Construction de polyèdres réguliers ou semi-réguliers

Jean-Pierre Darou

J'enseigne les mathématiques de l'option sciences dans une classe de seconde du lycée Jean Monnet à Strasbourg. Le dernier thème proposé l'année dernière était l'étude et la construction d'un polyèdre à l'aide du logiciel GeospaceW. Chaque élève a pu faire son choix ; beaucoup ont prudemment opté pour les plus simples, mais certains ont tenu à se lancer dans des études plus difficiles. J'ai parfois eu du mal à les freiner, l'un d'eux a même voulu s'attaquer à un polyèdre étoilé. Cela m'a incité à approfondir également le sujet, et me conduit à écrire cet article.

En fait j'ai choisi d'aller au-delà de ce qui a été fait, et parfois même de ce qui est abordable au lycée. J'ai délibérément laissé les études les plus simples, qu'on trouve dans les ouvrages scolaires. Plusieurs de ces activités n'ont donc pas été expérimentées en classe. Pour celles qui l'ont été, les élèves m'ont surpris par l'aisance avec laquelle ils ont manié GeospaceW, découvrant « sur le tas » les coordonnées et les transformations dans l'espace. Ils ont eu en revanche beaucoup plus de difficultés dans les raisonnements, notamment dans ceux qui sont nécessaires pour construire le dodécaèdre ou l'icosaèdre. On verra qu'il est alors possible de contourner en grande partie le problème en pilotant un point de manière à obtenir la configuration souhaitée. Les raisonnements deviennent plus abordables en classe de première ou de terminale.

On trouvera dans l'article les programmes de construction sous la dénomination « Texte de la figure ». Ces textes ne sont cependant pas exactement écrits comme dans le logiciel, il ne sera donc pas possible d'en faire un simple copier/coller avec l'éditeur de Geospace. En effet, pour ne pas alourdir, j'ai systématiquement supprimé tout ce qui concerne la mise en forme et j'ai regroupé certaines instructions. Souvent ces regroupements sont effectivement possibles lors de la création (les images de points notamment), parfois non (images de polygones).

Les figures jointes ont été réalisées avec GeospaceW (GeoplanW pour la figure 3), les calculs avec Derive 5.

I. Antiprismes et icosaèdre

Un antiprisme régulier est un polyèdre dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux et dont les deux bases sont des polygones réguliers. Lorsque les bases sont aussi des triangles équilatéraux, on obtient un octaèdre régulier, sinon les bases et les faces latérales sont des polygones réguliers de deux sortes différentes, et chaque sommet est commun à trois polygones (dont deux triangles équilatéraux), qui se succèdent dans le même ordre : c'est donc un polyèdre semi-régulier (définition au § III).

Nous allons construire avec le logiciel GeospaceW un antiprisme régulier dans le cas où les bases sont des pentagones, puis dans le cas où ce sont des carrés.

Ces deux cas sont intéressants pour des raisons différentes :

- À partir de l'antiprisme régulier de base pentagonale on construit l'icosaèdre régulier.
- L'antiprisme régulier de base carrée donne la solution au problème consistant à placer 8 points sur une sphère de sorte que la plus petite distance entre deux quelconques de ces points soit maximale (voir l'article de La Recherche – spécial mathématiques – d'octobre 2001, page 38 : « Le problème des dictateurs ennemis »). Sans prouver ce résultat, on peut établir que le côté d'un cube dont les sommets sont situés sur la sphère circonscrite à un antiprisme régulier est bien inférieur à l'arête de l'antiprisme.

La méthode proposée pour construire un antiprisme dont les bases ont n côtés est la suivante :

- Placer A(1,0,−a). Soit r la rotation d'angle $2\pi/n$ autour de l'axe oz, on trace B = r(A), C = r(B), D = r(C), etc. On obtient ainsi les sommets de l'une des deux bases.
- Lorsque n est impair, on obtient la deuxième base en traçant les images des sommets de la première par la symétrie s de centre O.
  Lorsque n est pair, on applique la symétrie s suivie de la rotation r' d'angle π/n. On peut aussi définir, puis appliquer, la composée f de s et de r'.
- Les faces latérales sont alors des triangles isocèles, il s'agit de déterminer la valeur à donner à a pour qu'ils deviennent équilatéraux.
  Méthode rigoureuse : Calculer la distance $d = 2\,|a|$ entre les deux bases de l'antiprisme.
  Méthode approchée : Piloter le point A sur la parallèle à oz passant par I(1,0,0).

