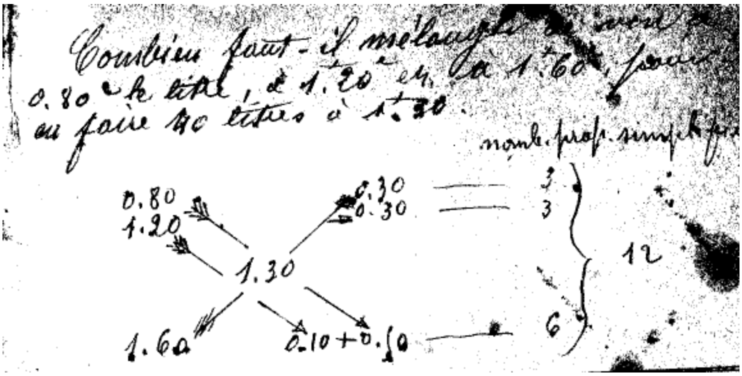
La règle des alliages et des mélanges

Pierre Collaudin(*)

Une longue tradition de pratiques mathématiques a traversé les siècles en transmettant des procédés algorithmiques tant pour la réalisation de tracés géométriques que pour la résolution de problèmes numériques.
En géométrie, la construction hypotético-déductive des éléments d'Euclide, complétée par la démarche d'analyse et de synthése de l'époque cartésienne a progressivement repoussé ces connaissances pratiques hors de l'école.
En algèbre, les méthodes de résolution d'équations ont aussi fait place nette : seule la règle de trois résiste. Mais les méthodes de fausses positions, les algorithmes des problèmes de partage, tous ces procédés simples et logiques dont l'origine peut remonter parfois à l'époque babylonienne, semblent s'être désintégrés au début du XXe siècle avec les réformes de l'enseignement des mathématiques.
Bien sûr, à l'époque de l'ordinateur, pourquoi s'encombrer de procédés aussi primitifs ? C'est pourtant l'une de ces méthodes simples qui fera l'objet de cet article, non par nostalgie d'un temps passé, mais plus pour faire partager la surprise ressentie en découvrant ce procédé appelé règle des alliages et des mélanges. Et, qui sait, peut être aurez-vous envie, vous aussi, de faire partager cette découverte à vos élèves ?

C'est en ouvrant un vieux manuel d'algèbre élémentaire de 1849, que nous avons trouvé sur la page de garde le texte manuscrit suivant :

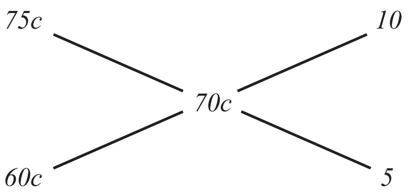


« Combien faut-il mélanger de vin à 0,80 F le litre, à 1,20 F et à 1,60 F pour en faire 40 litres à 1,30 F ? »
Le premier réflexe du prof de math moyen est certainement de vérifier que le procédé donne une réponse correcte. Mais oui cela convient. Répétez l'expérimentation avec d'autres données, cela semble toujours aussi efficace.

(*) CEPEC Lyon. IREM de Dijon.

Alors comment a-t-on pu ignorer une telle méthode pendant des décennies ? N'avons-nous pas conseillé à nos élèves confrontés à ce problème, d'effectuer leurs mélanges en se ramenant à des systémes d'équations dont les inconnues sont les quantités de produits à mélanger ?

