhkar* (le livre de la démonstration et de la remémoration), était l'ouvrage de référence au Maghreb jusqu'au XIV^e^ siècle. Rappelons que ce traité a été traduit en hébreu à Montpellier par Ibn Tibbon (en 1271).

5 - ASTROLOGIE ET ANALYSE COMBINATOIRE : al Hirrali

Deux des activités qui ont permis à la combinatoire de se développer étaient particulièrement dynamiques à Bougie : l'astrologie et la linguistique. Dans (5), al Gubrini cite le mathématicien al Hirrali at Tajiibi (mort en Syrie vers 1240). Il écrit notamment : "*En ce qui concerne les mathématiques ('ilm at t'aanim), il était l'un des meilleurs*". En effet, al Hirrali composa plusieurs ouvrages sur la science des lettre et des nombres (voir (1)). A cet égard, il serait intéressant de faire une étude comparative des éléments connus de ses ouvrages avec le *Kitab shams al ma'arif* de son élève le plus célèbre al Buni (m. en 1225). Rappelons que ce traité, contient notamment des matériaux sur l'emploi des carrés magiques. L'un des biographes d'al Hirrali, le mathématicien Ibn Kunfudh (1330-1407), a exposé dans son *Hatt an-Niqab* les différents procédés de construction de ces carrés.

6 - ALGEBRE : al Qurashi

L'analyse des sources bio-bibliographiques disponibles a été faite par H.P.J. Renaud en 1938 (7). Ainsi selon le biographe Ibn al Quadi, le *Kitab al Usul* du mathématicien marocain Ibn al Banna serait "*un abrégé du commentaire de l'imam profondément versé dans les sciences mathématiques al Qurashi, habitant Bougie*".

L'analyse de ces sources fait apparaître qu'al Qurashi, originaire d'Andalousie, aurait vécu et enseigné à Bougie, probablement dans la deuxième moitié du XIII^e^ siècle et surtout que son traité d'algèbre était encore étudié au XIV^e^ siècle dans plusieurs villes maghrébines, comme le prouve son évocation par Ibn Khaldun (voir V - §.12) et Ibn Zakariya al Gharnati (4).

En ce qui concerne le contenu de ce traité, A. Djebbar, en se basant sur les informations fournies par Ibn Zakariya dans son *Ash Sharh al Kabir* constate qu'al Qurashi n'a pas fait un commentaire classique du traité du mathématicien égyptien Abu Kamil (850-930). Il en a pris la matière et y a introduit quelques modifications : d'abord, au niveau de l'agencement des sujets exposés. Ensuite au niveau des équations canoniques, en changeant l'ordre traditionnel de leur exposition et de leur résolution. Enfin, en introduisant des démonstrations légèrement différentes de celles d'Abu Kamil (voir (4)).

7 - SCIENCE DES HÉRITAGES : al Qal'i, al Hirrali, al Qurashi

Le biographe al Gubrini a souligné dans (5) le savoir faire en science des héritages de plusieurs jurisconsultes bougiotes. Il affirme ainsi que le mathématicien al Mansur al Qal'i avait une méthode particulière, exposée dans son traité *Nihayat al Qurb* (l'ultime proximité). En ce qui concerne al Hirrali, il écrit que "*son traité en science des héritages, dont le titre est al wafy fi l-fara'id, je n'en ai jamais vu de pareil dans cet art*".Il conclut en soulignant que ce traité a donné à cette science une clarté et une rigueur scientifique remarquable.

Par ailleurs, un des élèves d'Ibn al Banna a rédigé un commentaire du traité d'al Qurashi sur la science des héritages (voir (1)). Il y apparait que ce dernier avait une technique arithmétique originale pour le calcul des parts d'un héritage.

8 - ASTRONOMIE : Abu l'Hassan Ali

Ayant vécu à Marrakech, Abu l'Hassan (m. en 1262) "*a ajouté par ses voyages, aux connaissances qu'il avait acquises, celles des plus savants hommes des seules contrées où les sciences fussent alors cultivées avec succès*". En introduction à la première traduction du traité *Jamiou al mabadi wa l-gayiat* (collection des commencements et des fins), L.A.M. Sedillot affirme que ce dernier est le plus complet qui ait été composé sur ce sujet par aucun astronome de la nation musulmane.

De part son propre témoignage, nous savons qu'Abu l'Hassan Ali se livra à des observations astronomiques à Bougie. Il observa la hauteur du pôle et détermina la latitude et la longitude de la ville (voir (1)).

9 - "MATHEMATIQUES COMMERCIALES" : Fibonacci

Le célèbre "*Dictionary of scientific biography*" présente Fibanocci (Léonardo de Pise, 1170-1240) comme le premier grand mathématicien de l'Occident chrétien. Dans son important ouvrage, le *Liber Abaci* (publié en 1202), il dit lui même qu'il a étudié la science du calcul et l'algèbre d'al Khawarismi à Bougie auprès d'un maître admirable ("*exmirabili magisterio*"). C'est de cette ville qu'il introduira les chiffres arabes en Europe. Cet évènement va permettre le début d'une ère nouvelle en Occident. En effet, l'activité créatrice dans le domaine des mathématiques va renaître grâce à l'initiation des savants italiens aux méthodes de calcul des pays de l'islam.

a) <u>Situation de Bougie à la fin du XII^e^ siècle</u> :

La ville est le chef lieu d'une province autonome de l'empire almohade. Elle est le siège d'un *foundouk* et d'un consulat de la république de Pise. Au moment où le père de Fibonacci y représente les marchands italiens, les relations entre les deux états sont excellentes, comme le prouve cette fameuse lettre du 18 mai 1182 (2).

b) *Le milieu scientifique* :

C'est l'époque où l'audience des "*princes de la science*" (3) est à son apogée. En ce qui concerne le "*maître admirable*" de Fibonacci, aucun élément ne permet de l'identifier. On peut néanmoins faire certaines hypothèses en se basant sur la structuration du milieu scientifique (voir figure). La plus probable est qu'il ait appartenu au groupe du mathématicien al Usuli (voir V - §.3). L' appartenance au groupe de la Qal'a est également possible (Ibn Hammad avait dépassé la quarantaine au moment du séjour de Fibonacci).

c) *Les mathématiques à Bougie et Fibonacci* :

Abu Kamil fît l'une des principales sources de Léonard de Pise. Or les travaux d'Abu Kamil étaient bien connus à Bougie, comme le prouve le commentaire de son traité par al Qurashi.

Rappelons par ailleurs que l'utilisation d'un certain symbolisme pour exprimer les concepts essentiels était l'une des principales caractéristiques de l'enseignement mathématique dans le Nord de l'Afrique au moyen âge (voir (4)). Or, le genre de symboles que l'on retrouve déjà au XII^{e} siècle chez al Hassar (voir V - §.4) semble avoir joué chez Léonard de Pise un certain rôle (voir dans (1) un exemple sur les fractions continues ascendantes).

Soulignons pour terminer que l'on retrouve dans le *Liber Abaci* de nombreuses applications de l'arithmétique opératoire au commerce : calcul des prix, trocs et ristournes, règle de société, problèmes de change (alliages et monnaies).

10 - MÉTHODES DE NAVIGATION : Raymond Lulle

Le philosophe catalan R. Lulle (Palma de Majorque 1235 - Bougie(?) 1315) est surtout connu par son traité *ars magna* qui souleva l'admiration de Leibniz. Son art consiste à obtenir mécaniquement toutes les combinaisons possibles entre les concepts fondamentaux.

R. Lulle effectua de nombreux voyages à Bougie. Il y aurait étudié les mathématiques vers 1280 [(10)]. C'est cependant son voyage de 1307 qui va entrer dans l'histoire. En effet, il permet la seule discussion méthodique de Lulle avec un savant musulman dont il reste un compte-rendu (il s'agit de Hamar (?) voir (1)).

a) Lulle et la science musulmane :

Il semble que Lulle ne se soit intéressé sérieusement à des travaux musulmans "*que sous l'influence d'une certaine tendance missionnaire intellectuelle*" (10). Il va globalement se limiter en mathématiques aux problèmes des figures spéculatives et en astronomie à la nature des corps célestes et aux jugements astrologiques.

b) Les travaux de Lulle à Bougie :

Lulle a séjourné à Bougie du printemps à l'automne 1307. Nous pouvons nous en faire une idée assez précise grâce au témoignage écrit en 1311 par l'un de ses disciples parisiens (voir (6)). Son apport pendant ce séjour est difficile à cerner. Nous ignorons les noms des savants qui le fréquentèrent ainsi que sa production car, après ses "*déboires*", le bateau gênois qui le ramène fait naufrage et il perd ses livres dans la tempête. Cependant à Pise, il essaye de reconstituer ses travaux. En plus de la "*disputatio*", il est fort probable qu'une partie de l'*Ars Generalis ultima* ait été conçue à Bougie. En effet, Lulle le commence à Lyon en 1305 et le termine à Pise en mars 1308 avant de s'attaquer à la nouvelle version de la "*disputatio*" (voir (1)). Dans cet ouvrage, il s'intéresse aux techniques et aux moyens d'accéder aux disciplines scientifiques et à leurs méthodes ((11), p.61).

c) Les influences musulmanes sur Lulle :

Il semble que c'est le premier séjour de Lulle au Maghreb qui lui ait permis de cerner les éléments qu'il a été amené à emprunter à la logique d'Ibn Sab'in ((10), p. 166). Les travaux d'Ibn Sab'in apparaissent comme un point de contact essentiel entre Raymond Lulle et l'Islam.

Par ailleurs, A Ribera et Asin Palacios soutiennent avec vigueur l'hypothèse d'une réelle influence d'Ibn Arabi sur Lulle (voir (1)). Ainsi, selon A. Rashed, la figure A de l'*Ars Magna* est une reprise de la configuration déjà utilisée par Ibn Arabi dans *Insa ad Dawa'ir*.

d) <u>La navigation</u> :

Observateur de premier ordre, Lulle a assimilé certains procédés scientifiques et techniques chez les marins et les mathématiciens. En particulier, il a exposé la méthode de calcul utilisée par les marins pour connaitre exactement la différence entre la course effectivement faite par le navire et son déplacement réel (11).

11 - GÉOGRAPHIE MATHÉMATIQUE : al Idrissi

Une des préoccupations des savants de l'époque était de mesurer les dimensions de la terre et d'établir des cartes. Des éléments de calcul étaient utilisés pour apprécier les distances et les courbes. Il semble que pour établir sa "*carte mondiale*", al Idrissi, géographe du roi normand Roger II de Sicile employa un type de projection voisin de celle du géographe flamand du XVI^{e} siècle, Mercator, et qui est considéré comme le fondateur de la géographie mathématique.

Rappelons ici qu'al Idrissi (XII^{e} siècle) a énuméré les différentes étapes de la "*route royale*" (*tariq al-Sultan*) qui unissait Bougie à la Qal'a. Il signale la présence à Bougie d'importants chantiers de construction maritime et affirme notamment qu'il faut deux jours pour aller de cette ville à Djidjelli.

12 - HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES : Ibn Khaldun

Le célèbre sociologue maghrébin Ibn Khaldun séjourna à Bougie en 1352 et en 1365-1366 où il enseigna notamment à la mosquée d'al Qasaba. Ses écrits sur les mathématiques dans la *Muqqadima* avaient déjà été exploités par Hadji Khelifa au XVII^{e} siècle et par F. Woepcke au XIX^{e} siècle. C'est cependant l'analyse du H.P.J.Renaud en 1944 qui attire l'attention sur son excellente formation mathématique. En parlant du mathématicien de Bougie al Qurashi, Ibn Khaldun affirme que ce dernier a rédigé l'un des meilleurs commentaires du traité d'algèbre d'Abu Kamil sur les six problèmes (canoniques) (voir V - §.6).

CONCLUSION

L'importance des activités scientifiques à Bougie au moyen âge est bien illustrée par la renommée de l'Université Sidi Touati et de la cité des sciences (*Madinat al 'ilm*) (2). Les faits que nous venions d'évoquer prouvent le dynamisme du processus de transmission. Cependant, toute synthèse valable est encore prématurée.

NOTES

(1) Bugia en italien et en espagnol, Bgayet en berbère, Béjaia en arabe. Du temps des romains, la ville s'appelait Saldae.

(2) Hammadite (1067-1152), Almohade (1152-1230), Hafside (1230-1510).

(3) Abu Madyan (8), Abd al Haqq al Isbili, Abu Hamid as Saghir,...

(4) Il doit s'agir de Manfroi, fils de Frederik II.

(5) Il s'agit de la source la plus complète sur les savants de Bougie. Al Gubrini cite 108 personnalités célèbres des XII^{e} -XII^{e} siècles.

(6) Plus d'un tiers des personnes citées par al Gubrini n'apparait pas dans la figure.

(7) Ancienne capitale du royaume berbère des Hammadites avant la fondation de Bougie.

(8) *Tassawuf*. Nom par lequel fût connu le mysticisme musulman au VII^{e} siècle. C'est à Bougie qu'était installé le maître le plus illustre du mouvement mystique nord-africain : le qutb Abu Madyan (voir (1)).

(9) Chaine d'autorités, partie essentielle de la transmission d'une tradition (ou du savoir).

(10) Il y a effectivement un trou d'environ 10 ans, de 1277 à 1287, où Lulle aurait fait une série de voyages (cf. S. Galmes).

RÉFÉRENCES

[1] AISSANI D., Bougie à l'époque médiévale : les mathématiques au sein du mouvement intellectuel. Ed. IREM de ROUEN, ISBN 2-86239-049-6, 112 pages, 1993.

[2] BRUNSCHVIG R., la berbérie orientale sous les hafsides, Ed. Andrien-Maisonneuve, Paris, 1982.

[3] DERMENGHEM E., Al Hirrali, Annales de l'institut des études orientales, 1948, pp. 39-53.

[4] DJEBBAR A., Quelques aspects de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe de l'Occident musulman. Actes du colloque sur l'Histoire des Mathématiques arabes, Alger, 1986, pp. 101-123.

[5] Al GUBRINI, *Unwan al Diraya fi mashayikh Bidjaya* (galerie des savants de Bougie), Ed. Adil Nuwayhid, Beyrouth 1969 (voir également Ed. Bencheneb, Alger 1910).

[6] L.INARES A., Le séjour de Raymond Lulle à Bougie, revue de méditerrannée, T., 19, 1959, pp. 385-397.

[7] RENAUD H.P.-J., Notes critiques d'histoire des sciences chez les musulmans, II, revue Hesperis, XXV, 1938, pp. 13-42.

[8] SUTER H., Das Rechenbuch des Abu Zakariya al Hassar, Bibliotheca Mathematica, 1901.

[9] URVOY D., La structuration du monde des ulemas à Bougie aux VII^{e}-XII^{e} siècles, Studia Islamica, T. XLIII, 1976, pp. 87-107.

[10] URVOY D., La pensée islamique et méthode universelle selon Raymond Lulle, Thèse, Paris IV, 1978.

[11] YORO K. FALL, L'Afrique à la naissance de la cartographie moderne, Ed. Khartala, C.R.A., Paris, 1968.

[12] Encyclopédie de l'Islam, T.I - VI et sup., Paris, 1965 - 1989.

(*) M.S. RADJEF et membres du groupe G.T.F.M_2.A de l'IREM de Rouen.

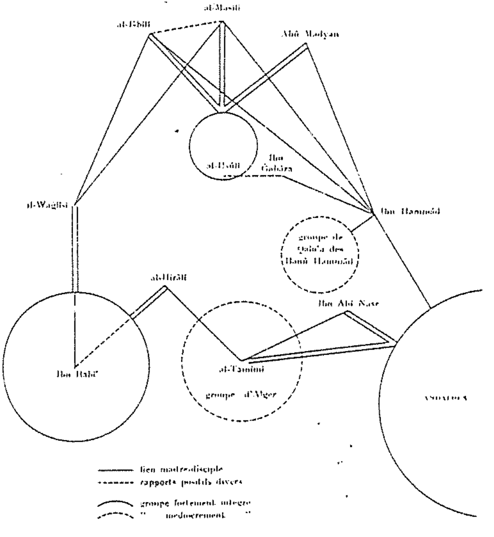


Fig. – Structuration du monde des ulemas [10]

«Les quatre côtés et l'aire» – sur une tradition anonyme et oubliée qui a engendré ou influencé trois grandes mathématiques savantes

Jens Høyrup

A la mémoire de Ludovica
Un front qui s'appuie
A moi dans la nuit
Deux grands yeux ouverts
Et tout m'a semblé
Comme un champ de blé
Dans cet univers

L'essai dessous retrace l'histoire d'un problème mathématique particulier: comment trouver le côté d'un carré si l'on connaît la somme des quatre côtés et l'aire? La question apparaît pour la première fois dans une tablette paléo-babylonienne, et survit dans une forme pratiquement identique chez Luca Pacioli. Comme on le verra, le problème appartient (avec toute une famille de problèmes quasi-algébriques «de récréation» traitant de carrés et de rectangles) à une tradition non-scolaire de géomètres pratiques. Cette «algèbre d'arpenteur», oubliée elle-même aujourd'hui, a influencé trois grandes traditions mathématiques savantes: l'algèbre babylonienne, la géométrie «métrique» grecque (Euclide, *Éléments* II, etc.), et l'*al-jabr* arabe.

I. *Un «problème carré» paléo-babylonien*

Un texte mathématique cunéiforme souvent discuté[1] contient comme 23$^{\text{ème}}$ et avant-dernier problème le suivant:

> Un champ. Les quatre fronts et le champ j'ai accumulés: 41´40´´.
> 4, les quatre fronts, tu inscris. L'inverse de 4 est 15´.
> 15´ tu élèves à 41´40´´. 10´25´´ tu inscris.
> 1, le forjet, tu ajoutes: 1°10´25´´ fait que 1°5´ soit équilatéral.
> 1, le forjet que tu as ajouté, tu arraches: 5´ jusqu'à deux fois
> tu répètes. 10´ nindan se confronte.

Le texte a été écrit au milieu de l'époque paléo-babylonienne, probablement au 18$^{\text{ème}}$ siècle avant J.-C. Il semble avoir contenu 24 problèmes (quelques parties sont détruites) de caractère «algébrique» traitant d'un seul ou de plusieurs carrés et de leurs côtés.

---

[1] [Éd. MKT III, 1-5] La traduction est la mienne, comme toutes les traductions qui suivent.

La traduction cherche à refléter la terminologie babylonienne dans ses détails [2]. Les nombres sont exprimés selon le système (degrés–minutes–secondes–...) de Thureau-Dangin- 1°10´25´´ est donc à interpréter comme $1+{}^{10}/_{60}+{}^{25}/_{(60.60)}$: comme on sait, les nombres des textes mathématiques babyloniens sont écrits selon un système de position à base 60, au 1°10´25´´ de la traduction correspond simplement 1 10 25 dans le texte. «Accumuler» (*kamaum* en akkadien) est une addition vraie, où les composants sont à ainsi dire absorbés dans la somme, et permet l'addition de nombres dont la somme n'a aucun sens concret (comme ici, longueurs plus aire). Par contre, «ajouter» (*wasabum*) est une addition concrète, un greffage d'une entité sur une autre qui conserve son identité (comme l'adjonction des intérêts de l'année ne change pas l'identité de *mon* compte bancaire).

«Élever» (*našûm*) à n signifie un calcul par multiplication (une métaphore basée sur l'idée que la base soit élevée jusqu'au niveau de l'hauteur dans le calcul des volumes). Ainsi, «élever» à l'inverse de 4 (donc, à $^1/_4$= 15´) est une manière (la manière courante babylonienne) de diviser par 4. Une autre opération multiplicative utilisée dans notre texte est la «répétition» (concrète). Une troisième, absente du texte présent mais très importante dans le corpus «algébrique», consiste à «faire que [les longueurs] a et b se tiennent [comme côtés d'un rectangle]» [3], avec la variante (ci-présente) «faire que s se confronte lui-même» (comme côté d'un carré). L'inverse de cette dernière opération est de trouver la longueur s qui «fait que Q soit équilatéral», c'est-à-dire, la longueur s qui sera le côté si l'aire Q est formée en carré (numériquement, $s=\sqrt{Q}$)

«1, le forjet», finalement, est une droite qui, avec une autre (ici le côté s du carré), contient un rectangle d'aire $1.s= s$. Le n i n d a n (≈6m) est l'unité de base pour les distances horizontales.

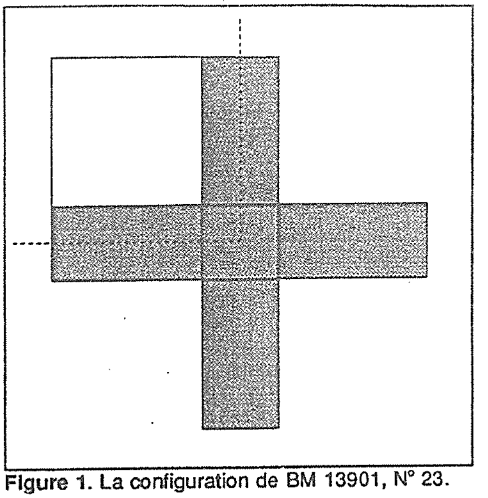


Figure 1. La configuration de BM 13901, N° 23.

Nous sommes donc en état de suivre le texte: Dans un champ [quadratique], la somme des nombres mesurant *les quatre* côtés (non pas 4 fois le côté, c'est clair dans le texte) et l'aire est 41´40´´ - (mé-)traduite en notation moderne, si s désigne le côté, s^2+4s= 41´40´´ [4]. La deuxième ligne prépare la division par 4, qui s'effectue en troisième ligne – transformant, dans notre traduction, l'équation en $(^s/_2)+1\cdot s$= 41´40´´/4= 10´25´´. Pour nous, l'addition de 1 dans la quatrième ligne produirait $(^s/_2)^2+2\cdot1\cdot(^s/_2)+1$ = 1°10´25´´, d'où $^s/_2+1 = \sqrt{1°10'25''}$ = 1°5´, $^s/_2$= 1°5´–1= 5´ – et finalement s = 10´.

---

[2] Voir [HØyrup 1990:45-69], où les principes de la traduction ainsi que les opérations et les termes particuliers sont discutés. Cette publication explique aussi les raisons pour lesquelles l'interprétation habituelle de «l"algèbre» babylonienne comme une algèbre numérique ou rhétorique n'est pas tenable, ainsi que celles qui conduisent à l'interprétation comme «géométrie naïve» de découpage et de rassemblement.

[3] Une dernière multiplication «*a* pas de *b*» (employée dans les tables de multiplication), est pratiquement absente des textes «algébriques».

[4] C'est cette traduisibilité des problèmes (et des procédures) qui justifie en première instance qu'on parle couramment d'«algèbre» babylonienne.

Numériquement, cette séquence se retrouve dans le texte. Mais pourquoi le «forjet», et pourquoi ajouter 1 tout court au lieu de 1^2 (comme c'est l'habitude inébranlable des Babyloniens)? La réponse est donné en Figure 1: Chacun des côtés est pourvu d'un forjet; en conséquence, la configuration cruciforme qui en résulte a l'aire $sxs+4xs$ = 41´40´´[5]. La division par 4 signifie qu'un gnomon d'aire 10´25´´ est regardé séparément. Ce gnomon est complété géométriquement; ici il faut savoir que les babyloniens concevaient un carré comme «étant» son côté et «possédant» une aire (tandis que pour nous, comme on sait, il «est» de 4 m^2 et «possède» un côté de 2 m)[6]. Le carré complémentaire est déjà là, tenu par deux forjets identiques; pas besoin de le construire – et pour l'identifier, il suffit de parler de son représentant, un des exemplaires de ce même forjet. L'aire du carré complété est donc 10´25´´+1 = 1°10´25´´, et son côté $\sqrt{1°10'25''}$ = 1°5´. Pour trouver le côté du champ on enlève le forjet qui était ajouté, et on double le demi-côté qui en résulte pour trouver ce qui «se confronte», c'est-à-dire le côté du champ carré.

La procédure est «naïve», au sens qu'on *voit* directement qu'elle est correcte, sans sentir par exemple le besoin d'une démonstration explicite que le gnomon en est vraiment un et qu'il contient un carré; une telle «critique» dut attendre l'époque grecque («critique» prise dans un sens quasi-Kantien: vérification que ce qu'on croit ou fait d'habitude est vraiment justifié, ou recherche des conditions qu'il le soit). L'exactitude du procédé se voit cependant sans difficulté, bien que «naïvement», et sa description est donc algorithme et justification à la fois (je dois cette formule à Karine Chemla), comme l'est la solution d'une équation moderne. Il peut aussi être caractérisé comme «analytique», au sens que le côté inconnu est traité comme s'il était connu dans une série de manipulations géométriques qui, à la fin, le dégagent de l'enchevêtrement initial. Si l'on comprend l'algèbre comme l'application de l'analyse (comme le voulait Viète), alors la méthode est clairement algébrique; pourtant, si on la voit comme une science du nombre (ou de nombre généralisé), «l'algèbre» paléo-babylonienne des droites mesurées ou mesurables n'en est pas une.

A bien des égards, le problème des quatre côtés et l'aire est similaire aux autres textes «algébriques»: eux aussi distinguent deux «additions» différentes, deux «soustractions» et quatre opérations multiplicatives; eux aussi utilisent la technique »naïve« de découpage et de rassemblement; eux aussi sont algorithme et justification à la fois. Sous d'autres rapports, pourtant, le texte que nous venons de discuter est tout à fait unique.

Si Q désigne l'aire d'un carré, s le côté correspondant (Q_i et s_i s'il y en a plusieurs), et $_4s$ «les quatre» côtés, la liste complète des problèmes contenus dans notre tablette est comme suit (n` désigne $n \cdot 60^1$):

1. $Q+s$ = 45´
2. $Q-s$ = 14`30
3. $Q-{}^1/_3Q+{}^1/_3s$ = 20´
4. $Q-{}^1/_3Q+s$ = 4`46°40´
5. $Q+s+{}^1/_3s$ = 55´
6. $Q+{}^2/_3s$ = 35´
7. $11Q+7s$ = 6°15´
8. Q_1+Q_2 = 21´40´´, s_1+s_2 = 50´ (reconstruction)
9. Q_1+Q_2 = 21´40´´, $s_2 = s_1$+10´
10. Q_1+Q_2 = 21°15´, $s_2 = s_1-{}^1/_7s_1$
11. Q_1+Q_2 = 28°15´, $s_2 = s_1+{}^1/_7s_1$

---

5 J'emploierai dorénavant le signe x pour traduire en symboles l'opération «faire que se tiennent» et pour la multiplication qui y correspond. Quand il faudra distinguer entre la formation d'un carré du côté *a* et celle d'un rectangle à côtés *a* et *b*, le premier sera désigné □ (*a*) et le second ▭ (*a,b*).

6 Le dynamis des géomètres grecs est donc compris comme le carré babylonien -voir [HØrup 1990b]

12. $Q_1+Q_2 = 21'40''$, $\sqsubset\!\!\sqsupset\ (s_1,s_2) = 10'$
13. $Q_1+Q_2 = 28'20''$, $s_2= {}^1/_4 s_1$
14. $Q_1+Q_2 = 25'25''$, $s_2 = {}^2/_3 s_1+5'$
15. $Q_1+Q_2+Q_3+Q_4 = 27'5''$, $(s_2,s_3,s_4) = ({}^2/_3,{}^1/_2,{}^1/_3)s_1$
16. $Q-{}^1/_3 s = 5'$
17. $Q_1+Q_2+Q_3 = 10`12°45'$, $s_2 = {}^1/_7 s_1$, $s_3=1/_7 s_2$
18. $Q_1+Q_2+Q_3 = 23'20''$, $s_2= s_1+10'$, $s_3= s_2+10'$
19. $Q_1+Q_2+\square\ (s_1-s_2) = 23'20''$, $s_1+s_2 = 50'$
20. [détruit]
21. [détruit]
22. [détruit]
23. ${}_4 s+Q = 41'40''$
24. $Q_1+Q_2+Q_3 = 29'10''$, $s_2= {}^2/_3 s_1+5'$, $s_3= {}^1/_2 s_2+2'30''$

Le numéro 23, nous le voyons, est seul à considérer «les quatre côtés»; il est aussi le seul à mentionner les côtés avant l'aire. Il n'est certainement pas le seul problème mixte de second degré et normalisé, mais tous les autres utilisent une même méthode standardisée (couper le rectangle *axs* représentant les *a* côtés en deux moitiés, les faire tenir un carré complémentaire (-$\square({}^a/_2)$, etc.voir Figure 2[7] Le procédé du N° 23, au contraire, dépend crucialement de la présence d'exactement 4 côtés. En ce moment déjà nous pouvons remarquer que cet emploi d'une recette étonnante et élégante, mais sans validité générale, sert à classifier le problème comme une énigme plutôt que comme un morceau mathématique (babylonien ou moderne). Du style d'une énigme fait penser aussi le renvoi au quatre côtés que possède réellement le carré, au lieu d'un multiple arbitraire du côté.

De plus, tous les autres problèmes se présentent comme traitant d'un *mithartum* (ou de plusieurs), le mot qui désigne à la fois la configuration quadratique et la mesure du côté, et qui appartient au langage «algébrique» coutumier. Le N° 23 est le seul à expliquer d'abord qu'il traite d'un champ, en indiquant par son choix de formes grammaticales, par son vocabulaire (les «fronts») et par la référence explicite à l'unité métrologique qu'on doit penser à un champ réel; le seul aussi à laisser la configuration géométrique exacte sous-entendue.

Même la valeur du côté est remarquable. Tous les autres problèmes de notre tablette traitant d'un seul carré conduisent à un coté de 30 (souvent dans l'ordre des minutes, donc 30'), sauf N° 4 (s= 20). Les mêmes valeurs se retrouvent dans tous les autres textes, ce qui est peut-être à expliquer par la valeur «ronde» de ces nombres dans le système sexagésimal ($30'= {}^1/_2$, $20' = {}^1/_3$). Un côté 10 se retrouve seulement dans les problèmes regardant plusieurs carrés, et seulement comme conséquence de l'habitude de prendre toujours les différences entre côtés égales à 10 ou 5, et les proportions comme 1:4 ou 1:7 (voir [Høyrup 1993]). Jamais, sauf dans BM 13901 N° 23, on ne trouve un côté de 10 (ici 10') comme choix délibéré à partir duquel le problème est construit.

Le dernier mystère est l'endroit où se trouve le problème des quatre côtés. Sauf le N° 16, qui semble pour d'autres raisons avoir été déplacé, les problèmes de type $\alpha Q \pm \beta s = C$ se trouvent tous au commencement du texte, et les voisins de N° 23 sont tous bien plus complexes. Il semble que la différence de méthodes telle qu'elle est reflétée dans le contraste entre les Figures 1 et 2, était comprise comme une différence de genres mathématiques par l'auteur du texte.

---

7 Plus de détail : l'aire totale de C et *a* étant connus, l'aire du gnomon (également C) et du carré complèté $(C+({}^a/2)^2$ le sont aussi, et donc le côté *S* du dernier - d'où $s= S-{}^a/2$. Synthétiquement on a $\sqsubset\!\!\sqsupset\ (s_1 s+a)+\square_2= \square\ (s+{}^a/2)$ - c'est à dire rien d'autre qu'Euclide, Éléments II.6.

II. Les démonstrations d'al-jabr

Nulle autre tablette babylonienne nous parle des quatre côtés d'un carré, ni ne fait usage de la méthode particulière de la Figure 1. Des parallèles ne se retrouvent qu'à l'aube du neuvième siècle (ère chrétienne).

Ce fut le moment où le Calife al-Maᵓmun invita al-Khwarizmi a composer un traité sur les parties les plus «brillantes» (*lathīf*) et les plus utiles de l'art d'*al-jabr wa'l muqabalah*[8] Al-Khwarizmi n'est donc pas à considérer comme l'inventeur de cette technique (latinisée comme *algebra*). Une génération après, Thabit ibn Qurrah dans un petit ouvrage raconte en effet qu'elle appartient au cercle des «gens (ou praticiens) d'*al-jabr*», apparemment quelque groupe de calculateurs professionnels. Après encore une ou deux générations, pourtant, Abu Kamil en parle exclusivement comme la discipline d'al-Khwarizmi – et al-Khwarizmi semble en effet (avec son contemporain ibn Turk) l'avoir recoulé, en particulier en ce qui concerne le traitement des problèmes de deuxième degré qui constituent l'axe principal.

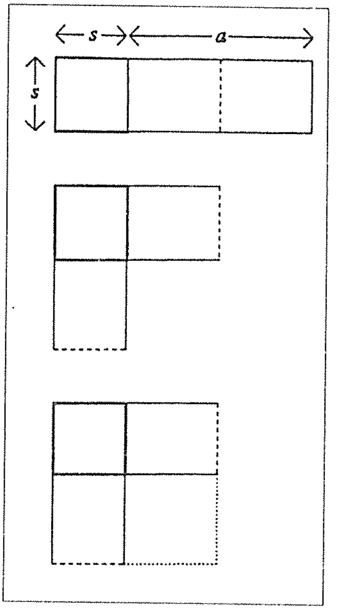


Figure 2. Le procédé »normal« de BM 13901 pour les problèmes $Q+\alpha s = C$.

Là où *nous* cherchons x à partir de $x^2+10x= 39$, les «praticiens d'*al-jabr*» trouveraient un Avoir et sa Racine, étant donné que *l'Avoir avec 10 de ses Racines égale 39 dirhems*[9] L'inconnue fondamentale est donc *l'Avoir*, un montant d'argent, et une meilleure interprétation symbolique serait $y+10\sqrt{y}= 39$; *la Racine* est la racine carrée de l'Avoir, et n'a rien a voir avec l'idée – développée seulement quand la doctrine d'al-Khwarizmi fut réinterprétée bien plus tard- – d'une *racine de l'équation*. Bien sûr, l'on cherche d'abord la Racine, mais ceci pour des raisons pragmatiques évidentes: on prend la moitié des 10, on la carre, et l'on ajoute les 25 qui

---

[8] Ceci, al-Khwarizmi nous le dit dans sa préface ([Rosen (éd., trad.) 1831:3], avec les corrections de Ruska [1917:5]). Comme j'ai montré ailleurs [HØyrup 1991], la traduction latine du traité d'al-Khwarizmī faite par Gérard de Crémone au 12ème siècle [éd. Hughes 1986] est à préférer au manuscrit arabe sur lequel la dernière édition arable [Musarrafah et Ahmed 1939] aussi bien que toutes les traductions modernes sont basées, le texte du manuscrit arabe ayant été remanié à plusieurs reprises. Gérard a pourtant omis la préface ainsi que les parties traitant de la géométrie pratique et de l'algèbre des héritages, pour lesquels il faut se fier pour le moment au manuscrit d'Oxford et à ses éditeurs et traducteurs.

[9] Pour éviter toute équivoque, j'écrirai ces entités algébriques avec une majuscule initiale (les textes arabes, bien sûr, ne font pas de distinction entre Racine et l'idée générale de racine [carré]). L'Avoir est le census de traductions latines, qu'on traduit normalement «le carré», présupposant une pensée plus moderne, ce qui a donné lieu à beaucoup de confusion - en particulier dans les cas où il n'y a pas de racine et que l'Avoir est donc une inconnue de premier degré (voir un bel exemple dans [Libri 1838:I,304f])

en résultent à 39, ce qui donne 64. De la racine de ces 64 on soustrait «la moitié des Racines» (donc 5), après quoi nous reste la Racine (3). Par conséquence, l'Avoir sera $3^2= 9$.[10]

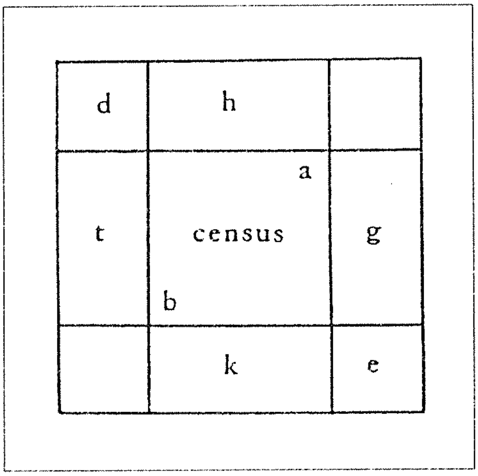


Figure 3. Le seconde démonstration d'al-Khwārizmī. D'après [Hughes 1986:238].

Ce précepte est donné par al-Khwarizmi et répété par Thabit, et doit ainsi appartenir à l'héritage commun des praticiens. Ce qui est nouveau dans la présentation d'al-Khwarizmi est le fait qu'il donne des démonstrations géométriques que la recette traditionnelle (ainsi que les autres, pour les cas *Avoir et Nombre égale Racines* et *Racines et Nombre égalent Avoir*) est valable. Comme dans les textes grecs traduits par les collègues d'al-Khwarizmi à la cour de Bagdad, les points sont identifiés par les lettres de l'alphabet (mais des aires aussi, ce qui n'était pas une habitude grecque); en essence, pourtant, les démonstrations d'al-Khwarizmi ne se distinguent des procédés babyloniens rencontrés plus haut que par une présentation plus rigoureuse et donc moins «naïve».