1. Construction d'un antiprisme à bases pentagonales et d'un icosaèdre

Calcul exact de *d* (envisageable sous cette forme en Première S)

G et G′ sont les centres des cercles circonscrits aux deux pentagones. La droite (GG′) est orthogonale aux plans de ces cercles. A′B′C′D′E′ est l'image de ABCDE par la symétrie de centre O, milieu de [GG′].
AD′B est un triangle équilatéral. I est le milieu de [AB], H est le projeté orthogonal de D′ sur le plan (GAB) (figure 1).

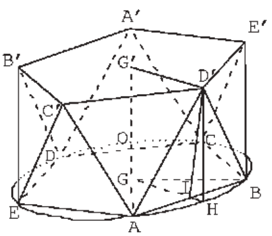

Figure 1

Pour simplifier les calculs, on choisit comme unité le rayon du cercle circonscrit au pentagone. On constatera qu'on aboutit à un résultat étonnamment simple :
La distance entre les plans des deux pentagones est égale au rayon du cercle circonscrit à ces pentagones.

a) Montrer que H appartient au cercle circonscrit au pentagone ABCDE et à la droite (GI).

b) Quelle est la mesure en radians α de l'angle $\widehat{\mathrm{AGI}}$?

c) Calculer, en fonction de sin α ou cos α, les longueurs AB, D′I et IH.

d) Calculer d = D′H. Montrer que $d^2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5}\right)$. Calculer une valeur approchée de d à la calculatrice.

e) Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} + \overrightarrow{\mathrm{GC}} + \overrightarrow{\mathrm{GD}} + \overrightarrow{\mathrm{GE}} = \vec{0}$, en déduire que :

$$\cos 0 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{-4\pi}{5} + \cos\frac{-2\pi}{5} = 0.$$

En déduire la valeur exacte de d^2, puis celle de d.

Construction avec GeospaceW

Le calcul précédent a montré qu'on doit donner à a la valeur $-1/2$. On reprend les étapes déjà décrites plus haut pour représenter l'antiprisme, on peut ensuite tracer les intersections F et F′ du cercle d'axe *oy* passant par A avec l'axe *oz* pour obtenir l'icosaèdre.

Texte de la figure :

A point de coordonnées (1,0,–0.5) dans le repère Rxyz
B C D E image de A B C D par la rotation d'axe oz et d'angle 72 degrés
A′ B′ C′ D′ E′ image de A B C D E par la symétrie de centre o
sp sphère de centre o et de rayon oA (unité de longueur Uxyz)
F point d'intersection 1 de la droite oz et de la sphère sp
F′ point d'intersection 2 de la droite oz et de la sphère sp
ico polyèdre convexe de sommets ABCDEFA′B′C′D′E′F′

Pour éviter le calcul exact de la cote de A, on peut placer le point I (1,0,0), puis tracer la parallèle d à l'axe *oz* passant par I, A est un point libre de d qu'on pilotera, en affinant la précision, de sorte que AB = AD′ (avec la précision du logiciel). La figure devient ainsi plus accessible à un élève de seconde.

2. Construction d'un antiprisme à bases carrées

On effectue des calculs similaires aux précédents (figure 2).
On trouve cette étude dans la brochure de l'APMEP « Enseigner la géométrie dans l'espace au collège et au lycée ».
On obtient :

$$\mathrm{C'I} = \frac{\sqrt{6}}{2},\quad \mathrm{IH} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2},\quad h = \mathrm{C'H} = \sqrt{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{4}}.$$

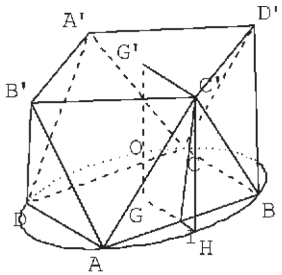

Figure 2

On place donc $\left(1\,;0\,;-\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}}}{2}\right)$ et on applique la méthode décrite plus haut.