Il n'est jamais trop tard pour s'instruire, c'est en plongeant dans des manuels élémentaires de la fin du XIX^{e} et du début du XX^{e} que l'on repère tout de suite le diagramme en croix caractéristique de ce type de problème. Pour mieux comprendre le principe, il suffit de lire les explications du cours d'arithmétique théorique et pratique de Jacquet et Laclef[(1)] :
« *On a du vin à 0 fr. 75 le litre et du vin à 0 fr. 60 le litre. Dans quelles proportions faut-il les mélanger pour avoir un vin qui revienne à 0 fr. 70 le litre ?*
On dispose généralement de la manière suivante les éléments du problème :



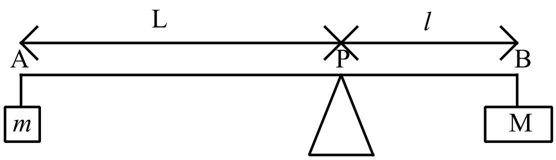
Proportions

10 litres à 75 centimes.
5 litres à 60 centimes.
Ou

2 litres à 75 centimes.
1 litre à 60 centimes.

En vendant 0 fr. 70 du vin qui coûte 0 fr 75, on perd 5 centimes. En vendant 0 fr. 70 du vin qui coûte 0 fr. 60, on gagne 10 centimes. Pour que la perte et le gain se compensent, il faut prendre 10 litres à 0 fr. 70 et 5 litres à 0 fr. 60 ; car d'un côté on perd 10 fois 5 centimes et, de l'autre, on gagne 5 fois 10 centimes On devra donc mélanger les vins dans la proportion de 10 à 5 ou de 2 à 1.»

Vous pourriez penser qu'un mélange à trois composants est plus complexe. Il n'en est rien, il suffit d'appliquer deux fois la méthode précédente et le tour est joué car tout cela ressemble à un numéro de magie ou plutôt d'équilibriste cherchant à compenser les pertes par les gains suivant le célèbre principe des leviers d'Archimède : « des grandeurs s'équilibrent à des distances inversement proportionnelles à leurs poids ».



$$\mathrm{L} \times m = l \times \mathrm{M}$$

Si les points A, P et B ont pour abscisses 60, 70 et 75, alors $\mathrm{L} = 70 - 60 = 10$ et $l = 75 - 70 = 5$. Donc les proportions m et M seront de 5 à 10 ou de 1 à 2, ce qui est bien la solution du problème étudié par Jacquet et Laclef.

(1) « Cours d'arithmétique théorique et pratique » Jacquet et Laclef édité en 1904 éditeur Nathan.

Les premiers manuels abordant cette règle semblent être les arithmétiques marchandes du monde méditerranéen du XV^{e} et du XVI^{e}. Ces manuels ont un but pédagogique clair : donner des règles simples et efficaces aux marchands. Or l'un des problèmes les plus complexes auxquels ces derniers sont confrontés, est la manipulation des différentes monnaies. En effet, jusqu'au XIII^{e}, la monnaie d'or créée par Constantin, le solidus, sera la seule monnaie utilisée en Europe occidentale ; d'autre part, sous le régne des Omeyyades, une unification des systémes monétaires basée sur le dinar d'or assurera une certaine homogénéité. Mais, avec le développement du commerce et la prépondérance des républiques italiennes, les monnaies se multiplient : ducat, florin, … Cette variété nécessite d'une part d'être un virtuose des unités : marc, once, denier, grain, garrobe, peletz, …, d'autre part de savoir rétablir une équivalence entre ces monnaies en se basant sur leur titre en métal précieux (or ou argent).

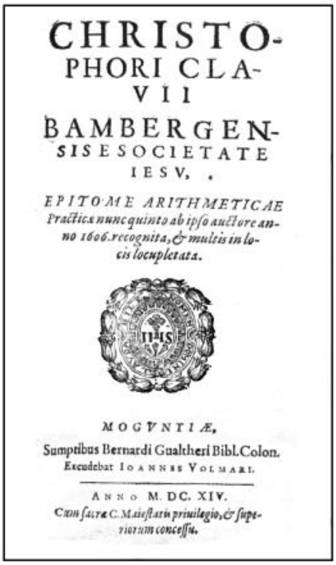
Les auteurs des ouvrages d'arithmétique qui sont donc des maîtres de calcul ou encore de l'abaque, décrivent donc des « manières prestes et légères » pour résoudre ces problèmes complexes que le développement du commerce méditérannéen a rendu plus aigus.