Pour le premier cas, celui où *Un Avoir avec 10 Racines égale 39 dirhems*, al-Khwarizmi donne deux démonstrations différentes. La seconde (voir Figure 3, prise de la traduction de Gérard) correspond précisément à l'algorithme à justifier, et coïncide dans son principe avec la Figure 2. La première correspond à une formule différente, la détermination de la Racine comme $\sqrt{\ }[({}^{10}/_4)^2{\cdot}4+39)]-2{\cdot}{}^{10}/_4$. Sa base géométrique (voir Figure 4) correspond à la Figure 1.Le texte lui-même n'offre aucune raison pour l'emploi d'une figure qui s'accorde si mal avec le calcul actuel (ailleurs, al-Khwarizmi ne démontre aucun intérêt spécial pour la symétrie). Si la figure est là, et en première place[11] , il faut, ou qu'al-Khwarizmi lui-même y ait pensé d'abord, ou qu'il s'attende que son lecteur le fasse. Elle a donc dû être bien connue dans le milieu que connaissait al-Khwarizmi – non pas comme appartenant à la tradition d'*al-jabr* mais à une autre.

II. *Abu Bakr et «l'algèbre d'arpenteur»*

Cette hypothèse est confirmée par le *Liber mensurationum* d' un certain Abu Bakr, écrit – des observations sur la terminologie le suggèrent– à peu prés à la même époque (voir [Høyrup 1986, 1992]). Le texte arabe n'a pas été identifié, mais Gérard de Crémone en a fait une traduction latine très précise [éd. Busard 1968]. En outre, comme nous le verrons, Léonard de Pise l'a utilisé dans son *Pratica geometrie*.. D'après son titre, l'ouvrage concerne la géométrie pratique, ce qui n'est pas complètement faux. Les premiers paragraphes du chapitre initial, par

10 Que l'Avoir est la vraie inconnue est confirmé par Abu Kamil [éd., trad. Levey 1966:36] quand il démontre qu'on peut le trouver directement, sans la détermination -essentiellement superflue- de sa racine.

11 Il y a même des indications que cette première démonstration ait été la seule dans une première version du traité - elle est nettement plus «naïve »en style que celles qui suivent. Voir [HØrup 1991].

exemple, expliquent comment trouver l'aire et la diagonale d'un carré si le côté est connu. Ensuite, pourtant, Abu Bakr continue avec des problèmes «brillants» dépourvus d'intérêt pratique, dont la plupart requièrent un traitement de style «algébrique»:

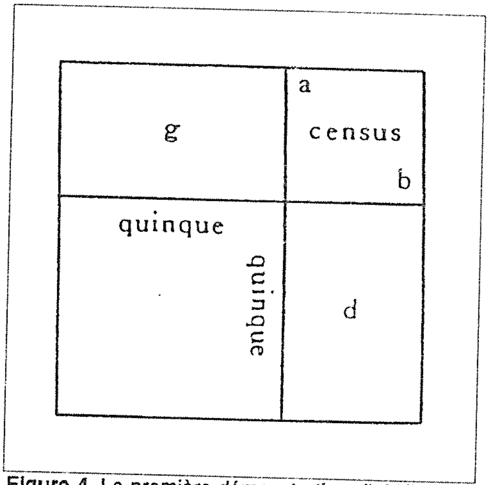


Figure 4. Le première démonstration d'al-Khwārizmī. D'après [Hughes 1986:237].

1. $s = 10$: Q?
2. $s = 10$: d?
3. $s+Q = 110$: s?
4. ${}_4s+Q = 140$: s_u?
5. $Q-s = 90$: s?
6. $Q-{}_4s = 60$: s_u?
7. ${}_4s = {}^2/_5.Q$: s_u?
8. ${}_4s = Q$: s_u?
9. ${}_4s-Q = 3$: s_u? (avec la solution double)
10. $d = \sqrt{200}$: s?
11. $d = \sqrt{200}$; Q?
12. ${}_4s+Q = 60$: s_u?
13. $Q-3s = 18$: s?
14. ${}_4s = {}^3/_8.Q$: s_u?[12]
15. $Q/d = 7^1/_2$: s_u?
16. $d-s = 4$: s?
17. $d-s = 5$ (aucune question, renvoi au cas précédent)
18. $d = s_u+4$: s? (aucun renvoi au N° 16).
19. $Q/d = 7^1/_{14}$: s?, d?

Ici, Q désigne encore l'aire, s le côté et ${}_4s$ les quatre côtés (ou simplement «les côtés») d'un carré, tandis que d dénomme la diagonale et s_u «chacun des côtés» (ci-dessous, A désignera l'aire d'un rectangle, et l_1 et l_2 les côtés).

Même les chapitres qui suivent immédiatement, ceux qui traitent des rectangles (regardés comme des «carrés plus longs d'un côté») et des losanges, sont dominés par des problèmes quasi-algébriques; c'est seulement quand vient le tour des trapèzes et des triangles que domine le vrai calcul géométrique, de type plutôt alexandrin ou Héronien. Pour des raisons que j'exposerai plus bas, je désignerai dorénavant le quasi-algèbre des premiers chapitres comme «algèbre d'arpenteur».

Dans le premier chapitre on remarque le retour des «quatre côtés et l'aire» (N°4, et avec un paramètre numérique différent dans le No 12). Encore une fois, les côtés sont mentionnés les premiers– dans le *Liber mensurationum* c'est la norme, tandis que l'*al-jabr* met toujours l'Avoir avant les Racines. On observe aussi que tous les problèmes qui parlent de côtés, à part le No 13, traitent d'*un côté* ou des *quatre côtés* (le même lien au palpable ou au «naturel» se retrouvera dans l'étude des rectangles et des autres figures). Finalement on découvre que le côté du «carré

[12] Le texte est corrompu, ou peut-être intentionnellement obscure (comme l'est au fait N° 50). Léonard, à l'endroit correspondant [éd. Boncompagni 1862:61], résout le problème ${}_4s+{}^3/_8Q=77^1/_2$.

normal» est 1 parN^{os} 8–9 et 12–13 introduisant les seules exceptions vraies[13].

Souvent, Abu Bakr donne ce qu'il regarde comme deux solutions différentes pour ses problèmes quasi-algébriques. La première n'a pas de nom, et doit donc être celle qui appartient par coutume aux problèmes dans la tradition d'«algèbre d'arpenteur». L'autre est faite selon *al-jabr* (*aliabra* dans la traduction latine). Une traduction littérale[14] de quelques problèmes montrera leur relation mutuelle:

> 3. Et s'il [un «quelqu'un» présenté au N° 1] t'aura dit: J'ai cumulé le côté et l'aire, et ce qui arriva fut 110.Combien alors est chaque côté?
> Le procédé dans cela sera que tu prends la moitié des côtés comme moitié et la multiplies par soi même, et $^1/_4$ arrive, ajoute-le donc à 110, et ils seront $110^1/_4$; prends donc sa racine, qui est $10^1/_2$; déduis-en la moitié, et 10 resteront qui est le côté. Comprends.
> Il y a aussi pour cela une autre méthode selon *al-jabr*, qui est que tu poses le côté comme une Chose et multiplies celle-là par soi-même, et ce qui arrive sera un Avoir qui sera l'aire. Ajoute alors celui-ci au côté selon ce que tu as posé, et ce qui arrive sera un Avoir et une Chose qui seront égalés à 110. Fais alors selon ce qui te fut dit déjà en *al-jabr*, ce qui est que tu divises en deux la Chose et la multiplies par elle-même, et ce qui arrive tu ajoutes au 110, et tu prends la racine de ce qui est cumulé et déduis d'elle la moitié des Racines. En effet, ce qui reste, sera le côté.
> 4. Et s'il aura dit: J'ai cumulé ses quatre côtés et son aire, et ce qui arriva fut 140. Combien donc est chaque côté?
> Le procédé dans cela sera que tu divises en deux les côtés qui seront deux, multiplie-les alors par eux-mêmes,et 4 arrivent que tu ajoutes au 1ª40, et ce qui arrive sera1º44, dont tu prends la racine qui est 12; déduis-en la moitié des 4, ce qui reste alors est le côté, qui est 10.
>
> ....
>
> 6. Et s'il aura dit: j'ai déduit ses côtés de son aire, et 60 sont restés. Combien alors est chacun des côtés?

---

13 N^{os} 16 et 18 (d-s=4) semblent bâtir sur l'idée qu'à s = 10 correspondant d = 14 (la solution donnée, pourtant, est exacte, $s=4\sqrt{32}$. N° 19 est construit à partir de $d = 14^1/_7$, l'approximation de la diagonale d'un carré 10x10 donné au N°2. La quasi-identité entre les N^{os} 16 et 18 suggère, finalement, que le «sept, et un demi» du N° 15 dérive, par erreur, du «sept, en un demi-septième» du N° 19.

On peut observer que N^{os} 12-13 semblent (d'après l'interprétation géométrique qui sera présentée ci-dessous) être dérivés «en cascade» des problèmes sur le carré 10x10. Au fait, le rectangle qui reste quand les quatre côtés sont soustraits de ce carré «normal» (10x6) coïncide avec celui dont parle N°12: un carré de 6x6 augmenté des ses quatre côtés; N° 13, pour sa part, utilise le même carré que N° 12.

14 Littéral sauf pour les nombres, où Gérard entremêle l'écriture romaine, l'écriture «hindou» et l'écriture en mots pleins - parfois dans le même nombre («centum et 40» au N°4). Même le choix des formes grammaticales rend le texte latin aussi précisément que possible, parfois aux dépens du style français.

Les termes centraux de la traduction correspondent au latin comme suit :

ajouter: addare
alors: ergo
arriver: provenire
au fait: namque
c'est-à-dire: quod est
chacun des: unumquodque
chaque: quodque
comprends: intellige
croissance: augmentatum
cumuler: aggregare
d'ailleurs: quoque
déduire: minuere
déduit: diminutus
diviser en deux: mediare
donc: igitur
en effet: enim
ensuite: deinde
joindre: adiugere
mais: autem
méthode: modus
moins: exceptis
multiplicare: multiplier
opposer: opponere
par conséquent: itaque
pourtant: vero
procédé: opus
restaurer: restaurare
rester: remanere
te fut dit déjà: tibi precessit
trouver: invenire

Le procédé en cela sera que tu divises en deux les côtés qui seront deux. Multiplie-les alors par eux-mêmes et ajoutes-y 60 et prends la racine de ce qui est cumulé qui est 8, ajoute donc à eux la moitié du nombre des côtés, et ce qui arrive sera 10 qui est le côté.
Son procédé selon *al-jabr*, pourtant, est que tu poses le côté comme une Chose, laquelle tu multiplies par elle-même, et il arrive un Avoir qui est l'aire. Déduis donc de cela les côtés qui sont 4 Choses, il reste alors un Avoir moins 4 Choses qui est égalé à 60, restaure alors et oppose, c'est-à-dire que tu restaures l'Avoir par les 4 Choses déduites et les joins au 60, et tu auras alors un Avoir qui est égalé à 4 Choses et 60 dragmes. Fais alors selon ce qui te fut dit déjà dans la sixième question, c'est-à-dire que tu divises en deux les Racines et les multiplies par elles-mêmes et les joins au nombre et prend son racine, et ce qui arrive sera cela qui est 8. Joins donc à elle la moitié, et il arrive 10 qui sera le côté.

On remarque que les démarches numériques des deux méthodes supposées différentes coïncident (et qu'Abu Bakr le sait bien, comme le montre la phrase «ce qui arrive sera cela qui est 8»). Ce qui les distingue doit donc se trouver à un autre niveau (même si, dans certains cas, les procédés numériques des deux méthodes diffèrent entre eux, ce qui exclut l'hypothèse que la seconde procédure soit une explication théorique au moyen d'*al-jabr* d'un algorithme a-théorique proposé d'abord).

Al-jabr est évidemment la technique enseignée par al-Khwarizmi, et l'ouvrage d'Abu Bakr à donc dû être joint d'abord à un manuel sur ce sujet. Non pas, pourtant, comme complément au traité-même d'al-Khwarizmi, comme le montre l'emploi des termes «restauration» (*al-jabr*) et «opposition» (*al-muqabalah*). Chez al-Khwarizmi,, *al-jàbr* signifie (comme ici au N° 6) exclusivement l'addition qui élimine un membre soustractif, tandis qu'Abu Bakr «restaure» aussi un coefficient $^1/_4$ par multiplication; «l'opposition» d'al-Khwarizmi désigne la soustraction d'un membre additif des deux côtés de l'équation. Cela ne se trouve qu'une seule fois chez Abu Bakr; normalement, il l'utilise, ou pour l'addition «à droite» qui correspond à une opération de restauration «à gauche», ou (semble-t-il) pour la formation d'une équation par «opposition» de deux expressions différentes.

D'autres auteurs aussi s'écartent de la terminologie al-khwarizmienne– voir [Saliba 1972]. Une analyse comparée des textes laisse peu de doute que le langage flou d'Abu Bakr est originaire, et que celui d'al-Khwrizmi, plus rigoureux et systématique, est une innovation préméditée. Abu Bakr a donc dû écrire, sinon avant al-Khwarizmi, au moins à une époque où celui-ci ne définissait pas encore ce qu'était l'algèbre; la même chose vaut pour le traité d'*al-jabr* qu'il utilise.

Pour retourner à la méthode de base d'Abu Bakr: si elle ne diffère pas (ou pas toujours) numériquement de la méthode d'*al-jabr*, comment alors comprendre la différence?

D'abord il faut remarquer le souci que prend le texte dans les sections d'*al-jabr* pour expliquer que l'Avoir représente l'aire, et la Chose (qui devient «Racine» une fois que l'Avoir a été introduit) le côté. Il faut donc que l'Avoir et sa Racine soient des grandeurs non-géométriques (au fait, comme discuté plus haut, un nombre d'unités d'argent et sa racine carrée). Il se pourrait donc que la méthode de base se distinguerait de l'autre par une utilisation directe des grandeurs géométriques.

Ce soupçon est confirmé par d'autres observations. D'abord il y a le mot «comprends» (*intellige* dans le texte latin), qui revient assez souvent dans le texte. Deux fois il doit être compris comme défi, comme exhortation à pénétrer une procédure intentionnellement obscure (N^{os} 50 et 74). Dans nombre de problèmes authentiquement géométriques c'est un appel à comprendre par moyen d'une figure géométrique trouvé dans le texte– on pense à l'emploi fait par Gérard dans une autre traduction d'un texte arabe reprochant aux géomètres indiens de ne pas «posséder aucune démonstration [pour une construction géométrique] sauf l'expédient *intellige ergo*» – là exactement ou l'on est habitué à trouver dans les textes indiens la phrase *nyasa*, «l'on dessine» (etc.) et une figure qui élucide une instruction, un règle ou une identité algébrique[15] Finalement, le mot est utilisé à plusieurs reprises comme dans N° 3, après la solution de base (mais jamais dans les sections d'*al-jabr*) d'un problème quasi-algébrique. Bien que dans ces cas-ci on ne trouve pas de figure (outre celle montrant un carré, un rectangle ou un losange), il semble naturel de présupposer qu'il faille, ici encore, comprendre à l'aide d'une figure géométrique – au N° 3, à l'aide de quelque chose comme Figure 2.

Quelques-uns des problèmes qui comportent un tel *intellige* semblent aussi montrer par le choix des phrases qu'il faut penser aux entités géométriques qui définissent le problème durant tout le parcours de la solution (ce qui, précisément, n'est pas le cas dans les résolutions par *al-jabr*– ce qui, en effet, n'est jamais le cas dans une solution vraiment algébrique d'un problème quelconque). Un exemple se trouve dans le N° 43, qui traite d'un «carré plus long d'un côté» (un rectangle) et qui est, en effet, une sorte de version rectangulaire des «quatre côtés et l'aire»:

> Si pourtant il t'aura dit: j'ai cumulé ses quatre côtés et son aire, et ce qui arriva fut 76, et un côté ajoute sur l'autre 2. Combien alors est chacun des côtés?
> La méthode de trouver ceci sera que tu multiplies la croissance d'un côté sur l'autre, toujours [c.-a.-d., quelle que soit la valeur de la croissance] par 2, et ce qui arrive sera 4. Ceci par conséquent déduis de 76 et 72 resteront, ensuite cumule le nombre des côtés du carré qui est 4 et joins-le à la croissance d'un côté sur l'autre, et ce qui arrive sera 6. Prends alors la moitié de ceci, qui est 3, et multiplie-le par lui-même, et 9 arrive. Joins-le à 72, et 81 arrive. Prends donc sa racine, qui est 9, et déduis d'elle la moitié de 6, qui est trois, et le côté plus court reste qui est 6. Ajoute donc à elle 2, et le côté plus long sera 8.
> Mais la méthode pour trouver ceci selon *al-jabr* est que...

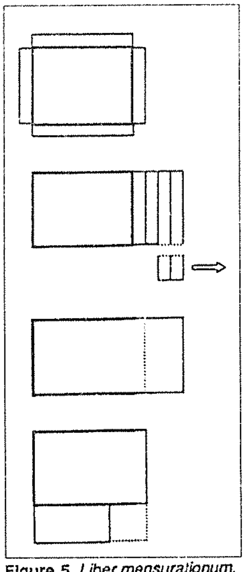


Figure 5. *Liber mensurationum*, l'interprétation géométrique de N° 43.

Les étapes numériques peuvent s'expliquer de plusieurs façons. En algèbre, on pourrait mettre x pour la largeur, et donc $x+2$ pour la longueur. Ceci nous conduit au procédé d'*al-jabr* d'Abu Bakr. Alternativement, désignant les deux côtés x et y ($y= x+2$), on voit que la somme de l'aire et des côtés sera $x.y+2x+2y= x.y+4x+2.2= x.(y+4)+4$. Si $Y= y+4$, nous aurons donc $x.Y = 76 - 4= 72$ (les 4 étant 2 *la croissance* multiplié *toujours par 2*), $Y= x+(2+4) = x+6$ (4 étant le nombre des côtés). En conséquence, le problème est réduit à trouver les côtés d'un rectangle dont l'aire et l'excédent d'un côté sur l'autre sont connus. Cette dernière interprétation rend compte non seulement des calculs numériques mais aussi de la plupart des phrases explicatives du texte – et même du fait que le nombre des côtés (lui-même le résultat d'un «cumul») est *joint* à la croissance, puisque ce qui en provient reste la

---

15 Le fragment gérardien fut publié par Marshall Clagett [1984:599]; un exposé bref de la pratique indienne se trouve dans [HØyrup 1992:note22].

croissance du longueur par rapport à la largeur (comme les textes paléo-babyloniens, Abu Bakr discrimine entre différentes sortes d'additions, bien que plutôt sur le niveau des connotations).

Nos x et y, pourtant, sont des anachronismes, et une réinterprétation s'impose. Elle est fournie par la Figure 5. D'abord, on s'imagine les côtés muni d'une largeur *1* (le «forjet» des textes paléo-babyloniens). Les deux longueurs sont raccourcies, ce qui donne 4 («toujours 2» fois l'excédent 2) à éliminer de la configuration, tandis que les 4 côtés (maintenant égaux) sont cumulés au bout du rectangle, dont la longueur excédera alors la largeur de 2+4 = 6. A partir de là, tout suit la procédure de la Figure 2: formation d'un gnomon, complètement quadratique, etc.

D'une certaine façon, le N° 38 – version rectangulaire de N° 1 – est encore plus instructif, parce qu'il contient une erreur de raisonnement qui s'explique facilement dans une figure (voir Figure 6):

> Si pourtant il t'aura dit: J'ai cumulé le côté plus long et le plus court et l'aire, et ce qui arriva fut 62, d'ailleurs le côté plus long ajoute 2 sur le côté plus court. Combien donc est chaque côté?
>
> La méthode pour trouver cela sera que tu déduis 2 de 62, et 60 restera, ajoute donc 2 à la moitié du nombre des côtés, et 4 arrive. Ajoute par conséquent ceci à 60, et 64 arrive. Alors prends la racine de cela, qui est 8. Ceci, au fait, est le côté plus long. Et si tu veux le plus court, déduis 2 des 8, et 6 restera qui est le côté plus court.

Algébraïquement, il y a deux erreurs: le 4 à ajouter est $(\{[y-x]+{}^4/_2\}/2)^2$, où le 4 intérieur est le nombre total de côtés, et non pas $[y-x]+{}^4/_2$; et le nombre 8 représente $x+\{[y-x]+{}^4/_2\}/2$,et non pas y. Mais les méprises deviennent compréhensibles quand on regarde la Figure 6: si 2 sont coupés de la longueur, et la largeur est mise à côté, le gnomon est déjà là, et l'on voit qu'il peut être complété par la pièce coupée avec une autre, égale celle-là au nombre des côtés présents (la moitié du nombre total des côtés). En plus, le côté du carré complété est visiblement égal à la longueur du rectangle.

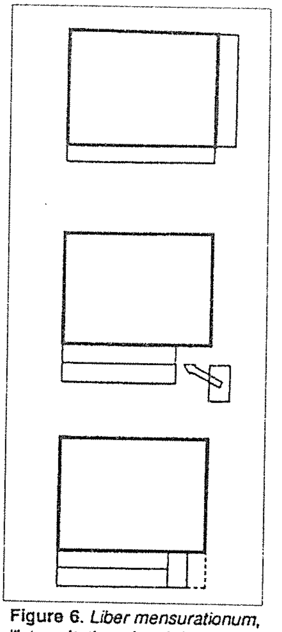


Figure 6. *Liber mensurationum*, l'interprétation géométrique de N° 38.

L'on peut toujours arriver à un résultat exact par plusieurs chemins, et à une même chaîne de calculs numériques sur la base de raisonnements différents. Que le N° 43 soit basé sur des considérations géométriques est donc une conclusion qui repose au premier chef sur le choix des phrases explicatives. Les court-circuits mathématiques du N° 38, par contre, sont difficilement explicables dans une représentation où l'on ne *voit* pas que l'excédent égale la largeur des deux côtés mis ensemble, et que le rectangle originaire lui-même fait partie du gnomon[16].

---

[16] Il y a des indications que les paralogismes soient voulues (comme l'est l'opacité de N°50), et donc un défi, une survivance de la fonction éristique de l'«algèbre d'arpenteur» (voir plus bas): Les 2 à déduire de 62 ne sont pas identifiés comme excédent, ni les 2 a ajouter à la moitié du nombre des côtés. Dans les solutions correctes, de telles omissions ne se retrouvent pas (voir, par exemple, les passages analogues au N°43).
De même, la phrase démagogique qui introduit la seconde illogisme («au fait»/namque) est tout a fait insolite dans le texte.

Une autre trace d'un fond sous-jacent géométrique (ou du moins non-numérique, concret) est la phrase si souvent répétée «ce qui arrive/restera sera» (*quod provenietlremanebit eritl provenit fuit*). Une analyse de son emploi dans les sections d'*al-jabr* démentit l'hypothèse qu'il s'agisse d'un tic stylistique. Là– où nous avons l'avantage de savoir ce qui se passe –, il est toujours employé quand ce qui arrive (par exemple, au N° 3, le nombre 10) est identifié comme *quelque chose d'autre* (à voir, le côté). En conséquent, «ce qui arriva» par le cumul des côtés et de l'aire au N° 43, et qui fut 76, doit être d'abord quelque chose en soi, comme la configuration de la Figure 5, et s'identifier seulement en seconde instance avec le nombre 76. De même, le curieux «cela qui est 8» (N° 6, fin de la section d'*al-jabr*) doit se comprendre comme identification avec «cette entité concrète [le côté du carré complété] qui était calculée comme 8».

Parmi les caractéristiques de cette géométrie quasi-algébrique il faut souligner deux choses. D'abord, les problèmes traitent toujours des entités appartenant «par nature» aux configurations: le côté / les côtés, etc. On ne trouve jamais des coefficients artificiels– ni 2 fois l'aire, ni $^1/_3$ du côté. Ensuite, les manipulations géométriques sont faites sur les entités mêmes qui entrent dans la définition des problèmes– «une longueur» n'est jamais employée comme représentante de quelque chose d'autre– soit une aire, soit un nombre, soit un prix. La méthode est analytique, mais l'autre marque de la pensée algébrique– la représentation– est absente.

A ces égards, «l'algèbre d'arpenteur» est nettement distincte de l'algèbre paléo-babylonienne[17], notre problème initial (BM 13901 N° 23) mis à part. Mais d'autres caractéristiques sont communes. D'abord, bien sûr, la technique «naïve» géométrique de découpage et de rassemblement; en plus, la choix spécifique de méthode quand choix il y a (par exemple, le recours à la demi-somme et la demi-différence, ou le «changement de variable» du N° 43 d'Abu Bakr); une alternance très précise entre la première, la deuxième et la troisième personne grammaticale et entre le présent et le passé (une divergence partielle sur ce point nous occupera ci-dessous) et d'autres concordances d'ordre rhétorique. Il n'y a pas de doute raisonnable que les deux traditions soient reliées. Avant d'analyser la nature précise de cette liaison nous allons pourtant examiner deux sources supplémentaires, médiévales elles aussi mais plus tardives.

IV. *D'autres témoins*

La *Compilation de mesurage et de partition* d'Abraham bar Hiyya – datant de la première partie du 12ème siècle, et mieux connue comme le *Liber embadorum* (*Livre des surfaces*) de Savasorda d'après l'appellation de la traduction faite par Platon de Tivoli et le titre honorifique de l'auteur– est beaucoup plus orientée vers l'arpentage authentique que le traité d'Abu Bakr[18] [1]. Contrairement à Abu Bakr, Savasorda se réfère aussi aux *Éléments* d'Euclide, d'abord dans son premier chapitre, où il copie les définitions des livres I et VII et nombre de théorèmes, et plus tard pour démontrer ses règles. A un certain point (Chapitre 2, première partie, §7), pourtant, il déclare qu'avant de procéder avec les triangles et ces quadrangles qui présupposent la triangulation il présentera quelques questions «pour que, avec l'assistance divine, tu puisses te montrer un calculateur fin et alerte en les résolvant». D'abord viennent quelques problèmes sur les carrés:

[

§8. $s = 10$: d?

§9. $d = \sqrt{200}$: s?

§10. $Q-4s = 21$: Q? s?

---

17 Dans BM 13901 N°12, par exemple ($Q_1+Q_2=21'40''$, $\square(s_1,s_2) = 10'$), les aires des deux carrés sont traitées comme longueur et largeur d'un rectangle, dont l'aire est trouvée comme ($[\,\sqsubset\!\sqsupset\, s_1,s_2]$).

18 J'ai utilisée la traduction latine dans l'édition de Maximilian Curtze [1902:1–183].

§11. $Q+4s=77$: Q? s?

§12. $4s-Q=3$: s_u? (avec la solution double).

Il n'y a aucun doute que Savasorda ait emprunté ce bouquet, ni que sa source appartienne à la même famille que le *Liber mensurationum*. Il semble sur, pourtant, qu'il n'a pas utilisé directement le manuel d'Abu Bakr. On remarque d'ailleurs que le côté de 7 des §§10–11 pourrait être relié à cette approximation grossière de la diagonale du carré 10x10 que suggéraient les N^{os} 16 et 18 d'Abu Bakr.

Bien que la méthode basale d'Abu Bakr semblait être géométrique, son texte (ou du moins la traduction de Gérard, et donc le manuscrit partiellement corrompu que celui-ci a dû utiliser) ne contenait pas les figures auxquelles semblait renvoyer le «comprends» répété. Savasorda, de son côté, donne des preuves géométriques (mais ne fait jamais mention d'*al-jabr*). Formellement, pourtant, ses démonstrations se font par le moyen des théorèmes euclidiens cités au premier chapitre. Il est donc possible qu'ils aient été greffés sur la collection des problèmes traditionnels, ou par Savasorda lui-même, ou par quelque prédécesseur connaissant Euclide ou le traité de Thabit ibn Qurra sur la *Rectification des problèmes d'al-jabr par moyen de démonstrations géométriques* [éd., trad. Luckey 1941]; dans cet ouvrage, en effet, l'exactitude des algorithmes employés par les «gens d'*al-jabr*» est démontré par le moyen d'*Éléments* II.5–6, d'une manière qui diffère peu des démonstrations de Savasorda. Pourtant, il se peut aussi que Savasorda ou son prédécesseur ait simplement refaçonné les procédures «naïves» traditionnelles (et encore connues au moins d'al-Khwarizmi) en style euclidien – ceci n'offrirait pas de grande difficulté, comme le montre une comparaison entre la Figure 2 et la démonstration d'*Éléments* II.6 (voir aussi ci-dessous). Il est donc possible mais pas sûr que les démonstrations géométriques de Savasorda descendent en ligne assez directe des procédures qui, par tradition, étaient liées aux problèmes de «l'algèbre d'arpenteur».

Le *Pratica geometrie* [éd. Boncompagni 1862:1–224] de Léonard de Pise date de 1220, et exploite un grand nombre de sources. Comme l'a noté Curtze dans ses notes à Savasorda, le *Liber embadorum* appartient à leur nombre; ceci est démontré clairement aussi bien par la structure totale de l'ouvrage que par l'emprunt de phrases distinctives. Néanmoins, une grande partie des caractéristiques que Curtze croyait empruntées dérivent par contre de sources communes.

Ceci vaut en particulier pour les problèmes qui nous intéressent ici. Comme l'observait Curtze, les §§8–12 de Savasorda se retrouvent dans la *Pratica*. Leur ordre est dissemblable, pourtant, comme le sont certains paramètres numériques ($^{+n}$ compte les lignes d'en haut de la page, $^{-n}$ d'en bas):

p. 58^{+6}	$s=10$: d?
p. 58^{-3}	$d=\sqrt{200}$: s?
p. 59^{+5}	$Q+4s=140$: Q? s?
p. 59^{-15}	$Q-4s=77$: Q? s?
p. 60^{+10}	$4s-Q=3$: s_u? (avec la solution double).

Les termes du texte, en plus, sont toutes différentes, même si Léonard emploie sans gêne les mots d'une source qu'il exploite (voir un exemple ci-dessous). Finalement, sur plusieurs points où Léonard s'écarte de Savasorda, il suit simplement la tradition comme nous l'avons rencontrée chez Abu Bakr. Comme le fait celui-ci (dans la traduction gérardienne), Léonard parle des *quatuor eius latera* là où Savasorda soustrait *omnium suorum laterum in unam* *summan collectum*– et comme c'est le cas dans le *Liber mensurationum*, $Q+_4s = 140$ possède la solution $s= 10$[19] .

Il n'y a aucun doute que Léonard avait accès à la traduction gérardienne d'Abu Bakr. Il suffit de comparer le N° 38 de ce dernier (voir ci-dessus) avec le problème correspondant de Léonard (p. 66^{-13ff}). Les mots de l'énoncé sont différents, mais, à partir du point où commence la solution, Léonard imite le texte gérardien avec la seule variation que les nombres sont considérés comme des pluriels grammaticales, ce qui a des conséquences pour les formes verbales (*provenient* au lieu de *proveniet*, etc.) et les pronoms. A la fin, Léonard ajoute le commencement d'une solution algébrique:

> Pose le plus petit côté comme une Chose, en conséquence le plus grand côté sera une Chose et 2 dragmes. De la multiplication de ce côté plus court par le plus long arrive la surface. Pour cette raison, multiplie la Chose, ce qui veut dire le côté plus petit, par une chose et deux dragmes, et tu auras un Avoir et deux Racines pour la surface. Si s'y ajoutent les deux côtés, ce qui veut dire 2 Racines et 2 dragmes, il y aura un Avoir et 4 Racines et 2 dragmes, qui seront égalés à 62 dragmes. Enlève alors des deux parties 2 dragmes, et un Avoir et 4 Racines resteront, qui seront égalés à 60, etc.

Évidemment, Léonard a vu que quelque chose ne marche pas dans la solution donnée par Abu Bakr. Ne voulant rien changer dans le texte hérité, il y ajoute une autre méthode – mais il s'interrompt juste au point où le prochain pas démontrerait le premier des illogismes, probablement parce qu'il voit l'embarras mais ne sait pas comment le surmonter, ne devinant pas le procédé géométrique qui le produit.

En d'autres points, Léonard donne des preuves géométriques, par exemple quand il résout «les quatre côtés et l'aire» (p. 59^{-5ff}):

> Et si la surface et ses quatre côtés font 140: et tu veux séparer les côtés de la surface. Soit un carré *ezit*, et qu'y soit ajouté une étendue rectangulaire *ae*. E qu'*ai* prolonge la droite *it* et *be* la droite *ez*. Et que chacun des droites *be* et *ai* soit 4, à cause du nombre des côtés du carré. Pour cette raison, l'étendue *ae* sera égalée aux quatre côtés du quadrilatère *et*, puisque l'un de ces côtés *ei* est l'un des côtés de l'étendue *ae*. En effet, l'étendue *et* contient la surface du carré *zi*, mais [non] ses quatre côtés. Alors l'étendue *za* est 140. Et ceci est ce que nous avons dit, à dire l'Avoir avec 4 Racines seront égalés à 140; et l'Avoir est le carré *et*, et ses 4 Racines sont l'étendue *ae*. En effet, la droite *ai* est divisée en deux parties égales sur le point *g*. Et puisque la ligne *ti* est ajoutée à la ligne *ai*, l'étendue rectangulaire contenue par *it* et *at*, avec le carré sur la ligne *gi*, égale le carré

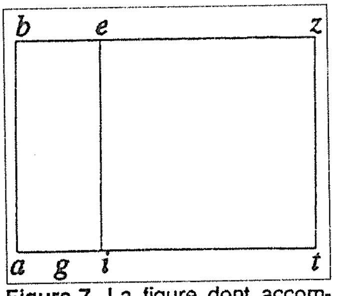


Figure 7. La figure dont accompagne Léonard son traitement des «quatre côtés et l'aire».

---

19 Le problème $Q-_4s=77$, en outre, semble dériver par «cascade inverse» (voir note 13) du problème $Q=_4s=77$ trouvé chez Savasorda. Puisqu'il n'y a aucune indication que Léonard ait pensé à cette liaison de cascade entre équations, il semble qu'il ait exploité ici une source qui n'est ni Savasorda ni Abu Bakr/Gérard.

sur la ligne *gt*. Mais l'étendue contenue par *it* et *at* est comme l'étendue contenue par *zt* et *at*, puisque *it* est égal à *tz*. Alors l'étendue contenue par *zt* et *at* avec le carré sur la ligne *gi* estégalée au carré sur la ligne *gt*. Mais [l'étendue contenue par] *zt* et *at* est l'étendue *za*, qui est 140. Ce qui, quand le carré sur la ligne *gi*, c'est-à-dire 4, y est ajouté, donne 144 pour le carré sur la ligne *gt*. Pour cette raison, *gt* est 12, c'est-à-dire la racine de 144. Pour cette raison, si de *gt gi* est retranché, c'est-à-dire 2, restera *it* [égal à] 10, ce qui est le côté du carré *et*. Si l'on ajoute à la surface de celui-ci, c'est-à-dire à 100, ses quatre côtés, qui sont 40, on aura 140, comme il se doit. Et on agit comme ceci dans tous les problèmes où un nombre est égalé à un carré et des Racines ensemble, à dire, au nombre on ajoute le carré de la moitié des Racines, et la racine de la somme est trouvée; de celle-là on enlève la moitié des dites Racines, et la Racine de l'Avoir demandé restera; qui, si on le multiplie par lui-même, produit l'Avoir. Par exemple: 133 dragmes sont égalés à un Avoir et 12 Racines. Pour cette raison, si nous ajoutons le carré de la moitié des Racines, c'est-à-dire 36, à 133, cela fera 169. Quand on a éliminé 6, c'est-à-dire la moitié des Racines, de sa racine, c'est-à-dire de 13, 7 restent comme Racine de l'Avoir demandé; et l'Avoir sera 49.

La démonstration géométrique est similaire à celle de Savasorda (et de Thabit), et permet donc les mêmes conclusions. Le fait que Léonard n'a pas su réparer le N° 38 d'Abu Bakr suggère, en outre, que Léonard au moins n'ait plus eu aucun accès direct à la vieille tradition «naïve» mais seulement à la version passée par le filtre euclidien. Il est aussi caractéristique que Léonard donne seulement une solution algébrique pour «les quatre côtés et l'aire rectangulaire» – là où les procédures «naïves» étaient particulièrement visibles dans les phrases explicatives d'Abu Bakr (son N° 43).

Que Léonard ne connaisse que la version filtrée irait de soi s'il n'avait eu d'autres sources qu'Abu Bakr/Gérard et Savasorda. Mais comme nous l'avons déjà vu, ces deux ouvrages ne doivent pas épuiser la liste. Ceci est encore suggéré par le substitut léonardien du N° 14 d'Abu Bakr, qui était ou corrompu, ou intentionnellement opaque (voir note 12). Il est très peu probable que ce substitut soit fabriqué par Léonard – d'une part, parce que celui-ci était trop systématique pour introduire un problème mixte au milieu d'un groupe de problèmes ${}_4s= \propto Q$, d'autre part, parce que dans le substitut les côtés précèdent l'aire (comme dans la tradition), tandis qu'ailleurs Léonard à normalisé l'ordre des membres.