Pour traiter le problème « des dictateurs ennemis », on construit la sphère de centre *o* passant par A et un cube dont les sommets sont sur cette sphère.
Voilà une méthode pour tracer le cube :
S est un point libre sur la sphère, T le symétrique de S par rapport à *o*, K le barycentre de (S,2) et (T,1).
On trace alors l'intersection de la sphère avec le plan orthogonal à ST passant par K, on place un point libre U sur ce cercle, puis on obtient V et W par rotations autour de (ST).
Les trois derniers sommets s'obtiennent par une symétrie de centre *o*.
On peut alors vérifier que le côté du cube est inférieur à l'arête de l'antiprisme. Les calculs exacts donnent : $AB = \sqrt{2}$ et $SU = \dfrac{\sqrt{4+\sqrt{2}}}{\sqrt{3}}$.

Texte de la figure :

A point de coordonnées (1,0,−2^0.25/2) dans le repère Rxyz
B C D image de A B C par la rotation d'axe oz et d'angle 90 degrés
e f g h image de A B C D par la symétrie de centre o
E F G H image de e f g h par la rotation d'axe oz et d'angle 45 degrés
ap polyèdre convexe de sommets ABCDEFGH
s sphère de centre o et de rayon oA (unité de longueur Uxyz)
S point libre sur la sphère s
T image de S par la symétrie de centre o
K barycentre de (S,2) (T,1)
p plan passant par K et perpendiculaire à la droite (ST)
c section de la sphère s par le plan p
U point libre sur le cercle c
V W image de U V par la rotation d'axe (ST) et d'angle 120 degrés
X Y Z image de U V W par la symétrie de centre o
cu polyèdre convexe de sommets STUVWXYZ
Af0 affichage de la longueur du segment [AB] (unité Uxyz) (6 décimales)
Af2 affichage de la longueur du segment [SU] (unité Uxyz) (6 décimales)

II. Dodécaèdre

On pourrait tracer le dodécaèdre à partir de l'icosaèdre, mais il faudrait obtenir les centres de gravité des 20 faces, ce qui est assez long. Voilà une autre méthode. On trouve une méthode voisine dans *Travaux pratiques en première scientifique, IREM de Strasbourg*, avril 86.

Texte proposé aux élèves de l'option sciences en seconde

Pour simplifier on prend comme unité la longueur de l'arête du dodécaèdre, donc AB = 1.

a) Calculs sur le pentagone régulier convexe.
On pose AC = d (diagonale du pentagone).
Montrer que ABC et ABH sont de même forme ; en déduire que d est solution de l'équation. Vérifier que cette équation s'écrit : $\left(d-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=0$ et conclure que d est égal au nombre d'or : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

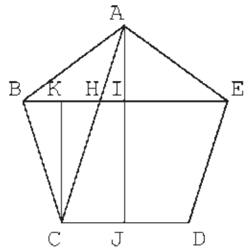

Figure 3

Calculer BK, en déduire que $IJ^2=\frac{1+d^2}{4}$
(ce résultat sera utilisé par la suite).

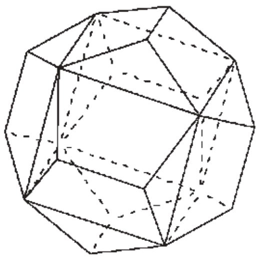
Figure 4

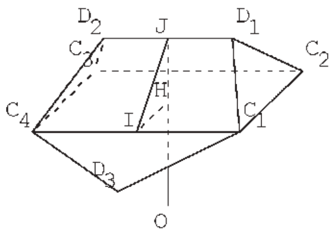

Figure 5

b) La figure 4 ci-dessus montre qu'un dodécaèdre régulier peut être construit à partir d'un cube de côté d en y ajoutant 6 prismes tronqués que j'appellerai « toits » pour simplifier. Un tel « toit » est représenté sur la figure 5.