Le premier problème qui se pose entre deux monnaies de titres différents, sera donc de trouver une règle d'équivalence. Pour ne pas entrer dans le difficile vocabulaire propre aux financiers et aux orfévres de cette époque (titrage en deniers, en carats, …), disons en langage actuel que si l'une des monnaies est constituée de x % d'or et une autre de y % d'or, il suffira de prendre deux quantités proportionnelles aux nombres y et x de chacune des monnaies pour obtenir deux sommes équivalentes. Pour des marchands habitués à manipuler les balances quoi de plus naturel comme procédé ?

Ensuite on recherche quelle quantité d'or pur il faut ajouter ou retrancher à une monnaie pour en obtenir une de titre plus ou moins élevé.

Et, pour finir, on se propose de donner une règle « pour savoir faire mescles de billon », c’est à dire pour mélanger deux monnaies de titres différents afin d’obtenir une monnaie de titre intermédiaire fixé : « *du défaillement du meindre au moyen fay numérateur et du surplus du plus quand au moyen fay dénominateur. Et toujours le numérateur soit du plus grand et le dénominateur soit du meidre*. »[2] On peut reconnaître la règle des alliages décrite depuis le début de cet article.
En général la brièveté des explications laisse penser que cette méthode est issue d’une pratique courante ne nécessitant pas de description détaillée.
Les exemples qui illustrent la règle des alliages sont toujours du même type :
« *un marchand a 10 marcs de billon qui est à d8 (8 deniers) de fin, je demande combien lay fault de celui qui est à d3 pour le faire venir à d5*. »[3]
« *c’est un changeur qui a un billon d’argent à 10 deniers et 1/2 et à 4 deniers et il veut en faire une monnaie qui soit à 7 deniers et il veut allier 30 marcs justes. Le chengeur demande combien d’argent il mettra de chacun pour que soient justement alliés les 30 marcs*. »[4]
Quant à la justification, Sanctcliment en donne une première : « *et si tu veux prouver, je te donne cette preuve générale, multiplier le fin de chaque marc par autant de marcs qui seront venus à chacun de payer, et après ajoute ces deux sommes de fin en une. Et si la somme fait autant de deniers de fin qu’il y a dans 30 marcs à 7 deniers de loi, c’est le signe que le calcul est bon. Sinon, que cela soit plus ou moins, il serait faux*. »

Le vocabulaire spécialisé rend difficile la compréhension du texte, mais on peut comprendre que l’on recherche la quantité de fin (or pur) dans les deux parties du mélange : on ajoute ces deux quantités de fin et on vérifie que l’on a bien la même quantité que celle attendue dans le mélange fixé. On constate donc que la « preuve » est une vérification de la réponse, mais pas une justification de l’algorithme.


CHRISTO-
PHORI CLA-
VII
BAMBERGEN-
SIS E SOCIETATE
IESV,
EPITOME ARITHMETICAE
Practicæ nunc quinto ab ipso auctore an-
no 1606. recognita, & multis in lo-
cis locupletata.

MOGVNTIÆ,
Sumptibus Bernardi Gualtheri Bibl. Colon.
Excudebat IOANNES VOLMARI.
ANNO M. DC. XIV.
Cum sacræ C. Maiestatis priuilegio, & supe-
riorum concessu.