Somme toute, Savasorda, Gérard et Léonard ont donc connu au moins trois descendants différents de la tradition quasi-algébrique porteuse du problème des «quatre côtés et l'aire» (comme nous allons voir, Luca Pacioli semble avoir eu encore un contact). Tous ces descendants paraissent pourtant avoir perdu la connaissance directe des méthodes «naïves» séculaires, les filtrant ou les remplaçant par des renvois aux *Éléments* là où cela était possible, et transmettant les solutions dont une telle euclidisation n'était pas possible (comme les N^{os} 38 et 43 d'Abu Bakr) en forme purement algorithmique[20].

La transformation de la tradition durant les siècles qui séparent al-Khwarizmi de Savasorda et Léonard, ainsi que son assimilation à la tradition d'*al-jabr*– de son côté de plus en plus géométrisée – est encore démontrée par d'autres aspects du texte léonardien. Pour Abu Bakr, nous nous en souvenons, la méthode de base et la méthode d'*al-jabr* étaient clairement distinctes, et il prenait grand soin d'expliquer que l'Avoir représentait l'aire du carré (etc.). Savasorda ne parlait pas du tout d'algèbre, mais puisqu'il écrit pour un public qui ne connaissait pas cet art (les communautés juives de Provence), cela ne prouve rien. Léonard, pourtant, abolit toute démarcation; ceci est déjà manifeste dans la dernière citation, mais encore plus évident

20 Il n'est pourtant pas tout à fait exclu que Léonard ait emprunté des procédés géométriques traditionnels pour la solution de certains problèmes complexes impliquant la diagonale d'un rectangle (par exemple, $l_1+l_2+d= 24$, $A= 48$, [éd. Boncompagni 1862:68]). Mais il a aussi pu les dériver lui-même de la procédure numérique.

dans l'introduction du chapitre sur les quadrilatères (pp. 56f). Tandis qu'al-Khwarizmi [éd. Hughes 1986:233] avait expliqué que la catégorie du nombre tombe en trois espèces, les Racines, les Avoirs, et les nombres simples sans renvoi aux espèces précédentes, Léonard nous informe que les trois natures des nombres et de leurs fractions sont Racines des carrés; carrés; et nombres simples. Il n'y a aucun doute que le passage est inspiré d'al-Khwarizmi (des phrases caractéristiques sont empruntées de la traduction de Gérard); ni de doute, pourtant, que Léonard ne fait aucune distinction entre les grandeurs géométriques et les nombres utilisés en algèbre.

Les textes de Savasorda et Léonard démontrent donc, d'un côté, que la tradition qui avait transmis «les quatre côtés et l'aire» depuis l'âge de bronze était encore présente à leur époque; mais de l'autre, qu'elle avait été réduite en simulacre ou fantôme. Après avoir servi al-Khwarizmi dans sa transformation de l'art d'*al-jabr* en discipline mathématique en lui procurant ses démonstrations, et après des siècles de coexistence avec une géométrie pratique toujours plus euclidisée, elle avait perdu sa raison-d'être comme technique mathématique distincte, et ne survivait que comme une collection de problèmes vénérés et «brillants».

V. Une reconstruction historique

Nous retournerons au destin ultérieur du fantôme, mais d'abord nous allons examiner ce qu'on peut apprendre sur la préhistoire de l'algèbre en suivant le problème des «quatre côtés et l'aire» et sa famille, du berceau jusqu'au moyen âge.

Une première question regarde précisément le berceau. Notre première rencontre avec le problème était dans une tablette paléo-babylonienne, la deuxième dans un manuel arabe de mesurage, avec une résurgence dans *l'Algèbre* d'al-Khwarizmi. Est-il probable qu'un problème créé à l'intérieur de l'école des scribes mais imitant la forme d'un vrai problème d'arpentage aurait été embrassé par les arpenteurs et transmis par eux, avec une gamme restreinte de problèmes similaires en forme d'une «algèbre d'arpenteur», tandis que le tronc principal de l'algèbre d'école restât propriété exclusive de l'école des scribes et périt avec elle? Ou serait-ce que les emprunteurs fussent les savants d'école?

La question est une variante d'une question centrale des études folkloriques: Les contes populaires sont-ils *gesunkenes Kulturgut* comme souvent revendiqué au 19$^{\text{ème}}$ siècle, les décombres de mythologies décomposées ou des reflets de la haute littérature – ou les mythes empruntent-ils (parfois) leurs motifs aux contes populaires? En ultime conséquence: la culture vraie est-elle produite par les prophètes, les prêtres et les savants, et la culture «basse» des autres est-elle donc toujours dérivée, plus ou moins mal comprise et défective?

Plusieurs arguments s'opposent à l'idée d'une origine scolaire, et favorisent donc une origine parmi les géomètres-praticiens.

D'abord il y a la solution du problème. Chez Aba Bakr et Léonard, le côté est 10. Dans la version paléo-babylonienne, elle l'est aussi – mais *10 minutes*. 10, évidemment, est un choix «naturel» dans une culture utilisant une numération décimale. 10´ ne l'est pas, ni *a priori* ni selon les tablettes babyloniennes. Pour les mathématiciens-scribes, en effet, 10 dans n'importe quel ordre de grandeur (y compris 10°) serait une longueur tout à fait inusitée. Il est hautement improbable que le problème ait été créé à partir de cette solution «contre nature», et alors adopté par des praticiens qui, par hasard, auraient pu corriger les 10´ (qu'ils aurait conçu comme $^1/_6$) et obtenir la valeur «naturelle» 10. Les mathématiciens-scribes, par contre, s'ils avaient emprunté un problème basé sur la valeur 10, auraient facilement eu l'idée de le mettre dans l'ordre favori des textes «algébriques» – c'est-à-dire dans l'ordre des minutes (qui est aussi l'ordre préféré dans la tablette où se trouve notre problème).

Il y a aussi le thème et le caractère général du problème. Comme déjà dit, la collision incongrue du sens concret (*les* quatre côtés) et du non-sens (quel praticien connut jamais la somme des côtés et de l'aire sans les connaître séparément?) doit nous faire penser à une énigme plutôt qu'à un problème mathématique ordinaire. D'habitude, de telles énigmes mathématiques sont classifiées comme des «récréations mathématiques». A l'époque pré-moderne, elles furent transmises par les entourages des praticiens mathématiques, et à leur usage, comme le dit Savasorda, «pour que, avec l'assistance divine, tu puisses te montrer un calculateur fin et alerte en les résolvant». Ou, comme le dit un problème pris d'une collection carolingienne (je cite le texte complet [21]):

> Un paterfamilias avait d'une maison à l'autre une distance de 30 lieux, et un chameau qui devait porter d'une maison à l'autre 90 mesures de grain en trois tours. Pour chaque lieu le chameau mangeait 1 mesure. *Que celui qui vaille quelque chose dise*, combien de mesures sont restées?

En d'autres mots: ces problèmes qui, selon leur forme, appartiennent au domaine des praticiens (domaine des arpenteurs, ou domaine des marchands de caravane, selon le cas), mais qui sont plus complexes ou plus bizarres que les problèmes rencontrés dans la pratique de tous les jours, servent á entraîner l'agilité mentale et à caresser la fierté professionnelle des membres du métier[22] – d'où le terme «brillant» dont se sert al-Khwārizmi pour caractériser la partie inutile d'*al-jabr*. Sans exception, ils comportent quelque chose de frappant: à moins qu'on ait recours à un artifice malin (un double arrêt intermédiaire après 20 lieux suivi chacun d'un retour), le chameau mangera exactement *tout* le grain. Dans un autre problème répandu, 100 unités monétaires achèteront *exactement* 100 animaux. Les dédoublements répétés vont jusqu'à 30 ou 64, parce que cela s'accorde avec les jours du mois ou le nombre des cases d'un damier de jeu[23]

Le thème – les côtés vrais d'un champ apparemment réel; le renvoi précisément à *tous* les côtés; la solution au moyen d'un stratagème doublement rusé (quadripartition et complétion quadratique): tout indique que le problème des «quatre côtés et l'aire» fut conçu dans un entourage non-scolaire de géomètres-praticiens, et non pas dans l'école des scribes.

Une troisième observation nous permet de localiser hypothétiquement cet entourage dans le temps et l'espace. La fin du chapitre III affirmait qu'il y a un haut degré de concordance d'ordre rhétorique entre le texte d'Abū Bakr et le corpus paléo-babylonien, tout en promettant de retourner à une divergence partielle. Celle-ci regarde le «quelqu'un» qui énonce les problèmes du *Liber mensurationum* (au parfait, première personne singulier). Les textes normaux paléo-babyloniens, pour leur part, commencent directement avec l'énoncé, ce qui suggère que c'est le maître qui parle. Un seul groupe de textes, pourtant, commence comme Abu Bakr, «Si quelqu'un t'a interrogé:...». Ces textes, publiés par Baqir [1951; 1962] et datés au commencement du 18ème siècle, viennent de Tell Harmal et Tell Dhiba'i, deux localités du royaume d'Eșnunna. Enunna fut un foyer pour la création d'une culture littéraire akkadienne, et peut-être le premier foyer. Déjà au 19ème siècle, Eșnunna produit le premier code légal écrit en akkadien (les précédents étaient tous en Sumérien), au moins un demi-siècle en avance sur Hammurapi. Puisque «l'algèbre» est un genre akkadien, apparemment sans antécédent Sumérien, Esnunna pourrait donc bien être le lieu où les récréations mathématiques des géomètres-praticiens ont été empruntées par les scribes savants et introduites dans le curriculum de l'école.

---

21 *Propositiones ad acuendos iuvenes*, problème 52, version II (éd. Folkerts 1978:74). Italiques JH.

22 Ce lien entre les «récréations mathématiques» et les métiers pratiques est un thème primordial de [Horup 1990a]. C'est cette fonction sociale et non vraiment pratique qui me fait parler d'algèbre «d'arpenteur» et non «d'arpentage»; en effet, elle ne sert à rien dans l'arpentage.

23 Il y a deux raisons pour cela. D'abord, la qualité d'une énigme est toujours augmentée si elle est frappante. De plus, si les paramètres d'un problème ne sont pas marquants, il y a de bonnes chances qu'ils changeront durant la transmission orale ou semi-orale. Une fois que quelqu'un a choisi une valeur remarquable, elle est susceptible d'être mémorisée et transmise – augmente la valeur de l'énigme.
Les énigmes mathématiques, si par hasard non pas nées frappantes, sont susceptibles de le devenir par une sortede loi d'attraction – ou d'être oubliées.

Une origine akkadienne va bien avec le côté de notre champ. L'akkadien, en effet, est une langue sémitique comme est l'arabe, et comme l'est la langue intermédiaire probable, l'araméen. Tous les trois utilisent donc le même système de numération décimale. Elle convient aussi au nom donné (dans un texte datant de la fin de l'époque paléo-babylonienne) à la complétion quadratique; elle cadre avec l'observation que les scribes paléo-akkadiens du 22ème siècle ont déjà dû faire usage de l'identité «algébraico-géométrique» $\square\,(R-r) = \square\,(R) - 2 \sqsubset\!\sqsupset\,(R,r) + \square\,(r)$; et elle s'accorde avec la présence d'une tablette avec une bissection d'un losange (un autre problème transmis par notre tradition) dans un temple paléo-akkadien[24] . Il apparaît que déjà l'école paléo-akkadienne avait adopté le savoir récréationnel des arpenteurs akkadiens, mais que l'école strictement utilitaire de l'époque néo-Sumérienne (21ème siècle) ne la transmit pas. Puisqu'il n'y a aucune trace «d'algèbre» de deuxième degré dans les textes paléo-akkadiens, il semble aussi que le stratagème de la complétion quadratique (la «méthode akkadienne») n'ait été découverte qu'entre 2100 et 1800 avant J.-C.

Puisqu'il y a une parenté indéniable entre la tradition d'«algèbre d'arpenteur» et «l'algèbre» de l'école des scribes en général, et puisque la première ne dérive pas de la dernière, il semble que la dernière discipline doive son origine – et non seulement une poignée de problèmes spéciaux – à une inspiration empruntée aux arpenteurs (peut-être à l'occasion d'un effort de scolariser le métier de pratique mathématique) qui depuis, sous l'influence du milieu scolaire et de cette prédilection pour l'ordre systématique qui caractérisait l'école babylonienne encore plus que les autres écoles, s'est développée et transformée de fond en comble. De cette façon la complétion quadratique, une fois rien qu'une ruse inattendue comparable à l'arrêt du chameau, devenait la pierre d'assise de l'édifice si prodigieux de l'«algèbre» babylonienne. Toute idée que la diagonale d'un carré 10x10 serait 14 aura été éliminée par les calculateurs accomplis de l'école.

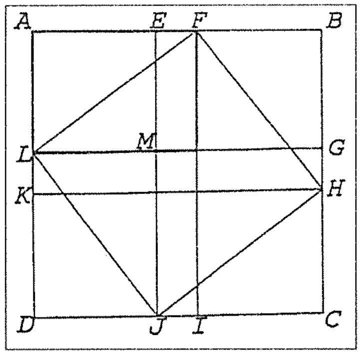


Figure 8. La démonstration «naïve» que $d^2 \pm 2A = (l_1 \pm l_2)^2$ dans un rectangle.

Si l'on fait la liste des problèmes qui se trouvent, et dans le corpus paléo-babylonien et chez Abu Bakr (ou dans des sources post-babyloniennes comparables), on aura du même coup un inventaire des énigmes qu'ont dû connaître les arpenteurs au commencement du deuxième millénaire[25] .

Pour les carrés, $s+Q=\propto$ et$4s+Q=\beta(\propto=110, \beta=140)$ vraisemblablement aussi $Q-s=\gamma$, $Q-{}_4s=\delta$ et ${}_4s-Q=\varepsilon$, ainsi que des questions sur la diagonale quand le côté est connu (qui pourtant n'ont pas pu survivre à la transplantation au milieu scolaire).Pour les rectangles $A=\propto, l_1 \pm l_2=\beta; A+(L_1 \pm l_2)=\propto, l_1 \mp l_2=\beta$(et probablement les mêmes problèmes concernant $2l_1$ et $2l_2$, c'est-à-dire *ous les côtés*); et $A=\alpha$, $d=$ ß. Ce dernier problème est d'un intérêt

24 Voir [HØyrup 1990:326]; [Whiting 1984:65f] et [Fiberg 1990:541].

25 I n'est pas tout à fait à exclure que quelques-uns des problèmes aient fait la route inverse et aient été transmis par la tradition des arpenteurs après avoir été inventés dans l'école; néanmoins, l'homogénéité du groupe parle contre cette hypothèse.

particulier. Il se trouve dans une des tablettes d'Eš̌nunna, celle de Tell Dhibaʾi [éd. Baqir 1962], où il est résolu exactement comme dans le §18 de Savasorda (voir Figure 8): le carré de la diagonale donne l'aire *FHJL;* après la soustraction du double de l'aire reste le carré sur la différence des côtés; ainsi, l'extraction de sa racine carrée (Babylonien: de ce qui «fait qu'il soit équilatéral») livre la différence des côtés. Nous avons donc un problème bien connu, un rectangle dont l'aire et la différence des côtés sont connues, et il est résolu comme dans la Figure 2.

Abu Bakr, comme plus tard Léonard, choisit la route complémentaire, réduisant la question à un autre problème familier: par addition du double de l'aire au carré sur la diagonale, la somme des côtés est trouvée, etc.

Finalement il y a quatre problèmes traitant de deux carrés, dont le plus petit est conçu comme encastré concentriquement dans l'autre: $Q_1+Q_2= \propto$, $s_1 \pm s_2=$ ß; et $Q_1-Q_2= \propto$, $s_1 \pm s_2=$ ß[26].

A partir de ce commencement assez modeste, l'école des scribes crea une discipline complexe, qui pourtant disparut avec l'institution scolaire elle-même à la fin de l'époque paléo-babylonienne, c'est-à-dire après 1600 avant J.-C. C'est seulement durant l'époque tardive, en particulier à l'ère séleucide (après 300 avant J.-C.), qu'un certain intérêt «algébrique» fait surface de nouveau.

Il n'y a pas de doute qu'une certaine continuité relie la pensée mathématique de cette époque tardive à celle de l'école paléo-babylonienne. Quelques particularités de la terminologie montrent pourtant que la profession des scribes n'a pas été (ou du moins pas seule) responsable de cette transmission en ce qui concerne l'algèbre, et qu'une nouvelle adoption de matériaux de la tradition des arpenteurs s'était produite entre-temps.

Entre-temps aussi, cette tradition elle-même avait innové (peut-être emprunté, mais d'où n'est pas clair du tout). La seule tablette séleucide qui comporte toute une gamme de problèmes de deuxième degré (BM 34568, [éd. MKT III, 14–17]) a l'air d'une présentation systématique de nouvelles méthodes et de nouveaux problèmes. Tous les problèmes, sauf deux, traitent de rectangles, nous donnant les combinaisons suivantes des côtés, l'aire et la diagonale: l_1 et l_2; l_1 et d; l_1+d et l_2; l_1+l_2 et A; l_1+l_2 et d; l_1+d et l_2; l_1+d et l_2+d; l_1+l_2+d et A (puisqu'on cherche tantôt l'aire, tantôt la diagonale, etc., cela donne 17 problèmes au total). Les deux premières combinaisons sont trop simples pour se trouver telles quelles dans les tablettes paléo-babyloniennes; la quatrième, un des problèmes-standard auxquels les autres étaient réduits, donne lieu à un nouveau procédé[27]. Le reste est tout à fait nouveau. Avec une seule exception, tous les problèmes se retrouvent dans le *Liber mensurationum*. En plus, l'exception (l_1+det l_2+d donnés) n'en est vraiment pas une, puisqu'Abu Bakr réduit son N° 36 (l_1+d et l_1-l_2 donnés) au problème séleucide et le résout de la même manière.

Il semble significatif que le seul problème rectangulaire complexe parlant d'une diagonale attesté dans le corpus paléo-babylonien ($A= \propto$, $d=$ ß, voir Figure 8) est absent de l'anthologie séleucide. Également significatif est l'un des deux problèmes qui ne traitent pas d'un rectangle, celui qui s'intéresse à un roseau appuyé obliquement sur un mur. Il est équivalent au problème rectangulaire $d-l_1= \propto$, $l_2=$ ß (N° 31 du *Liber mensurationum*). Rien de mathématiquement comparable se retrouve dans les vieilles tablettes. *Le roseau obliquement appuyé*, pourtant, est une vieille connaissance – mais couvrant originellement le problème bien plus simple $d= \alpha$, $l_1= \propto -$ß.

---

26 1 n'est généralement pas connu que les problèmes Q*1*_Q2= , s*1* s2= ß ont été traité par les Babyloniens; mais voir Texte V, col. III (non traduit) dans [Bruins & Rutten 1961:46].

27 1*1*_12*1*2= [1*1*+12*A*Ò 4*A*, l_2= 30´.{[l_1+l_2]–[l_1-l_2]}, là où les textes paléo-babyloniens utiliseraient toujours le moyen $^1/_2[l_1+l_2]$ et la déviation des deux côtés du moyen $^1/_2[l_1-l_2]$.

Donc, si la tablette séleucide est un catalogue de nouveaux problèmes et approches, le problème du roseau a pu servir comme démonstration que ce vin jeune et pétillant pouvait être mis dans une vieille bouteille vénérée – ce qui ne pourrait qu'exalter la valeur des deux. Quoi qu'il en soit, et contrairement à l'opinion généralement acceptée, la tablette démontre (sur d'autres niveaux encore que nous ne discuterons pas ici) une transformation assez radicale de «l'algèbre» babylonienne, en dépit de la continuité apparente de certains traits.

Non moins contraire à certaines vues courantes, mais de façon opposée, est la perspective qu'ouvre l'analyse sur le livre II des *Eléments* d'Euclide. Pour faciliter la discussion, une traduction des premières 10 propositions en symboles peut être utile, bien qu'une telle traduction est toujours un peu arbitraire (voir par exemple les deux traductions de la proposition 7 données ci-dessous):

1. $\sqsubset\!\sqsupset(a,p,+q+\ldots+t) = \sqsubset\!\sqsupset(a,p) + \sqsubset\!\sqsupset(a,q) + \ldots + \sqsubset\!\sqsupset(a,t)$.
2. $\square(a) = \sqsubset\!\sqsupset(a,p) + \sqsubset\!\sqsupset(a,a\text{-}p)$.
3. $\sqsubset\!\sqsupset(a,a+p) = \square(a) + \sqsubset\!\sqsupset(a,p)$.
4. $\square(a+b) = \square(a) + \square(b) + 2\sqsubset\!\sqsupset(a,b)$.
5. $\sqsubset\!\sqsupset(a,b) + \square(\frac{a-b}{2}) = \square(\frac{a+b}{2})$.
6. $\sqsubset\!\sqsupset(a,a+p) + \square(\frac{p}{2}) = \square\, a+\frac{p}{2})$.
7. $\square(a+p) + \square(a) = 2\sqsubset\!\sqsupset(a+p,a) + \square(p)$; ou bien $\square(a) + \square(b) = 2\sqsubset\!\sqsupset(a,b) + \square(a-b)$.
8. $4\sqsubset\!\sqsupset(a,p) + \square(a-p) = \square(a+p)$.
9. $\square(a) + \square(b) = 2[\square(\frac{a+b}{2}) + \square(\frac{b-a}{2})]$.
10. $\square(a) + \square(a+p) = 2[\square(\frac{p}{2}) + \square(a+\frac{p}{2})]$.

On voit que la proposition 6 coïncide avec proposition 5 si l'on met $b= a+p$. La proposition 5 correspond pourtant à la situation où la somme des deux côtés d'un rectangle est connue (comme c'est aussi le cas dans la proposition 9, a et b résultent d'une partition d'une ligne en segments inégaux); l'une prolonge donc l'autre dans la figure de la démonstrations; la proposition 6, par contre, est adaptée à la situation où la différence des deux côtés est donnée, et dessine donc les deux segments en superposition. La relation mutuelle entre les propositions 9 et 10 est la même, tandis que celle entre les propositions 4 et 7 est légèrement différente.

Mettant de côté pour un moment les propositions 1–3, les autres peuvent tous être vues comme des «critiques» (quasi-Kantiennes) des procédés coutumiers de «l'algèbre d'arpenteur». La proposition 4, entre autre, est utilisée par Léonard quand il trouve la somme des deux côtés d'un rectangle à partir de l'aire et la diagonale, tandis qu'Abu Bakr présuppose son contenu; la proposition 7 joue les mêmes rôles pour Savasorda et le texte de Tell Dhibaʾi quand ils trouvent leur différence[28]. La proposition 6 expose la solution des problèmes $Q\pm\alpha s=\beta$, y compris «les quatre côtés et l'aire», et $A=\alpha, l_1-l_2=\beta$ (et Léonard la cite dans ces occasions). De même, la proposition 5 explique la solution des problèmes $A=\alpha, l_1-l_2=\beta$ et $\alpha s-Q=\beta$. La proposition 7, outre l'usage qu'en fait Savasorda, exprime précisément la règle apparemment présupposée dans un texte scolaire paléo-Akkadien. La proposition 8 ne regarde directement aucun des problèmes que nous avons discutés jusqu'ici; mais elle peut être liée à la configuration des

---

28 Il faut peut-être souligner que l'emploi de propositions des *Éléments* par Savasorda et Léonard ne signifie pas nécessairement que ses mêmes propositions était utilisées dans la tradition de «l'algèbre d'arpenteur» dans exactement la même forme, seulement qu'ils étaient encore si proches à la tradition qu'ils pouvaient servir dans la même fonction.

«quatre côtés et l'aire» (montrant que si l'on ajoute au carré ❑ (s) ses quatre côtés, on n'obtient pas le carré ❑ (s+2); ce qu'il faut ajouter, ce sont les côtés du «carré moyen» ❑ (s+1)); ou elle peut être associée à la configuration d'un carré inscrit concentriquement dans un autre, déjà signalée. Les propositions 9 et 10 enfin enseignent la solution des problèmes $Q_1+Q_2= \alpha$, $s_1 \pm s_2=$ ß. Ni elles, ni la proposition 8 ne sont jamais citées dans les *Éléments*[29].

Les démonstrations des propositions 9 et 10 sont de type évidemment «grec» et synthétique. Toutes les autres, pourtant, tombent en deux sections, dont la deuxième est en essence une procédure de découpage et de rassemblement, tandis que la première explique *pourquoi* les carrés sont vraiment des carrés, pourquoi les aires supposées égales le sont vraiment, etc. Le rôle de la première section est donc de prendre soin que la deuxième ne soit pas «naïve».

La fonction des propositions 1–3 est comparable. La proposition 1 est une «critique générale de la raison d'arpentage» qui autorise le découpage et le rassemblement des rectangles. Les propositions 2 et 3 appliquent cette connaissance à la situation où des côtés (pourvus d'un forjet, il va de soi) sont enlevés d'un carré ou y sont ajoutés.

Éléments II.1–10 est donc dans son ensemble, la conclusion est à peu près inéluctable, intimement lié à «l'algèbre de découpage et de rassemblement» des arpenteurs, et lié précisément comme critique. Lié, on constate encore, au groupe des problèmes remontant à l'époque paléo-babylonienne. Il n'y à aucune trace des «nouveaux» problèmes de la tablette séleucide.

Il y a de bonnes raisons de croire que le genre de géométrie des aires que représente *Éléments* II s'est développé au cinquième siècle au cours d'investigations théoriques inspirées par la géométrie et «l'algèbre» des arpenteurs[30]. En conséquence il faut croire aussi que les problèmes «nouveaux» de la tradition des arpenteurs ont été inventés ou sont arrivés au monde méditerranéen entre 500 avant J.-C. et 250 avant J.-C. Ont peut penser, ou aux contacts résultant des conquêtes d'Alexandre, ou aux communications culturelles le long de la Route de Soie[31].

Même le petit groupe de problèmes du deuxième degré du livre I de l'*Arithmetica* de Diophante se restreint à ce qui à dû appartenir au stock originel de «l'algèbre d'arpenteur» (mais ne couvre pas tout l'essentiel, comme le fait Euclide, et le traduit naturellement en langage numérique): $A= \alpha$, $l_1 \pm l_2=$ ß (propositions 27 et 30); $Q_1 \pm Q_2= \alpha$, $s_1+s_2=$ ß (propositions 28 et 29).

La prochaine fois que «l'algèbre d'arpenteur» apparaissait dans les sources était à l'occasion de sa rencontre avec la tradition d'*al-jabr*, dans le manuel d'Abu Bakr et quand al-Khwarizmi

A l'époque de Léonard, ce qui restait de cette moitié d'algèbre était donc réduit à l'état de fantôme. Mais comme le fantôme de la télévision qui– à en croire son alter ego Jean Ferrat–

---

[29] A vrai dire, la proposition 9 est citée une fois, mais dans un lemme qui semble être interpolé. Comme l'explique Ian Mueller [1981:301], les propositions 8 et 10 *auraient* pu être citées de manière analogue, comme justifications de présuppositions non prouvées. Il semble pourtant que la sorte de savoir qu'elles expriment était trop familier pour être cité explicitement, une fois que son exactitude était démontrée.

[30] Argument et références bibliographiques (en particulier aux travaux de Wilbur Knorr) dans [Høyrup 1990b].

[31] Puisque les problèmes de deuxième degré qui se trouvent dans les *Neuf Chapitres sur l'arithmétique* chinois (premier siècle de l'ère chrétienne) sont du genre de ces nouveaux problèmes, et puisqu'un d'eux est indubitablement emprunté (le roseau obliquement appuyé), les conquêtes ne peuvent à peine être tenues comme seules responsables.

survécut à vingt directeurs, celui-ci avait la vie dure. Dans la partie géométrique de son *Summa de arithmetica*, Luca Pacioli déclare que

> bien que nous ayons parlé assez abondamment sur la règle d'algèbre dans la partie traitant l'arithmétique, il faut encore en parler ici.[32]

Ce qu'il faut dire est exactement ce que dit Léonard dans la *Pratica* sur «l'algèbre d'arpenteur». Mais même si Luca suit en général le texte léonardien si fidèlement qu'on peut utiliser la *Pratica geometrie* pour corriger les erreurs typographiques de la *Summa*, il y a des exceptions. D'abord, Luca retourne à la tradition et parle des «quatre côtés et l'aire», là où Léonard, comme nous l'avons vu, avait inverti l'ordre des membres. En plus, là ou Léonard avait suivi le N° 38 d'Abu Bakr sans le corriger, Luca trouve l'aire du carré complémentaire comme «le carré sur la moitié du nombre des côtés», sans pour autant redresser l'autre erreur. La première déviation s'expliquerait si Luca avait eu accès à la traduction gérardienne, et la deuxième comme le résultat possible d'une reconstruction à partir du calcul algébrique — si seulement l'autre erreur avait aussi été corrigée. Prises ensemble et eu égard à l'absence de la deuxième correction, pourtant, les déviations de Luca ne s'expliquent que par l'emploi d'une autre source, inconnue à nous et liée directement à la tradition mathématique arabe.

L'ultime apparition, sinon du fantôme du moins de son ombre, semble être dans le *Libro de algebra en arithmetica y geometria* de Pedro Nunez [1567]. Le chapitre 7 de la troisième partie de cet ouvrage porte le titre «Sur la pratique de l'algèbre dans les cas et exemples de géométrie, et d'abord sur les carrés». Il est évident que Nunez s'appuie sur Luca, comme il le dit aussi dans l'épilogue. Selon le système de traduction que nous avons employé jusqu'ici, les exemples sur les carrés sont les suivants:

1. $s=3$: Q?
2. $Q=\propto$: s?
3. $s=3$: d?
4. $d=6$: s?
5. $d+s=6$: d? s?
6. $d.s=10$: d? s?
7. $d-s=3$: d? s?
8. $s.(d-s)=15$: s? d?
9. $d.(d-s)=14$: s? d?
10. $s+Q=90$: s? Q?
11. $d+Q=12$: Q? s?
12. $s+d+Q=37$: s? d? Q?
13. $Q.s=10$: s? Q?
14. $d.Q=12$: s? Q?

A ce point-ci, pourtant, les traductions deviennent trompeuses. Tandis que tous les prédécesseurs posent des problèmes et montrent comment les résoudre, Nunez s'en tient au format des *Données* d'Euclide (déjà utilisé par Jordanus de Nemore dans son *De numeris datis*). Le N° 11, par exemple, déclare que «si le diamètre et l'aire pris ensemble sont connu, chacun pour soi sera connu». Alors seulement vient, au lieu de la démonstration générale d'Euclide et Jordanus, un exemple numérique. Là où les mathématiciens du Moyen âge avait transformé une collection de récréations mathématiques en discipline (en les intégrant avec la technique d'*al-jabr*), Nunez avance encore un peu, et se trouve à mi-chemin vers la création d'une *théorie* de

---

32 Citation de la deuxième édition, [Pacioli 1523:II, fol. 15^r]

l'algèbre. Pour la même raison il laisse tomber les algorithmes opaques, dernières survivances des procédures de découpage et de rassemblement – après tout, son but est de démontrer l'efficacité de l'algèbre comme outil général, «en arithmétique aussi bien qu'en géométrie», comme le déclare le titre du livre.

Mais précisément pour cette raison, une partie de ses *thèmes* sont empruntés à la tradition, tandis que les autres appartiennent visiblement au même genre tout en étant encore plus inaccessibles si l'on ne met pas à profit l'outillage algébrique. Il ne présente qu'un seul exemple de chaque espèce, et «les quatre côtés et l'aire» ont donc disparu. Pour une dernière fois, pourtant, «le côté» précède «l'aire» – comme jadis chez les arpenteurs akkadiens. Les «cas de géométrie» que Nunez présuppose connus sont donc (en partie au moins) vieux de plus de trois mille ans.

Moins de 30 ans après la parution de l'ouvrage de Nunez, Viète avait achevé la métamorphose de l'algèbre en théorie. Si l'algèbre avait encore besoin d'affichage, de nouveaux triomphes bien plus frappants étaient à portée de main. «Les quatre côtés et l'aire», comme la lignée toute entière, semblent avoir quitté entre-temps le monde si discrètement que personne ne s'en aperçut, et que personne ne se souvenait d'elles. Neugebauer [MKT III, 14], quand il rencontra la version paléo-babylonienne trois siècles plus tard, était incliné à croire à une erreur de scribe qui – par pur hasard – rimait mathématiquement.

Bibliographie

Baqir, Taha, 1951. "Some More Mathematical Texts from Tell Harmal". *Sumer* 7, 28–45.

Baqir, Taha, 1962. "Tell Dhiba'i: New Mathematical Texts". *Sumer* **18**, 11–14, pl. 1–3.

Boncompagni, Baldassare (éd.), 1862. *Scritti* di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo. Vol. II. *Practica geometriae* et *Opusculi*. Roma: Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche.

Busard, H. L. L., 1968. "L'algèbre au moyen âge: Le »Liber mensurationum« d'Abû Bekr". *Journal des Savants*, Avril–Juin 1968, 65–125.

Clagett, Marshall, 1984. *Archimedes in the Middle Ages*. Vol. V. *Quasi-Archimedean Geometry in the Thirteenth Century*. (Memoirs of the American Philosophical Society, 157 A+B). Philadelphia: The American Philosophical Society.

Curtze, Maximilian (ed.), 1902. *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance*. (Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, vol. 12–13). Leipzig: Teubner.

Folkerts, Menso, 1978. "Die älteste mathematische Aufgabensammlung in lateinischer Sprache: Die Alkuin zugeschriebenen *Propositiones ad acuendos iuvenes*. Überlieferung, Inhalt, Kritische Edition". *Österreichische Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse. Denkschriften*, 116. Band, 6. Abhandlung (Wien).

Friberg, Jöran, 1990. "Mathematik". *Reallexikon der Assyriologie und Vorderasiatischen Archäologie* VII, 531–585. Berlin & New York: de Gruyter.

Høyrup, Jens, 1986. "Al-Khwârizmî, Ibn Turk, and the Liber Mensurationum: on the Origins of Islamic Algebra". *Erdem* **2** (Ankara), 445–484.

Høyrup, Jens, 1990. "Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought". *Altorientalische Forschungen* **17**, 27–69, 262–354.

Høyrup, Jens, 1990a. "Sub-Scientific Mathematics. Observations on a Pre-Modern Phenomenon". *History of Science* **28**, 63–86.

Høyrup, Jens, 1990c. "*Dynamis*, the Babylonians, and Theaetetus 147c7—148d7". *Historia Mathematica* **17**, 201–222.

Høyrup, Jens, 1991. "`Oxford' and `Cremona': On the Relations between two Versions of al-Khwarizmi's *Algebra*". *Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetscenter*. 3. Række: *Preprints og Reprints* 1991 nr. 1. A paraître dans *Proceedings of the 3rd Maghrebian Symposium on the History of Mathematics Alger, 1–3 December 1990.*

Høyrup, Jens, 1992. "`Algèbre d'*al-gabr*' et `algèbre d'arpentage' au neuvième siècle islamique et la question de l'influence babylonienne", pp. 83–110 *in* Fr. Mawet & Ph. Talon (éds), *D'Imhotep à Copernic. Astronomie et mathématiques des origines orientales au moyen âge.* Actes du Colloque international, Université Libre de Bruxelles, 3–4 novembre 1989 (Lettres Orientales, 2). Leuven: Peeters.

Høyrup, Jens, 1993. "`Remarkable Numbers' in Old Babylonian Mathematical Texts: A Note on the Psychology of Numbers". *Journal of Near Eastern Studies* **52**, 281–286.

Hughes, Barnabas, O.F.M., 1986. "Gerard of Cremona's Translation of al-Khwarizm's *Al-Jabr*: A Critical Edition". *Mediaeval Studies* **48**, 211–263.

Levey, Martin (éd., trad.), 1966. The *Algebra* of Abu Kamil, *Kitab fi al-jabr* (sic) *wa'l-muqa bala*, in a Commentary by Mordechai Finzi. Madison etc: University of Wisconsin Press.

Libri, Guillaume, 1838. *Histoire des mathématiques en Italie.* 4 vols. Paris, 1838–1841.

Luckey, Paul, 1941. "Tabit b. Qurra über den geometrischen Richtigkeitsnachweis der Auflösung der quadratischen Gleichungen". *Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Berichte* **93**, 93–114.

MKT: O. Neugebauer, *Mathematische Keilschrift-Texte.* I–III. (Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. Abteilung A: Quellen. 3. Band, erster–dritter Teil). Berlin: Julius Springer, 1935, 1935, 1937.

Mueller, Ian, 1981. *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements.* Cambridge, Mass., & London: MIT Press.

Musarrafa, Ali Mustafa, & Muhammad Mursi Ahmad (éds), 1939. al-Khwarizmi, *Kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa'l-muqabalah.* Caïro.