- Calculer, en fonction de d, le rayon de la sphère circonscrite au dodécaèdre.
- J est le milieu de D_1D_2 et H l'intersection de OJ avec le plan $C_1C_2C_3C_4$, montrer que : $HJ=\frac{1}{2}$.

Tracé

On peut poser $a = d/2$, puis tracer le cube de centre o dont un sommet est (a,a,a). On place ensuite les 12 sommets des 6 toits : il suffit de placer (0 ; 0,5 ; a + 0.5), (0,5 ; a + 0,5 ; 0) et (a + 0,5 ; 0 ; 0,5), les autres sommets s'obtenant à l'aide de symétries.
Il est encore plus simple de multiplier par 2 toutes les dimensions, ce qui conduit au texte suivant :

Texte de la figure

or = (rac(5)+1)/2
C1 point de coordonnées (or,or,or) dans le repère Rxyz
C2 C3 C4 image de C1 C2 C3 par la rotation d'axe oz et d'angle 90 degrés
C5 C6 C7 C8 image de C1 C2 C3 C4 par la symétrie de centre o
D1 point de coordonnées (0,1,or+1) dans le repère Rxyz
D2 image de D1 par la symétrie d'axe oz
D3 point de coordonnées (or+1,0,1) dans le repère Rxyz
D4 image de D3 par la symétrie d'axe ox
D5 point de coordonnées (1,or+1,0) dans le repère Rxyz
D6 image de D5 par la symétrie d'axe oy
D7 D8 D9 D10 D11 D12 image de D1D2 D3 D4 D5 D6 par la symétrie de centre o
dod polyèdre convexe de sommets C1C2C3C4C5C6C7C8D1D2D3D4D5D6 D7D8D9D10D11D12

III. Polyèdres archimédiens

Un polyèdre convexe est semi-régulier lorsque ses faces sont des polygones réguliers d'au moins deux types différents et disposés dans le même ordre autour de chaque sommet. Comme certains auteurs, j'appelle polyèdres archimédiens les polyèdres semi-réguliers autres que les prismes ou les antiprismes.
Johannes Kepler, dans son livre *Harmonice Mundi*, paru à Linz en 1619, prouva qu'il n'existe que 13 polyèdres archimédiens. Beaucoup sont assez faciles à obtenir par troncature à partir d'un des polyèdres réguliers convexes.
On les répartit en trois familles : celle du tétraèdre avec un descendant unique : le tétraèdre tronqué ; celles du cube et du dodécaèdre contenant chacune six éléments.
Si on place un point libre A sur une face d'un cube et si on lui applique les 24 déplacements (ou les 48 isométries) laissant le cube invariant, on obtient les sommets d'un polyèdre dont certaines faces sont des polygones réguliers. On peut alors piloter le point A pour obtenir un polyèdre archimédien. Cette méthode peut paraître manquer de rigueur, mais on peut la compléter par le calcul algébrique des coordonnées de A. On obtient ainsi les six éléments de la famille du cube. Une méthode similaire donne les éléments de la famille du dodécaèdre.

1. Cube adouci

Il existe deux cubes adoucis. En plaçant A dans le triangle o_1MC_1 on obtient l'un des deux, l'autre s'obtiendrait par une symétrie par rapport à o.
Il existe plusieurs manières d'obtenir les déplacements du cube, on les observe très bien en manipulant un cube en carton. La méthode proposée privilégie au début les rotations autour d'axes passant par les centres des faces. C pourrait aussi être défini à partir de A par une rotation autour de la diagonale C_4C_6, en le définissant à partir de B_1, il est plus facile de déterminer ses coordonnées, ce qui sera utile pour le calcul qui suit.

Les élèves pourront contrôler leur méthode en affichant les coordonnées des points, ils pourront ainsi se corriger s’ils se sont trompés de signe sur la deuxième rotation.