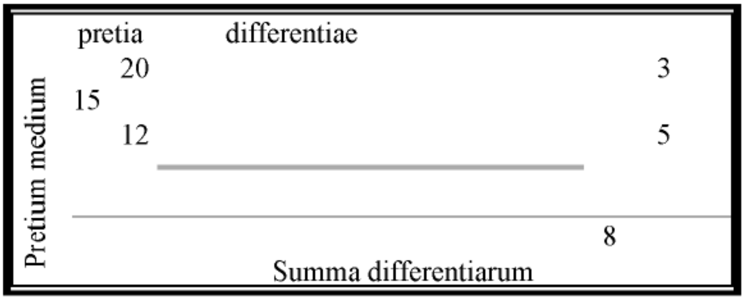
Passons au siècle suivant avec M. Stiefel[5] et C. Clavius[6], qui par leurs ouvrages d’arithmétique ont marqué le XVIe et le début du XVIIe. Curieusement, que ce soit dans l’arithmétique de Stiefel publiée en 1544 ou celle de Clavius plus tardive, les exemples du paragraphe « de regula alligationis » ne portent plus sur les mélanges de monnaies, mais sur des mélanges de vins de prix différents. Il est vrai que les échanges de

(2) « le comendy de la praticque des nombres » de Barthélémy de Romans et Mathieu Préhoude (1471).
(3) « l’art d’arismetique » auteur anonyme, Arithmétique provençale en français du XVe siècle.
(4) « suma de l’art d’aritmética » de Francesc Santcliment pulié en 1482 en langue catalane.
(5) Michel Stiefel : 1487-1567.
(6) C. Clavius : 1538-1612.

monnaies sonnantes sont progressivement remplacés par des lettres d'échange de dettes des banquiers italiens. Cette corporation se développera et s'organisera tout au long de la Renaissance, une comptabilité minutieuse sera mise au point : la comptabilité à l'italienne où toute écriture donne lieu à deux entrées, une en crédit et une en débit, qui doivent s'équilibrer.

« *Après la fausse position, la règle des mélanges a tout son prix, elle dont l'usage repose seulement sur peu de nombres. Sa nature peut être démontrée d'une manière tout à fait satisfaisante par un petit nombre d'exemples. Voyons donc successivement deux exemples où s'applique cette règle : J'ai des vins de deux valeurs différentes. Une mesure de vin le moins cher vaut 6 deniers, et une mesure de l'autre vin vaut 13 deniers. Or je veux avoir une mesure qui mêle l'un et l'autre vin qui vaille 8 deniers… Pour ce qui est d'un vin créé à partir de trois vins, je veux obtenir par mélange une mesure qui vaille 7 deniers. Une mesure du premier vin vaut 4 deniers. Une mesure du deuxième vin vaut 6 deniers. Une mesure du troisième vin vaut 8 deniers…* »(7)

Clavius, lui, cherche à résoudre le même problème de mélange de deux qualités de vin : l'un à 20 baioch(8) et l'autre à 12 baioch afin d'obtenir un vin à 15 baioch. Donc si la matière des mélanges change, la disposition des calculs en croix, elle, se met définitivement en place. Le résultat est présenté sous forme de tableau afin d'obtenir les proportions, puis une application de la règle de trois « regulam trium » permet d'obtenir la réponse définitive(9).



La modification des sujets d'énoncés peut donc s'expliquer par la moindre demande des banquiers, mais aussi par le changement du public de lecteurs attendu. Les livres ne s'adressent plus à des marchands, mais à des scolaires, ce sont donc des exercices « d'école ».
On retrouve toujours le même type de preuve : « *je le prouve ainsi. Une mesure du vin le moins cher vaut 6 deniers. Donc 5/7 de mesure du même vin vaut 4 deniers et 2/7. De même, une mesure du vin le plus cher vaut 13 deniers : donc 2/7 de mesure du même vin valent 3 deniers et 5/7. Or (pour que tu en voies la confirmation)*

(7) « arithmetica integra » Michaele Stifelio 1544. Norimbergae traduction : Raphaelle Simonin.
(8) Le baioch est une unité monnaitaire.
(9) « epitome arithmeticae », Clavius. Réédité en 1614.

