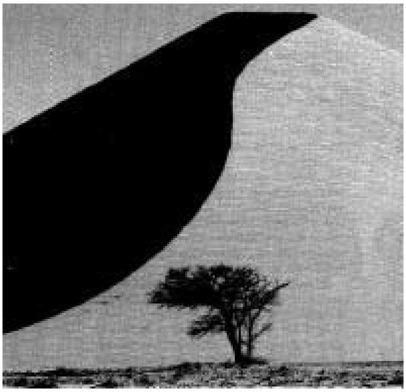
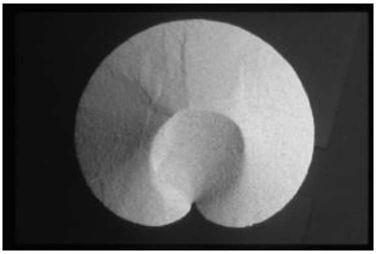
La géométrie des tas de sable ou les surfaces « d'égale pente »(*)

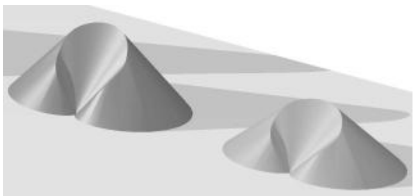
Robert March(**)

Voici, en guise d'introduction, quelques « tas de sable ».
Les deux premières images – de magnifiques dunes – font apparaître une propriété essentielle des tas de sable : la pente a la même valeur en tout point de la surface. Autrement dit, si du sable tombe là où la pente est inférieure à sa valeur limite, le sable s'accumule sur place ; si, par contre, la pente y atteint sa valeur limite, le sable s'écoule. On parle de « surfaces d'égale pente ».



Les deux images suivantes sont, à gauche, la photographie du tas de sable obtenu en versant du sable jusqu'à saturation sur un support plan limité par une courbe que nous appellerons rive – ici, une cardioïde – et, à droite, la modélisation de ce tas de sable (à l'aide d'un logiciel 3D) pour différentes valeurs de la pente.

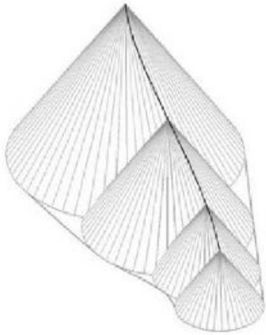




(*) Ce texte doit beaucoup aux travaux réalisés sur le thème des surfaces d'égale pente dans le cadre d'un enseignement dispensé sous la responsabilité de J.-M. Delarue, professeur à l'École d'Architecture Paris-Malaquais.

(**) École d'Architecture Paris-Val-de-Seine1. robert.march@club-internet.fr

Les lignes de plus grande pente de ces surfaces sont des droites. Il s'agit de surfaces réglées, dont les génératrices forment un angle constant avec la verticale (ce sont donc des hélices). On peut les étudier comme surfaces enveloppes d'une famille de cônes de révolution de même angle au sommet. Le sommet de ces cônes décrit la ligne de crête du tas de sable.



Dans un plan horizontal donné, le contour obtenu (une courbe de niveau) est alors l'enveloppe d'une famille de cercles. Le centre des cercles décrit la projection orthogonale, sur ce plan horizontal, de la ligne de crête. C'est le cas de la cardioïde qu'on peut définir comme enveloppe des cercles centrés sur un cercle donné et passant par un point fixe de ce cercle.

Rives polygonales

Avant d'aborder des exemples plus complexes, envisageons les tas de sable s'appuyant sur une base plane horizontale dont la rive est un polygone convexe. Ces surfaces sont limitées par les plans – de même pente donnée – qui s'appuient sur les côtés du polygone. Leurs intersections permettent de déterminer la ligne de crête.

On établit assez aisément que la projection orthogonale de cette ligne de crête sur la base est l'union de segments qui appartiennent aux bissectrices des angles formés par deux quelconques des côtés du polygone.

On détermine alors la partie utile de chacune de ces bissectrices par des considérations logiques, en partant des sommets du polygone. On peut aussi faire intervenir les courbes de niveau, des lignes polygonales parallèles au polygone de départ ; ou les lignes de plus grande pente, orthogonales aux côtés du polygone.

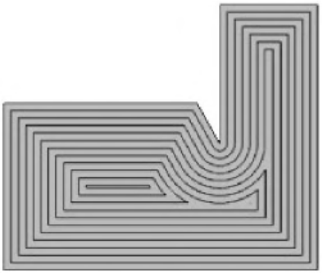
Par référence aux toitures, ces formes sont appelées tectoèdres et ont donné lieu à des études savantes[1].

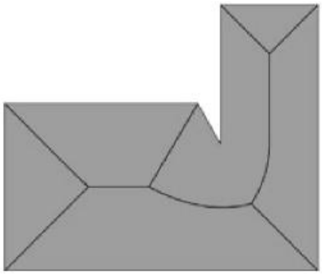
(1) Je n'ai eu connaissance que tout récemment des travaux remarquables de Roger Iss sur la modélisation des tas de sable et les tectoèdres, par l'intermédiaire de Francis Jamm, enseignant au lycée Lavoisier de Mulhouse et responsable du club scientifique de ce lycée qui a réalisé un très joli travail sur ces thèmes.