On obtient un polyèdre dont 6 faces sont des carrés et 8 des triangles équilatéraux. Les 24 triangles ayant un côté commun avec les carrés sont quelconques (figure 6).
Pour que le triangle ABC soit équilatéral, il est commode de faire coïncider G, centre de gravité de ABC avec O, centre du cercle circonscrit. Pour cela on affiche la distance OG et on pilote le point A, en affinant progressivement le pas du pilotage, jusqu’à obtenir OG = 0.
On peut aussi faire le calcul des coordonnées de A (par exemple avec l’aide de Derive), puis utiliser l’instruction : placer un point libre par coordonnées.

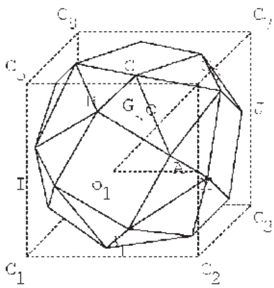

Figure 6

Texte de la figure

C1 point de coordonnées (1,-1,-1) dans le repère Rxyz
C2 C3 C4 image de C1 C2 C3 par la rotation d'axe oz et d'angle 90 degrés
C5 C6 C7 C8 image de C1 C2 C3 C4 dans la symétrie par rapport au plan oxy
M milieu du segment [C2C6]
o1 point d'intersection de la droite ox et du plan C1C2C6
p polygone convexe de sommets o1MC6
A point libre dans le polygone p
B A1 B1 image de A B A1par la rotation d'axe ox et d'angle 90 degrés
C image de B1 par la rotation d'axe oy et d'angle -90 degrés
Q2 Q3 Q4 image de C Q2 Q3par la rotation d'axe oz et d'angle 90 degrés
R1 image de A par la rotation d'axe oz et d'angle 90 degrés
R2 R3 R4 image de R1 R2 R3 par la rotation d'axe oy et d'angle 90 degrés
G centre de gravité du triangle ABC
O centre du cercle circonscrit au triangle ABC
J milieu du segment [C3C7]
I milieu du segment [C1C5]
p1 p2 p3 p4 q1 q2 q3 q4 r1 r2 r3 r4 image de A B A1 B1 C Q2 Q3 Q4 R1 R2 R3 R4par la symétrie d'axe (IJ)
scu polyèdre convexe de sommets ABA1B1CQ2Q3Q4R1R2R3R4p1p2p3p4 q1q2q3q4r1r2r3r4
Af0 affichage de la longueur du segment [OG] (unité Uxyz) (6 décimales)

Calcul des coordonnées de A

On peut se ramener à des calculs dans le plan (utiliser l’option « vue standard selon oyz puis oxz »). L’ordonnée et la cote de B se déduisent de celles de A par une rotation de 90° autour de l’axe *ox*, donc dans le plan *oyz*. L’abscisse et la cote de C se déduisent de celles de B_1 par une rotation de −90° autour de l’axe *oy*, donc dans le plan *oxz*.

Si on utilise le logiciel Derive, on affecte aux variables A, B, B_1 et C les valeurs respectives :
A := [1, y, z] ; B := [1, $-z$, y] ; B_1 := [1, z, $-y$] ; C := [y, z, 1].
L'égalité AB = AC = BC conduit à l'équation : $z^3 + z^2 + 3z - 1 = 0$, et on en déduit les valeurs algébriques ou approchées de z, puis de y. On peut aussi à cette occasion étudier la fonction : $z \mapsto z^3 + z^2 + 3z - 1$.

2. Autre douceur

L'étude du dodécaèdre adouci (figure 7) est plus complexe et n'a pas été proposée. Le calcul des coordonnées de A sort du cadre des programmes de lycée. Il possède 60 sommets, on ne peut donc pas le définir directement par la liste de ses sommets (le maximum permis par le logiciel est de 40). J'ai choisi de définir ses faces, il faudra ensuite toutes les dessiner en mode opaque (utiliser l'éditeur du texte de la figure). Il existe également un deuxième dodécaèdre adouci image du premier par la symétrie de centre o.