4 deniers 2/7 et 3 deniers 5/7 font 8 deniers. »[10]
Au XVII^e^ la tradition des arithmétiques marchandes se poursuit avec le livre de F. Le Gendre[11] :

« *Exemple d'alligation*

Un orfèvre a de l'argent à quatre sortes d'aloi, à savoir à 17 livres, à 19, à 24 & à 37 liv. le marc. Un Seigneur le vient trouver, qui veut faire faire 240 marcs de vaisselle d'argent, & entend que le marc de la vaisselle ne lui revienne qu'à 21 livres d'aloi ; on demande combien ledit Orfèvre doit prendre de chaque sorte de son argent, afin de composer les 240 marcs, & que le marc ne revienne qu'à 21 livres.
Je ne donnerai pas ici l'explication de cette question, me contentant de faire l'opération comme il se voit ci-dessous, à laquelle l'on prendra garde.

Livres				*marcs*
17	{		}	*3*
19		*liv.*		*16*
24		*21*		*4*
37				*2*

25 marcs

Tellement que pour faire 25 marcs à 21 livres le marc, il faut	*3 marcs*	*à 17 livres*
	16	*à 19*
	4	*à 24*
	2	*à 37* »

C'est au XVIII^e^ que l'algèbre bouscule trois siécle de tradition. En effet prenons comme exemple le classique ouvrage d'algèbre de Clairaut[12] : « *étant données les pesanteurs spécifiques de deux matières qui entrent dans un mixte, le volume et le poids total du mixte, trouver ce qu'il entre de chacune de ces deux matières dans le mixte…* » Suit deux pages de résolution à l'aide d'inconnues a, b, x, … Clairaut donne un exemple aussi général que possible et sa preuve se coupe de la pratique intuitive des marchands du XV^e^. L'évolution amorcée avec Stiefel et Clavius s'achève, les exercices proposés se veulent d'abord une formation à l'algèbre. On distinguera alors deux types de manuels : ceux destinés à l'instruction de base et ceux destinés à une formation scientifique plus poussée. À ces deux types de formation, il faut certainement ajouter les pratiques enseignées dans les différents corps de métiers.

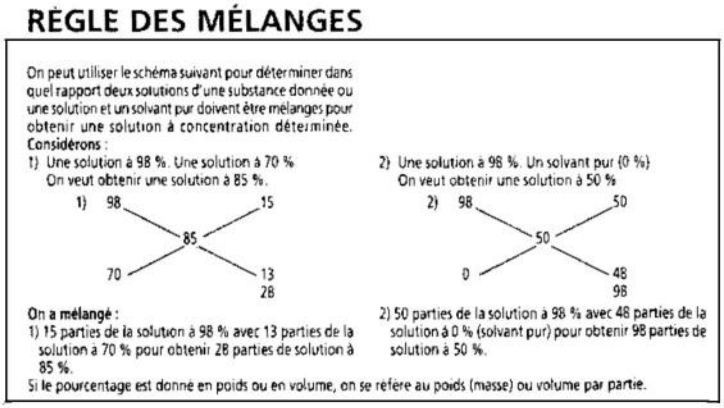
(10) idem note 8.
(11) « L'arithmétique en sa perfection, mise en pratique selon l'usage des financiers » de F. Le Gendre.
(12) « Élemens d'algèbre », Clairaut, 1746.