Nunez, Pedro, 1567. *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria.* Anvers: En casa de los herederos d'Arnaldo Birckman.

Pacioli, Luca, 1523. *Summa de Arithmetica geometria Proportioni: et proportionalita.* Novamente impressa. Toscolano: Paganinus de Paganino.

Rosen, Frederic (éd., trad.), 1831. The *Algebra* of Muhammad ben Musa, Edited and Translated. London: The Oriental Translation Fund.

Ruska, Julius, 1917. "Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst". *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Philosophisch-historische Klasse*, Jahrgang 1917, 2. Abhandlung.

Saliba, George A., 1972. "The Meaning of al-jabr wa'l-muq•balah". *Centaurus* 17, 189–204.

Whiting, Robert M., 1984. "More Evidence for Sexagesimal Calculations in the Third Millennium B.C." *Zeitschrift für Assyriologie und Vorderasiatische Archäologie* 74, 59–66.

THEME 7

TOPIC 7

Ethnomathématiques

Ethnomathematics

EXPOSES - WORSHOPS

CONFÉRENCE - PLENARY LECTURE

Regards échangés avec les Naturels de Colombie
Conditions de l'Ethnoéducation en langues vernaculaires

André Cauty
Université BORDEAUX 1
URA 1026 CNRS (Paris)

L'essence des mathématiques
C'est la liberté.
CANTOR

1) Introduction

1.1 Héritiers d'Euclide, adorateurs de la Raison, nous, mathématiciens occidentaux, n'avons toujours pas découvert l'Amérique des autochtones[1].
Trop souvent, en effet, nous considérons encore les oeuvres indigènes comme des curiosités exotiques ; tout justes bonnes à figurer, en marge de nos manuels scolaires, au titre de simples illustrations de pratiques archaïques qui, en contraste, font ressortir nos solutions "universelles".

1.2 C'est pourquoi il nous est si difficile de comprendre l'***Ethnoéducation contre l'ethnocide*** ; ou encore que certaines organisations indigènes, par exemple en Colombie, fixent comme tout premiers objectifs à l'éducation qu'elles souhaitent développer : 1) la récupération des terres, 2) la défense de l'identité culturelle et 3) la lutte pour la survie des langues et des modes de vie indigènes.
Pour comprendre ces prises de position, il pourrait être éclairant de faire un pas de côté et regarder un instant un exemple historique qui nous est plus familier que la diffusion des Lumières en Amérique. L'exemple choisi est celui de l'Egypte hellénistique qui donna au monde la fameuse Ecole d'Alexandrie[2].

1.3 L'école d'Alexandrie est à coup sûr la plus célèbre école mathématique que l'Antiquité occidentale ait connue ; là, travaillaient nos premiers maîtres à "raisonner" : Euclide, vers 300 avant J.- C. ; Archimède (287-217) ; Eratosthène (284-192) ; Hipparque (190-125) ; etc.
Moins connues, peut-être, mais, à coup sûr éclairantes pour le problème qui nous occupe, sont les circonstances de la naissance et du développement, dans cette Ecole, du "miracle" grec de la raison scientifique.

---

[1] Descendants des tout premiers habitants d'un territoire ayant conservé, malgré les peuples venus s'approprier ce territoire, leur langue, leur culture et des modes de vie spécifiquement adaptés aux ressources de ce territoire. Communs à tous les peuples autochtones sont le sentiment irréductible de leur identité culturelle et leur tradition d'adaptation au milieu naturel. Leur drame commun est de devoir s'adapter ou disparaître, selon que les Conquérants sont plus ou moins tolérants ou intolérants. L'ONU estime les peuples autochtones à 300 millions de personnes réparties en 5000 groupes dans 70 pays.
Actuellement, la négation des peuples autochtones commence par les mots choisis pour les désigner. De nombreux pays, la Chine notamment, tentent d'imposer le terme "minorité" qui permet, en droit international, de ne leur accorder qu'un statut subordonné et dépendant. D'autres pays proposent des termes vagues et sans valeur juridique comme "population", "groupe" ou "ethnie". Le droit international évite les termes de "peuple", "nation", "état" qui impliqueraient la reconnaissance du droit à la souveraineté, selon le principe international du "droit des peuples à disposer d'eux-mêmes", et justifieraient les revendications d'autodétermination, de récupération des terres et d'indemnisation des biens spoliés ou exploités sans royalties, parfois depuis des siècles. Les Indiens de Colombie se disent *Peuples* ou *Nations*.

[2] Pour plus de détails, Cf. "Monoculture coloniale et/ou ethnoéducation contre les ethnocides", à paraître dans *Cahiers de didactique des mathématiques*, Thessalonique (Grèce).

1.4.1 En 322 avant J.- C., Alexandre le Grand enlève la vallée du Nil à Darios III, roi des Perses. L'Egypte, ainsi "libérée" des «*pratiques perses du despotisme oriental*» (BRETON, 1991), tombe sous le joug des armées grecques.
Alexandre, comme plus tard Cortés en Amérique, laisse croire qu'il est un dieu. Plus prosaïquement, il organise la colonisation de ce qui deviendra le grenier à blé des empires méditerranéens[3]. Et les ingénieurs grecs fondent et conçoivent la ville d'Alexandrie bâtie pour devenir le port d'exportation des productions coloniales de l'Egypte.

1.4.2 A la mort d'Alexandre, ses généraux attribuent l'Egypte au macédonien Ptolémée, fils de Lagos. En 306, Ptolémée se fait proclamer dieu et roi d'Egypte, fondant ainsi la dynastie des Lagides (306-30) : les Ptolémée (de I à XVI) et les Cléopâtre (de I à VII).

1.4.3 Le pouvoir absolu des Lagides s'exerce au moyen d'une administration tatillonne, au courant de tout, notant tout, mesurant tout... héritière en cela de l'administration des anciens pharaons.
Héritière aussi des connaissances des anciens scribes et autres harpédonaptes à qui, suivant l'ethnographe Hérodote (484-420), il conviendrait de reconnaître la paternité de l'invention des mathématiques[4].
Une administration qui impose à ces *barbares* la langue et la monnaie grecques. Au nom de La "*Civilisation*", celle des Conquérants qui estiment que leur défaite est la preuve que les vaincus sont, même devant leurs dieux, des inférieurs.

1.4.4 Des êtres corvéables à merci pour constituer cette catégorie humaine que l'autorité d'Aristote (précepteur d'Alexandre) a doctement et définitivement classée juste au-dessus des animaux domestiques et des monstres, très en-dessous des artisans et, a fortiori, des hommes libres et civilisés. La catégorie toujours renaissante des *esclaves*.
Une classification de l'universelle science grecque contre laquelle ne s'éleva que la protestation religieuse des Juifs de la diaspora. Comme plus tard, en Amérique, ne s'élèvera que la protestation de Bartolomé de Las Casas, le premier prêtre catholique ordonné sur la terre d'Amérique.

1.4.5 Soumis à une exploitation coloniale esclavagiste, les paysans égyptiens se réfugient dans les marais et les déserts. C'est le phénomène de l'*anakhorêsis* (**ana** 'à l'écart', **khorein** 'se retirer'), du repli vers les régions inhospitalières et à l'écart de la convoitise des colons. Plus tard, ils se révolteront.

1.5.1 Cinq siècles de progrès industriel ont rendu caduque, pour les Amérindiens, cette solution du repli pour la survie. Car il n'existe plus de territoires qui ne réveille la convoitise des Blancs ni de lieux inaccessibles à la technique industrielle.
Vu du côté indien, l'inexorable "progrès" de la science et des techniques des Blancs se décline tout autrement : négation de l'identité, dédain de la culture et des modes de vie traditionnels, interdiction des langues vernaculaires, spoliation des terres, exploitation des ressources et de la force de travail, épidémies (parfois volontairement introduites) de variole, typhus, choléra..., pollution du milieu, destruction des moyens de subsistance (les Blancs massacrent les femmes, brûlent les récoltes, décident au XIX^{e} siècle de faire disparaître les bisons, organisent au XX^{e} siècle la déforestation...), déportations massives, guerres, alcoolisme, évangélisation, endoctrinement politique...

---

[3]L'Empire romain, par exemple, en tirera jusqu'à 30 % de ses besoins en blé. De même, on peut montrer que l'Amérique des XVI^{e} et XVII^{e} siècles a largement financé la première industrialisation du nord de l'Europe (Cf. STEIN, S. and B., 1970 : *The Colonial Heritage of Latin America*, New York : Oxford University Press).

[4]De même, pour Aristote, "l'Egypte était considérée comme étant le berceau des sciences et des techniques mathématiques" (OBENGAT, T., 1993 : Aristote et l'Egypte ancienne", *Ankh, Revue d'Egyptologie et des civilisations africaines*, N° 2, Gif sur Yvette : Khepera). Pour lui, la mathématique égyptienne n'est pas née de l'arpentage, que les prêtres ne pratiquaient pas, mais de l'étude proprement dite pour laquelle les prêtres disposaient de beaucoup de temps libre.

1.5.2 En Colombie, depuis les années cinquante, certains Indiens revendiquent le départ des Blancs, s'insurgent contre la construction des routes par où arrive le flux des colons[5], refusent l'électricité, les écoles ou les postes de santé... Car ils ont appris ce qu'il advînt de ceux qui se laissèrent aller à croire en la bonté des Blancs ainsi que la dure leçon du pot de terre et du pot de fer[6].

1.5.3 Depuis les années quatre-vingt, certaines organisations indigènes dénoncent les missionnaires, notamment nord-américains, dont la présence accélère (volontairement ?) les processus de l'acculturation voire de l'ethnocide. De même, elles rejettent certaines campagnes humanitaires (santé, éducation, alphabétisation, développement...), qu'elles soient publiques, privées ou Non-Gouvernementales.
Pour l'excellente raison que les conséquences à moyen terme de ces campagnes vont souvent à l'encontre de leurs objectifs de lutte contre l'ethnocide. Pourquoi, par exemple, former un médecin indigène quand on a constaté qu'il abandonnera alors définitivement sa communauté et exercera en ville ?

1.5.4 Plus positivement, les organisations indigènes revendiquent le droit de parler leurs langues, de définir et maîtriser les processus de socialisation et d'éducation de leurs enfants, de décider de leurs modes de vie et des modalités de leur participation à l'économie nationale et internationale, aux échanges commerciaux et culturels...
Bref le droit d'articuler leur propre équilibre entre Tradition et Modernité. Le droit d'écrire leur propre histoire ; un droit qui passe, sans doute, par la reconnaissance internationale du principe des peuples autochtones à disposer d'eux-mêmes.

2) Principes de l'Ethnoéducation contre l'ethnocide

2.0 Etant donnée la très grande diversité des situations, il n'est pas facile pour un Occidental de lire le bouillonnement d'idées et de propositions émises par les représentants des organisations des diverses nations indigènes[7]. Avec les réserves que ce fait impose, voici les principaux "principes" de l'Ethnoéducation retenus par les ethnolinguistes de l'URA 1026 du CNRS ou du Centre Colombien d'Etudes des Langues Aborigènes.

2.1 Toute recherche de terrain, toute implantation de structures éducatives doivent répondre à une demande des communautés indigènes et leurs dirigeants doivent pouvoir en contrôler constamment tous les aspects, notamment les conséquences à moyen et à long termes.

2.2 La scolarisation et l'alphabétisation doivent être conçues et réalisées en langue vernaculaire. La langue indigène[8] doit être étudiée tout au long de la scolarité ; toutes les disciplines (sauf, peut-être, la langue nationale et les langues étrangères) doivent être enseignées dans cette langue.

---

[5] Un terme qui varie d'une manière révélatrice puisque l'usage français glissa de "colons" à "colonialistes" en passant par "coloniaux".

[6] *«Les Tarahumaras du nord de Mexico se révoltèrent en diverses occasions. Chaque fois ils seront décimés. Ils se retirèrent alors dans des zones inhospitalières et évitèrent le contact avec les Blancs. Leurs voisins, les courageux Apaches, les traitent alors dédaigneusement de femmelettes. Les Apaches sont exterminés. Les Tarahumaras survivent et conservent une bonne part de leur vie culturelle. S'adapter ou mourir. Heureuses les nations à qui une telle opportunité aura été offerte car beaucoup disparurent sans parfois se rendre compte de ce qui leur arrivait»* (Traduction libre de QUEIXALOS, 1984 : "Una educación contra el etnocidio", *Chantiers Amerindia*, sup. 2 à *Amerindia* N° 9).

[7] Il existe actuellement environ une soixantaine de langues amérindiennes parlées en Colombie, par des ethnies qui se différencient par leur degré d'organisation, par l'ancienneté et la durée du contact avec les Blancs, par leur démographie, par leur histoire, etc.

[8] Parlée et écrite. De très nombreux problèmes de transcription sont à résoudre (choix d'un système alphabétique, syllabique, idéographique, décisions orthographiques, morphologiques, syntaxiques...). Ce qui suppose que les Indiens puissent maîtriser des pans entiers des théories linguistiques.

Inutile de souligner qu'il est essentiel d'inventer et de mettre en place les moyens susceptibles de conduire les Autochtones à créer les néologismes nécessaires à l'enseignement, tout particulièrement celui des sciences.
Réciproquement, l'enseignement de l'espagnol (langue officielle de la Colombie) ne doit pas commencer tant que persiste l'idée *fausse* que les langues vernaculaires seraient incapables d'exprimer la Modernité, la science ou les techniques... Cet enseignement devrait tout particulièrement éviter le danger d'identifier "langue des Blancs" et "langue de prestige".

2.3.1 Les livres scolaires devront refléter les réalités de la vie indigène.

2.3.2 Les curriculums doivent permettre, à long terme, à tout Indien qui le souhaiterait d'accéder aux connaissances *les plus performantes* de l'Occident et des grandes cultures[9].
Les éléments de la culture "universelle" ne devraient être introduits que très prudemment, en commençant par les éléments déjà diffusés dans les communautés et par les éléments indispensables à la réflexion sur la nature et les fonctions de la langue, de l'écriture et, plus généralement, des systèmes de représentation.

2.3.3 Bien que ce point, particulièrement délicat, mérite de très profondes analyses, je me contenterai de rappeler qu'il semble infiniment plus efficace de présenter les grandes problématiques[10] et de "vrais" problèmes (par exemple, celui de l'infini) que de tenter d'inculquer des solutions étrangères (emprunter la numération espagnole, par exemple) surtout si l'on ne présente pas en même temps les problèmes qu'elles ne permettent pas de résoudre (par exemple, la détermination des points d'un continu).

2.3.4 Pratiquement, il est nécessaire que les maîtres et les chercheurs (indigènes ou non) collaborent[11] avec les chamans et les responsables des communautés, non seulement en matière de langue, écriture, orthographe, cosmologie, médecine traditionnelle, botanique, zoologie, histoire, géographie, morale, droit, cosmovision..., mais encore en sciences et techniques.

2.4 La scolarité (rythme et progression, horaire et calendrier) doit être adaptée aux réalités de la vie des communautés et ne pas perturber la participation des apprenants (notamment les enfants) aux activités qui requièrent leur présence (une pêche collective, par exemple) et contribuent à leur socialisation.

2.5.1 La formation des maîtres indigènes ne doit pas conduire à la constitution d'une sorte de petite bourgeoisie indigène, dépendante des Blancs. L'éducation est affaire de toute la communauté.

2.5.2 Pour cela, il semble nécessaire d'organiser, dans les communautés, de véritables débats pour une authentique coopération, entre des "savants" formés à l'occidentale (un mathématicien, par exemple) et des savants indigènes (un chaman, par exemple). L'enjeu de ces confrontations étant de rendre traduisibles et transmissibles d'une culture à l'autre les principales représentations des conceptualisations les plus profondément enracinées dans les cosmovisions de l'une et l'autre.

2.5.3 Ce dialogue nécessaire, toujours sur le mode de la traduction c'est-à-dire de la confrontation de différentes façons de conceptualiser les phénomènes, est néanmoins pratiquement impossible à réaliser ; sauf peut-être à toujours reconstituer des chaînes

---

[9] Ce qui implique que des discussions aient été organisées pour que les communautés indigènes saisissent, par exemple, la spécificité des raisonnements scientifiques à l'occidentale, qu'ils comprennent les enjeux des discussions épistémologiques sur la nature et la place des mathématiques, qu'ils pèsent la différence entre, par exemple, une mathématique naïvement positiviste, une mathématique rationnelle à la Euclide ou une mathématique formelle à la Hilbert...

[10] Incluant notamment la réflexion sur les conditions (pratiques, méthodologiques et critiques) de recherche, de validation, de légitimation et d'unification du raisonnement, des preuves et des démonstrations.

[11] Par exemple selon les modalités pratiques mises en oeuvre, en Colombie, pour traduire la nouvelle Constitution politique en langues vernaculaires.

d'interlocuteurs intermédiaires particulièrement motivés pour ce travail de Sisyphe, continuellement entravé par des montagnes d'incompréhension et des siècles d'intolérance.

2.5.4 Une telle organisation, à condition que la situation politique générale ne la rende pas impossible, semble pouvoir permettre, non pas de résoudre définitivement les problèmes de l'Ethnoéducation, mais de prendre la mesure de la complexité des questions à résoudre et des principales erreurs à éviter.

2.5.5 En Colombie, la nouvelle Constitution Politique (1991), l'existence d'organisations indigènes représentatives et ayant une longue expérience (parfois près d'un demi-millénaire) du contact avec les Blancs, l'existence d'organismes comme le Centre Colombien d'Etudes des Langues Aborigènes et la longue expérience de l'équipe d'ethnolinguistique amérindienne du CNRS (URA 1026), nous ont permis de partager avec des chamans et des responsables indigènes d'importantes interrogations sur divers problèmes mathématiques et didactiques. Voici le récit[12] d'un tel dialogue dont l'objectif était la recherche d'une concrétisation, *culturellement acceptable par des Amérindiens*, de ce que nous appelons la droite réelle, modèle pour nous du corps R des nombres réels.

3) Concrétisation indigène de la droite réelle

3.1.1 Rappelons qu'une entité mathématique nouvelle reste toujours très difficile à concevoir, à accepter et à communiquer, tant qu'aucune "concrétisation" convenable n'a été inventée ou découverte qui permette au mathématicien de se la représenter et de la ressentir comme un objet "réel".
L'histoire fournit de nombreuses illustrations de cette difficulté et de la "libération" qu'apporte la découverte d'une structure "concrète" représentative d'une certaine axiomatique. Ce fut notamment le cas lors de l'invention d'une représentation géométrique concrétisant les "impossibles" nombres "imaginaires"[13] comme la fameuse racine carrée de moins un.

3.1.2 L'effet de la découverte d'une "concrétisation" est toujours immédiat et provoque un changement d'attitude radical dans la communauté mathématique[14] : GAUSS, par exemple, savait que sa concrétisation des "imaginaires" leur conférait une "existence objective". *«Il y a plusieurs années que l'auteur considère cette partie importante des mathématiques à un point de vue différent, grâce auquel on peut attribuer une existence objective aux quantités imaginaires».*
La concrétisation par un modèle (les points d'un plan) avait permis ce que l'utilité indéniable de l'outil n'avait pas réussi : donner statut mathématique, et donc droit logique de cité, à des entités "impossibles".
Nous retiendrons que la découverte d'une structure interprétative est un moment essentiel de la vie d'un concept scientifique et une condition quasi-nécessaire de son acceptation et de sa transmission.

[12] Pour d'autres détails, Cf. "Regards croisés sur la droite réelle. Quelle concrétisation des ensembles de nombres pour l'éducation bilingue amérindienne", *Amerindia* N° 17, 1992.

[13] Elle consiste (par exemple, chez Argand, Gauss ou Wessel) à interpréter l'imaginaire $i = \sqrt{-1}$ comme un opérateur géométrique, une rotation d'angle droit. Dans cette identification, tout point M du plan représente (et est représenté par) un nombre complexe z de la forme $z = x + iy$, x et y étant le couple de réels correspondant aux coordonnées du point M dans un repère convenable.

[14] Les mathématiciens finirent par utiliser les nombres "imaginaires" notamment pour résoudre des équations. Mais si, au XVIII^{e} siècle, l'outil était accepté (comme un "sophisme"), l'entité "imaginaire", elle, ne l'était pas et on partageait toujours l'opinion de Bombelli : *«de l'avis de beaucoup, c'était une idée insensée, et moi-même je fus longtemps de cette opinion ; toute la question semblait reposer sur un sophisme plutôt que sur une réalité ; cependant, je cherchai jusqu'à ce que j'eusse prouvé que c'était bien la vérité».*

3.2.1 En 1989 et 1990, dans la *Sierra Nevada de Santa Marta* (Colombie), j'ai eu le privilège de pouvoir animer des groupes[15] de travail auxquels participaient des responsables indigènes (*mamas*[16], instituteurs, responsables politiques...) des trois communautés de cette séduisante région.
L'objectif que je m'étais fixé était de rechercher, en vue d'un futur et hypothétique enseignement des mathématiques en langues amérindiennes[17], une "concrétisation" *culturellement acceptable* de la structure mathématique dite du "corps des nombres réels"[18].

3.2.2 La droite "réelle" est le modèle occidental le plus courant de cette structure ; l'interprétation est réalisée par une mise en correspondance des nombres x du corps R et des points M de la droite D au moyen d'un morphisme bijectif qui associe à tout point M son abscisse x_M. C'est évidemment ce modèle qui guidait mes questions et suggestions.

3.2.3 Une grave difficulté ne tarda pas à se présenter. Un mama me dit que cette image de la droite ne pouvait pas être retenue parce qu'elle heurtait l'image indigène du temps[19].
En effet, les cosmovisions occidentale et amérindienne du temps (grammatical et cosmologique) diffèrent notablement. Le futur, par exemple, est généralement imaginé par un Occidental comme étant *devant* l'observateur ; pour un Indien, il est *derrière*. Une raison indigène de mettre le passé devant soi est que, contrairement au futur, le passé est généralement connu. Donc visible...
De plus, les temps occidental et indigène s'opposent souvent comme le linéaire et le cyclique.

3.3 Il m'est impossible de rapporter les innombrables discussions[20] et digressions[21] provoquées par cette prise de conscience de la divergence radicale de nos cosmovisions respectives.
Je n'avais pas plus de raisons d'abandonner le modèle occidental de la droite réelle que mes interlocuteurs n'en avaient de renoncer à leur cosmovision. La situation aurait pu en rester là.
Autant que je m'en souvienne, elle fut débloquée par une remarque du mama.

3.4.1 «*Une droite est comme cette corde. Tendue ou détendue, déroulée ou enroulée, c'est toujours une corde*».
Le mama m'emmena au centre de la maison de réunion et me fit regarder vers le toit conique : «*Regarde. Tu vois cet escargot qui relie les poutres et descend du sommet. C'est aussi une corde*».

---

[15] Ces groupes de réflexion s'inscrivaient dans les "ateliers" pluriannuels organisés régulièrement depuis 1986 par la linguiste colombienne Maria TRILLOS AMAYA du Centre Colombien d'Etudes des Langues Amérindiennes de Bogota, professeur à l'Université de l'Atlantique de Barranquilla.

[16] Chamans. Contrairement à la définition des dictionnaires, "chaman" n'est pas le «*nom donné aux sorciers de l'Asie septentrionale et, par extension, aux sorciers de toutes les sociétés inférieures*» (Grand Larousse Encyclopédique) mais désigne de véritables "bibliothèques vivantes", les sages et/ou les savants des peuples autochtones. Ceux-là même que l'on assassine en premier lieu.

[17] On sait que le plus grand défi de l'Ethnoéducation est l'enseignement des sciences, notamment des mathématiques, dans des langues vernaculaires qui n'ont pas développé les vocabulaires techniques et métalinguistiques correspondants à ces disciplines "occidentales". Ainsi, une des toute premières tâches est-elle de faire créer des "jargons" scientifiques, à commencer par les néonumérations. Relever ce défi est l'un des objectifs du projet *Kwibi Urraga* (maison de la sagesse) que Maria TRILLOS AMAYA et moi-même élaborons, avec d'autres chercheurs colombiens, et surtout avec le concours des communautés indigènes.

[18] Le corps R des réels comprend les entiers naturels, les rationnels (de la forme p/q) et les irrationnels (comme $\sqrt{2}$) ; mais aussi les nombres transcendants (non-algébriques) comme π (rapport de la circonférence au diamètre d'un cercle).

[19] Remarque dont la profondeur mathématique est probablement inaccessible à la majorité des étudiants scientifiques de notre premier cycle universitaire.

[20] Coupées épisodiquement par l'arrivée d'un détachement de l'armée, d'un groupe de "muchachos" ou de quelque colon.

[21] Sur l'attitude intolérante des linguistes-missionnaires du *Summer Institute of Linguistics* ou sur mes connaissances du calendrier maya.

Effectivement, une sorte de corde végétale descendait du sommet et reliait, en formant une sorte d'hélice logarithmique, les poutres qui constituaient la charpente et qui étaient disposées comme des droites génératrices et des sections circulaires d'une nappe de cône.

3.4.2 Plus qu'une vérité de bon sens, les remarques du mama traduisaient une propriété d'invariance importante, celle de la structure topologique définissant l'ordre[22] des points de la corde.
La droite réelle peut bien être droite ou enroulée en "hélice", cela ne change en rien son aptitude à représenter les nombres réels, à servir de modèle à la structure de corps.

3.4.3 L'Indien qui refusait l'image de la droite réelle des Blancs proposait celle d'une droite enroulée sur un cône.
Le mathématicien n'y trouvait rien à redire.

3.5.1 Il ne restait plus qu'à exploiter cette concrétisation possible du corps des réels identifié à l'image de la courbe "en escargot" qui court sous le toit de la "maison de la sagesse"[23] des Indiens de la Sierra Nevada.
Ces questions n'ont pas encore été abordées dans les ateliers de la Sierra Nevada ; par contre, j'en ai longuement discuté à Bordeaux avec Rubiel Zalabata Torres, un Ika (Arhuaco), quand il était étudiant en linguistique à l'Ecole Pratique des Hautes Etudes de Paris.

3.5.2 Il ressort de nos discussions que cette concrétisation pourrait être particulièrement fructueuse dans le cadre de l'Ethnoéducation.
Ce modèle indien de la droite réelle permet, en effet, de présenter "immédiatement" et de manière "naturelle" bon nombre de questions qui paraissent "fondamentales" au mathématicien occidental. Il s'agit notamment de :

i) la possibilité d'introduire simplement le problème du concept de nombre (entier naturel) dans sa fonction première d'être un outil qui *«en dépit de l'identité que revêt pour la perception un ensemble d'objets semblables* [fondus dans l'unité d'un genre] *sera capable de faire obstacle à la fusion mentale»*[24]

ii) la possibilité d'introduire simplement le problème de la dénombrabilité des ensembles infinis[25]

iii) la possibilité d'introduire simplement les entiers négatifs

iv) la possibilité d'introduire simplement les décimaux ou les rationnels et d'opposer deux types d'ordre fondamentaux[26]

v) la possibilité d'opposer les "logiques" additive des décimaux et multiplicative des rationnels[27]

---

[22] Ce qui est essentiel, du point de vue mathématique et comme on le sait depuis les travaux de Peano, Frege, Cantor ou encore Dedekind, pour définir les axiomatiques susceptibles de fonder et d'articuler la construction de l'ensemble des entiers et celle du continu géométrique.

[23] Kwibi Urraga. Cette expression remplace, depuis 1989 et dans certaines communautés de la Sierra Nevada, les pancartes "School" que des missionnaires du *Summer Institute of Linguistics* avaient placé dans les villages où ils s'étaient imposés.

[24] BRUNSCHVICG, L. (1912) *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris : Blanchard (nouvelle édition 1981) : 477.

[25] C'est-à-dire de rencontrer tout de suite les paradoxes de l'infini qui, tout à la fois, stimulèrent et paralysèrent la pensée mathématique occidentale depuis l'Antiquité grecque jusqu'aux travaux de Dedekind au XIX[e] siècle ; problème qui pourrait être posé dès la saisie du nombre trois.

[26] Le type dit "oméga" des naturels ou "zêta" des entiers, le type "êta" des décimaux ou des rationnels et le type "thêta" des réels ; dans le premier type, tout élément possède *un successeur unique* et, entre deux éléments successifs, il n'y aucun autre élément ; dans le type êta, un élément donné n'a pas de successeur (on l'atteint par un procédé de type *limite*) et on peut toujours intercaler, entre deux éléments distincts, une *infinité* d'éléments.

[27] Ce point délicat est pourtant très important pour la construction des structures numériques. Les mathématiciens, en effet, savent bien que la division n'est pas partout définie dans l'ensemble des décimaux et qu'il faut construire une théorie des "raisons" (les **logoi** d'Euclide) et des rapports de raisons pour pouvoir comparer et mesurer les objets des mondes du mathématicien, selon le principe fonctionnel que : a est à b comme c est à d.

vi) la possibilité d'aborder la question du rôle des systèmes de numération ainsi que celui des changements de base de numération.

3.5.3 Il reste, évidemment, à construire et à expérimenter des séquences pédagogiques précises, non pas tellement pour lancer déjà des programmes d'enseignement dans les écoles indigènes de la Sierra Nevada, mais bien plutôt pour accompagner les communautés dans la difficile tâche de saisir les tenants et aboutissants d'une "véritable" culture mathématique et, si elles le jugent utile, se lancer dans l'aventure de création lexicale[28], préalable indispensable à tout enseignement des mathématiques en langues amérindiennes.

Les figures suivantes mettent en évidence quelques-uns des moments possibles de cet "enseignement" :

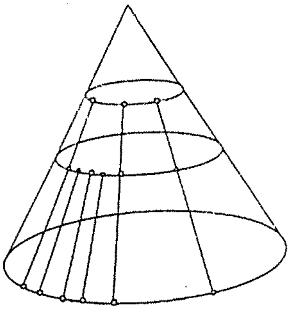


Fig. 1 : Apprentissage de l'énumération et de la numération

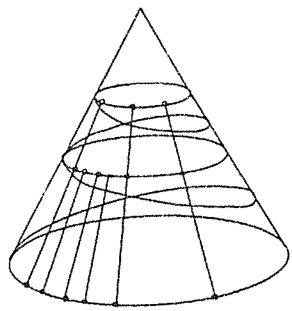


Fig. 2 : Apprentissage d'une concrétisation des corps de nombres

4) Réflexions sur l'enseignement du nombre

4.1.1 Rappelons que l'objectif est de faire comprendre le plus "naturellement" possible à de (futurs) enseignants indigènes les principaux problèmes de la construction des nombres (au sens des mathématiques d'aujourd'hui !).
Pour cela, nous admettons un principe majeur de l'Ethnoéducation, à savoir qu'il s'agit surtout de présenter aux communautés un problème suffisamment riche pour que les principales difficultés mathématiques de cette construction puissent être naturellement discutées.

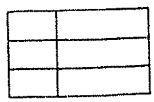
4.1.2 L'épistémologie[29], l'histoire des mathématiques et les discussions précédentes suggèrent de partir du *problème du repérage des points d'un continu* (concrètement, une nappe de cône) car les systèmes de nombres sont d'abord des systèmes de détermination dont une des principales fonctions est de permettre de maintenir distincts[30] les éléments d'un ensemble ou les parties d'un tout confondus dans l'homogénéité d'un genre.

---

[28] Par exemple selon des modalités pratiques similaires à celles que décrit Francisco QUEIXALOS dans "Autobiographie d'une néonumération", *Amerindia*, N° 11, 1986 et que je commente dans "De certaines solutions au problème de la néonumération", *Amerindia* N° 15, 1990.

[29] Pour plus de détails, Cf. les Actes du Colloque "Qu'est-ce que le nombre ?" (juin 1993) organisé à la Cité des sciences et de l'industrie par le Collège International de Philosophie, en particulier mon article intitulé "Un animal qui compte".

[30] Essayer, par exemple de dénombrer les rectangles d'une figure comme celle ci-contre ou de dire combien il y a d'éléments dans l'ensemble {a, a, a} ou l'ensemble {a, b, c} *sans rien savoir de plus sur la nature des éléments et des ensembles considérés* (condition pour pouvoir traiter d'entités absolument "abstraites" et "générales").



4.2.1 Un premier pas est réalisé par la prise de conscience de la nécessité de réaliser une sorte de "maillage" discret du continu proposé, de "quadriller" la surface du cône. Le premier référentiel est évidemment lié à l'origine déictique, au *moi-ici-maintenant* du sujet linguistique qui décide de pointer tel ou tel endroit du cône et qui tente de faire voir et saisir, à son interlocuteur, les différents points qu'il vise.

4.2.2 D'importantes conditions nécessaires apparaissent plus ou moins rapidement au cours des discussions :

i) différents types de référentiels peuvent être mis en place

ii) tout système de quadrillage envisagé doit comporter un nombre infini de "mailles"

iii) un nombre infini (dénombrable) de mailles discrètes et cependant toujours insuffisant[31] pour nombrer l'infinité (continue) des points du cône

iv) l'infinité des mailles doit pouvoir être étiquetées : il faudra donc (commencer par ?) construire (séparément ?) le système des "étiquettes" ou des "numéros" susceptible de désigner sans ambiguïté les points du maillage.

4.3.1 La construction d'un système d'étiquettes est un problème fondamentalement linguistique et donc relativement facile à résoudre par les Indiens eux-mêmes.
Contrairement aux problèmes d'immatriculation d'objets réels, il s'agit de résoudre *le problème de la numération* (et donc celui des néonumérations) : construire un *système* d'expressions qui permette de dénommer ou désigner individuellement chacune des entités de l'*infinité* d'un ensemble de marques ou de nombres.

4.3.2 Aucune liste finie, aucun alphabet ne permet de résoudre le problème de la numération[32]. Il faut un système. On épuise d'ailleurs très rapidement les pseudo-solutions qui consistent à "répéter" une liste initiale en utilisant, par exemple, des signes diacritiques : après avoir épuisé *a*, *b*, *c*, etc., *z* ; on prend *a'*, *b'*, *c'*, etc., *z"*, puis *a"*, *b"*, *c"*, etc., *z"*, etc.

4.3.3 Une solution simple et générale consiste à construire le "monoïde libre engendré par un alphabet fini" c'est-à-dire utiliser l'alphabet lui-même comme ensemble de marques diacritiques : après *a*, *b*, ..., *z* prendre *aa*, *ab*, ..., *az* puis *ba*, *bb*, ..., *bz* ; ... ; jusqu'à *za*, *zb*, ..., *zz* ; puis *aaa*, *aab*, ... *aaz* ; etc. Ce qui revient à former tous les "mots" de toutes les longueurs possibles avec les "lettres" de l'alphabet donné.
Le choix de l'alphabet initial est évidemment arbitraire. Il relève à ce titre de la seule responsabilité des communautés indigènes[33].

4.3.4 Il est facile de comprendre et faire comprendre qu'il est nécessaire, pour s'y retrouver, de définir un *ordre* sur le monoïde libre qui, à lui seul, ne fournit que l'ensemble infini des expressions nécessaires pour désigner l'infinité des points du maillage.
Les discussions ont montré qu'il est très instructif d'analyser et comparer différents types d'ordre et d'estimer leurs avantages et inconvénients respectifs.
L'ordre alphabétique ou lexicographique (celui des mots du dictionnaire) est très "naturellement" découvert. Mais il présente surtout l'avantage d'être différent de l'ordre "alpha-décimal"[34] ; c'est-à-dire l'ordre selon lequel sont rangées, en numération de position, les

---

[31] Le fait a été démontré par Cantor.

[32] On démontre d'ailleurs que la stratégie optimale de création de noms pour désigner les éléments d'une collection *finie* est de type "iconique" (un terme atomique par entité) ou "répétitif" (représentation analogique des entités). Pour une première approche : CAUTY A. : *L'énonciation mathématique & les numérations parlées*, thèse d'état ès-sciences, Nantes : 1987.

[33] Cela ne veut pas dire qu'il ne faut pas présenter les alphabets en usage en Occident (alphabet grec, syllabaire sanscrit, ensemble des chiffres arabes et romains, etc.) ou qu'il faut passer sous silence le fait qu'un alphabet peut se réduire à un singleton ou à une paire d'éléments.

[34] Selon l'ordre alphabétique ou lexicographique, le "mot" 157, par exemple, serait placé *après* le "mot" 1560 (bien qu'il soit plus *petit* que ce dernier) et *avant* le "mot" 16 (bien qu'il soit plus *grand*) car, selon les règles de ce type d'ordre, on ne commence pas (comme c'est le cas dans l'ordre alpha-décimal) par classer les "mots" selon leur longueur (c'est-à-dire le nombre de chiffres utilisés pour transcrire leur expression positionnelle).

écritures des entiers naturels ; par exemple notre écriture habituelle des nombres à l'aide des dix chiffres "arabes" (0, 1,.2, ..., 9).