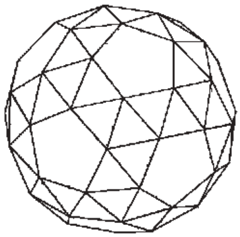

Figure 7

Texte de la figure

Construction du dodécaèdre : voir plus haut
----
o1 centre du cercle circonscrit au triangle D4D3C1
M milieu du segment [C1D5]
p polygone convexe de sommets o1MC1
A point libre dans le polygone p
B A3 A4 A5 image de A B A3 A4 par la rotation d'axe (oo1) et d'angle 72 degrés
p1 polygone convexe de sommets ABA3A4A5
E1 C image de A E1 par la rotation d'axe (oC1) et d'angle 120 degrés
I milieu du segment [CB]
G image de A par la symétrie d'axe (oI)
g centre de gravité du triangle ABC
O centre du cercle circonscrit au triangle ABC
r rotation d'axe (oo1) et d'angle 72 degrés
sI symétrie d'axe (oI)
p2 image du polygone p1 par la transformation sI
p3 p4 p5 p6 image du polygone p2 p3 p4 p5 par la transformation r
t1 polygone convexe de sommets ABC
t6 polygone convexe de sommets E1CA
t2 t3 t4 t5 t7 t8 t9 t10 image du polygone t1 t2 t3 t4 t6 t7 t8 t9 par la transformation r
t11 image du polygone t1 par la transformation sI
t12 t13 t14 t15 image du polygone t11 t12 t13 t14 par la transformation r
t16 image du polygone t12 par la transformation sI

t17 t18 t19 t20 image du polygone t16 t17 t18 t19 par la transformation r
t21 image du polygone t8 par la transformation sI
t22 t23 t24 t25 image du polygone t21 t22 t23 t24 par la transformation r
t26 image du polygone t2 par la transformation sI
t27 t28 t29 t30 image du polygone t26 t27 t28 t29 par la transformation r
t31 image du polygone t3 par la transformation sI
t32 t33 t34 t35 image du polygone t31 t32 t33 t34 par la transformation r
t36 image du polygone t4 par la transformation sI
t37 t38 t39 t40 image du polygone t36 t37 t38 t39 par la transformation r
P milieu du segment [C8D8]
Q milieu du segment [C4D2]
s symétrie d'axe (PQ)
…
Il reste à tracer les images p7 à p12 des pentagones p1 à p6 ainsi que les images t41 à t80 des triangles t1 à t40 par la symétrie s, il est d'ailleurs plus rapide de le faire directement dans l'éditeur du texte de la figure.
Af0 affichage de la longueur du segment [Og] (unité Uxyz) (6 décimales).

Calcul des coordonnées de A avec Derive

Pour ne pas alourdir le texte, j'ai caché les labels et supprimé tous les calculs intermédiaires. Les textes sont en italique.

InputMode := Word
Les calculs utilisent la matrice d'une rotation d'angle q autour d'un axe de vecteur unité u(a,b,c). Voir par exemple : Algèbre linéaire, géométrie L.Lesieur, … Armand Colin, ex. 22 page 299.

R(a,b,c,θ) :=

$$\begin{pmatrix} \left(1-a^2\right)\cdot\cos\theta+a^2 & ab\cdot\left(1-\cos\theta\right)-c\sin\theta & ac\cdot\left(1-\cos\theta\right)+b\sin\theta \\ ab\cdot\left(1-\cos\theta\right)+c\sin\theta & \left(1-b^2\right)\cdot\cos\theta+b^2 & bc\cdot\left(1-\cos\theta\right)-a\sin\theta \\ ac\cdot\left(1-\cos\theta\right)-b\sin\theta & bc\cdot\left(1-\cos\theta\right)+a\sin\theta & \left(1-c^2\right)\cdot\cos\theta+c^2 \end{pmatrix}$$