À la fin du XVIII^e siècle, l'édition Panckoucke de la partie mathématique de l'encyclopédie méthodique de d'Alembert comporte un article alliage écrit par l'abbé Bossut qui résume les différents procédés et les types d'exemples classiques :
« *alliage : on appelle, en général, alliage, un mélange que l'on fait d'un certain nombre de choses de différentes valeurs, pour former un tout d'un même nombre de parties, égales entr'elles, & d'une valeur moyenne. La règle d'alliage en arithmétique sert à trouver ou cette valeur moyenne de l'une des parties du mélange, quand on connait la valeur & le nombre des choses dont il est composé, ou le nombre des parties des choses qui doivent être alliées, quand on connait la valeur de chacune de ces parties, & celle du mélange. Le premier de ces problèmes est déterminé dans tous les cas ; le second est susceptible de plusieurs solutions, lorsqu'il entre plus de deux espèces de choses dans le mélange, comme on le verra ci-dessous…*
Question 2. Deux quantités de différentes valeurs étant données, déterminer ce qu'il faut prendre de chacune pour former une quantité moyenne dont la valeur est donnée ?….
Or pour que l'augmentation et la diminution se compensent mutuellement, on doit prendre sur les volumes composants plus ou moins de parties, selon que ces parties sont moins ou plus pesantes…
En raisonnant de même manière, dans tous les cas pareils, on formera cette règle générale pour résoudre ces sortes de problèmes. Faites deux fractions qui aient pour dénominateur commun l'excés de la plus haute valeur sur la plus petite, & dont la première ait pour numérateur l'excés de la plus haute valeur sur la moyenne, & l'autre, pour numérateur, l'excés de la valeur moyenne sur la plus petite. La première fraction sera la partie qu'il faut prendre de la plus petite quantité ; & la seconde, la partie qu'il faut prendre de la plus grande quantité.
Cette règle peut se démontrer ainsi, en général, par le calcul algébrique. Soient a & b les poids des deux corps composants ; M le poids du corps mixte ; G le volume commun aux trois corps ; x et y les parties qu'oil faut prendre des volumes des corps composants, pour former le corps mixte… »[(13)]

Bossut donne donc une première justification sur la compensation des différences par les quantités qui n'est autre que l'équilibrage présenté au début. Mais cela ne lui semble pas satisfaisant comme preuve, d'où la justification algébrique peut-être plus rigoureuse. Ce n'est pas sans rappeler l'embarras éprouvé par Archimède face à des démarches plus intuitives et mécaniques: « *J'ai songé à t'exposer par écrit, et à illustrer, dans ce même livre, la nature particulière d'une méthode qui te permettra éventuellement de venir à bout de certaines propositions mathématiques par la mécanique. Or, je suis persuadé que cette méthode n'est pas moins utile pour la démonstration même des propositions ; car certaines d'entre elles, d'abord évidentes pour moi par la mécanique, ont été démontrées après coup par la géométrie, parce que l'investigation par cette méthode est exclusive d'une démonstration… En effet je suis persuadé qu'à la faveur de cette méthode, une fois qu'elle aura été exposée, d'autres propositions, qui ne se sont pas encore présentées à moi même, seront*

(13) MM d'Alembert, l'Abbé Bossut, de La Lande, le Marquis de Condorcet, & c. « Encyclopédie méthodique : Mathématiques ». Panckoucke, 1784, pages 37-38.

trouvées par d'autres, tant parmi ceux qui vivent que parmi ceux qui doivent encore naitre. »(14)
Ces procédés resteront au programme jusqu'en 1923 ; on les jugera alors « peu réalistes et inutiles à l'élève ». Il est vrai que l'uniformisation des monnaies, le système métrique ont rendu plus simples les calculs. Après 1923 la règle des mélanges disparaît donc progressivement des manuels, puis des mémoires.
Qu'en reste-t-il aujourd'hui ? Il semble bien que l'enseignement ne lui ait pas laissé la moindre place : aucune trace en primaire, collége, lycée d'enseignement général, technologique ou professionnel. Avec le développement de la scolarisation et la généralisation du passage au collége, puis même au lycée, ce chapitre a rapidement disparu des manuels et des mémoires. Même les sections de techniciens supérieurs ou les I.U.T formant des techniciens de laboratoire ne l'enseignent pas. Seules quelques initiatives individuelles d'enseignants permettent d'en trouver trace ici ou là. J'ai par curiosité interrogé les pharmaciens et les préparateurs en pharmacie, les joailliers, les négociants en vin, aucun n'avait connaisance de ce procédé. Par contre les préparateurs dans les labos de nos établissements semblent l'utiliser facilement ; dans mon lycée, la préparatrice a affiché la règle sous forme d'un poster pris dans un catalogue de vente de matériel pour les labos.


