Une activité d'introduction de la notion de limite à l'infini en première ES

Catherine Dufossé

Le contexte

Les élèves ont déjà beaucoup manipulé les fonctions depuis le début de l'année : ils ont fait des activités graphiques, et ont appris à calculer une dérivée et à l'utiliser pour trouver les variations d'une fonction, tracer une tangente ou séparer les solutions d'une équation. Mais la notion de limite n'a jamais été sérieusement approchée. Ainsi, pour calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto x^2$, d'aucuns disent, sans autre forme de procès : « quand x devient égal de a, le quotient $\dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$, égal à $(x + a)$, devient égal à $2a$ » pour justifier l'écriture $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a$.

Notons d'autre part qu'en première ES, dans une classe de « non-spécialistes » comme la mienne, on ne peut pas passer par les suites pour aborder « en douceur » la notion de limite, on est restreint par le programme lui-même à rester dans le cadre des fonctions.

L'activité proposée et le travail effectué

Soit f la fonction $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-3}$. On remarque que la fonction n'est pas définie en 3.

Question posée à la classe : que devient $f(x)$ quand x devient très grand ?

Les élèves regardent le graphe d'abord sur la fenêtre usuelle de la calculatrice, puis sans modification sur l'axe des ordonnées, sur des intervalles variés de l'axe des abscisses : [1 000,2 000], [5 000, 10 000], etc.

Commentaire d'un élève : « Ça a l'air horizontal, mais en fait, ça l'est pas, ça descend doucement. Ça doit finir par atteindre l'axe des x. »

Nous résolvons l'équation $f(x) = 0$ pour voir si oui ou non, la courbe atteint l'axe des x. À la surprise des élèves, il n'y a qu'un point d'intersection, d'abscisse plus petite que 3, qui n'est donc pas situé sur la branche « droite » de la courbe actuellement étudiée.

On vérifie en outre que la fonction est effectivement décroissante : sa dérivée est négative.

Le problème soulevé ensuite par les élèves est de savoir si $f(x)$ descend jusqu'à 1.

Nouvelle équation : $f(x) = 1$. Non, $f(x)$ n'est jamais égal à 1 sur cet intervalle.

Je les aiguille alors vers l'examen de $f(x)$ pour de « grandes valeurs » de x.

Nous utilisons la table de la calculatrice pour construire un tableau de valeurs pour $x = 10^n$, pour quelques valeurs de n.

Devant les résultats, l'idée est de chercher si la fonction atteint 2. Non, elle n'atteint jamais la valeur deux ; l'équation $f(x) = 2$ n'a pas de solution, phénomène étrange

pour les élèves.
Je leur demande alors de comparer $f(x)$ à 2 en cherchant le signe de $f(x) - 2$.
C'est un peu long dans cette classe qui n'a pas de grande habitude du calcul, mais la réponse finit par arriver : $f(x)$ est toujours plus grand que 2, lorsque x est supérieur à 3.
Je propose de monter un tout petit peu la barre et de comparer maintenant $f(x)$ à « 2 plus un millionième ». Ce millionième est bien gênant, et les calculs sont encore plus malaisés, mais les élèves ne sont pas du tout découragés, et finissent par arriver au bout, avec mon appui pour certains. On revient au dessin, je schématise la situation sur le graphique déjà présent au tableau : à partir de la valeur 7 000 003 pour x, $f(x)$ se trouve entre 2 et 2,000 001.
Devant l'intérêt des élèves pour ce qu'ils découvrent, je décide de pousser les calculs et je leur propose, de comparer $f(x)$ à $2 + \varepsilon$, sans même prendre la précaution comme je le fais souvent, de me restreindre à un epsilon de la forme 10^{-n}.
Nouveaux calculs : les élèves ne savent d'abord que faire de cette lettre incongrue, mais après discussion, le calcul avance et livre la réponse : à partir de $\frac{7}{\varepsilon}+3$, $f(x)$ est compris entre 2 et $2 + \varepsilon$.
Je décline le résultat pour faire sentir sa puissance, en donnant à epsilon des valeurs diverses :
« je sais que $f(x)$ sera une valeur approchée de 2 à un milliardième près, à partir de la valeur sept milliards trois de x, etc. »
Il n'y a plus qu'à écrire : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$, et à généraliser la définition, ce que je fais en français.
« Dire que f admet la limite L en plus l'infini, c'est dire que pour toute précision ε choisie, à partir d'une certaine valeur x_0 de x, $f(x)$ est une valeur approchée de L à ε près. »

Pour conclure

Nous avons travaillé deux heures et demie pour en arriver là, mais j'ai l'impression que mes élèves ont fait une découverte, et l'attention n'a jamais fait défaut. Nous avons fait beaucoup de calculs, mais ils livraient des réponses à de vraies questions. Cette classe est de niveau très moyen, malhabile en calcul, mais ce sont des élèves curieux et ouverts, qui coopèrent bien. Ne méritent-ils pas de comprendre les mots qu'ils emploient, même s'ils ne sont pas dans une série scientifique ?
Certes, je n'ai pas beaucoup insisté sur la non-unicité du fameux x_0 et notre calcul l'a défini comme une fonction de ε. On ne peut pas dire tout à la fois, et cette activité ne prétend pas, à elle seule, tout dire sur la limite, mais elle a permis, je l'espère, de leur donner une idée plutôt juste de cette notion délicate. Je ne regrette nullement d'avoir pris le temps de questionner longtemps cette situation, plutôt que d'avoir privilégié le bachotage sur les techniques de calcul : je n'ai pas l'impression que mes élèves aient perdu leur temps.
Quant à moi, cette séance me conforte dans ma vision de mon métier : on peut parler vraiment des objets mathématiques devant un très large public, et un enseignement pour tous peut rester ambitieux.