Sommets et centre o1 du pentagone p contenant le point libre A

$$\text{or} := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

C1 := [or , or , or]
D1 := [or + 1 , 0 , 1]
D2 := [or + 1 , 0 , −1]
C7 := [or , or , −or]
D5 := [1 , or + 1 , 0]

$$o1 := \frac{\text{C1}+\text{D1}+\text{D2}+\text{C7}+\text{D5}}{5}$$

Matrice de la rotation R1 d'axe oo1 et d'angle 2π/5

$$u := \frac{o1}{|o1|}$$

$$\mathrm{R1} := \mathrm{R}\left(u_1, u_2, u_3, \frac{2\pi}{5}\right)$$

Équation du plan contenant le pentagone p

([x,y,z] - C1) · u = 0

$$y = -x \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{5} + 2$$

$$\mathrm{A} := \left[x, -x \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{5} + 2, z\right]$$

B := R1 · A

Matrice de la rotation R2 d'axe oC1 et d'angle -2π/3

$$u := \frac{\mathrm{C1}}{|\mathrm{C1}|}$$

$$\mathrm{R2} := \mathrm{R}\left(u_1, u_2, u_3, \frac{2\pi}{3}\right)$$

C := R2 · A

Le triangle ABC est équilatéral

$$|\mathrm{B} - \mathrm{A}|^2 = |\mathrm{C} - \mathrm{A}|^2 \wedge |\mathrm{B} - \mathrm{A}|^2 = |\mathrm{C} - \mathrm{B}|^2$$

On élimine z^2 entre les deux équations, ce qui permet d'exprimer z en fonction de x. Dans l'une des équations, on substitue à z la sous expression précédente. Tous calculs faits, x est solution de :

$$x^3 \cdot \left(3\sqrt{5} + 13\right) - x^2 \cdot \left(31\sqrt{5} + 71\right) + x \cdot \left(94\sqrt{5} + 210\right) - 89\sqrt{5} - 199 = 0$$

Le calcul algébrique de la solution réelle s'obtient rapidement, mais Derive ne parvient pas à effectuer le calcul algébrique de y et de z. On obtient une valeur approchée de x :

x =1.634677913

Puis de y et z :

y = 1.591103553

z = 0.818826401

3. Autres polyèdres archimédiens

La méthode utilisée pour les polyèdres adoucis pourrait s'appliquer sans difficulté s'il n'y avait pas cette restriction à 40 sommets pour un polyèdre convexe.

On peut l'appliquer pour les polyèdres associés aux déplacements du cube, il suffit de reprendre la figure du cube adouci et de rédéfinir le point A. Voici ceux qu'on

obtient ainsi :
A = *o*1 : octaèdre (régulier, 8 sommets distincts)
A = M : cuboctaèdre (12 sommets distincts)
A sur MC6 de sorte que AC = BC : cube tronqué (24 sommets)
A sur *o*1C6 de sorte que AB = AC : rhombicuboctaèdre (24 sommets)
A sur *o*1M de sorte que AB = BC : octaèdre tronqué (24 sommets)

Pour obtenir le cuboctaèdre tronqué (48 sommets) ainsi que les polyèdres de la famille du dodécaèdre, il faut dans chaque cas définir les faces, puis les dessiner en mode opaque, puisque le logiciel ne permet pas de tracer l'enveloppe convexe des sommets. La figure 8 représente l'icosidodécaèdre tronqué (120 sommets). On peut reprendre aussi les calculs des coordonnées de A, aucun n'est aussi difficile que ceux effectués pour le dodécaèdre adouci.