RÈGLE DES MÉLANGES

On peut utiliser le schéma suivant pour déterminer dans quel rapport deux solutions d'une substance donnée ou une solution et un solvant pur doivent être mélangés pour obtenir une solution à concentration déterminée.
Considérons :
1) Une solution à 98 %. Une solution à 70 %
On veut obtenir une solution à 85 %.

2) Une solution à 98 %. Un solvant pur (0 %)
On veut obtenir une solution à 50 %

On a mélangé :
1) 15 parties de la solution à 98 % avec 13 parties de la solution à 70 % pour obtenir 28 parties de solution à 85 %.
2) 50 parties de la solution à 98 % avec 48 parties de la solution à 0 % (solvant pur) pour obtenir 98 parties de solution à 50 %.
Si le pourcentage est donné en poids ou en volume, on se réfère au poids (masse) ou volume par partie.

Il semble donc que l'algèbre rende obsolète cette règle des mélanges et des alliages. Que penser de cet « impérialisme » de l'algèbre ? Les méthodes arithmétiques classiques : fausse position, règle des sociétés, règle des mélanges et règle de trois utilisaient des raisonnements simples faisant appel au bon sens ou au sens logique. Il faut cependant reconnaître qu'une dérive vers une utilisation mécanique d'un algorithme menaçait toujours l'enseignement de ces méthodes, l'exemple des tableaux de proportionnalité l'illustre bien. L'algèbre a l'avantage d'unifier tous ces problèmes en une seule méthode de résolution, mais les calculs intermédiaires ne correspondent à aucune notion intuitive ; de plus en cas d'allergie aux mathématiques cette méthode devient impraticable.

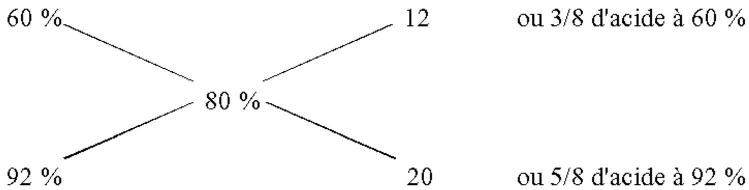
(14) « La méthode relative aux théorèmes mécaniques » tiré des œuvres complètes d'Archimède traduites par Paul Ver Eecke.

Vous pourriez vous dire que cette histoire s'arrête là : à quoi bon vouloir mélanger des vins pour un bourguignon, des monnaies quand l'Europe est passée à l'euro. Pourtant l'importance croissante d'une dimension expérimentale dans l'enseignement des mathématiques laisse penser que ces anciennes méthodes pourraient encore avoir un avenir. Les quelques exemples qui suivent vont tenter d'en montrer l'efficacité dans des exercices que l'on donne facilement à nos élèves :

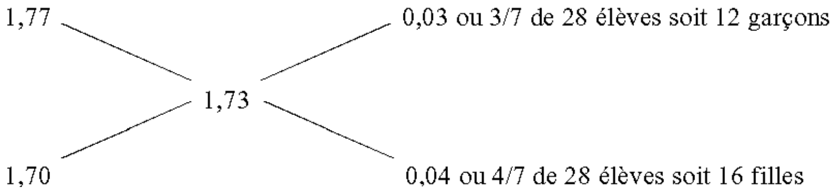
- On dispose de deux solutions d'acide formique, l'une concentrée à 60 %, l'autre à 92 %. Dans quelles proportions faut-il les mélanger pour obtenir une solution à 80% ?
- La taille moyenne des garçons d'une classe est de 1,77 m, celle des filles est de 1,70 m et la taille moyenne des 28 élèves de la classe est de 1,73 m. Combien y-a-t-il de garçons et de filles dans cette classe ?
- J'ai 15 pièces de 2 F ou de 5 F constituant une somme de 66 F. Combien y-a-t-il de pièces de chaque espèces ?