4.3.5 Il est alors possible de réfléchir aux propriétés des différents types d'ordre. Un point à discuter est le fait qu'il ne suffit pas de disposer d'un monoïde libre muni d'un ordre strict total pour résoudre un problème pratique fort simple, le problème dit "du bibliothécaire".
Une cotation des livres d'une bibliothèque (ou de tout autre "objets") étant réalisée, il arrive souvent que de nouveaux ouvrages viennent, par la suite, s'ajouter au stock initial et que ces volumes doivent être intercalés entre des ouvrages initialement consécutifs. Sans avoir à recommencer toute la cotation.
Tout bibliothécaire est ainsi amené à rechercher un type d'ordre particulier jouissant de la propriété qu'entre deux éléments différents on puisse toujours en intercaler un troisième, et donc une infinité d'autres. Pouvoir intercaler à volonté et sans avoir à refaire toute la cotation[35] : placer, par exemple, cinquante-sept nouveaux ouvrages entre les cotes successives 1492 et 1493.

4.4.1 Des discussions peuvent alors s'engager autour de la distinction des types d'ordre et, plus généralement, de la distinction du discret et du continu. Elles font apercevoir le fait que les procès (notamment linguistiques et arithmétiques) de détermination des entités d'un tout relèvent d'une unique problématique dont les solutions sont à spécialiser selon la nature (notamment discrète ou continue) du "tout" considéré.

4.4.2 Un avantage de cette "définition" épistémologique de la fonction du nombre, (comme cas particulier des procès de détermination), est de traiter, comme de nombreuses langues naturelles, de manière unifiée la question des entiers naturels (*ordinaux* : premier, second, troisième, quatr(e)-ième...) et celle des fractions de l'unité (*quantièmes* : unité, demi, tiers, quart, cinq(u)-ième, six-ième...) : les entiers et les quantièmes sont obtenus par itération d'un geste simple de détermination.
Le geste de prendre le suivant qui fournit la suite 1, 10, 100, 1000, etc. si l'on adopte une stratégie d'énumération décimale des éléments d'une collection discrète ; et qui fournit la suite 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, etc. si l'on adopte une stratégie de division dyadique d'un tout continu.

4.4.2 Les avantages mathématiques de cette approche ne seront pas traités ici. Pas plus que son intérêt pour résoudre la question de la création des néologismes indiens pour désigner les multiples concepts mis en œuvre pour construire et la notion de nombre et les systèmes de numération permettant d'en parler.

4.5.1 Un point mérite cependant d'être signalé. C'est celui des problèmes que pose l'usage "scientifique" des nombres[36] dans les pratiques de comptage, d'une part, et de mesure, d'autre part. Nous allons préciser le premier et le plus simple de ces deux problèmes, celui du dénombrement des collections.
Le point essentiel, me semble-t-il, est la découverte du fait que compter les éléments d'une collection (par exemple, les mailles du quadrillage réalisé sur la nappe du cône) suppose, outre la nécessité de disposer d'une numération performante, d'avoir décidé d'une stratégie d'énumération des éléments de la collection à dénombrer (ce qui revient à avoir défini une fonction successeur sur cette collection).
4.5.2.1 Pour dénombrer les points du maillage du cône de la figure 1, par exemple, deux stratégies énumératives apparaissent très "naturellement". Selon la première, le sujet décide de

---

[35] Une solution popularisée depuis Stevin consiste à inclure des échelles de plus en plus fines (en "logique" décimale on intercale des dixièmes, puis des centièmes, des millièmes...), assortie d'un mode de dénomination suffisamment commode de chaque échelle et des éléments de chacune. En arithmétique élémentaire c'est l'écriture dite des nombres décimaux (à virgule).

[36] En distinguant rapidement, comme le faisaient les Grecs, entre les nombres (entiers naturels) et les raisons (logoi). Dénombrer une collection X c'est définir une suite d'éléments de X sur lequel est définie par ailleurs une fonction "successeur". Mesurer c'est attribuer un nombre (les entiers naturels n'y suffisent pas !) à chacun des états d'une grandeur. "Raisonner" c'est se donner les moyens (par exemple la théorie grecque des proportions) de rendre comparables et composables des mesures différentes.

parcourir l'ensemble des points en épuisant d'abord tous ceux qui se trouvent sur une même section circulaire avant de passer aux points du cercle de l'étage suivant. Selon la seconde, il décide au contraire de descendre d'abord le long d'une génératrice du cône... et se rend compte alors qu'il est incapable de passer au premier point de la génératrice suivante car, pour cela, il aurait fallu être effectivement descendu jusqu'au point "à l'infini" de la première génératrice. Etudions plus en détails cette question.

4.5.2.2 Constatons d'abord qu'il est impossible de réaliser concrètement une mise en ordre *lexicographique* dès que l'on autorise l'écriture de mots de longueur infinie et que l'on utilise un alphabet qui comprend *au moins deux* lettres distinctes[37].
Soit l'alphabet A = {a, b}. Le premier mot du dictionnaire que l'on se propose d'écrire est "a". Son successeur lexicographique est "aa" lui-même suivi de "aaa", puis de "aaaa", etc. Il apparaît ainsi qu'il est impossible d'écrire un mot commençant par la lettre "b" ou, plus généralement, un mot comprenant une occurrence de la lettre "b". Il faudrait, en effet, avoir atteint et écrit *effectivement* le "dernier" des mots ne comprenant que des lettres "a". Or ce "dernier" n'existe pas car nous nous sommes autorisés à écrire des mots de longueur infinie et que, pour l'ordre oméga des systèmes de numérotation, il n'y a pas de dernier élément.
Négligeons cet interdit (tout est possible à la pensée !) et supposons avoir écrit le mot "ab". Ses successeurs lexicographiques sont : "aba", "abaa", "abaaa", "abaaaa", etc. et la même difficulté pratique se présente. Nous ne pouvons atteindre aucun mot du dictionnaire contenant une deuxième occurrence de la lettre "b".
Nous pouvons recommencer l'expérience avec l'alphabet décimal A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} et en adoptant la convention syntaxique (orthographique, si vous préférez) selon laquelle aucun mot "bien écrit" ne doit commencer par "0" ou par une chaîne de "0". On voit comme précédemment qu'il est impossible d'atteindre un mot contenant le chiffre "2" puisque l'ordre lexicographique commence par la suite infinie : «1, 10, 100, 1000, etc.» qu'il faudrait avoir effectivement parcourue jusqu'au bout avant d'atteindre un mot contenant la lettre "2".
Reprenons enfin ces expériences en étiquetant les éléments que nous cherchons à dénombrer avec des expressions rangées dans l'ordre alphadécimal (deux mots sont rangés par longueur puis par comparaison des lettres de rang correspondant). Cette fois nous obtenons la suite :«a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, aaaa, etc.» et la suite des écritures décimales des naturels : «1, 2, 3, ..., 9, 10, 11, 12, ... , 99, 100, 101, etc.».

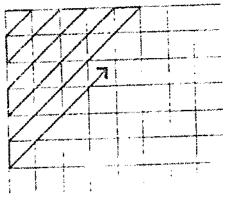
4.5.2.3 Les expériences précédentes conduisent à l'idée importante pour le mathématicien que les aspects cardinal (vision du tout sans individuation de ses constituants) et ordinal (vision individuante des constituants) présentent une certaine dissymétrie.
Le même ensemble (les mailles du quadrillage du cône de la figure 1) peut être énuméré de différentes manières. Par exemple, suivant une stratégie alphadécimale. Soit Ω le résultat de cette énumération : $\Omega = o \to o \to o \to \ldots$
Si l'on accepte maintenant de passer outre à l'interdit *pratique* signalé précédemment, le même ensemble peut être énuméré lexicographiquement. Cette fois le résultat est une succession d'énumérations Ω, soit $\Omega + \Omega + \Omega + \ldots$ On peut donc écrire, suivant Cantor, l'égalité suivante :

$$\Omega = \Omega + \Omega + \Omega + \ldots$$

4.5.2.4 Cette égalité peut être interprétée en disant que tout ensemble dénombrable[38], par exemple les mailles du quadrillage du cône dans l'ordre alphadécimal ou encore l'ensemble N, est équipotent à son carré cartésien, par exemple les mailles du quadrillage dans l'ordre lexicographique ou encore l'ensemble N x N ou l'ensemble Q des rationnels.
La démonstration de l'équipotence des ensembles N et N x N (ou N et Q) se fait ostentivement en exhibant une bijection de l'un sur l'autre. Ce qui revient à montrer que l'on peut énumérer N x N c'est-à-dire étiqueter ces éléments avec les numéros de N ou encore définir un balayage "linéaire" du produit cartésien.
Par exemple, on démontre, plus généralement, que *toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est elle-même dénombrable* en supposant rangé l'un sous l'autre ces ensembles

[37] Ce sont les conditions de construction des numérations de position (prendre une base au moins égale à 2 et pouvoir écrire des expressions de longueur arbitraire).
[38] Dont les éléments peuvent être numérotés par les entiers naturels.

numérotés. Les éléments forment alors un tableau et sont doublement indexés par les numéros de lignes et de colonnes. Il suffit alors de suivre un parcours "diagonal" comme le suivant :



dont la simple possibilité ainsi rendue manifeste constitue le coeur de la démonstration cherchée.

4.5.2.5 D'où la mise en évidence du fait logique que deux ensembles peuvent avoir le même cardinal sans pour autant être de même type ordinal :
(N, oméga) et (Q, êta) ont même cardinal[39] mais ils sont de type d'ordre très différents puisque l'ordre oméga de N, contrairement à l'ordre êta de Q, jouit de la propriété que tout élément possède un successeur unique, tandis que l'ordre êta jouit de la propriété d'intercalation (il y a toujours, entre deux rationnels distincts quelconques, une infinité de rationnels).

4.5.2.6 Du point de vue épistémologique, on déduit des "expériences" précédentes que la notion de cardinal[40] conserve un résidu d'intuition sensible.
A savoir le fait d'expérience (finie) qui conduit à admettre qu'ayant une collection d'objets à dénombrer, c'est-à-dire à numéroter, nous pouvons nous y prendre de manière totalement arbitraire. D'où l'invariance d'une propriété des ensembles finis, celle de leur nombre d'éléments, par rapport aux différentes possibilités d'en énumérer les éléments.
Soit une sorte de postulat, *évident* pour la pensée simulante, l'abstraction idéalisante toujours attachée à l'intuition phénoménologique des référents "réels". Un postulat *incertain* et à remettre en chantier pour la pensée modélisante, la concrétisation réalisante seulement asservie à la critique logique des référents "imaginaires".

4.5.2.7 Cette remise sur le chantier de la critique conduit à la conclusion que les concepts de cardinal et d'ordinal ne sont les deux faces d'un même prédicat que si l'on s'astreint à ne considérer que des collections finies, à ne pas passer outre au "tabou" de l' *infini*[41].
Dans le cas infini, il faut (par nécessité logique) préciser que seule est vraie l'implication directe : "*si deux ensembles sont de même type ordinal alors ils sont de même puissance*" puisque (N, oméga) et (Q, êta) constituent un contre-exemple à sa réciproque.

4.5.3 Le constat des différences qu'entraîne la décision d'utiliser telle ou telle stratégie (par exemple, la numérotation alphabétique ou alphadécimale des mailles du quadrillage du cône) conduit à d'innombrables discussions.
Des discussions qui rappellent notamment celles des sophistes de l'Antiquité grecque sur l'impossibilité du mouvement (tout potache a entendu parler du paradoxe d'Achille poursuivant, sans l'atteindre, la tortue) et sur la nature du continu[42].

---

[39] Puisqu'on peut construire une bijection entre ces deux ensembles.
[40] Défini comme classe d'équivalence d'ensembles équipotents.
[41] Confrontés aux paradoxes de l'infini, les mathématiciens adoptèrent des attitudes très différentes. Galilée, par exemple, conseillait la recherche méticuleuse et prudente, Cauchy recommandait l'évitement ; quant à Dedekind, il retourna le paradoxe de l'équipotence du tout et de la partie en définition de l'infini mathématique.
[42] L'Histoire nous rappelle que les géomètres du XVII^e siècle durent s'affranchir de l'interdit alexandrin de spéculer sur l'infini "en acte" pour renouveler les pratiques ("méthode d'exhaustion") de quadrature et de cubature, s'attaquer à de nouveaux problèmes (tangentes, rectification) et découvrir de nouvelles méthodes (par les "indivisibles"). D'où "sortirent" de nombreux nouveaux résultats et cette nouvelle branche des mathématiques, l'Analyse des "infiniment petits" ou des "fluxions".

5) Conclusion

5.1 Les - trop rapides - analyses précédentes auront permis, je l'espère, de montrer que les enjeux de l'Ethnoéducation contre l'ethnocide sont à la mesure de l'idée que l'on se fait de la nature des mathématiques[43] et, plus généralement, des sciences que l'on souhaite partager avec les Amérindiens.
Si l'on pense à l'enseignement de la géométrie, par exemple, la première (et peut-être la seule[44]) question, moins à résoudre qu'à proposer à la méditation des Indiens, est celle de savoir en quoi la géométrie formelle contemporaine, celle de Hilbert, par exemple, diffère[45] de celle, rationnelle, d'Euclide et, plus encore, de la géométrie dite "physique" du positivisme naïf.

5.2 Cette question se dédouble immédiatement en celle-ci : à quoi peuvent bien servir les formes abstraites (pures, vides, inutiles, insensées...) que construisent les mathématiciens ? A laquelle je répondrai, presque sans hésiter, pour doter l'homme d'un moyen intelligent[46], universellement traduisible et formellement évaluable, de construire et surtout de penser son rapport[47] à son propre environnement.
Un environnement construit *à la fois* comme un référent "réel" (spatial et/ou temporel) *et* un référent "imaginaire" (notionnel et/ou critique), comme un fruit "objectif", "évident", de ses facultés de simulation idéalisante *et* un fruit "subjectif", "certain", de ses facultés de modélisation concrétisante ; un environnement constitué de phénomènes sensibles représentés par les lois du monde et de théorèmes fomels représentés suivant les structures de l'esprit.

5.3 Ces formes, voulues abstraites et que construisent les mathématiciens tout autrement que de vulgaires abstractions, ne signent nullement un refus du sensible. Ce qu'elles signent, au contraire, c'est l'articulation du sensible et de l'intelligible, le dépassement critique du sensible par et dans l'intelligible.
Un dépassement dont l'histoire et l'ethnomathématique nous enseignent à suivre, dans l'œuvre des génies qui nous précédèrent dans le temps ou dans l'espace, les multiples détours et les nombreux méandres, ainsi que les nécessaires enracinements culturels.

5.4 Une saga conceptuelle de concepts ou de prédicats logiques[48] que seules l'expérience et l'autocritique sont autorisées à réguler et à régler. C'est-à-dire une histoire de libération véritable, une bataille ou une révolution que l'on gagne, contre sa propre ignorance, à n'accepter de se soumettre qu'aux décrets de la raison "universelle" ; celle qui se construit pas à pas, pierre à pierre, lentement, comme une œuvre commune qui naît de l'obscurité et meurt de l'oubli.

---

[43] On sait que le mathématicien Georges BOOLE réfléchissait beaucoup aux propriétés syntaxiques des formes linguistiques et qu'il plaidait pour la liberté des créations mathématiques : «*il n'est pas de l'essence des mathématiques de s'occuper des idées de nombre et de quantité*» (cité par BOURBAKI, *Eléments d'histoire des mathématiques*) estimant, à juste titre, que «*quiconque est averti de l'état actuel de l'Algèbre sait que la validité des calculs ne dépend pas de l'interprétation des symboles mais seulement des lois combinatoires*» ou encore que «*toutes les interprétations sont bonnes et il peut s'agir d'arithmétique, de géométrie, de mécanique ou d'optique*» (*Analyse mathématique de la logique*, 1847). Idées formelles qui n'auraient pas déplu au Leibniz des *Generales Inquisitiones de Analysi Notiorum et Veritatum* (1686).

[44] Dans la mesure où la plupart des autres questions que l'on se pose généralement au moment d'enseigner me semblent se réduire à des questions de technique et d'érudition mathématiques.

[45] Et ceci, qui est essentiel, tout en les continuant et en s'articulant à elles : les mathématiques sont vraiment détachées de l'expérience et, ce qui en est la contre-partie nécessaire, profondément enracinées dans les pratiques.

[46] Et esthétiquement beau, ajouteraient les mathématiciens qui jouissent de cet immense plaisir.

[47] Nous admettons la définition réaliste et médiévale de la connaissance (rapport d'un sujet et d'un objet) et sa conséquence que la vérité n'est pas absolue mais relative au lien d'*adéquation* que l'esprit établit, en toute responsabilité, entre l'objet "réel" et l'objet "pensé", entre le produit de ses facultés de simulation (au sens des physiciens dont les théories réduisent simulent et idéalisent les phénomènes) et le produit de ses facultés de modélisation (au sens des mathématiciens dont les structures modélisent et concrétisent les axiomatiques).

[48] Qui va de l'obscurité des origines à l'oubli des motivations, dans les synthèses atteintes, des démarches constructives, selon des cycles de *détachement* de l'expérience, d'*autonomie* dans et par la langue et les systèmes de représentation, d'*asservissement*, enfin, aux règles et principes "universels" d'une communauté de pairs.

Une *Minga*, comme disent les Indiens de Colombie, une belle et grande œuvre, décidée en commun et pour le bien de tous, réalisée ensemble, selon les moyens de chacun, comme l'épopée de la construction de la maison commune, la maison des sciences et de la sagesse. Une grande institution que l'on partage et se partage, comme la langue, sans l'appauvrir ni s'appauvrir, bien plus intimement avec les pairs qu'avec des étrangers.

Bègles, août 1993

L'EXPERIENCE EN COTE D'IVOIRE DE L'ETUDE DE JEUX TRADITIONNELS AFRICAINS ET DE LEUR MATHEMATISATION

Salimata DOUMBIA
Institut de Recherches Mathématiques d'Abidjan
08 BP 2030 Abidjan 08 (Côte d'Ivoire)

INTRODUCTION

Le déficit en professeurs de Mathématiques est important en Côte d'Ivoire, eu égard aux disciplines littéraires et aux autres disciplines scientifiques.
Voici deux tableaux, donnant les effectifs d'enseignants sortis de l'Ecole Normale Supérieure d'Abidjan (E.N.S.) ces quatre dernières années.
L'E.N.S. est l'institution la plus importante qui forme les enseignants des 2 niveaux du secondaire : le premier cycle et le second cycle.

STATISTIQUES DES SORTANTS DES QUATRES DERNIERES ANNEES

Lettres Modernes, Mathématiques et Physique

2° Année CAPES Pratique	Juin 1989			Décembre 1990			Décembre 1991			Juillet 1992		
	Inscrits	Reçus	%	Inscrits	Reçus	%	Inscrits	Reçus	%	Inscrits	Reçus	%
Lettres Modernes	55	37	67,2	60	49	81,6	62	52	83,8	41	20	48,7
Mathémat.	4	4	%	5	3	60	12	10	83,3	18	16	88,8
Physique	8	4	50	20	14	70	27	20	74	34	32	94
TOTAL	67	45	67	85	66	77,6	101	82	81	93	68	73

3e Année CAPES/ CEG Pratique	Juin 1989			Décembre 1990			Décembre 1991			Juillet 1992		
	Inscrits	Reçus	%	Inscrits	Reçus	%	Inscrits	Reçus	%	Inscrits	Reçus	%
Lettres Modernes	77	53	68,8	88	75	84	173	110	66,5	208	166	79,8
Mathémat.	83	71	85,5	49	43	87	54	45	83,3	72	67	93
Physique	88	66	75	81	63	77	132	80	60	158	23	14,4
TOTAL	248	190	76,6	218	181	83	349	235	65,4	438	256	58,4

Devant cette situation, toutes les institutions qui s'occupent de formation d'enseignants en Mathématiques aussi bien sur le plan théorique que pédagogique se trouvent interpelées. C'est ainsi que l'Institut de Recherches Mathématiques d'Abidjan (IRMA) poursuit des recherches depuis 1980 dans l'environnement socio-culturel ivoirien, voire africain, afin de mathématiser tout ce qui l'est dans cet environnement et d'intégrer les résultats de la recherche dans le contenu de l'enseignement dès mathématiques. Un atelier a été formé pour s'occuper de la recherche.
Cette démarche pourrait d'une part rendre plus familière cette discipline aux élèves et d'autre part rendre plus concret son enseignement.

Notre choix s'est porté dans un premier temps, sur les activités ludiques des enfants et des adultes parce que les jeux sont très riches d'exploitation et ils jouent un rôle important dans la vie des enfants.

I - METHODE DE TRAVAIL

1 - <u>Recensement des jeux et leur classification</u>
Dans un premier temps, nous avons sélectionné le maximum de jeux à titre documentaire.
Nous avons ensuite analysé les règles et rangé les jeux par catégories.
La classification que nous proposons est un travail personnel des membres de l'atelier . Nous avons établi une classification des jeux selon l'approche mathématique que nous faisons de ces jeux et selon leurs propriétés ludiques.

On distingue 5 catégories :

1) <u>Les jeux verbaux</u>

a- <u>Les jeux de mémoire</u>

Ils font appel aux qualités mnémoniques du joueur . Ce dernier doit suivre de mémoire les transformations d'un jeu donné.

b - <u>Les jeux de comptine</u>

Ils sont basés sur une chanson qu'on appelle comptine. Les joueurs la chantent en comptant.

2 - <u>Les jeux pour deviner</u>

Ce sont des jeux psycho-éducatifs qui développent les fonctions psychiques du joueur, notamment l'intuition.

3 - <u>Les jeux de position</u>

Ils se jouent sur un quadrillage. Ils sont en général très complexes. Ce sont des jeux de stratégie.

4 - <u>Les jeux d'hexibition</u>

Ce sont des jeux qui cachent un algorithme simple dont la connaissance assure la victoire à celui qui le connait, ce qui fait de lui un "**magicien**" aux yeux de ceux qui ne connaissent pas l'algorithme.

5) <u>Les jeux de hasard</u>

Dans ces jeux on utilise d'autres objets de hasard que les dés et les pièces de monnaie classiques : coquillages marins (cauris...), baguettes fendues en 2, coques d'arachide, écorses d'arbre sculptées sur un côté. Ces objets présentent 2 côtés différents.

2 - <u>Etude de jeux choisis</u>

Les jeux ont été étudiés suivant ce plan :

1) l'histoire du jeu
2) le nombre de joueurs
3) le matériel
4) le déroulement et les règles du jeu
5) l'étude mathématique

Il y a 2 remarques à faire ici :

- le nombre de joueurs est généralement supérieur à 2.

Ceci dénote du caractère "**social**" des jeux traditionnels. Les jeux solitaires sont presque inexistants.

- le matériel est en général fragile, non transportable et rudimentaire: sable ; graines ; bâtonnets ; cailloux ; coquillages ; ...

II - RESULTATS OBTENUS

Notre objectif était de faire des jeux un outil de motivation pour l'enseignement des mathématiques, depuis le préscolaire jusqu'au secondaire, en passant par le primaire.
Mais nous nous sommes rendus compte que l'analyse du jeu le plus simple pouvait déboucher sur des calculs ardus dont le développement dépassait largement le niveau du secondaire. Aussi les problèmes mathématiques que nous avons résolus vont se situer au niveau de l'enseignement secondaire et supérieur.

1 - Résultats exploitables au niveau du secondaire

Les problèmes résolus sont des problèmes de :
- dénombrement
- combinatroire et calcul des probabilités
- géométrie.

2 - Résultats exploitables au niveau du supérieur

Les problèmes résolus au niveau du supérieur sont :
- les chaines de Markov et l'inversion d'une matrice de Markov de 13 x 13
- les martingales.

3 - Exemple : Calcul des probabilités avec les jeux de cauris

PRESENTATION ET ETUDE DES JEUX DE CAURIS

Les cauris sont des coquillages marins
les cauris en Afrique étaient considérés comme un produit rare et de grande valeur. A ce titre, ils ont joué un rôle important dans la politique monétaire des souverains africains.
Les cauris ont assuré d'autres fonctions en Afrique.
Ils ont servi et servent encore à prédire l'avenir.
Ils servent de colliers, ceintures et braceliers.
Ils sont cousus sur des coiffures, des vêtements, des cannes à mains, des manches d'arme, et même sur les toges des enseignants de l'Université Nationale de Côte d'Ivoire .
Sur le plan ludique, ils représentent des pions indiquants des points gagnants et des poinsts perdants.
Les cauris à l'état naturel se présentent avec une partie bombée et une fente naturelle.
La plupart des cauris qu'on trouve sur les marchés se trouvent rognés par le temps ou par l'homme.

Principe du jeu

Le jeu le plus répandu est celui de 4 cauris .
Il existe des jeux à 2, 3, 4, 5, ... cauris.

Le principe du jeu est le suivant : 2 joueurs ou représentants de 2 équipes lancent à tour de rôle les cauris simultanément. Ceux-ci tombent sur le sol et s'immobilisent sur l'un des 2 côtés.
Nous avons fait l'étude pour les jeux de 4 cauris.
La lecture des résultats se fait selon le codage préétabli :

face (+) et pile (-).

face  pile 

Les configurations qui se présentent sont au nombre de 5

+ + + +
+ + + -
+ + - -
+ - - -
- - - -

Le comptage des points peut être chiffré ou non.

Pour les jeux à résultats chiffrés, est gagnant celui qui totalise un nombre de points fixé à l'avance par les joueurs.
Ce nombre varie de 20 à 50. Les points sont tracés au sol.
Un comptage non chiffré peut être par exemple :

$$\left.\begin{array}{l} ++++ \\ ++-- \\ +--- \end{array}\right\} \text{gain} \qquad \left.\begin{array}{l} +++- \\ \\ +--- \end{array}\right\} \text{perte}$$

Etude expérimentale d'un jeu de 4 cauris à comptage chiffré

Le cauri présentant un aspect disproportionné, il nous a paru indispensable de chercher la probabilité de sortie de l'un des côtés.
Pour ce faire, nous avons numéroté les cauris I ; II ; III ; IV pour les rendre distinguables. Nous avons ensuite effectué 1 000 jets de ces 4 cauris. On suppose que les cauris sont indépendants.

Comptage des points

- - - -	10 points
+ + + +	5 points
+ + - -	2 points

$$\left.\begin{array}{l} +--- \\ \\ +++- \end{array}\right\} \text{0 point}$$

Dans ce jeu est gagnant celui qui totalise 20 points. Voici le tableau présentant les résultats :

cauris	Nombre de jets	Face	Fréquence relative de face
I	1 000	610	0,61
II	1 000	570	0,57
III	1 000	617	0,61
IV	1 000	578	0,57

Les résultats montrent que $P(\text{Face}) \approx= \dfrac{3}{5}$

Dans la suite, on prendra $P(\text{Face}) = \dfrac{3}{5}$

On a cherché les résultats possibles à l'issu d'un lancer. On appelle Ω l'ensemble de ces évènements. Card $\Omega = 2^4 = 16$.
On définit sur Ω la variable aléatoire X qui a un lancer des 4 cauris fait correspondre le nombre de points obtenus :

$$X : \Omega \longrightarrow \{0; 2; 5; 10\}$$

Il s'agit de calculer $P(x = m)$ la probabilité d'obtenir m points.
On trouve :

$P(X = 0) = 312 / 625$
$P(X = 2) = 216 / 625$
$P(X = 5) = 81 / 625$
$P(X = 10) = 16 / 625$.

La loi de X est :

X = 0 avec la probabilité 312/625
2 avec la probabilité 216/625
5 avec la probabilité 81/625

10 avec la probabilité 16/625.

Il faut noter l'équilibre dans le comptage des points.
On a calculé ensuite la vitesse du jeu c.à.d. l'espérance mathématique E(X).

$E(X) = \sum x_i \, P(X = x_i)$ où $x_i = 0 ; 2 ; 5 ; 10.$ $\qquad E(X) \approx 1{,}6$

On a effectué le calcul pour d'autres jeux de cauris dont les comptages sont chiffrés et différents. On fait alors une comparaison de ces vitesses.

III. IMPACTS DE LA RECHERCHE

1. Pédagogiques

1) Des expérimentations ont été faites dans le préscolaire, le primaire et le secondaire.
Au niveau du préscolaire et du primaire, le jeu est considéré comme une activité d'éveil scientifique.
Au niveau du secondaire, l'expérimentation a été faite dans des clubs mathématiques, en dehors des heures de cours.

Les expérimentations on abouti à :

a) l'élaboration de fiches pédagogiques
Chaque fiche comporte :
- l'histoire abrégée du jeu
- le déroulement et les règles du jeu (variantes)
- l'intérêt mathématique du jeu selon le niveau.

b) la fabrication du matériel , dans le cas où le jeu se joue dans du sable, comme c'est le cas dans la plupart des jeux traditionnels africains. Cela favorise l'esprit de créativité et d'invention chez les élèves.

2) Dans les manuels rédigés par l'IRMA, des jeux sont utilisés pour illustrer des notions ou des exercices.
Voici quelques exemples :

- le calcul des probabilités avec "**les jeux de cauris**"
- les puissances avec "**les boeufs et les vautours**"
- la multiplication et la division avec "**l'awaLé**" et "**Les jeux du sorcier**"
- l'addition et la soustraction avec "**les carrés magiques**"
- le calcul de la somme des n premiers nombres, n non nul, avec "**Le yé Gonan**"

3) La section informatique de l'IRMA a fait la simulation du déroulement de certains jeux.

2. Interdisciplinaire

Une telle recherche a nécessité de notre part la collaboration avec des linguistes, des sociologues, des ethnologues, des historiens, des géographes et bien sûr des artistes pour l'illustration.
Depuis 1991, des étudiants de l'Université Nationale de Côte d'Ivoire en C_3 de Psychologie Génétique Différentielle présentent des Mémoires de Maîtrise sur les jeux traditionnels africains, dans la section "**Activités Ludiques et Développement Cognitif**" .
En Décembre 1991, le thème présenté est : "**Le jeu Yé Gonan et l'acquisition du nombre**". l'expérience a été faite sur des enfants de 8 ans. La conclusion est "**la maîtrise du Jeu Yé Gonan accélère l'acquisition de la conservation du nombre chez l'enfant**".
En Mars 1993, le thème présenté est : " **les effets Cognitifs du Dili chez les enfants ivoiriens**".

L'expérience a été faite sur des enfants de 12 ans.

Le Dili est un jeu de stratégie et pour les psychologues l'âge de 12 ans correspond à la période où les structures de l'intelligence concrète sont supposées être à maturité chez les enfants.
Un autre mémoire est en préparation.
Le thème retenu est : "**Effets cognitifs du jeu Tiouk-Tiouk chez les enfants de milieu socio-économique différent**".

3. Culturel

a) La Collection **MESCA**

La Collection **MESCA** est une collection de vulgarisation. **MESCA** signifie Mathématiques dans l'Environnement Socio-Culturel Africain.
Cette Collection a pour but de rendre accessibles à la population africaine les résultats de nos recherches, à travers des thèmes ayant un intérêt pour cette population. Le premier du genre est paru en 1992 aux éditions CEDA : "**Les Jeux de Cauris**".
Dans cette collection, nous prenons en compte aussi bien l'aspect scientifique que l'aspect social et culturel du jeu pour une meilleure compréhension de la culture négro-africaine.

b) Exposition itinérante

L'IRMA prépare une exposition itinérante avec le Centre de Promotion de la Culture Scientifique, Technique et Industrielle de la région Centre de France à Orléans. Le thème est :

"**Jeux, Mathématiques et Sociétés**".

Par ce travail de recherche, l'IRMA contribue ainsi à la conservation du patrimoine scientifique africain. Les difficultés qui se présentent ne sont pas des moindres.

Difficultés

Il est indispensable de bien connaître l'enfant afin de lui donner un enseignement efficace ; et le jeu qui occupe une place de choix dans ses activités, doit être étudié avec intérêt. Il s'avère que cette activité qui participe pour une grande part au développement de l'esprit humain, est de nos jours l'un des moins étudiés dans le continent africain.
Les raisons sont multiples. Voici quelques unes.
La 1ère raison est le fait de la colonisation avec son corollaire la scolarisation. Les jeux traditionnels africains ont été négligés et progressivement ont disparu de la vie de l'enfant. Ils ont été concurrencés et remplacés progressivement par les jeux venus d'ailleurs, qui sont mieux élaborés, alors que la plupart des jeux traditionnels se jouent dans du sable (initialement, l'Awalé se jouait dans du sable). Nous avons alors assisté sur le continent africain à l'introduction des "**jeux éducatifs**", comme si les jeux africains ne l'étaient pas. Le colonisateur, à l'exception de quelques uns, n'a pas pris le temps d'observer l'enfant africain jouer. Il y en a qui ont même déclaré que l'enfant africain ne jouait pas.
Avec la scolarisation, on assiste à la suprématie de certaines disciplines dite "**sérieuses**", négligeant ainsi d'autres. Dans ce contexte, le jeu fait piètre figure et les enfants jouent hors de l'école.
Le maître ignore tout de l'élève. Il n'a de lui qu'un masque scolaire. A la récréation, le maître à la conscience professionnelle la plus exigente, ne pensera pas à observer les enfants qui jouent, mais seulement à les surveiller ou à fumer une cigarette en échangeant avec des collègues les dernières nouvelles du milieu social.
La mutation de la société traditionnelle à la société dite moderne n'a pas été faite de façon harmonieuse. L'éducation traditionnelle, le fait des camarades du même âge, et sous le contrôle du gardien des traditions (un vieillard ou un prêtre) est passé au second plan. La mère à la maison n'a plus le temps de suivre son enfant. Elle ignore tout de lui, sauf un masque familial. Or dans la société traditionnelle africaine dans la plupart des cas, c'est la mère qui donne les premières leçons d'éducation à l'enfant. Or la mère moderne témoigne à l'égard des jeux une certaine indifférence. Le "**va jouer**" de la maman signifie : "**laisse-moi tranquille**".
La pénétration en Afrique noire de l'Islam et du Christianisme a contribué en partie à négliger les jeux traditionnels. Les jeux de hasard sont par exemple interdits par ces 2 religions.
Ainsi l'enfant africain se trouve amputer culturellement parlant, car nous dit Dazen, "**le jeu est le reflet de la société dont il transmet les valeurs fondamentales à l'enfant.**

C'est aussi un des grands véhicules de l'éducation ; il aide l'enfant à acquérir l'habileté technique, les rôles et les valeurs dont il aura besoin adulte".
La transmission du savoir en Afrique traditionnelle est donc menacée.

IV - MATHEMATIQUES ET CULTURES AFRICAINES

La plupart des jeux traditionnels sont initiatiques voir mystiques.
Chercher à puiser dans l'environnement socio-culturel africain matière à découvrir des relations entre les Jeux et les Mathématiques est sûrement une voie intéressante pour rendre l'enseignement de celles-ci plus concret.
Cette démarche qui se veut scientifique, donc rationnelle, ne suffit pas toujours à rendre compte de tout ce qui se passe ou se fait dans l'univers socio-culturel africain, régi la plupart du temps par des "**relations mystiques**" entre les Esprits, les Choses et les Hommes.
Le fait de classer les Jeux de cauris dans les Jeux de hasard a suscité des critiques de la part de deux ivoiriens.

1. Mme Chantal Esmel Lowes, journaliste :
"**Il reste cependant que des interrogations d'ordre philosophique demeurent qui nous invite à une réflexion plus poussée sur la possibilité d'affirmer, sans risque de tromper la réalité africaine, que le jeu de cauris est de hasard. Car le fondement mystique qui est le sien, en fait plus un jeu du destin des joueurs qu'un simple jeu de hasard**".
Le journal "**le Patriote n°72 du Vendredi 30 Octobre au Jeudi 5 Novembre 1992**".

2. Monsieur N'Guessan Dépry, Maître assistant, Spécialiste de la Philosophie des Sciences à l'Université Nationale d'Abidjan :
"**L'originalité des Jeux de cauris, c'est moins sa modélisation mathématique que toutes les valeurs culturelles qui sont attachées aux cauris eux-mêmes... Toutes les considérations mystiques ou métaphysiques ont indéniablement leur importance propre qui ne transparaissent pas dans le symbolisme de type mathématique tout simplement parce que l'axèse mathématique se donne le droit de les mettre entre parenthèse**".

A propos de la fonction divinatoire des cauris, il ajoute :
"**les jeux de cauris cessent d'apparaître comme un jeu de hasard. Car le livre de la vie humaine se donne à lire dans les cauris qui prennent un caractère sacré et expriment de ce fait une sorte de déterminisme mettant en jeu les pièces multiples sur lesquelles se joue avec certitude le présent et l'avenir**".

Séminaire Math.Philo-Enseignement.
Yamoussoukro : 25-29 Janvier 1993. (Côte d'Ivoire)

Ces réactions me confortent dans ma conviction qu'il faut étudier le jeu traditionnel à l'arrière plan du jeu pour pouvoir appréhender la culture négro-africaine dans ses multiples dimensions.

Mathématiques dans la vie quotidienne de paysans chiliens : stratégies de résolution de problèmes de proportionnalité[1]

Isabel SOTO[2]

1. Problème

A l'origine de la problématique où nous avons situé cette étude, il y avait fondamentalement trois idées.