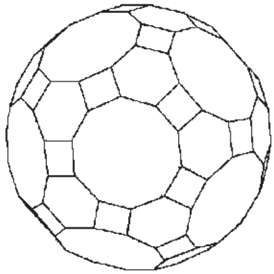

Figure 8

4. Polyèdres réguliers étoilés

On sait qu'il y en a 4 attribués à Kepler et Poinsot. Un de mes élèves voulait absolument en tracer un, ce qui fait que je m'y suis aussi intéressé.
On trouve dans les exemples fournis avec GeospaceW dans le répertoire « Classics » un fichier nommé Ptdodet.g3w qui fait penser au petit dodécaèdre étoilé. Ce tracé ne correspond pas à la définition. Il ne s'agit pas en effet d'obtenir un polyèdre non convexe dont toutes les faces sont des polygones réguliers de même nature (il y en aurait bien plus de 4), il faut aussi que tous les sommets soient sur une même sphère. Les intersections situées « en creux » ne sont pas des sommets. Les faces s'interpénètrent ; celles des polyèdres de Kepler sont des pentagones étoilés, celles des polyèdres de Poinsot sont des pentagones convexes disposés de façon étoilée.
Voici le texte de la figure du grand dodécaèdre étoilé de Kepler (figure 9). Le tracé est plus facile qu'on pourrait le croire. On trace en mode opaque les 20 tétraèdres formant les branches de l'étoile. Après en avoir tracé deux, les autres s'obtiennent par rotations puis symétries de centre o.

Texte de la figure

---- on commence par tracer un icosaèdre (voir ci-dessus)
ico polyèdre convexe de sommets ABCDEFA'B'C'D'E'F'
S1 point d'intersection des droites (C'A) et (DF)
p1 polyèdre convexe de sommets S1ABF
r1 rotation d'axe (EE') et d'angle 72 degrés
p2 p3 p4 p5 image du polyèdre p1 p2 p3 p4 par la transformation r1
S2 point d'intersection des droites (CF) et (B'E)
q1 polyèdre convexe de sommets S2EFA
q2 q3 q4 q5 image du polyèdre q1 q2 q3 q4 par la transformation r1
s symétrie de centre o

p6 p7 p8 p9 p10 q6 q7 q8 q9 q10 image du polyèdre p1 p2 p3 p4 p5 q1 q2 q3 q4 q5 par la transformation s

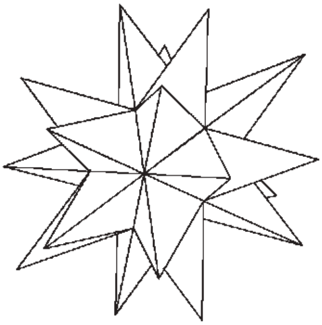

Figure 9

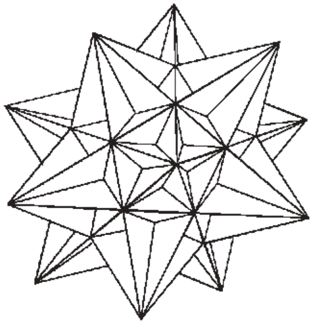

Figure 10

On obtiendrait de manière similaire le petit dodécaèdre étoilé. Le plus compliqué est le grand icosaèdre de Poinsot (figure 10) que j'ai décomposé en 80 solides.

Bibliographie et sites :

Sur GeospaceW :

http://vesta.cnam.fr/creem/ qui publie Geospace.

http://www.ac-rennes.fr/pedagogie/maths/edap/intro.htm

http://www.ac-poitiers.fr/math/prof/logic/chap2/geospace.htm

Sur les polyèdres :

Leonce Lesieur, Roger Temam, Jean Lefebvre, *Compléments d'algèbre linéaire*, collection U, Armand Colin.

H.S.M. Coxeter, *Regular Polytopes*, Dover publications, New York.

Françoise Pécaut, *Pavés et bulles, éléments de cristallographie mathématique*, Publication de l'APMEP nº 23.

http://www.bib.ulb.ac.be/coursmath : on y trouvera la méthode que j'ai suivie pour construire le cube adouci.

http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/archimedische.html : on y trouvera la démonstration de Kepler sur le nombre de polyèdres semi-réguliers (en allemand).

http://home.teleport.com/~tpgettys/poly.shtml : très riche et des liens vers d'autres sites.

http://www.crdp.ac-grenoble.fr/imel/xenon/poly/in.htm : avec un bel exemple d'intrus ne respectant pas toutes les conditions de la définition.