Les deux premiers exercices se résoudront par une application directe du procédé :

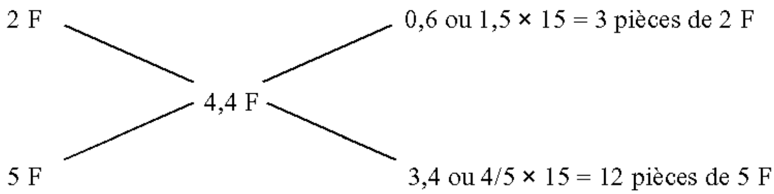
•



•



Le dernier exercice semble moins adapté à la règle des mélanges qu'à celle de la fausse position :
15 pièces de 2 F constituent une somme de 30 F. Il faut que cette somme augmente de 66 − 30 = 36 F. Remplaçons une pièce de 2 F par une pièce de 5 F. La somme totale augmente de 3 F. Il faut donc remplacer autant de pièces de 2 F par des pièces de 5 F que 3 est contenu dans 36 ; soit 36/3 = 12. Les 15 pièces seront donc réparties en 12 pièces de 5 F et 3 pièces de 2 F.
Cependant si l'on considère qu'une somme de 66 F constituée de 15 pièces donne une valeur moyenne des pièces de 66/15 = 4,4 F on obtient alors la solution suivante :



Alors, efficace ou pas ? Vu le caractère éphémère des articles que l'on peut écrire, nous pouvons raisonnablement penser que dans 4 ou 5 ans cet article aura été à son tour oublié et peut-être que l'on pourra alors récompenser par une médaille Fields le surprenant inventeur d'un procédé simple et inédit permettant de faire des mélanges (je crains malheureusement d'avoir dépassé l'âge limite pour être concerné).

Bibliographie :

Archimède : Œuvres complètes traduites par P. Ver Eecke. Vaillant Carmanne, 1960

L'art d'arismetique : une arithmétique provençale en français du XVième siècle. K. Dufau et C. Hourne Raubet, projet de maîtrise de mathématiques, Toulouse : Université Paul Sabatier, 1996.

Albertini J.-M., Lecomte-Collin V. et Collin B. : Histoire de la monnaie. Sélection du reader's digest, 2000.

Clairaut : Élemens d'algèbre, 1746. Reproduction IREM Paris VII.

Clavius C. : Epitome arithmeticae, édition de 1614.

Commerce et mathématiques du moyen âge à la renaissance, autour de la Méditerranée : actes du colloque international du centre international d'histoire des sciences occitanes 1999.

Encyclopédie méthodique : mathématique par MM. d'Alembert, l'Abbé Bossut, De la Lande, Condorcet… 1784. Réédition ACL, 1987.

Jacquet et Laclef : Cours d'arithmétique théorique et pratique. Nathan, 1904.

Harlé André : L'arithmétique des manuels de l'enseignement élémentaire français au début du XXe siècle. Thése de doctorat de 3° cycle en didactique des mathématiques, Paris VI, 1984.

F. Le Gendre : L'arithmétique en sa perfection, mise en pratique selon l'usage des financiers. Extrait d'un texte à paraître dans Histoire d'or de H. Plane.

Sanct Climent Francesch : Suma de la art de arismetica. Trad. fr. : Marie Hélène Labarthe. Mémoire de D.E.A, Paris : Université Paris I, 1999.

Spiesser Maryvonne : Entre théorie et pratique : « le comendy de la practique des nombres » de Barthélémy de Romans et Mathieu Préhoude (1471). Aspects mathématiques, linguistiques et culturels. Thèse de doctorat de l'EHESS.

Stiefel M. : Arithmetica integra. Texte mis à disposition par O. Kouteynikof. Trad. fr. : R.Simonin.