- la constatation, établie par quelques chercheurs et par nos propres observations sur le terrain [au Chili], que les paysans adultes, peu ou pas scolarisés, et les enfants travailleurs, ont une **pratique mathématique quotidienne**, mais assez méconnue.
- une **remise en question de la conception des mathématiques enseignées comme une science achevée** avec des caractéristiques propres et incontestables.
- le besoin de regarder ce qui se passe en dehors de l'école, en ce qui concerne les pratiques spontanées des mathématiques, pour mieux comprendre ce qui se passe dans l'école au niveau des apprentissages en mathématiques.

Le problème de notre recherche s'inscrit dans le cadre général de l'enseignement des mathématiques, et, en particulier, de leur enseignement aux adolescents et aux adultes des secteurs populaires paysans qui demeurent en dehors du système scolaire formel.

Lorsqu'on veut approcher ce problème, on doit tenir compte du fait que les adultes ont besoin des mathématiques pour réaliser leurs travaux et, d'une manière plus générale, pour comprendre la réalité sociale, économique et politique.

Pour aboutir à certaines lignes de didactique des mathématiques pour les paysans, il nous semble fondamental de connaître d'abord quelles sont les mathématiques qu'ils font, le contexte où ils envisagent des problèmes mathématiques et comment ils les résolvent.

Dans cette étude avons essayé d'explorer le champ du savoir mathématique développé en dehors ou d'une manière plus ou moins indépendante de l'expérience scolaire formelle, c'est-à-dire lié à l'apprentissage quotidien du travail.

2. Objectif de cette recherche

Nous nous sommes donc proposé d'approcher la pratique quotidienne et spontanée des paysans adultes dans le but de

---

1 Nous présentons ici une partie d'une recherche plus large mené par l'auteurs dans le cadre de son programme de doctorat - chez Nicolas Rouche et Jean-Marie De Ketele, à l'UCL.

2 L'auteur est chercheur du Centre de Recherche et Développement de l'Education (CIDE) au Chili.

- décrire les pratiques des mathématiques des paysans chiliens.
- analyser tant les problèmes mathématiques qu'ils rencontrent que les procédures de résolution des problèmes et des opérations arithmétiques qu'ils utilisent,

à partir de l'observation de leurs activités de travail quotidien et d'interviews approfondies

3. La démarche sur le terrain

Le processus de récolte d'information s'est déroulé en deux étapes :

- la première étape était centrée sur
  - la constitution de l'échantillon
    - * 12 hommes - 6 femmes
    - * âgés d'entre 28 et 59 ans
    - * 15 ayant moins de 4 ans de scolarité, dont 5 analphabètes
  - et l'observation directe de leurs travaux

- la deuxième étape : interviews

nous avons interviewé chacun des **18 sujets, entre 2 et 5 fois, réalisant un total de 64 heures d'enregistrement** (plus de 1.000 pages transcrites).

4. Les trois thèmes analysés

A partir de l'ensemble de l'information analysée, nous avons repris, en suivant les critères de fiabilité, toutes les situations visant

- la **proportionnalité**,
- celles où les sujets résolvaient des **opérations arithmétiques**
- et celles où ils réalisaient des **estimations des surfaces des terrains**.

Nous allons présenter par la suite, un peu plus en détail, nos analyses et trouvailles par rapport aux problèmes de proportionnalité

5. Proportionnalité

Lorsque, même d'une manière rapide et sommaire, on passe en revue les problèmes ou situations mathématiques - attachés généralement aux mathématiques élémentaires - que nous trouvons quotidiennement dans notre vie professionnelle, familiale, politique ou sociale, on constate que le concept de proportionnalité joue un rôle fondamental, "ses applications sont innombrables et présentes dans tous les secteurs d'activité humaine". [Dupuis et Pluvinage, 1981, p.167].

L'apprentissage scolaire de ce concept a changé plusieurs fois, passant de la "règle de trois" des "mathématiques traditionnelles" aux fonctions linéaires des "mathématiques modernes", puis aux tableaux de proportionnalité des "mathématiques concrètes" [Dupuis et Pluvinage, 1981, p.167]. D'autre part, il n'est pas certain que l'apprentissage du concept de proportionnalité et de ses applications soit efficace dans la population scolaire.

5.1.Description de la méthodologie d'analyse

Pour l'analyse des problèmes de proportionnalité, nous avons considéré les situations proposées et résolues par quatre sujets :

Manuel, 59 ans, sans scolarité, analphabète;

Luis, 53 ans, études jusqu'à la 2ème.primaire, lit et écrit;

Joel, 56 ans, études jusqu'à la 6ème.primaire, lit et écrit avec difficulté;
Nelson, 49 ans, études jusqu'à la 4ème.primaire, lit et écrit avec difficulté.

Pour analyser l'ensemble de problèmes de proportionnalité résolus par les sujets, nous avons mis à point, à partir de l'analyse de bout à bout d'un des cas, un modèle comprenant les pas suivants :

A.- Analyse d'un cas

1 **rédaction de l'énoncé du problème** : tel qu'il a été énoncé par le sujet, contenant les données explicitées par le sujet.;

2 **identification de la procédure de résolution utilisée par le sujet** : transcription de la procédure orale en respectant sa chronologie et l'orientation des opérations;

3 **réalisation du schéma de la procédure** : chaque procédure a été évaluée sous la forme d'un schéma où on indique
- les éventuelles **décompositions du problème en sous-problèmes**,
- **les résultats intermédiaires**,
- la **direction de la procédure** et
- **le résultat final**.

Nous avons créé un instrument - les schémas à flèches, que nous verrons tout de suite - qui permettent non seulement de **dégager et de "visualiser"** les procédures, mais aussi de **les analyser du point de vue des rapport** utilisés par le sujets au cours du processus de résolution. Ce sont ces schémas qui nous ont permis d'**observer les passages d'un domaine de grandeurs à un autre domaine de grandeurs** et l'isomorphisme de leurs structures. ;

4 **mise en relation des situations du même type** : après avoir analysé toutes les situation, chez un sujet, nous avons mis en relation les situations du même type, afin d'établir tant les points communs que les différences
ou particularités par rapport aux procédures, aux opérateurs, au type de décomposition du problème, aux rapports établis et utilisés.

Nous avons pu identifier **quatre types de problèmes de proportions** [situations du type S_1, S_2, S_3, et S_4].

B.- Analyse globale

Finalement, suite à un processus semblable sur chaque sujet, nous avons fait l'**analyse globale** comprenant **tous les cas et toutes les situations.**

5.2. Description des différents types de situations-problèmes

S 1 Problèmes de changement d'unités. Exemple d'une telle situation :
calculer le poids en kilos de 50 quintaux, sachant implicitement qu'un quintal fait 100 kg.

S 2 Problèmes simples sur des grandeurs de deux sortes. Ce sont des situations où il s'agit de calculer -à partir de la valeur d'une unité ou d'une quantité différente de l'unité- soit le prix d'une quantité d'un produit, soit le rendement d'une surface déterminée de terrain, etc. Par problème simple nous entendons un problème dont l'énoncé ne comporte pas de sous-problèmes. Par exemple, calculer le coût de 3 sacs d'engrais, si un sac coûte $6.764.

S 3 Problèmes composés sur des grandeurs de deux ou trois sortes. Il s'agit de problèmes variés de calculs de prix, de rendement de la production, de paiement de la main d'oeuvre, etc. Par problème composé nous entendons un problème dont l'énoncé comporte implicitement ou explicitement un sous-problème. Par exemple : calculer le coût de la moisson de 1 1/2 ha de maïs, étant donné que pour 1 ha on paye 2 1/2 quintaux et que le prix pour 1 quintal est $4.500.

S 4 Problèmes de calcul de pourcentage. Il s'agit soit du calcul direct d'un pourcentage d'un nombre (15% de $624, par exemple), soit du calcul d'un prix final, étant donné tant le pourcentage à ajouter au prix brut que le prix brut (par exemple, calcul d'un prix "TVA comprise" à partir du prix hors TVA).

5.3. Analyse détaillée

5.3.1 Situations de changement d'unité (S1)

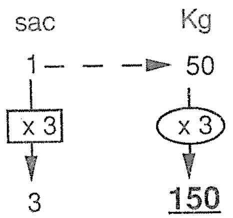
Première constatation, on observe deux procédures : l'une **sans décomposition du problème**, et une autre où **les sujets décomposent le problème en sous-problèmes**.

Exemple sans décomposition du problème :

Manuel

Problème : calculer le poids en kilos de 3 sacs, sachant implicitement que 1 sac fait 50 kg

Schéma de la Procédure[3] :



Manuel établit un **rapport interne** (entre les sacs), puis il applique ce rapport comme un opérateur sur les kilos. On observe donc ici la **conservation des rapports internes** dans le passage d'une unité à une autre.

3 Significations des symboles utilisés dans ce schéma et les suivants :
: relation entre les données
: direction de la procédure de traiter
: rapport établ
: opérate
: addition

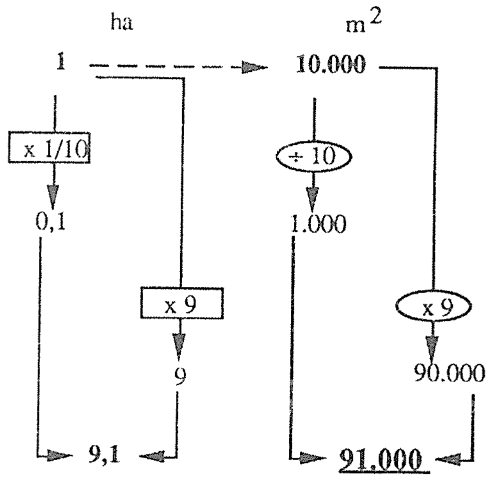
Il est à remarquer que dans ce cas il ne suit pas la procédure habituelle de changement d'unité, qui utilise le rapport externe (la nouvelle unité est 50 fois plus petite, donc le nouveau poids s'exprime par un nombre 50 fois plus grand). En termes d'opérations, il dit "3 fois 50" et non pas "50 fois 3".

Exemple avec décomposition :

Luis

Problème : calculer l'équivalent en mètres carrés de 9,1 ha, sachant implicitement que 1 ha fait 10.000 m^2

Schéma de la procédure :



Observons que les **rapports** que l'on peut établir entre les données sont, l'un **entier** (le rapport externe d'un hectare à un mètre carré : 10.000) et l'autre **non entier** (le rapport interne entre les aires: 9 et un dixième). **Luis** passe par des rapport internes et contourne la difficulté du rapport non entier 9 et un dixième en décomposant le problème.

La **procédure** utilisée peut se caractériser comme suit : on décompose le nombre dont on doit trouver l'équivalent dans la seconde unité (dans notre cas 9,1) pour établir des rapports internes simples; puis on compose la donnée. Ceci se passe dans la colonne de la première unité (les hectares). Ensuite, on utilise la même décomposition dans la colonne de l'autre unité (les mètres carrés) et on y applique les mêmes opérateurs et on compose la réponse finale du problème. On aperçoit nettement l'isomorphisme entre les deux colonnes.

Dans son premier calcul (d'un dixième d'hectare) **Luis** utilise un rapport non entier, mais qui est un sous-multiple de 10. Effectivement, la division par dix et ses multiples, ainsi que la multiplication, ne lui posent aucune difficulté. Puis le calcul des 9 ha restant se fait en utilisant le rapport entier 9. Remarquons que **Luis** utilise dans les sous-problèmes le diviseur 10 et le multiplicateur 9, ce qui est évidemment beaucoup plus simple que d'appliquer un opérateur tel que 9,1 directement.

D'autre part, bien qu'il aurait pu effectuer le calcul en utilisant le passage par le rapport externe (10.000), cela aurait peut-être affecté le **sens** du problème. Le passage par une proposition telle que "si j'ai 1 ha j'ai 10.000 mètres carrés, alors pour 9,1 hectares j'ai 10.000 fois...." fait problème. Qu'obtient-on? Des mètres carrés? Comment fais-je pour obtenir des mètres carrés lorsque j'agrandis 9,1 hectares 10.000 fois? Alors qu'un raisonnement du type "si j'ai 1 ha, j'ai 10.000 mètres carrés, alors, si j'ai 2 hectares (ou 9,1) hectares j'ai 2 (ou 9,1) fois plus de mètres carrés" semble être beaucoup plus proche de ce que l'on peut imaginer ou même voir naturellement dans le comportement des phénomènes.

Sur les 10 problèmes de changement d'unité que nous avons analysés [I. Soto, 1992], 8 ont été résolus en utilisant uniquement des rapports internes, et 2 (résolus par Manuel dans des cas où le rapport externe valait 100) sont passés par le rapport externe.

Ainsi, le plus souvent les rapport internes sont utilisés spontanément, même lorsque le rapport proposé dans les données est non entier. Le sens, la réalité du problème déterminent la procédure, même lorsque le rapport envisagé est difficile. Les difficultés opératoires sont contournées par des procédures variées de décomposition en sous-problèmes.

5.3.2. Problèmes simples sur des grandeurs de deux sortes (S2)

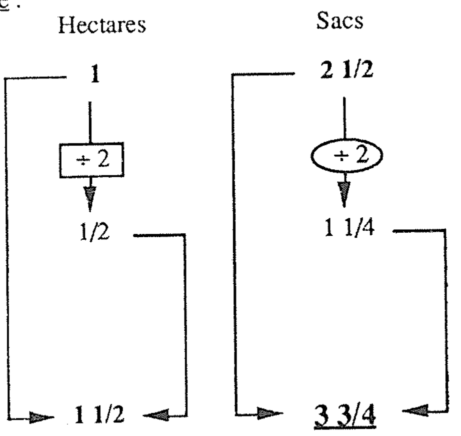
Les situations-problèmes du type S2 (en tout, 24 situations) proposées et résolues par les quatre sujets présentent, comme dans le cas de S1, deux types de procédures; celle où le sujet ne décompose pas le problème en sous-problèmes, et celle où il le décompose.

Les procédures sans décomposition sont quasiment identiques dans les problèmes des types S1 et S2. C'est pourquoi nous ne retenons ici que deux exemples avec décomposition. Voici un premier cas. Il s'agit d'un problème posé en termes de fractions.

Joel

Problème : calculer les sacs de semences nécessaires pour $1\frac{1}{2}$ hectare, si pour chaque hectare il faut avoir $2\frac{1}{2}$ sacs

Schéma de la procédure :



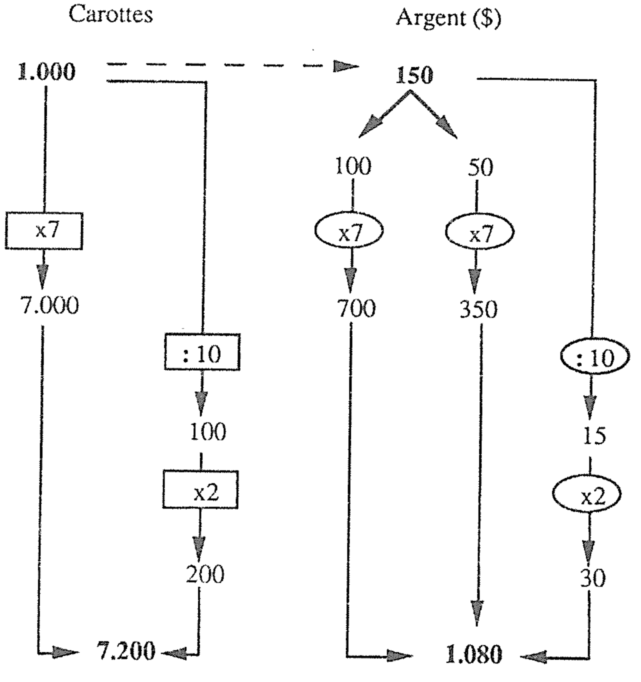
Que l'on passe par le rapport interne ou par le rapport externe, on ne peut éviter des opérations avec des fractions. Joel choisit le passage par des rapports internes et utilise la décomposition naturelle de $1\frac{1}{2}$ en 1 et $\frac{1}{2}$, évitant ainsi la fraction $\frac{3}{2}$. L'addition finale est alors réalisée sans peine sur les parties entières, puis sur les parties fractionnaires $(\frac{1}{2} + \frac{1}{4})$.

Voici une deuxième situation analogue à la précédente (rapports interne et externe non entiers) et qui fait voir une grande souplesse de procédure.

Manuel

Problème : calculer la valeur de la récolte de **7.200** carottes, si la récolte de **1.000** carottes coûte **$150**

Schéma de la procédure :



Dans ce cas, **Manuel** n'établit pas directement le rapport entre 1.000 et 7.200; il le contourne et procède comme on l'a déjà décrit (reconstitution de 7.200 à l'aide des rapports très simples établis à partir de 1.000). Mais il éprouve aussi, semble-t-il, des difficultés avec le produit de 150 et 7. Et il fait encore une décomposition du problème en calculant le prix de 7.000 carottes en supposant que le prix est $100 et puis $50 (c'est comme cela qu'il l'exprime). La décomposition des problèmes en sous-problèmes pour les simplifier atteint dans le cas présent un degré de souplesse étonnant. Il est frappant de constater la capacité de Manuel à mémoriser les résultats intermédiaires.

5.3.3. Problèmes composés sur des grandeurs de deux ou trois sortes (S3)

Dans ce type de situations, le schéma comporte trois colonnes, deux d'entre elles pouvant correspondre à une même sorte de grandeur. Un sous-problème consiste à mettre en relation les deux premières colonnes, le problème lui-même impliquant le passage de la deuxième à la troisième.

Nous constatons , comme dans les situations précédentes (S1 et S2), que le passage par des rapports internes est privilégié par les sujets, et qu'ils utilisent des procédures avec et sans décompositions (quoique pour ces dernières dans deux cas sur sept).

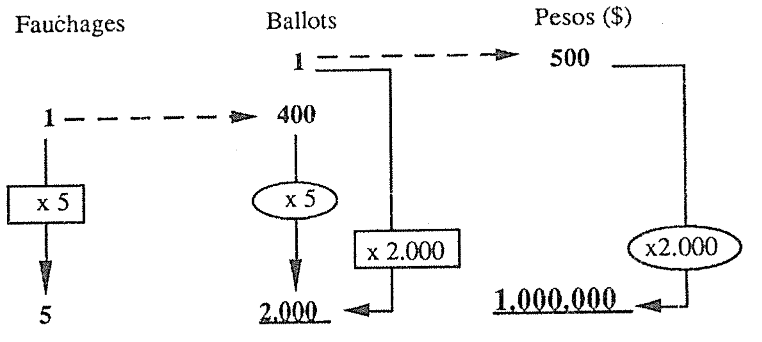
L'analyse détaillée nous a permis d'observer une grande souplesse des procédures. En effet, dans la majorité des cas, les sujets ont utilisé des procédures différentes lors du passage de la première à la deuxième colonne, et du passage de la deuxième à la troisième. Ils ont donc travaillé en réalisant des schémas de même structure dans la première et la deuxième et **ensuite** dans la deuxième et la troisième.

Voyons un problème où le sujet à procédé sans décomposition, mais néanmoins a utilisé deux procédures différentes.

Joel

Problème : Calculer les rentrées que l'on peut obtenir de la vente de fourrage, si on fauche 5 fois le même pré, sachant qu'à chaque fois on obtient 400 ballots, et que le prix d'un ballot est $500

Schéma de la procédure :



Joel appuie ses procédures sur la conservation des rapport internes et passe par un sous-problème correspondant aux deux premières colonnes. Il calcule d'abord la production totale, puis le prix total à partir de ce résultat. Il aurait pu calculer le prix d'un fauchage (à partir du prix d'un ballot) et puis le prix de 5 fauchages. Mais, s'il avait utilisé cette procédure, il aurait dû effectuer deux multiplication (500 x 400 et 2.000 x 5) et non une seule (500 x 2.000). D'autre part, la question à laquelle il voulait répondre - et qui n'apparaît pas dans le problème - c'était les rentrées de toute l'année, c'est-à-dire que, dans la réalité Joel n'était pas intéressé au prix de chaque fauchage. C'est peut-être aussi un élément qui détermine sa procédure.

Dans les situation résolues suivant des procédures de décomposition nous avons aussi observé - sauf pour un cas - l'utilisation de décompositions différentes, c'est-à-dire que les sujets ont utilisé une décomposition pour le passage de la première à la deuxième colonne, et une autre pour le passage de la deuxième à la troisième. On observe à nouveau que le choix des procédures est influencé par les difficultés opératoires, d'une part, et par la réalité, le sens du problème, d'autre part.

Voici maintenant une situation-problème illustrant cette analyse. Il s'agit d'un problème où le passage se fait entre domaines de grandeurs d'espèces différentes : de surfaces à poids, puis à l'argent.

Luis

Problème : Calculer le coût de la moisson de 1 1/2 hectare de maïs, étant donné que pour 1 hectare, on paie 2 1/2 quintaux et que le prix pour 1 quintal est $4.500

Schéma de la procédure 1 (premier sous problème) :

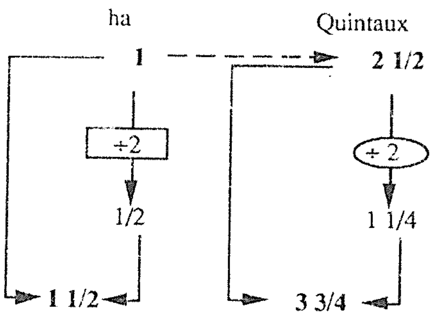
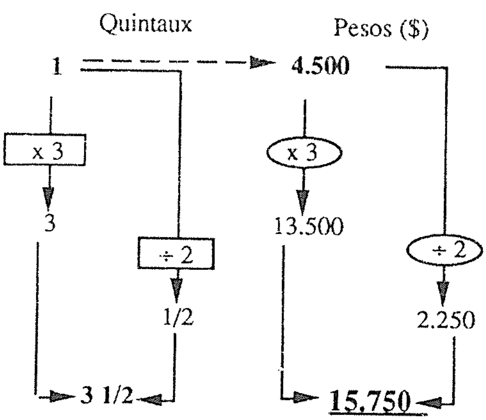


Schéma de la procédure 2 : (deuxième sous problème)



Signalons que dans la première partie (calcul du paiement en quintaux, Schéma 1) le rapport interne n'est pas entier (c'est $\frac{3}{2}$), et que **Luis** l'exprime comme $1 + \frac{1}{2}$. Le rapport externe n'est pas entier non plus (c'est $\frac{5}{2}$). On observe que **Luis** utilise le rapport interne et fait une décomposition qui suit l'interprétation naturelle : un sac plus un demi sac. Cette décomposition est la même qu'il avait déjà utilisée dans un problème antérieur.

Lorsque **Luis** arrive au calcul du paiement en argent ($), il ne prend pas comme point de départ le rapport interne entre $2\frac{1}{2}$ quintaux et $3\frac{3}{4}$. Il transforme d'abord cette solution en une solution réelle ("on ne paie pas le quart, c'est trop peu et en plus si le travailleur avait mangé chez moi..."), et il va prendre par la suite 3 quintaux et demis.

Ensuite **Luis** revient sur la relation initiale entre les données (1 quintal coûte $4.500, Schéma 2) et effectue le calcul à ce moment en établissant cette fois deux rapports successifs à l'unité. Ces rapport sont récupérés comme opérateurs dans l'ensemble d'arrivée et on peut observer la symétrie des structures dans les deux ensembles. Par contre, les trois colonnes ne sont pas du tout de même structure.

Nous pouvons déjà esquisser une conclusion : les paysans interviewés éprouvent quelques difficultés à l'égard de la notation formelle des fractions et dans les opérations formelles avec des fractions. Mais il font des "lectures" correctes des fractions et il créent des procédures opératoires adéquates. Par exemple, lorsque **Luis** divise $2\frac{1}{2}$ par 2; il divise d'abord l'entier 2 et puis la fraction $\frac{1}{2}$. Pour l'addition il fait de même : addition des entiers, puis addition des fractions. Chez d'autres sujets, nous avons observé cette même procédure d'exécution des opérations avec des fractions.

5.3.4. Problèmes de calcul de pourcentage

Il nous a parut intéressant d'observer dans les calculs de pourcentages, d'une part, comme ci-dessus la flexibilité des procédures et, d'autre part, l'expression de la notion de pourcentage. Etant donné qu'une des caractéristiques fondamentales de ce type de problème est la référence à une norme (à savoir 100), nous nous sommes demandé si les sujets utilisent des procédures semblables à celles décrites précédemment (S1, S2 et S3) ou si leurs procédures sont plus proches des procédés scolaires traditionnels.

Une première constatation : des quatre sujets repris dans cette analyse, l'un applique, dans 5 des 6 problèmes, directement une formule apprise.

Voici un exemple.

Joel.

<u>Problème</u> : calculer le prix d'un article plus TVA, étant donné que le prix brut est de $450 et la TVA de 18%

<u>Procédure</u> : on multiplie par 18 et divise par 100

$$450 \times 18 = 8.100$$
$$8.100 \div 100 = 81$$

Addition : 450 + 81 = 531 (faite mentalement de même que la multiplication par 18 où il à utilisé une décomposition en facteurs)

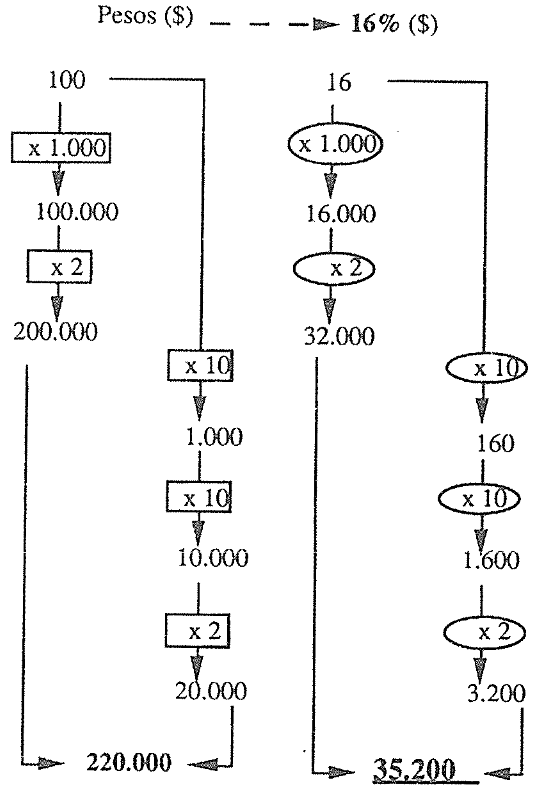
Effectivement, Joel multiplie par 18 et divise par 100, tout en expliquant qu'il procède ainsi parce que le rapport "est difficile, donc on le fait comme dans la calculette". Par contre, dans un problème où il devait calculer 8% de 700, il trouve la rapport entre 100 et 700 (7) et l'applique comme opérateur sur 8. Cette procédure montre que Joel comprend bien la notion de pourcentage.

Dans tous les autres cas, les sujets utilisent le rapport interne que l'on peut établir dans les colonnes. Voici un exemple.

Nelson

Problème : Calculer la TVA (16%) correspondant à une vente de $220.000 (TVA non comprise)

Schéma de la procédure :



Comme on l'observe dans le schéma, Nelson procède à une très longue décomposition du nombre sur lequel il doit calculer 16%, tout en disant qu'il faut calculer d'abord 16% de 100.000, puis de 200.000 et ainsi de suite.

Dans ce problème il est clair que les décompositions déterminant la procédure dépendent de la complexité du rapport. En effet, **Nelson** éprouve quelques difficultés pour établir certains rapports. Lorsqu'il établit le rapport entre 100 et 100.000, il le fait directement. Mais, le rapport entre 100 et 10.000 passe par une décomposition de ce dernier nombre. En effet, il établit d'abord le rapport entre 100 et 1.000, puis entre 1.000 et 10.000. On peut penser qu'il y a pour **Nelson** des rapports en quelque sorte "plus naturels", qui découlent directement du langage.

Nelson, comme tous les sujets repris dans cette analyse, prend comme point de départ la notion de pourcentage, puis il établit des rapports internes dans la première colonne et les applique comme des opérateurs sur les données de la deuxième colonne. Nous n'avons trouvé qu'un cas exceptionnel où Manuel résout une des situations en passant tant par des rapports internes qu'externes. Il s'agit d'une décomposition tout-à-fait semblable à celle analysée dans la Section 4.2. On peut penser que Manuel utilise des rapports externes pour contourner la difficulté présente dans les deux cas d'opérer avec le nombre 15 (calcule du prix de 7.200 carottes si le prix de 1.000 carottes est **$150**; ici il s'agissait de calculer **15**% de 30).

A notre avis, il est clair que la flexibilité des procédures et de leur application est en relation avec de la complexité des opérations. On constate que dans la majorité des situations-problèmes proposées par les quatre sujets repris dans cette analyse, ils utilisent une procédure qui prend comme **point de départ la notion de pourcentage**. En effet, ils expriment avant tout ce que veut dire "x%" par rapport à la norme 100, tout en démontrant clairement sa signification. Dès lors, c'est à partir de ce premier résultat que les **rapports** qu'ils établissent **dans l'ensemble de départ** entre 100 et le nombre sur lequel on doit calculer un certain pourcentage vont avoir du sens et vont pouvoir se transformer en **opérateurs** qui agissent **sur des éléments** de **l'ensemble d'arrivée** (ensemble des résultats).

C'est ainsi que cette notion - si mystérieuse pour tant des nos élèves à l'école - trouve chez ces sujets une signification assez concrète et réelle, tout-à-fait compréhensible et utile.

6. Conclusion

Nous avons décrit et analysé un très large ensemble de problèmes de proportions proposés et résolus par quatre paysans, dans le but de mettre en évidence leurs procédures.

Pour cela, nous avons d'abord fait une analyse complète d'un des quatre cas (Manuel), laquelle a servi de modèle tant pour analyser globalement l'ensemble des situations que pour chacune d'elles. C'est ainsi que nous avons pu identifier quatre structures différentes sous-jacentes aux problèmes (situations des type S_1, S_2, S_3, et S_4).

D'autre part, nous avons créé un **instrument - les schémas à flèches** - qui permettent non seulement de dégager et de "visualiser" les procédures, mais aussi de les analyser du point de vue des rapports utilisés au cours du processus de résolution. Ce sont ces schémas qui nous ont permis d'observer les passages d'un domaine de grandeurs à un autre (d'une colonne à une autre) et l'identité de structure entre colonnes.

Une analyse détaillée des procédures **a montré qu'elles sont assez éloignées des algorithmes scolaires formels**. En effet, nous avons constaté dans les quatre types de situations que les sujets utilisent notamment deux procédures :

- le passage par des **rapports internes**, c'est-à-dire qu'ils opèrent sur un domaine de grandeurs - le domaine de départ - et qu'ils reproduisent ces rapports dans le domaine d'arrivée, construisant ainsi des structures de calcul identiques;

- et la **décomposition du problème** en sous-problèmes.

Les problèmes de linéarité peuvent être résolus de diverses façons en passant par des rapports internes ou externes. **Les paysans interrogés saisissent la structure complexe de ces problèmes et trouvent une voie inspirée par la recherche du moindre effort opératoire et passant le plus souvent par des rapports internes.**

Dans le cas des **procédures de décomposition**, nous observons que **les sujets cherchent à simplifier tant les rapports que les opérations.** On voit en effet que, dans toutes les procédures de décomposition, il y avait un rapport non entier et/ou des opérations complexes (avec des opérateurs de plus d'un chiffre, par exemple).

L'utilisation des rapports internes permet de constater que les sujets comprennent et maîtrisent très bien la linéarité, dont une des lois est la conservation des rapport internes entre grandeurs. D'autre part, elle nous renvoie aux questions sur le sens du problème. Si l'on suit le **raisonnement oral**, on voit que **les sujets restent toujours attachés au sens original du problème.** On "voit" tout le temps les hectares, les sacs, les kilos, etc. En d'autres termes, même en passant par la décomposition des problèmes, le fait d'établir des rapports internes dans le domaine de grandeurs de départ permet aux sujets d'arriver à des résultats intermédiaires qui ont du sens et de conserver le sens général du problème d'origine.

Au delà des constatations et conclusions relatives aux procédures particulières, répétons que, même s'ils éprouvent des difficultés opératoires, **ils n'ont pas de difficultés au niveau de la proportionnalité en tant que structure mathématique complexe.** Cela nous semble une constatation très importante pour la formulation des programmes d'enseignement des mathématiques, en particulier ceux orientés vers les adultes des secteurs populaires.

Elle met en question les manières traditionnelles de sélectionner les contenus mathématiques et les séquences où on va habituellement des contenus simples aux plus complexes. Mais les définitions de "simple" et "plus complexe" répondent à des analyses internes à la discipline mathématique, qui ne prennent pas en compte les expériences et les acquis des sujets qui vont "subir" ces programmes.

Traditionnellement, on commence par les nombres, ensuite on introduit les opérations, et beaucoup plus tard on arrive à la résolution de problèmes de linéarité.

Dans le cas des paysans, tout au moins de ceux qui ont participé à cette étude, il ne serait pas exclu de travailler, par exemple, l'apprentissage et la formalisation des opérations élémentaires à partir des problèmes de proportionnalité. Ce qui est "le plus complexe" du point de vue d'une analyse strictement mathématique des contenus , n'est pas nécessairement le plus complexe ou le plus mal connu pour les sujets adultes ayant une pratique mathématique quotidienne.

D'autre part, il nous semble que ces procédures orales décrites et analysées, qui montrent que les individus ont une grande compréhension de la structure sous-jacente aux problèmes, et qui permettent de garder toujours présent à l'esprit le sens du problème, peuvent être fort utiles non seulement dans l'enseignement en dehors de l'école, mais aussi dans des situations scolaires formelles chez les enfants.

Les problèmes mathématiques sont résolus par les sujets dans leur contexte quotidien. Donc, chacun des problèmes mathématiques qu'ils résolvent tiennent une place importante dans la prise des décisions. C'est là que les problèmes spécifiques et leur résolution prennent leur sens.

Ce qui est le plus important pour l'éducation populaire autant que pour la didactique des mathématiques, c'est de

- déclencher des processus d'apprentissage des mathématiques à partir des problèmes réels, comme celui de l'optimisation de la relation semences/production ou celui du contrôle administratif-comptable,

- où l'introduction des certains contenus mathématiques serait non seulement nécessaire mais pertinente

- et où l'apprentissage pourrait effectivement s'appuyer sur les pratiques, connaissances et intuitions des sujets.

En effet, habituellement on apprend un seul algorithme. On fait suivre l'écriture des données "d'un calcul routinier qui ne tient pas compte du sens" [Nunés, 1991, p.120]. On pourrait proposer des situations où les élèves cherchent, inventent leurs propres chemins variés de résolution, et dans une analyse postérieure chercher des pistes pour la formalisation mathématique. Faire des mathématiques, nous l'avons déjà remarqué, n'est pas trouver l'unique bonne réponse par l'unique bonne méthode.

Enfin, il y a encore quelques question dont on devrait chercher quelques réponses.

- Comment les sujets ont-ils appris les mathématiques orales qu'ils pratiquent?

- Les sujets peuvent-ils résoudre n'importe quel problème - de proportionnalité, par exemple - dans n'importe quel contexte?

- Dans des contextes différents, vont-ils utiliser le même type de procédure?

- Qu'est-ce qu'on sait des étudiants - d'école élémentaire, secondaire et universitaires - par rapport à l'utilisation des stratégies "non formelles" de résolution de problèmes mathématiques?

- Comment pourrions nous tenir compte de ces stratégies dans les processus scolaires d'apprentissage des mathématiques, c'est-à-dire, dans leurs processus de "faire de maths" à l'école?

ETHNOMATHEMATICS, HISTORY OF MATHEMATICS AND THE BASIN METAPHOR

D'Ambrosio Ubiratan

1. Introduction.

Much has been said about the universality of Science. This concept of universality seems to become harder to sustain as recent research, mainly carried on by anthropologists, show evidence of practices, such as health care, instrumentation, tools, artifacts in general, which are typically scientific, and methodological practices, such as observing, counting, ordering, sorting, measuring, and weighing, all performed in radically distinctive ways in different cultural environments. This has encouraged further studies on the evolution of scientific concepts and practices within a cultural and anthropological framework. We feel this has been done only to a very limited, and we might say very timid, extent.

On the other hand, there is a reasonable amount of literature on this by anthropologists and psychologists. To relate these researches with the work of historians and philosophers of Science and Mathematics is an important step towards a broader understanding of Science and Mathematics and their places in modern society. This has been the essence of my work in the Programme Ethnomathematics[1]. I feel this is an important step towards recognizing different modes of thought which lead to different forms of science, which we may call Ethnosciences.