Les choses se compliquent lorsque le polygone n’est pas convexe.

La surface résulte alors de l’intersection de plans (comme précédemment) et de cônes de révolution ayant pour sommet le sommet des angles rentrants du polygone. Les courbes de niveau, parallèles au polygone de départ, sont formées de segments et d’arcs de cercles.

La ligne de crête est l’union de segments de droites (appartenant à l’intersection de deux plans) et d’arcs de coniques (appartenant à l’intersection d’un plan et d’un cône – ces coniques sont des paraboles car le plan est parallèle à une génératrice du cône). En projection orthogonale sur la base on obtient l’union de segments (ensemble de points équidistants de deux droites données) et d’arcs de paraboles (ensemble de points équidistants d’une droite et d’un point donnés).





Explorations

On peut poursuivre cette exploration tant sur le plan expérimental que sur le plan géométrique. Rien ne vaut, en effet, la recherche pratique et il est particulièrement intéressant de faire varier le profil de la base sur laquelle on saupoudre du sable fin jusqu’à saturation.

Cela permet en outre de vérifier que la modélisation géométrique de ces tas de sable comme surfaces d’égale pente est en très bon accord avec l’expérience.

Cette modélisation géométrique consiste à déterminer la ligne de crête lorsque la rive est donnée, ou une courbe de niveau (rive possible) lorsque la ligne de crête est donnée, ou encore rive et ligne de crête lorsque ces deux courbes ne sont que partiellement connues.

Les problèmes ouverts ne manquent donc pas.

La résolution de ces problèmes est accessible dans un certain nombre de cas :

– si la rive est formée de segments de droites et d’arcs de cercles : la ligne de crête est formée, comme on l’a vu, de segments de droites et d’arcs de paraboles ;

– si la ligne de crête est donnée (une courbe gauche dérivable en tout point) : on peut étudier la surface comme enveloppe des cônes de révolution d’angle donné dont le sommet décrit la courbe en question et en déterminer la rive en tant qu’enveloppe des cercles intersections de ces cônes avec le plan de base ;

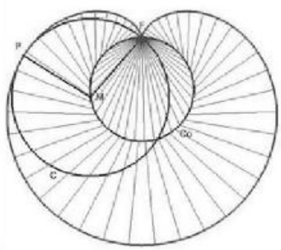
– si la rive est une courbe plane donnée : les génératrices sont, en projection sur la base, normales à cette courbe (sous réserve qu'elle ne présente qu'un nombre fini de points anguleux comme dans le cas d'un polygone non-convexe) ; toute la difficulté consiste à déterminer la ligne de crête : on peut parfois la déterminer en projection comme ensemble des centres des cercles bitangents à la courbe qui définit la rive ; ou encore rechercher l'ensemble des points anguleux des courbes de niveau de la surface (courbes parallèles à la rive).

Il ne s'agit pas d'un inventaire exhaustif…

Variations sur la cardioïde

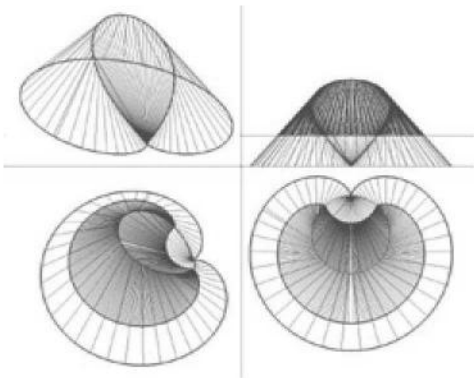
À titre d'exemple, revenons sur le tas de sable à rive cardioïdale présenté en introduction.

On se donne un cercle (C_0) et un point fixe F sur ce cercle. L'enveloppe des cercles (C) centrés en M sur (C_0) et passant par F est une cardioïde que nous choisirons comme rive dans un plan horizontal.



En projection sur la base, les génératrices de la surface sont donc les segments MF et MP, P étant le point de contact du cercle (C) et de la cardioïde. On peut construire P en tant que symétrique de F par rapport à la tangente en M à (C_0). (C_0) est la projection orthogonale, sur la base, de la ligne de crête.

Cabri permet de représenter cette surface en plan comme en élévation (vue de dessus et vue de face) et d'en déduire des représentations axonométriques variées, ou encore d'en déterminer une courbe de niveau quelconque.



En guise de conclusion, voici une nouvelle surface, d'abord étudiée et modélisée sous Cabri, puis sous Microstation, que l'on pourrait appeler un peu pompeusement « surface d'égale pente à rive cardioellipsoïdale » ; la rive en question est l'enveloppe des cercles centrés sur une ellipse donnée et passant par un point fixe de cette ellipse, complétée par une « rive intérieure » limitée à ce point.