There has been much research on ethnoastronomy, ethnobotany, ethnochemistry and so on. Particulariy, ethnomethodology is of growing importance in general sociology.[2] Researchers in this field rely on ethnography, conceptualized as the use of direct observation and extended field research producing a naturalistic description of peoples and their culture, uncovering codes, symbols and categories of analyses which these peoples use to conceptualize, to explain, to understand, to interpret reality. Obviously these intellectual instruments, codes, symbols and categories of analysis, derive from the natural and cultural environment within the reach of individuals and peoples. The generation of these instruments is the essence of studies in cognition and culture.[3]

Although there is an implicit contradiction when we talk about ethno-disciplines, research conducted by specialists in the current academic disciplines tend to transfer the disciplinary reduccionism to the ethnomethodologies. By positioning ourselves in a multidisciplinarian, interdisciplinarian and transdisciplinarian dimension, that is, in a holistic perspective, we may overcome these contradictions. We are thus lead to regard ethnoscience in a much broader way, avoiding the reductionist distinction of chemical, physical and biological phenomena, and other dychotomies such as C.P. Snow's two cultures and rejecting the view that mind and body as distinct, even autonomous, entities. These two forms of reductionism have been disastrous in looking into the History of Science. Particularly serious is the situation of Mathematics, whose

---

[1] I use wording Programme in a sense closer to I. Lakatos. It is a clear recognition of the dynamical characteristics of knowledge: from ist generation it goes through organization , both intellectual and social, and through its diffusion. Although each of these aspects is studied in a discipline, respectively cognition, epistemology, history, politics and education, it is practically impossible ti understand and explain knowledge in such a fragmented way.Our use of the word "programme" reveals a holistic approach.

[2] Wes Sharrock and Bob Anderson *The Ethnomethodologists* Ellis Horwood Limited, Chichester, 1986 gives an introduction to this new research area.

[3] See Maxime Sheets-Johnstone *The Roots of Thinking*, Temple University Press, Philadelphia, 1990 for a good introduction to the theme. A deeper look will benefit from reading the papers in Francisco J. Valera and Jean-Pierre Dupuys, eds. *Understanding Origins* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.

essence is lost in the reductionist context. The epystemologies of mathematics which are bound to the reductionist paradigm are obviously distorted - unless one regards mathematics as culture free, which is the most current view. These major distortions are transfered to the History of Mathematics. Ethnoscience allows us to avoid these distortions. We use the term Ethnomathematics as the intellectual constructs that precedes and organize those considered in science. We will now explain the fundamentals of this terminology.

2. The Programme Ethnomathematics

These remarks invite us to look into the History of Science in a broader context, so as to incorporate other possible forms of knowledge of natural phenomena. But we go further on these considerations by saying that this is more than a mere academic exercise, since its implications for a redeeming pedagogy are obvious. To justify this assertion we appeal to the recent advances in cognitive science, which show how strongly culture and cognition are related. Although for a long time there have been indications of a close connection between cognitive mechanisms and cultural environments, the reductionist tendency, which goes back to Descartes and to a certain extent has grown in parallel to the development of Science, tended to dominate education until recently, implying culture-free cognitive theories. This is the essential criticism to piagetian approaches to both education and history.

Let us look briefly into some aspects of Science through history, mainly from the point of view of its transmission and institutionalization. We need some sort of periodization for this overview, which corresponds, to a great extent, to major turns in the socio-cultural composition of Western History. It would be very difficult for us to get started with a periodization based in the history of other civilizations, although we grant all the biases resulting from this. Mathematical ideas, understood as practices and reflexions which deal with quantity and quality. Measurement, counting, inferring, ordering, classifying, spatial configuration and other similar behaviors appear universally as the earliest structured forms of knowledge. These were recorded in every civilization before other forms of knowledge. "The category 'mathematics' is Western and is not found as such elsewhere. That is not to say that mathematical ideas [as those mentioned above] do not exist; it is rather that others do not distinguish them in the same way"[4] . On the other hand, in the language of J.F. Montucla, mathematics appears as the essential first manifestation of knowledge, even preceeding philosophy. Indeed, to explain, to understand, to cope with reality, for which we use the Greek root *mathema*, has been, since the early ages of our species, the first manifestation of intellectually organized knowledge, transmitted from generation to generation. In the process of acquiring this knowledge, it was structured and organized according to the cultural, and obviously the natural environment, thus generating different ways, different styles, different modes, different techniques (one may use the root *techné*, that is, different *technés*) of explaining, of understanding, of coping with reality. We refer to this as the elaboration of different *tics* of *mathema*. The socio-cultural and natural environmental dependence for these developments is expressed by the prefix *ethno*. Thus when we see knowledge as part of the evolution of mankind we refer to *the generation of* <u>*tics*</u> *of mathema according to different* <u>*ethnos*.</u> We have thus coined the term <u>ethno mathema tics</u>. This obviously includes but is not restricted to the concept of mathematical knowledge referred to by J.F. Montucla. This is true not only in Greek civilization, but in every culture. Of course, the development of different modes of thought gave way to different disciplines as these modes of thought became known. So when talking about knowledge identified as Science, as Philosophy, as Art, as Religion, we are indeed looking into distinct forms of explanation, of understanding, of coping with reality.

This is ethnomathematics. The Programme Ethnomathematics looks into the generation, the intellectual and social organization and the diffusion of forms of explanation, of understanding, of coping with reality in different socio-cultural and natural environments. Of course, a

---

4 See the chapter by Marcia Ascher and Robert Ascher : 12.1 Ethnomathematics in *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, 2 volumes, ed. I. Grattan-Guinness, Routledge, London, 1994, pp. 1545-1554; p. 1545.

comparative study is absolutely natural. When looking into the History of Mathematics, now referring to the discipline recognized as such by standards that were set after the XVII and XVIII centuries, we recognize the Programme Ethnomathematics as germane.

The Program Ethnomathematics must be interpreted in the broad sense of scientific knowledge in general. Indeed when coining the word ethnomathematics I indulged in an "abus d'étymologie". A similar need was felt by Master Bourbaki fifty years ago! Indeed "ethno" stands for culture or cultural roots, but we extended it to natural environments, obviously closely related. "Mathema" is the Greek root for learning, understanding, hence explaining, and we extended it to include, which is obviously closely related to, dealing and coping with reality, and "tics" is a modified form of techné, which in in the root of the words arts, techniques, which are onviously different modes of thought. Thus "ethnomathematics" stands for distinct modes of explaining and coping with reality in different cultural and environmental settings. This is a broad theory of knowledge, in which we recognize, as said in the beginning, that codes of measurement, counting, inferring, ordering, classifying, spatial configuration are the earliest manifestations, both in the development of children and in the intellectual development of mankind. It is absolutely natural to identify sources of knowledge with the *mathema*. Obviously, not with the different tics developed in distinct *ethnos*.

Although the idea of examining the strong links of Science and Mathematics with the socio-cultural and natural environment has been going on for some time, these links have always been faced as less fundamental than the inner organization of theories themselves. Formal logics has reached the status of rationalitypar excellence. Science and Mathematics rely on logics and have been considered as context-free. Some timid exceptions are seen mainly in a few elementary curricula. Ethnomathematics covers all the practices of scientific and mathematical nature, such as sorting, classifying, counting, measuring, which are performed differently in different cultural settings, through the use of practices acquired, developed and transmitted through generations. Of course, reasoning, inferences and forms of logics are thus noticed.[5] An important contribution to ethnomathematics comes from the work of anthropologists since the beginning of the century and more recently of psychologists and sociologists, who have recognized different ways of counting and measuring, even of classifying and of inferring, in distinct native cultures all over the world.

It is possible that the term ethnomathematics was used before, by some reseracher, although I have not seen it before. Ethnobotany, ethnopsychiatry, ethnomethodology and several others of a similar nature have been in use for some time, in most cases referring to the respective practices of native populations. Some scholars see ethnomathematics restricted to this sense. Although this narrow sense is not excluded from our program, our concept of ethnomathematics is much broader, as I have explained above.

The steps from the generation through the progress of knowledge, in particular of mathematical knowledge, is the result of a complex conjunction of factors. Among them we recognize practices resulting from immediate need, relations with other practices and critical reflexion, hence theorization over those practices, curiosity and some sort of intrinsic cultural interest. Thus, the Programme Ethnomathematics calls not only for a broader view of Mathematics, embracing practices and methods related to a variety of cultural environments and normally left aside, but also a more comprehensive, contextualized perception of the processes of generating, organizing, trasmitting and disseminating mathematics throughout the History of Mankind.

There have not been doubts that the factors mentioned above in the generation of mathematical ideas produce ad-hoc knowledge. The main question is to realize when ad-hoc knowledge passes to methods and theories and from theories how does one proceed to invention. These questions are germane to any investigation of the nature of knowledge, both from the historical and the epistemological viewpoint.

---

[5] See the recent book by James F. Hamill *Etno-Logic: The Anthropologiy of Human Reasoning* University of Illinois Press, Urbana, 1990. The author discusses the wayt people reason. This is an important background study for Ethnomathematics.

In the specific case of mathematics, these questions give rise to challenging questions:

i) where do mathematical ideas come from;
ii) how are them organized;
iii) how does mathematical knowledge advance;
iv) do these ideas have anything to do with the broad environment, both socio-cultural and natural;
v) what is the time span between advances in mathematics and their incorporation in the educational process?

To understand the Programme Ethnomathematics, it is first of all necessary to accept the fact that Mathematics is a construct of human mind. It is knowledge generated by human beings, organized in a certain intellectual framework which is recognized by its practitioners as Mathematics. Let us not attempt to define Mathematics. The breadth of the domain of Mathematics is seen in the Subject Classification of MR/ZM, as well in the recent published Volume II of the American Mathematical Society Centennial Publications *Mathematics into the Twenty-first Century*. Although some scholars trace the History of Mathematics back to Classical Antiquity, the characteristics of current Mathematics are easier to recognize after the 17th Century.

In general, it is practically impossible to isolate Mathematics - and indeed any other form of knowledge - from others disciplines in the historical period longer than 400 years ago. How can one fail to relate the Olympic Games with the naissance of Greek Mathematics? Or the religious rituals of the Xingu tribes in Brazil with the development of their Sacred Geometry? The cost of a reductionist look into history, normally the result of epistemological biases, is a narrow and distorted vision of history. To look into history as the overcome of epistemological obstacles is an example of such a narrow approach. Epistemological "regards" into the past are biased views of history. Much of the appeal to a Greek heritage may lead to extremes. It is not inappropriate to recall a comment by Peter Calvocoressi when he refers to a German speaking community in India about a thousand years ago: "Similar surmises supposed the Trojans to be Germans who had got to Troy in some Germanic *Völkerwanderung*"[6]. This leads to a false impression, conveyed through traditional historians and philosophers of Mathematics, of a continuity of Greek Mathematics into Modern Mathematics. This is much of what we might call the "umbilical" view of the History and Philosophy of Mathematics. The contributions of European medieval thought, particularly during the build up of Christianity, to Modern Mathematics (understood as the Mathematics springing out of Descartes, Newton and contemporaries) can not be ignored. But it is difficult to isolate and sometimes even to recognize Mathematics as the result of the cultural efervescence of a certain period. This is exemplified by the study of knowledge in the Middle Ages in various distinct cultural traditions. Looking into the Roman times and to other cultures of the period, there are many practices, modes of thought and theories which have many characteristics of what we now label Mathematics but which would not be called Mathematics nowadays. This is also seen in many manifestations of Greek and Islamic intellectual production.[7] Our construction of History, about 1,500 years later and with all the identifiable biases, sometimes gets closer to Science fiction[8].

---

6 Peter Calvocoressi "A whorl on a stone" *Times Literary* Supplement N° 4785 (12/16/94), p. 32.

7 The views expressed by Said al-Andalusi (1029-1070) in the *book of the Categories of Nations* translated and edited by Semaan I. Salem and Alok Kumar, University of Texas Press, Austin, 1991 are a good support for these remarks.

8 Historians of Mathematics probably would benefit more in looking closer into the Philosophy of History than the Philosophy of Mathematics. It is clear that, the same as Logics, Philosophy of Mathematics and Epistemology in general are part of current thought, in particular of current ideology, hence are chapters of the accepted Mathematics nowadays. They are obviously disciplines subbordinated to History. To look into thesedisciplines with current views causes several distortions, since obviously current History will influence the subcordinated disciplines. See the beautiful essay of Bernard Lewis *History Remembered, Recovered, Invented* Princeton University Press, Princeton, 1975.

3. Human Behavior and the Generation of Knowledge

Generation of knowledge is a permanent activity of human beings. It goes on and on in different environmental settings, according to needs, curiosity and other forms of stimuli. Among the several stimuli we have to consider cultural encounters and mutual exposition of different modes of thought. This has been well studied by Gregory Bateson.[9] In the evolution of cultural forms subjected to mutual exposition, the possibilities are first an absolute domination of one form, either leaving the others in the state of latency or eventually, the total elimination; second, allowing co-evolution, which eventually leads to new cultural forms. This second possibility occur in systems which are tolerant of the different, of the stranger. A well known example is early Islam. In this case the evolution has a strong participation of popular strata of society. Regretably, much of this escapes the analysis of academic history. An important trend in the historiography of the late 400 years, represented mainly by George Rudé, E. J. Hobsbaum, Christopher Hill, looks into "history from below".[10] This is particularly important in the History of Mathematics in medieval times and early renaissance.

There has recognition of the role of Islam in transmitting Greek Mathematics and now there is a growing trend in historiography to recognize original contributions of Islam and the contribution of African, Indian and Chinese cultures during the Eastern middle ages. These facts have been downgraded in the traditional historiography of Mathematics, which by and large originated from the imperial European historiography of XVIII and XIX centuries. It is unsustainable the argument, still prevailing, that there might have been some mathematical activities in the peripherical nations in the past, but that those were activities of an ad-hoc nature, not structured as formal knowledge [11]. Thus the consideration of its history does not belong to the History of [World] Mathematics. At best one would say that it does not belong to the History of European Mathematics, as one might argue that European Mathematics does not belong to the History of [World] Mathematics. The character of the universality of Mathematics is historically unsustainable. Universality in the History of Ideas is a fabrication of the colonial ideology.

A new historiography reestablishing authentic universality is needed. There is much agreement about this in several areas of knowledge, but the History of Mathematics seems to be regarded as immune to this movement. Indeed, the tone of some reviews and referee reports on recent books and papers on the History of Mathematics focusing on this sort of redeeming cultural history or a non-eurocentric view, is discouraging and sometimes contemptuous. The quote "No one would dare to propose now, as did some scholars in the middle of this century, that there might be an African past, but that for the lack of writing its history did not exist"[12] expresses what I mean. Indeed, categories which were introduced in the last two or three centuries are used to disqualify historicity exactly in the same vein as the use of writing, as in this quote. Obviously, African applies to any peripherical nation and writing can be understood as any form of register and codified knowledge. These are not clearly recognized in many cases. Recent scholarship in pre-columbian cultures illustrate this. Mayan books were used as exotic "wall paper" in XIX century Germany.[13] This is also clear when we notice that the first non religious book published in the New World was a treatise dealing with the arithmetic of the

---

[9] Gregory Bateson *Steps to an Ecology of Mind* Ballantine Books, New-York, 1972.

[10] See the good synthesis in Frederick Krantz ed. History from Below - *Studies in popular protest and popular ideology* Basil Blackwell, Oxford, 1988. The methodology proposed is quite interesting for History of Sciences

[11] Michael Closs has identified recently, among the Mayas, a group of individuals that may be recognized as professionals in Mathematics.

[12] B. Jewsiewichi and V. Y. Mudimbe "Africans' Memories and Contemporary History of Africa" *History and Theory* vol. 32, n°4, 1993; p. 1.

[13] See the excelent account of the deciphering of pre-columbian scripture in Michael D. Coe *Breaking the Maya Code* Thames and Hudson, New York, 1992. For the wall paper episode see page 79.

Aztecs, in 1557[14] Less than a century later, this book had lost its interest and underwent a complete oblivion, and with it pre-columbian arithmetic. It was replaced by the arithmetic of the Spaniards. Of course, the suppression of the history of a people implies the removal of all traces of structured knowledge, labelling all forms of knowledge as ad-hoc, easily and contemptuously labelled "popular wisdom", superstition and folklore.

The multiplicity of cultural factors that are regarded as essential in the definition of human behavior can not exclude the modes of explanation, of understanding, of coping with reality, and this means "ethnomathematics". This is essentially the dynamic process of the production of new forms of thought, of more sophisticated expressions of the ingenuity of individuals and societies in satisfying their needs of survival and of transcendence. This is the obvious result of the process of cultural dynamics.

Distortions in this process was and continues to be done in the name of a god, of customs and morals, of "civilization", of democracy - in lieu of of submission to the King! - of "better health", of modernity, of progress, of stable economy, of sustainability, of higher productivity, and so on. We find the rethorics of conquest or of the civilizatory process, of which the previous examples illustrate strategies based in Mathematics, practically unchanged in its essence since the XVI century. Some may be asking: "But what does this have to do with ethnomathematics?". I invite those who do not see the connection to give a new look into recent theories of cognition and history.[15]

4. The Basin Metaphor and a Sociology of Mathematics

There is no way to deny that [Western] Mathematics is essential in the modern world. Public opinion is ready to support investment in mathematical research in spite of being absolutalety unable to guess what kind of research is being supported, professionally succesful parents invest in the mathematical education of their children and even accept that a child does an entire year again if he/she fails in the final exam - in spite of him/her, succesful parent, declaring that while they were in school and up to nowadays never understood mathematics. "Miraculously" they graduated in spite of successive failures in Mathematics and "miraculously" they became very succesful. Their children have to proceed - suffering and strugling - so they will not depend of miracles! Less succesful parents, which did not have an opportunity of schooling and nave not rthe slightly idea of Mathematics punish their children if they don't show good marks in Mathematics! And peers and society in general regard those that get good grades in Mathematics as potential geniuses, while those that do not do well in Mathematics are regarded as stupid. Socially, this has been instrumental in the selection of elites, as it has been well studied by Pierre Samuel in his classic paper on this theme. On the other hand, the evidence from research showing that both individual and social creativity is enhanced by self-esteem is not taken into account for those that do beautifully in the Arts or in Sports but fail in Mathematics.

Let us introduce at this moment some concepts and reflexions that result from what is now called Social Studies of Science or Science Policy. This is basically the study of the politics of scientific development, the backbone of funding agencies. It is very interesting to analyse the substitution of the colonial discourse by the discourse of aid - both mutltilateral, like UNESCO, and bilateral, like ORSTOM, the British Council and similars. The nature of the deprived populations did not change in the span of less than ten years. The strategies to keep them as

---

14 Juan Diez Freyle *Sumario Compendioso de las quentas de plata y oro...Con algunas reglas tocantes al arithmética* Mexico, printed by Juan Pablos of Brescia, 1556. A copy - aparently the only one - is in the Escorial, Spain.

15 I suggest reading Scott Atlan *Towards an Anthropology of Science*, la maison des sciences de l'homme, Paris 1990 and also Francisco J. Vallera and Jean-Pierre Dupuy eds. *Understanding Origins* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992. Some will find intriguing to have both references together...

faithful consumers had to change[16]. But let us not deviate from the main objective of this paper, which is the production of scientific, in particular mathematical, knowledge.

When deciding on investments in Science and Technology, it is natural to expect social benefits. These investments have been substantial, both through funding agencies, either governamental or through aiding agencies, either bi- or multilateral. The outcomes in the so-called Third World have not been encouraging, as recently mentioned by the Director-General of UNESCO. The gap between central nations and peripherical nations in the production of scientific knowledge is enlarging. Over 80% of the benefits of scientific and technological research benefits the First World. "The gap between rich and poor countries is a gap of knowledge" as says Federico Mayor[17]. It is clear that scientific productivity is related to the cultural atmosphere and self-esteem. Self-esteem can hardly prevail among a population deprived of its history. Referring to what was discussed above, the main instrument in the colonial period was to deprive the conquered peoples of their history or to produce a history "favorable" to the conqueror. There is no need to elaborate on the vision of slavery passed on by official history nor to question why Zumbi (1655-1695) is practically unheard of by Brazilian students while Cardinal Richelieu, and of course D'Artagnan, are so familiar.

We may consider, as it is frequent in discussions of policy and specially in the United Nations and other national and international agencies, the production of scientific and technological, particularly mathematical, knowledge as measurable. Scientometrics relies on several indicators and the studies of quantitative history allows us to speak of central nations, those who produce new knowledge, and peripherical nations, those who absorb new knowledge. Production and absorption of knowledge are clearly distinguishable. The sad situation is that the peripherical nations have been slow in absorbing new knowledge. The lack of infrastructure acts as a barrier for this process.[18] The basin metaphor helps to understand the process. The picture speaks for itself. The main producers of knowledge (central nations) are represented by the main stream. The water fertilizes their margins. They will produce their effect in the margins of the affluents (peripherical nations) much later, when the waters have already flown along the stream (thus producing the gap or obsolescence of knowledge). The water (knowledge) do not flow up stream of the affluents. The water of the affluents surely fertilize their margins and will add and contribute to the volume of water of the main stream. This corresponds in this metaphor to the brain drain and the results drain. This is manifest in the classical emigration of academics and, worst, on the orientation of laboratories and research institutions as subsidiary of their major homologous in the central nations.[19] This is clear in the efforts to entice research institutions in the peripherical nations to join major biotechnology research plans. The enticement is normally done by the attractive of sending experts, in many cases scientists with a high reputation, to the periphery for short visits, in offering fellowships, in many cases giving stipends higher than the current national salaries, in sending equipment, in many casesobsolete or already heavily used equipment, and offeringinternational travel to seminars and congresses. This is true in academics and, in the more developed peripherical nations, in industry.

Particularly in mathematics, we have numerous examples of such practices in the post-war period. The presence of monies of the USA Army, Navy and Air Force research agencies, as well as of the NSF, of the CNRS, of the British Council, of the DAAD and other agencies, following the pattern mentioned above, is noticeable. These cases have not been studied in

---

[16] These topics have in the post-war period drawn much attention and generated important studies whose results throw some lights in the production of scientific knowledge throughout history. Particulary interesting is the historiography adopted by Harold Dorn in his exciting book *The Geography of Science* The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1991.

[17] Frederico Mayor: Opening Speech at the Conference on "Scientific and Technological Cooperation in Africa", Nairobi, March 1994.

[18] See my note Ubiratan D'Ambrosio "Adapting the Structure of Education to the Needs of Developing Countries" (letter) *Impact of Science on Society* vol. 25, n°1, 1975, p.94.

[19] See my paper Ubiratan D'Ambrosio "Knowledge transfer and the universities: a police dilemma" *Impact of Science on Society* vol. 29, n°3, 1979, p. 223-229.

detail as yet. Both have the common feature of producing human resources and results without any analysis of the capability of the peripherical countries to absorb and to make these resources and results useful for their prioritary needs. Normally this is the result of a lack of qualitative directives in Science Policy of the peripherical nations. Practically every scientific development plan in the periphery is a program entirely based in quantitative goals. Perversely, World Bank, UNDP and other financing agencies rely on, indeed stimulate, plans based on quantitative goals. Clearly, they are easier to check. But the benefits for the poor populations of the peripherical nations is practically nil.

In the basin metaphor, the sources of the rivers, both the main stream and the affluents, correspond to ethnomathematical knowledge. Ethnomathematical knowledge, like the waters, flow fertilizing the margins of the affluent in their way and eventually mixing in a major stream, contributing to this flow. Waters of the main stream do not go up-stream through the afluents.

The notion of progress carried on by the main stream will benefit the margins of the affluent after a long way through difficult land paths - which correspond to the acquisition of knowledge from other socio-cultural and environmental sources. The need of the margins - peripherical cultures - are met by the water of the affluents and only later receive the benefits coming from the main stream. These are useful only in fertile grounds.

An alternative to main stream and affluents would be a large lake, were all the sources contribute equally to the main body of water. Each source producing according to its environmental history and all the waters of the lake fertilizing all the margins.

Erosion of the basin in favor of the creation of a great lake - the deterioration of the current world order - hopefully will lead to a new planetary order.

I use the wording Programme in a sense closer to I. Lakatos. It is a clear recognition of the dynamical characteristics of knowledge: from its generation it goes through organization, both intellectual and social, and through its diffusion. Although each of these aspects is studied in a discipline, respectively cognition, epistemology, history, politics and education, it is practically impossible ti understand and explain knowledge in such a fragmented way. Our use of the word "programme" reveals a holistic approach.

Wes Sharrock and Bob Anderson The Ethnomethodologists Ellis Horwood Limited, Chichester, 1986 gives an introduction to this new research area.

See Maxine Sheets-Johnstone The Roots of Thinking ,Temple University Press, Philadelphia, 1990 for a good introduction to the theme. A deeper look will benefit from reading the papers in Fancisco J. Varela and Jean-Pierre Dupuys, eds. Understanding Origins Kluwer Academic Publishers, Dordrecht,1992.

See the chapter by Marcia Ascher and Robert Ascher: 12.1 Ethnomathematics in Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences, 2 volumes, ed. I.Grattan-Guinness, Routledge, London, 1994, pp.1545-1554; p.1545.

See the recent book by James F. Hamill Ethno-Logic: The Anthropology of Human Reasoning University of Illinois Press, Urbana, 1990. The author discusses the way people reason. This is an important background study for Ethnomathematics.

Peter Calvocoressi "A whorl on a stone" Times Literary Supplement No 4785 (12/16/94), p. 32.

The views expressed by Said al-Andalusi (1029-1070) in the book of the Categories of Nations translated and edited by Semaan I. Salem and Alok Kumar, University of Texas Press, Austin, 1991 are a good support for these remarks.

Historians of Mathematics probably would benefit more in looking closer into the Philosophy of History than the Philosophy of Mathematics. It is clear that, the same as Logics, Philosophy of Mathematics and Epistemology in general are part of current thought, in particular of current ideology, hence are chapters of the accepted Mathematics nowadays. They are obviously disciplines subbordinated to History. To look into these disciplines with current views causes several distortions, since obviously current History will influence the subeordinated disciplines. See the beautiful essay of Bernard Lewis History. Remembered, Recovered, Invented Princeton University Press, Princeton, 1975.

Gregory Bateson Steps to an Ecology of Mind Ballantine Books, New York, 1972.

See the good synthesis in Frederick Krantz ed. History from Below - Studies in popular protest and popular ideology Basil Blackwell, Oxford, 1988. The methodology proposed is quite interesting for History of Sciences.

Michael Closs has identified recently, among the Mayas, a group of individuals that may be recognized as professionals in Mathematics.

B. Jewsiewicki and V. Y. Mudimbe "Africans' Memories and Contemporary History of Africa" History and Theory vol. 32, n.4, 1993; p.1

See the excelent account of the deciphering of pre-columbian scripture in Michael D. Coe Breaking the Maya Code Thames and Hudson, New York, 1992. For the wall paper episode see page 79.

Juan Diez Freyle Sumario Compendioso de las quentas de plata y oro. Con algunas reglas tocantes al arithmetica Mexico, printed by Juan Pablos of Brescia, 1556. A copy - aparently the only one - is in the Escorial, Spain.

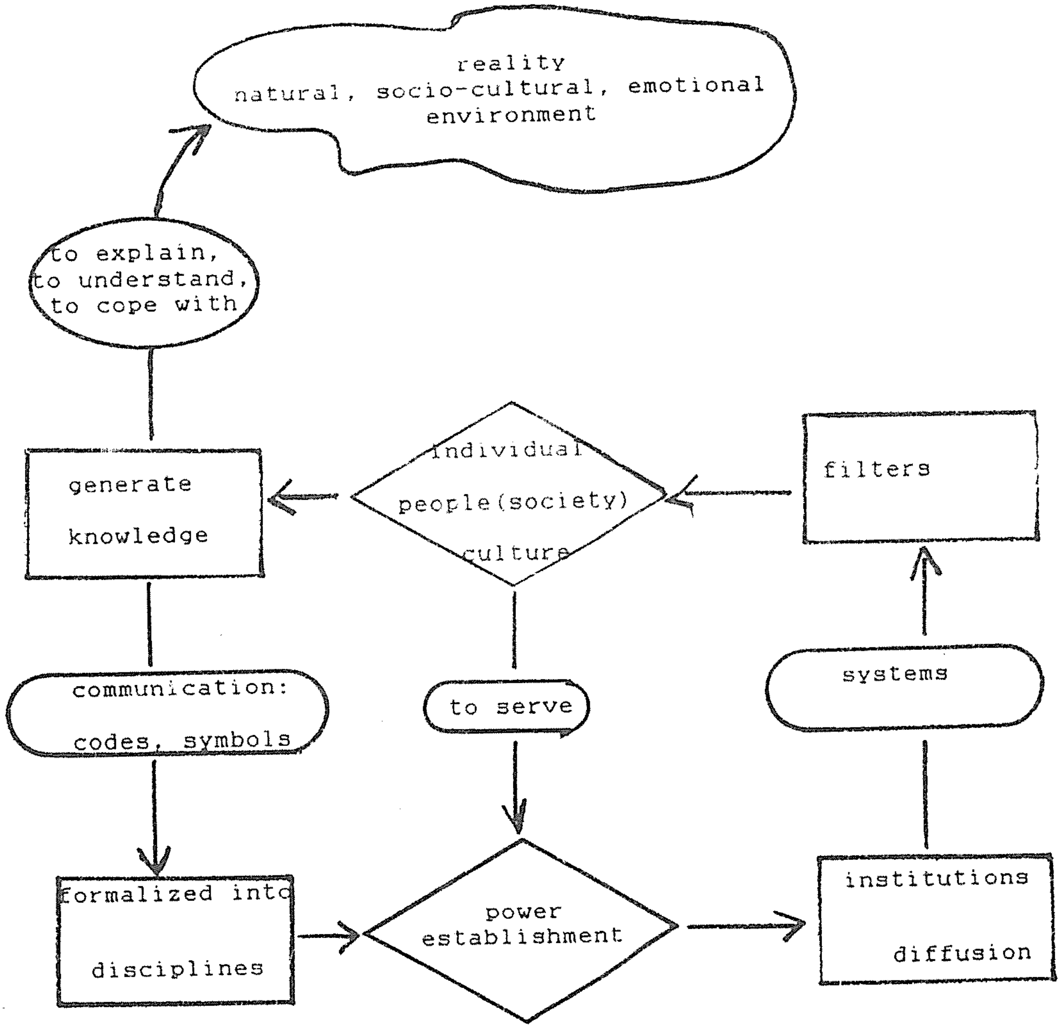
I suggest reading Scott Atlan Towards an Anthropology of Science , La maison des sciences de l'homme, Paris, 1990 and also Francisco J. Varella and Jean-Pierre Dupuy eds. Understanding Origins Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992. Some will find intriguing to have both references together.

These topics have in the post-war period drawn much attention and generated important studies whose results throw some lights in the production of scientific knowledge throughout history. Particularly interesting is the historiography adopted by Harold Dorn in his exciting book The Geography of Science The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1991.

Federico Mayor: Opening Speech at the Conference on "Scientific and Technological Cooperation in Africa", Nairobi, March 1994.

See my note Ubiratan D'Ambrosio "Adapting the Structure of Education to the Needs of Developing Countries" (letter) Impact of Science on Society vol. 25, n. 1, 1975, p.94.

See my paper Ubiratan D'Ambrosio "Knowledge transfer and the universities: a policy dilemma" Impact of Science on Society vol. 29, n.3, 1979, p.223-229.


reality
natural, socio-cultural, emotional
environment
to explain,
to understand,
to cope with
generate
knowledge
individual
people(society)
culture
filters
communication:
codes, symbols
to serve
systems
formalized into
disciplines
power
establishment
institutions
diffusion

FIGURE

HISTOIRE AND EPISTEMOLOGIE IN MATHEMATICS EDUCATION

DIMITRIADOU Hélène

The main reasons for my participation to the first European Summer University on "History and Epistemology in Mathematics Education" are the following :

a) I participate in a research program that is related to the History of Mathematics at the Aristotle University of Thessaloniki, under the supervision of Dr. A. Gagatsis.

b) I have been searching some historical themes as "The appearance of demonstration in the Greek Mathematics" and also "The position of Legendre's Geometry on the Greek Secondary Syllabus - The situation today".

c) The history of Mathematics is a basic tool for my work, as a mathematics teacher in Secondary Education.

My participation was intended to further information about new developments and search activities in this area. It was mainly a personal choice, which was been, in a significant way, encouraged by E. Barbin, pedagogical responsible of the Summer University, and A. Gagatsis.

An obvious conclusion, which was obtained from the lectures, workshops and the two round tables which took place at the Summer University, was that important developments have been made in many European countries, concerning the connection between history and epistemology of mathematics and teaching mathematics, as well as the teachers' training.

As it was been expected, there are many differences concerning the today situation between several European countries.

On the one hand, there are countries like France, where a systematic research is been made, concerning the introduction of a historical perspective in the teaching of mathematics, in Institutes for Research in Mathematics Education (IREM), by researchers in collaboration with Secondary teachers of mathematics. Also in Denmark, a long tradition for studying and teaching history of mathematics at the universities led to the obligatory teaching of history of mathematics at the upper secondary level, in 1988.

On the other hand there are countries like Portugal, where things seem at the present to change rapidly, as concern to the introduction of aspects of the history of mathematics in the new curriculum, and the growing interest among the teachers' community in the history of mathematics. In addition, Portugal took over the responsibility for organizing the Second European Summer University in 1996.

I had the opportunity to discuss very much with researchers and colleagues from other countries, who participated to the Summer University. Our main topic was about the special difficulties concerning the use of history of mathematics in teaching. We had also the opportunity to exchange information, experiences, and put the foundation for further cooperation, like exchange of historical documents, works, etc.

An important problem, concerning the use of history of mathematics in teaching, seems to related with the textbook.

On the one hand, although, (at least in Greece) history of mathematics is introduced through historical notes in textbooks, many teachers seem to ignore these notes. This is partly due to the excessive extension of the program, and the lack of historical education in mathematics.

On the other hand, there is the problem of the effective linking of the textbook's subject to the respective historical notes. Among the ideas that had been presented, was the use of appropiate problems, historically related to the emergence of a mathematical concept, as starting points for the introduce of this concept. This idea could be certainly used, since by this way, the strict axiomatic model of modern theories, could be surpassed. Thus, the difficulties of understanding would be avoided. Further more, this method would cause pupils' motivation for creative, and not passive, participation in the classroom.

Many of these precious information and ideas that have been obtained by the Summer University of Montpellier, I indent to try to exploit in my teaching and my research. I also intent to contribute to their diffusion. In collaboration with the Science Director of Mathematics, and a few teachers that are concerned about, I will start an effort to inform Greek secondary teachers about the importance that history of mathematics may have to their everyday teaching and the initiatives developed in this area by their colleagues of other European countries. This seems to underestimate the importance of historical notes in textbooks.

This effort will be done through articles in the journals edited by the Greek Mathematical Society, lectures and indicating teaching in training centers for secondary teachers, and seminars concernig history and epistemology.

Programme

Dimanche 18 Juillet	**Maison de l'Europe (CORUM)**
16:00-19:00 et 20.00-22:00	Le bureau d'accueil est ouvert
Lundi 19 Juillet 1993	**Palais des Congrès de Montpellier (CORUM)**
08:00-09:30	Le bureau d'accueil est ouvert
09:30-10:30	Cérémonie d'ouverture
10:30-12:30	Conférence plénière
Christian HOUZEL	Les mathématiques méditerranéennes du 2ème millénaire avant J.C. au 17ème siècle
14:30-16:30	Conférence plénière
Jens HØYRUP	"L'algèbre d'arpentage" de Naram-Sîn à Luca Pacioli : une tradition sous-scientifique couvrant quatre millènaires
16:30-17:00	Pause, café et boissons
17:00-19:00	Table ronde sur la place de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement et dans les programmes organisée par Jan VAN MAANEN (Pays-Bas)

avec Neil BIBBY (G.B), Lutz FUHRER (Allemagne), Fulvia FURINGHETTI (Italie), Athanassios GAGATSIS (Grèce), Thorkil HEIEDE (Danemark),J.P. LEGOFF (France), Eduardo Manuel VELOSO (Portugal).

Mardi 20 Juillet 1993	**I.R.E.M. (Université des Sciences et Techniques du Languedoc)**
08:30-10:30	Conférence plénière [Grand Amphithéâtre]
Jean- Claude PONT	Géométrie non-euclidienne et naissance de l'axiomatique au 19 ème siècle
10:30- 11:00	Pause, café et boissons
11:30-12:30	Exposés

Thème 1: La construction historique des savoirs mathématiques [salle TD1 T_2P]

B1.Rachid BEBBOUCHI	A propos de la continuité
B2.Gilles FERREOL	L'économie mathématique en France entre 1870 et 1914 : le cas Walras.

Thème 3 : Relations entre l'enseignement et les facteurs culturels [salle TD3 T_2P]

D3.Jean DHOMBRES	Transmettre une ou des mathématiques? Le problème du multi-culturalisme intellectuel
D5.Jaroslav FOLTA	Mathematical textbooks in vernacular languages - The case of Czech textbooks and their development in the 16th cent.

D7.Hélène GISPERT	Les réformes de l'enseignement des mathématiques en France au 20ème siècle
D11.Marta MENGHINI	The euclidean method in teaching geometry

Thème 4 : Relations entre épistémologie et questions didactiques et pédagogiques [salleTD4 T_2P]

E5.Athanassios GAGATSIS et Yoannis THOMAIDIS	L'histoire de la valeur absolue et sa transposition didactique
E7.Gert SCHUBRING	Les enjeux épistémologiques des nombres négatifs

Thème 6 : mathématiques méditerranéennes [salle TD6 T_2P]

G1. Djamil AISSANI	Bougie médiévale : centre de transmission méditerranéen

Thème 7 : ethnomathématiques [salle TD7 T_2P]

H3. Franco FAVILLI	Drawing and defining cube in Somalia

14:00-16:30	Ateliers

Thème 1: La construction historique des savoirs mathématiques (1ère session) [salle TD1 T_2P]

A1. Evelyne BARBIN et ITARD	La construction de la notion de courbe au 17ème siècle Gilles
A2. Youssef BENSMINA et Abdelaziz BOUFIOUA	Quelques aspects des mathématiques d'Ibn al Banna de Marrakech (1254-1321)
A3. Otto BEKKEN	On the foundations of analysis in the 1820's, as seen by the Norwegian mathematician Niels Henrik Abel (1802-1829)
A4. Dominique BENARD et Monique NOUET	Paysages différentiels chez Leibniz
A5.Martine BUHLER et Philippe BRIN	La méthode des aires chez Euclide
A6. Joëlle DELATTRE	Approches mécanique et géométrique du mouvement dans l'Antiquité
A7.J.P. FRIEDELMEYER	Les Eléments d'Euclide : architecture, style, contenu, héritage
A8.Michel GUILLEMOT	Autour des méthodes de fausse position
A9. Reinhard LAUBENBACHER	Great Problems of mathematics
A10.Jean Pierre LEGOFF	L'étude projective des coniques au 17 ème siècle : les traités de La Hire et Le Poivre
A11.Michel LEVARD	L'étude des coniques par Appolonius : le Livre I
A12.Luis RADFORD	L'émergence et le développement conceptuel de l'algèbre (3ème siècle-14ème siècle)
A13.Karin REICH	Gauss et l'introduction des nombres complexes
A14.Steve RUSS	Bolzano's Principles for the Proofs, and the Presentation, of Mathematics
A15.Klaus VOLKERT	L'accueil de la géométrie non-euclidienne en France et en Allemagne

16:30-17:00	Pause, café et boissons
17:00-18:00	Exposés

Thème 1: La construction historique des savoirs mathématiques [salle TD1 T_2P]

B3.Luis MORENO ARMELLA
Continuity and Variation : The Transfer from a Visual to a symbolic Representation

B4. Mahammed NORREDINE
De quelques enseignements livrés par l'histoire de l'algèbre

B9. Reinhart LAUBENBACHER
Sophie GERMAIN'S contributions to number theory

Thème 3 : Relations entre l'enseignement et les facteurs culturels [salle TD3 T_2P]

D2.Annie BARTEZ — Comenius, pédagogue

D9.Albert KRAYER — Teaching mathematics in German Jesuit Universities

Thème 4 : Relations entre épistémologie et questions didactiques et pédagogiques [salle TD4 T_2P]

E1.Faïza ASSEM-MEDJBER — Difficultés de raisonnement dans l'enseignement des mathématiques

E3. Rudolf BKOUCHE — Epistémologie, histoire des mathématiques et enseignement : pour une épistémologie des problématiques

Thème 6 : mathématiques méditerranéennes [salle TD6 T_2P]

G5. Jean-Luc VERLEY — Mascheroni et Servois : mathématiques pratiques et renouveau de la géométrie

Thème 7 : ethnomathématiques [salle TD7 T_2P]

H1. André CAUTY — Problèmes de l'éducation bilingue dans les communautés indigènes de Colombie

20:00 — Soirée dansante au Chateau de Grammont

Mercredi 21 Juillet — **I.R.E.M. (Université des Sciences et Techniques du Languedoc)**

09:30-10:30 — Exposés

Thème 1: La construction historique des savoirs mathématiques [salle TD1 T_2P]

B5.Henri PLANE — Le théorème de Thalès : une invention française du 20ème siècle

B6.Léo ROGERS — It is possible to reconstruct mathematical knowledge in history ?

Thème 3 : Relations entre l'enseignement et les facteurs culturels [salle TD3 T_2P]

D1.Ali ASSEM — Qu'en est-il de l'enseignement des mathématiques élémentaires en Algérie?

D8.Mariano HORMIGON — Histoire de l'Enseignement des Mathématiques en Espagne

D12.Siegbert SCHMIDT — 'Anschauung' and 'Selbsttätigkeit' as leading principles of learning theory and arithmetic instruction in Prussian elementary schools (19th century) -intentions and realilty

Thème 4 : Relations entre épistémologie et questions didactiques et pédagogiques [salle TD4 T_2P]

E4.Pier Luigi FERRARI — The constructivism paradigm and the philosophy of mathematics

E6.Marisa KRYSINSKA GRAND'HENRY
Réflexions épistémologiques à propos du concept de tangente

Thème 6 : mathématiques méditerranéennes [salle TD6T2P]

G2. Didier BESSOT et Jean Pierre LEGOFF — De l'invention des courbes par perspective : les *Elementi di perspettiva* de Jacquier (1755)

Thème 7 : ethnomathématiques [salle TD7 T2P]

H5. Isabel SOTO — Stratégies de résolution des problèmes de proportionnalité par des paysans chiliens

10:30-11:00 Exposés

Thème 1: La construction historique des savoirs mathématiques [salle TD1 T2P]

B7.Michel SERFATI — Mathématiques et métaphysique chez Leibniz

B8.Guillermina WALDEGG — La notion de nombre avant l'établissement de la science analytique

Thème 3 : Relations entre l'enseignement et les facteurs culturels [salle TD3 T2P]

D4.Marie Josée DURAND-RICHARD — L'introduction de l'analyse algébrique à Cambridge au début du 19ème siècle

D6.Athanassios GAGATSIS — Quelques caractéristiques de l'enseignement de la Géométrie en Grèce de 1830 à 1884 : l'influence des géomètres français

D13. Harm Jan SMID — A conflict at the Leyden Gymnasium in the 19th century

Thème 4 : Relations entre épistémologie et questions didactiques et pédagogiques [salle TD4 T2P]

E2. Didier BESSOT — L'épistémologie implicite dans les ouvrages didactiques de Desargues

Thème 6 : mathématiques méditerranéennes [salle TD6 T2P]

G4. Sabine KOELBLEN — Les périgrinations de six grandeurs en proportion autour de la méditerranée

Thème 7 : ethnomathématiques [salle TD7 T2P]

H2. Salimata DOUMBIA — L'expérience en Côte d'Ivoire de l'étude de jeux traditionnels africains et de leur mathématisation

H4.Gelsa KNIJNIK — The interrelations between academic and popular knowledge

14:00-16:00 Ateliers

Thème 1: La construction historique des savoirs mathématiques (2ème session) [salle TD1 T2P]

Jeudi 22 Juillet — **I.R.E.M. (Université des Sciences et Techniques du Languedoc)**

08:30-10:30 Ateliers

Thème 2 : introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques [salle TD2 T2P]

C1.Peter BERO et Johannes KEPLER — Volume calculations in a manner of 16th century

C2.Neil BIBBY — The continuous interest problem

C3. Anne BOYE et J.Luc LE CHEVALIER — Construction de l'espace en classe de seconde

C4. Anne CHEVALIER et Maggy SCHNEIDER	Introduction au calcul d'aires et de volumes dans une perspective historique
C8. Michèle GREGOIRE, M.HALLEZ et P. BRIN	Approche pluridisciplinaire de la naissance de la perspective
C9. Jacqueline GUICHARD et J.-Pierre SICRE	Etudes de notions mathématiques à partir d'une approche historique et philosophique
C12. Marjolein KOOL	Using historical arithmetic books in teaching mathematics to low-attainers
C13. Anne MICHEL-PAJUS et Michel SERFATI	L'histoire des mathématiques en classes préparatoires
C15. Michel ROELENS	Christian Huygens et la cycloïde en classe : approche géométrique, analytique et graphique
C19.Constantinos TZAN.^KIS	Reversing the customary deductive teaching of mathematics by using its history : the case of abstract algebraic concepts
10:30-11:00	pause, café et boissons
11:00-12:00	Ateliers

Thème 5 : L'histoire des mathématiques dans la formation initiale et continue des enseignants
[salle TD5 T_2P]

F1.Gertrudes AMARO	The use of Mathemetics History and Epistemology in Mathematics Education of Teachers
F2.Michel BALLIEU et Jean Michel DELIRE	L'histoire des mathématiques dans l'enseignement francophone en Belgique
F3. Didier BESSOT et Jean Pierre LEGOFF	L'expérience du cercle caennais en matière de formation des enseignants en histoire des mathématiques
F4. Anne BOYE et Xavier LEFORT	Formation continue des enseignants en histoire des mathématiques : une expérience
F5. Eliane COUSQUER	L'histoire du concept de nombre en formation initiale des enseignants
F6. Jacqueline GUICHARD	Un stage en formation continue sur la démonstration à partir de textes d'histoire et de philosophie des mathématiques
F7. Mohamed JENDOUBI	Essai de mise en place d'une équipe d'enseignants sur l'histoire des sciences
F8. David NELSON	A course in history and psychology for second year university mathematics students
F9. Danielle SCHEIER et Jacques BOROWCZYK	Mémoire professionnel et histoire des mathématiques
F10. Bounoua SELLAK	Formation des enseignants en Algérie : adéquation et finalités.
F11. Jan VAN MAANEN	Huygens for prospective teachers : chance, cissoid and coplanation
14:00-16:00	Ateliers

Thème 2 : introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques
[salle TD2 T_2P]

C5. Mireille CLAPIE et Maryvonne SPIESSER	Les textes anciens comme point d'appui pour la construction de nouveaux thèmes au lycée
C6.J.P. FRIEDELMEYER	L'analyse algébrique : une autre logique et une autre progression pour l'enseignement des mathématiques
C7.Paul GARCIA	Dismiss Incruciationibus
C10.Jean Paul GUICHARD	L'histoire des mathématiques, source d'exercices pour enseigner les mathématiques

C11.Maryvonne HALLEZ et Anne BOYE	Du domaine réel au domaine complexe en terminale
C14. Peter RANSOM	Navigation + Surveying : Teaching geometry through the use of old instruments
C16. Roland ROZENFELD	Une expérience transdisciplinaire : sensibilisation à l'histoire des sciences en seconde
C17.Jacky SIP	Les nombres relatifs au collège : la règle des signes
C18. Giulano TESTA	Equations du troisième degré et nombres complexes
C20. Glen VAN BRUMMELEN	Hipparchus, Ptolemy and early Trigonometric Tables
C21. Greisy WINICKY	Using mathematics problems with historical backgrounds in junior highschool

Vendredi 23 Juillet 1993 **Palais des Congrès de Montpellier (CORUM)**

08:30-10:30 Conférence plénière

Bruno BELHOSTE et Léo ROGERS Enseignement théorique et enseignement pratique dans les mathématiques au 19ème siècle : comparaisons des cultures mathématiques en Angleterre et en France

10:30-11:00 Pause, café et boissons

11:00-13:00 Conférence plénière

Ubiratan d'AMBROSIO Ethnomathématiques dans l'histoire des idées

14:30-16:30 Table ronde sur la place de l'histoire des mathématiques dans la formation des professeurs de mathématiques organisée par Fulvia FURINGHETTI (Italie)

avec Evelyne BARBIN (France), Jean DOYEN (Belgique), Torkil HEIEDE (Danemark), Léo ROGERS (G.B.), Gert SCHUBRING (Allemagne), Jan VAN MAANEN (Pays-Bas)

16:30-17:00 Cérémonie de clotûre

Program

Sunday 18 July	**Europ's House (CORUM)**
16:00- 19:00 and 20:00-22:00	Registration desk is open
Monday 19 July 1993	**Palace of Congress of Montpellier (CORUM)**
08:00-09:30	Registration desk is open
09:30-10:30	Opening ceremonies
10:30-12:30	Plenary lecture
Christian HOUZEL	Mediterranean mathematics from 2nd millenary before J.-C. to the 17th century
14:30-16:30	Plenary lecture
Jens HØYRUP	"The algebra of land measuring" from Naram-Sîn to Luca Pacioli : a sub-scientific tradition active over four milleniums
16:30-17:00	Happy hour
17:00-19:00	Panel on the place of the history of mathematics in math teaching and curriculum organized by Jan VAN MAANEN (Pays-Bas)

with Neil BIBBY (G.B), Lutz FUHRER (Germany), Fulvia FURINGHETTI (Italy). Athanassios GAGATSIS (Greece), Thorkil HEIEDE (Danemark), J.P. LEGOFF (France), Eduardo Manuel VELOSO (Portugal).

Tuesday 20 July 1993	**IREM (Université des Sciences et Techniques du Languedoc)**
08:30-10:30	Plenary lecture
Jean-Claude PONT	Non-euclidean geometry and birth of axiomatics in the 19th century
10:30- 11:00	Coffee
11:30-12:30	Lectures

Theme 1 : The historical construction of mathematical knowledge [room TD1 T2P]

B1.Rachid BEBBOUCHI	A propos de la continuité
B2.Gilles FERREOL	L'économie mathématique en France entre 1870 et 1914 : le cas Walras.

Theme 3 : The relationship between mathematics education and the culture [room TD3T2P]

D3.Jean DHOMBRES	Transmettre une ou des mathématiques? Le problème du multi-culturalisme intellectuel

D5.Jaroslav FOLTA	Mathematical textbooks in vernacular languages - The case of Czech textbooks and their development in the 16th cent.
D7.Hélène GISPERT	Les réformes de l'enseignement des mathématiques en France au 20ème siècle
D11.Marta MENGHINI	The euclidean method in teaching geometry

Theme 4 : Epistemology and its relationship to didactics and pedagogy
[room TD4 T2P]

E5.Athanassios GAGATSIS and Yoannis THOMAIDIS	L'histoire de la valeur absolue et sa transposition didactique
E7.Gert SCHUBRING	Les enjeux épistémologiques des nombres négatifs

Theme 6 : Mediterranean mathematics [room TD6 T2P]

G1. Djamil AISSANI	Bougie médiévale : centre de transmission méditerranéen

Theme 7 : Ethnomathematics [room TD7 T2P]

H3. Franco FAVILLI	Drawing and defining cube in Somalia

14:00-16:30	Workshops

Theme 1 : The historical construction of mathematical knowledge (Session 1)
[room TD1 T2P]

A1. Evelyne BARBIN and ITARD	La construction de la notion de courbe au 17ème siècle Gilles
A2. Youssef BENSMINA and Abdelaziz BOUFIOUA	Quelques aspects des mathématiques d'Ibn al Banna de Marrakech (1254-1321)
A3. Otto BEKKEN	On the foundations of analysis in the 1820's, as seen by the Norwegian mathematician Niels Henrik Abel (1802-1829)
A4. Dominique BENARD and Monique NOUET	Paysages différentiels chez Leibniz
A5.Martine BUHLER and Philippe BRIN	La méthode des aires chez Euclide
A6. Joëlle DELATTRE	Approches mécanique et géométrique du mouvement dans l'Antiquité
A7.J.P. FRIEDELMEYER	Les Eléments d'Euclide : architecture, style, contenu, héritage
A8.Michel GUILLEMOT	Autour des méthodes de fausse position
A9. Reinhard LAUBENBACHER	Great Problems of mathematics
A10.Jean Pierre LEGOFF	L'étude projective des coniques au 17 ème siècle : les traités de La Hire et Le Poivre
A11.Michel LEVARD	L'étude des coniques par Appolonius : le Livre I
A12.Luis RADFORD	L'émergence et le développement conceptuel de l'algèbre (3ème siècle-14ème siècle)
A13.Karin REICH	Gauss et l'introduction des nombres complexes
A14.Steve RUSS	Bolzano's Principles for the Proofs, and the Presentation, of Mathematics
A15.Klaus VOLKERT	L'accueil de la géométrie non-euclidienne en France et en Allemagne

16:30-17:00	Happy hour
17:00-18:00	Lectures

Theme 1 : The historical construction of mathematical knowledge [room TD1 T_2P]

B3.Luis MORENO ARMELLA
Continuity and Variation : The Transfer from a Visual to a symbolic Representation

B4. Mahammed NORREDINE
De quelques enseignements livrés par l'histoire de l'algèbre

B9. Reinhart LAUBENBACHER
Sophie GERMAIN'S Contributions to number theory

Theme 3 : The relationship between mathematics education and the culture [room TD3 T_2P]

D2.Annie BARTEZ	Comenius, pédagogue
D9.Albert KRAYER	Teaching mathematics in German Jesuit Universities

Theme 4 : Epistemology and its relationship to didactics and pedagogy [room TD4 T_2P]

E1.Faïza ASSEM-MEDJBER	Difficultés de raisonnement dans l'enseignement des mathématiques
E3. Rudolf BKOUCHE	Epistémologie, histoire des mathématiques et enseignement : pour une épistémologie des problématiques

Theme 6 : Mediterranean mathematics [room TD6 T_2P]

G5. Jean-Luc VERLEY	Mascheroni et Servois : mathématiques pratiques et renouveau de la géométrie

Theme 7 : Ethnomathematics [room TD7 T_2P]

H1. André CAUTY	Problèmes de l'éducation bilingue dans les communautés indigènes de Colombie

20:00	Meal and dancing at Chateau Grammont

Wednesday 21 July **IREM (Université des Sciences et Techniques du Languedoc)**

09:30-10:30	Lectures

Theme 1 : The historical construction of mathematical knowledge [room TD1 T_2P]

B5.Henri PLANE	Le théorème de Thalès : une invention française du 20ème siècle
B6.Léo ROGERS	It is possible to reconstruct mathematical knowledge in history ?

Theme 3 : The relationship between mathematics education and the culture [roomTD3 T_2P]

D1.Ali ASSEM	Qu'en est-il de l'enseignement des mathématiques élémentaires en Algérie?
D8.Mariano HORMIGON	Histoire de l'Enseignement des Mathématiques en Espagne
D12.Siegbert SCHMIDT	'Anschauung' and 'Selbsttätigkeit' as leading principles of learning theory and arithmetic instruction in Prussian elementary schools (19th century) -intentions and realilty

Theme 4 : Epistemology and its relationship to didactics and pedagogy [room TD4 T_2P]

E4.Pier Luigi FERRARI	The constructivism paradigm and the philosophy of mathematics

E6.Marisa KRYSINSKA GRAND'HENRY
Réflexions épistémologiques à propos du concept de tangente

Theme 6 : Mediterranean mathematics [room TD6 T2P]

G2. Didier BESSOT and Jean Pierre LEGOFF — De l'invention des courbes par perspective : les *Elementi di perspettiva* de Jacquier (1755)

Theme 7 : Ethnomathematics [room TD7 T2P]

H5. Isabel SOTO — Stratégies de résolution des problèmes de proportionnalité par des paysans chiliens

10:30-11:00 Lectures

Theme 1 : The historical construction of mathematical knowledge [room TD1 T2P]

B7.Michel SERFATI — Mathématiques et métaphysique chez Leibniz

B8.Guillermina WALDEGG — La notion de nombre avant l'établissement de la science analytique

Theme 3 : The relationship between mathematics education and the culture [room TD3 T2P]

D4.Marie Josée DURAND-RICHARD
L'introduction de l'analyse algébrique à Cambridge au début du 19ème siècle

D6.Athanassios GAGATSIS — Quelques caractéristiques de l'enseignement de la Géométrie en Grèce de 1830 à 1884 : l'influence des géomètres français

D13. Harm Jan SMID — A conflict at the Leyden Gymnasium in the 19th century

Theme 4 : Epistemology and its relationship to didactics and pedagogy [room TD4 T2P]

E2. Didier BESSOT — L'épistémologie implicite dans les ouvrages didactiques de Desargues

Theme 6 : Mediterranean mathematics [room TD6 T2P]

G4. Sabine KOELBLEN — Les périgrinations de six grandeurs en proportion autour de la méditerranée

Theme 7 : Ethnomathematics [room TD7 T2P]

H2. Salimata DOUMBIA — L'expérience en Côte d'Ivoire de l'étude de jeux traditionnels africains et de leur mathématisation

H4. Gelsa KNIJNIK — The interrelations between academic and popular knowledge

14:00-16:00 Workshops

Theme 1 : The historical construction of mathematical knowledge (Session 2) [room TD1 T2P]

Thursday 22 July — **IREM (Université des Sciences et Techniques du Languedoc)**

08:30-10:30 Workshops

Theme 2 : Introducing a historical perspective into the teaching of mathematics [room TD2 T2P]

C1.Peter BERO and Johannes KEPLER — Volume calculations in a manner of 16th century

C2.Neil BIBBY — The continuous interest problem

C3. Anne BOYE and J.Luc LE CHEVALIER	Construction de l'espace en classe de seconde
C4. Anne CHEVALIER and Maggy SCHNEIDER	Introduction au calcul d'aires et de volumes dans une perspective historique
C8. Michèle GREGOIRE, M.HALLEZ and P. BRIN	Approche pluridisciplinaire de la naissance de la perspective
C9. Jacqueline GUICHARD and J.-Pierre SICRE	Etudes de notions mathématiques à partir d'une approche historique et philosophique
C12. Marjolein KOOL	Using historical arithmetic books in teaching mathematics to low-attainers
C13. Anne MICHEL-PAJUS and Michel SERFATI	L'histoire des mathématiques en classes préparatoires
C15. Michel ROELENS	Christian Huygens et la cycloïde en classe : approche géométrique, analytique et graphique
C19.Constantinos TZANAKIS	Reversing the customary deductive teaching of mathematics by using its history : the case of abstract algebraic concepts
10:30-11:00	Coffee
11:00-12:00	Workshops

Theme 5 : History of mathematis in initial teacher training and in in-service courses
[room TD5 T2P]

F1.Gertrudes AMARO	The use of Mathemetics History and Epistemology in Mathematics Education of Teachers
F2.Michel BALLIEU and Jean Michel DELIRE	L'histoire des mathématiques dans l'enseignement francophone en Belgique
F3. Didier BESSOT and Jean Pierre LEGOFF	L'expérience du cercle caennais en matière de formation des enseignants en histoire des mathématiques
F4. Anne BOYE and Xavier LEFORT	Formation continue des enseignants en histoire des mathématiques : une expérience
F5. Eliane COUSQUER	L'histoire du concept de nombre en formation initiale des enseignants
F6. Jacqueline GUICHARD	Un stage en formation continue sur la démonstration à partir de textes d'histoire et de philosophie des mathématiques
F7. Mohamed JENDOUBI	Essai de mise en place d'une équipe d'enseignants sur l'histoire des sciences
F8. David NELSON	A course in history and psychology for second year university mathematics students
F9. Danielle SCHEIER and Jacques BOROWCZYK	Mémoire professionnel et histoire des mathématiques
F10. Bounoua SELLAK	Formation des enseignants en Algérie : adéquation et finalités.
F11. Jan VAN MAANEN	Huygens for prospective teachers : chance, cissoid and coplanation
14:00-16:00	Workshops

Theme 2 : Introducing a historical perspective into the teaching of mathematics
[room TD2 T2P]

C5. Mireille CLAPIE and Maryvonne SPIESSER	Les textes anciens comme point d'appui pour la construction de nouveaux thèmes au lycée
C6.J.P. FRIEDELMEYER	L'analyse algébrique : une autre logique et une autre progression pour l'enseignement des mathématiques
C7.Paul GARCIA	Dismiss Incruciationibus

C10.Jean Paul GUICHARD	L'histoire des mathématiques, source d'exercices pour enseigner les mathématiques
C11.Maryvonne HALLEZ and Anne BOYE	Du domaine réel au domaine complexe en terminale
C14. Peter RANSOM	Navigation + Surveying : Teaching geometry through the use of old instruments
C16. Roland ROZENFELD	Une expérience transdisciplinaire : sensibilisation à l'histoire des sciences en seconde
C17.Jacky SIP	Les nombres relatifs au collège : la règle des signes
C18. Giulano TESTA	Equations du troisième degré et nombres complexes
C20. Glen VAN BRUMMELEN	Hipparchus, Ptolemy and early Trigonometric Tables
C21. Greisy WINICKY	Using mathematics problems with historical backgrounds in junior highschool

Friday 23 July 1993 **Palace of Congress of Montpellier (CORUM)**

08:30-10:30	Plenary lecture
Bruno BELHOSTE and Leo ROGERS	Theoretical teaching and practical teaching in mathematics in the 19 th century : comparisons between mathematical cultures in England and France
10:30-11:00	Coffee
11:00-13:00	Plenary lecture
Ubiratan d'AMBROSIO	Ethnomathematics in the history of ideas
14:30-16:30	Panel on the place of the history of mathematics in initial and in in-service teacher training organized by Fulvia FURINGHETTI (Italie)

with Evelyne BARBIN (France), Jean DOYEN (Belgium), Torkil HEIEDE (Danemark), Léo ROGERS (G.B.), Gert SCHUBRING (Germany), Jan VAN MAANEN (Netherlands)

16:30-17:00	Closing ceremonies

PLANNING U.E.E. MONTPELLIER

	Lundi 19 juillet Palais des Congrés	Mardi 20 juillet Campus	Mercredi 21 juillet Campus	Jeudi 22 juillet Campus	Vendredi 23 juillet Palais des Congrés
8h30	Accueil				
9h00					
9h30	Ouverture	Conférence (Pont)		Ateliers thème 2	Conférence Belhoste and Rogers
10h00			Exposés th. 1,3,4,6,7		
10h30					
11h00					
11h30	Conférence (Houzel)	Exposés th. 1,3,4,6,7	Exposés th. 1,3,4,6,7	Ateliers thème 5	
12h00					
12h30					Conférence d'Ambrosio
13h00		Déjeuner	Déjeuner	Déjeuner	
13h30	Déjeuner				
14h00					
14h30					Déjeuner
15h00				Ateliers thème 2	
15h30	Conférence (Hoyrup)	Ateliers (thème 1)	Ateliers thème 1 (suite)		
16h00					
16h30					Table ronde thème 5
17h00					
17h30					
18h00	Table-ronde thème 2				Clôture
18h30					
19h00					

U.E.E. MONTPELLIER PLANNING

	Monday July 19th CORUM	Tuesday July 20th University	Wednesday July 21th University	Thursday July 22th University	Friday July 23th CORUM
8h30	Reception				
9h00					Lecture Belhoste and Rogers
9h30	Opening	Lecture (Pont)		Workshops (topic 2)	
10h00			Discussions 1,3,4,6,7		
10h30					
11h00					
11h30	Lecture (Houzel)	Discussions 1,3,4,6,7		Workshops (topic 5)	
12h00			Discussions 1,3,4,6,7		Lecture (Ambrosio)
12h30					
13h00		Lunch		Lunch	
13h30	Lunch				
14h00			Lunch		Lunch
14h30					
15h00				Workshops (topic 2)	
15h30	Lecture (Hoyrup)	Workshops (topic 1)			
16h00			Workshops (topic 1)		Panel (topic 5)
16h30					
17h00					
17h30					Closure
18h00	Panel (topic 2)				
18h30					
19h00					

PARTICIPANTS ETRANGERS

AISSANI Djamil, ALGERIE
AMARO Gertrudes, PORTUGAL
ARNOLDI Bernard, SUISSE
ASCOLI-BERTOLI BRENCI Maria, ITALIE
ASSEM Ali, ALGERIE
BAILLE Philippe, CANADA
BAILLIEU Michel, BELGIQUE
BARY Boubacar, SENEGAL
BEBBOUCHI Rachid, ALGERIE
BENSMINA Youssel, MAROC
BEKKEN Otto, NORVEGE
BERO Peter, BRATISLAVA`
BIBBY Neil, GRANDE-BRETAGNE
BKOUCHE Rudolph,
BOHM Wolf, ALLEMAGNE
BORCIANI Lorella, ITALIE
BOUFRIOUA Abdelaziz, MAROC
BRUFFAERTS Xavier, BELGIQUE
CARDOSO Ana Maria, PORTUGAL
CAVANI Claudia, ITALIE`
CHEVALIER Anne, BELGIQUE
CHKELE Birouta, LATVIA
CORREIA DE SA Carlos, PORTUGAL
COSTA Rosa Maria, PORTUGAL
D'AMBROSIO Uliratan, BRESIL
DAVID VIEIRA Joao, PORTUGAL
DE HAAN Dédé, PAYS-BAS
DELIRE Jean-Michel, BELGIQUE
DE SANTIS Carla, ITALIE
DIMITRIADOU Helen, GRECE
DOUMBIA Salimata, COTE D'IVOIRE
DOYEN Jean, BELGIQUE
ELIDRISSI Abdellah, CANADA
ESTRADA Anna Fernanda, PORTUGAL
FAVILLI Franco, ITALIE
FERNANDEZ SOARES Natércia, PORTUGAL
FAUVEL John, GRANDE-BRETAGNE
FERRARI Pier-Luigi, ITALIE
FIGUEIREDO Maria de Graça, PORTUGAL
FOLTA Jaroslav, TCHEKOSLOVAQUIE
FREIRE PACHECO Ana Maria, PORTUGAL
FURHER Lutz, ALLEMAGNE
FURINGHETTI Fluvia, ITALIE
GAGATSIS Athanassio, GRECE
GARCIA Paul, GRANDE-BRETAGNE
GOLDSTEINAS Jacques, BELGIQUE
GRAY Patrick, REPUBLIQUE D'IRLANDE
GREISY Winicki, ISRAEL
GUIMARAES Maria Zaida, PORTUGAL
HAGGARTY Roderick, GRANDE-BRETAGNE
HAVEN Anko, PAYS-BAS
HAUCHART Christiane, BELGIQUE
HEIEDE Torkil, DANEMARK
HORMIGON Mariano, ESPAGNE
HOYRUP Jens, DANEMARK
IDMESSAAOUD Amina, MAROC
KIERMAN James F., U.S.A.
KOOL Marjolein, PAYS-BAS
KRAYER Albert, ALLEMAGNE
KRYSINSKA GRAND'HENRY Marisa, BELGIQUE
LAUBENBACHER Reinhard, USA
LE GRAND Danièle, BELGIQUE
MACHADO GOYANES Maria, PORTUGAL
MANCINI PROIA Lima, ITALIE
MARIA DO LEU HENRIQUES David, PORTUGAL
MENGHINI Marta, ITALIE
MOHAY Peter, HONGRIE
MORENO ARMELLA Luis Enrique, MEXIQUE
NAGLIATI Iolanda, ITALIE
NIEVES GONZALES ALVAREZ, ESPAGNE
NELSON David, GRANDE-BRETAGNE
OLIVEIRA Hélia, PORTUGAL
OLIVEIRA Paulo, PORTUGAL
OLIVEIRA Mangamida, PORTUGAL
OTTEVAERE Josse, BELGIQUE
PERCARIO Zeluida, ITALIE
PIETROCOLA Norma, ARGENTINE
PONT Jean-Claude, SUISSE
QUINTA SANTOS Maria, PORTUGAL
RADFORD Luis, CANADA
RAINHO Avelina, PORTUGAL
RANSOM Peter; ALLEMAGNE
REYNIR B.S. Kristjansson, ISLANDE
RINO Joao Manuel, PORTUGAL
ROCHA PENA Isabel, PORTUGAL
ROELENS Michel, BELGIQUE
ROGERS Léo, GRANDE-BRETAGNE
ROSARIO Edite, PORTUGAL
ROSSI Jacqueline, BELGIQUE
ROUCHE Nicolas, BELGIQUE
RUSS Steve, GRANDE-BRETAGNE
SABONGUI Marie-Tewfik, EGYPTE
SCHMIDT Siegert, ALLEMAGNE
SCHNEIDER Maggy, BELGIQUE
SCHUBRING Gert, RFA
SERRAO SERAPIO Mari Bela, PORTUGAL
SIBILLA Alphonsina, ITALIE
SIDDOWAY Michael, USA
SIGURDSSON B.S. Gunnar, ISLANDE
SMID Harm Jan, PAYS-BAS
SOTO CORNEJO Osabel, CHILI
SOUSA PINTO José, PORTUGAL
SOUSA Elisabete, PORTUGAL
TESTA Giuliano, ITALIE
THOMAIDIS Yannis, GRECE
THYBO Christian, DANEMARK
TORRES Maria Julia, PORTUGAL
TROMPLER Simone, BELGIQUE
TZANAKIS Constantinos, CRETE-GRECE
VAN BRUMMELEN Glen, CANADA
VAN CAMP Marie Jeanne, BELGIQUE
VAN MAANEN Jan, PAYS-BAS
VAST Nicole, BELGIQUE
VELOSO Eduardo Manuel, PORTUGAL
VERHAEGH Gerry, PAYS-BAS
VICENTINI Caterina, ITALIE
VIERA Ana, PORTUGAL
VOLKERT Klaus, ALLEMAGNE
WALDEGG Guillermina, MEXIQUE
WARNIER Anne, BELGIQUE

PARTICIPANTS FRANCAIS

BATHIER Michèle	JANVIER Martine	HUET Alain	ANDIN Muriel
BELET André	JENDOUBLI Mohamed	HUPE-GUEGAN Laure	BELLARD Nicole
BELET Monique	JOEZAU Marie-Françoise	BARTHEZ Annie	BERNARD Alain
BENARD Dominique	KELLER Olivier	BOCQUET Christian	BONAFE Freddy
BERTHE Yvette	KOELBLEN Sabine	CHEVRAULT Pierre	BRONNER Alain
BESSOT Didier	KOUTEYNIKOFF Odile	HURTELLE Isabelle	COLLIN Bernard
BORREANI Jacqueline	LANGUEREAU Hombeline	MAS-GALAUP Anne	COMBES Marie-Claire
BOYE Jean	LASSALLE Olivier	PROUST Christine	FAUVEAU François
BOYE Anne	LE CHEVALIER Jean-Luc	SAINT-MARTIN Marie-Pierre	HEBRAUD Bernard
BRUNNER Evelyne	LEFORT Xavier	SALEZ Serge	JABOEUF François
BUHLER Martine	LE GOFF Jean-Pierre	SARROUY Michel	JABOT Elisabeth
CABANAC-GUILLAUME Jacqueline	LE GOUIS Françoise	TRIKI Patricia	KIEFFER Françoise
CABASSUT Richard	LEVARD Michel	BARBIN Evelyne	LALANDE Françoise
CHEVALLIER Guy	LOMBARDI Henri	BELHOSTE Bruno	LALAUZE Jean-Jacques
CLAPIE Mireille	MAGGI Pascale	BKOUCHE Rudolf	LARES Allen
COMBRADE Maryse	MERKER Claude	BOROWCZYK Jacques	LEWILLION Martine
COUSQUER Eliane	METIN Frédéric	BRIN Philippe	LONG Régine
DAUMAS Denis	MICHEL-PAJUS Annie	CAUTY André	LOVICHI Chantal
DE COINTET Michèle	MOREL Etirenne	DHOMBRES Jean	MARTIN Jacqueline
DELATTRE Joëlle	NORDON-TRISTANI Nicole	DURAND-RICHARD Marie Josée	MARTINEZ Jean-Michel
DELEDICQ André	NOUET Monique	HOUZEL Christian	RAVEL Dominique
DODY Brigitte	PAILLET Michèle	MAGALHAES DE FREITAS José	NOGUES Maryse
DOMAIN Robert	PICQ Martine	MAURY Sylvette	SALGON Bernard
DOPFFER Marie	PLANE Marie-Jeanne	NORREDINE Mohamed	SECO Michel
DOUSTAING Louis	PROVOST Sylvie	NOUAZE Yvon	SOLER Michelle
FAHRENKAUG-DULAC Caroline	RAUDRANT Sylvie	VERLEY Jean-Luc	TEISSONIERE Alain
FAUQUET Danièle	REMILLIEUX Marie-Claire	FRAYSSE Gaston	TROUCHE Luc
FERREOL Gilles	REYNAUD Janine	LEBRUN Patricia	VILE-PRUN Claudine
FRIEDELMEYER Jean-Pierre	ROLLAND David	MARRY Béatrix	
GISPERT Hélène	ROUX Martine	PLANE Henry	
GREGOIRE Michèle	ROZENFELD Roland	TOURNES Dominique	
GUICHARD Jean-Pau	SCHEIER Danielle	TROTOUX Didier	
GUICHARD Jacqueline	SERFATI Michel	VENARD Jacqueline	
GUILLEMOT Michel	SICRE Jean-Pierre		
HALLEZ Maryvonne	SIP Jacky		
HEBERT Elisabeth	SPIESSER Maryvonne		

Composition : **IREM Montpellier**

Illustration couverture : Noëlle VIARD
JAUNE - Huile sur toile (81 x 54) 1990

Photogravure, impression : **Presses de Lunel**
168, rue de l'Industrie
Z.A. Luneland
34400 LUNEL - FRANCE
Tél. 67.83.19.45 - Fax. 67.71.85.84

dépôt légal 3• trimestre 1995