Les problèmes de l'APMEP

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.
Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de « beaux problèmes »… si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice. La rubrique s'efforce de rendre compte de la pluralité des méthodes proposées par les lecteurs, des généralisations des problèmes…
Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés. Solutions et énoncés sont à envoyer à l'adresse suivante (réponse à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO,
42 quai de la Loire,
75019 Paris.

Énoncé n° 281 (Moubinool OMARJEE, 75 - Paris)

Soit une série convergente, de terme général α_n, de somme S.
Montrer qu'il existe une suite croissante (k_n) d'entiers naturels, qui tende vers l'infini lorsque n tend vers l'infini, et telle que la série de terme général $k_n\alpha_n$ soit convergente.

SOLUTION

Quand on apprend que la série harmonique diverge, que la série des inverses des nombres premiers diverge également, mais beaucoup moins vite, alors que la série de terme général $\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$ converge aussi petit que soit $\varepsilon > 0$, on est amené à s'interroger sur la « frontière entre les plus petites séries divergentes et les plus grandes séries convergentes ». Cet exercice fournit un élément de réponse : pour toute série convergente (α_n), il existe une série convergente (β_n) telle que α_n soit négligeable devant β_n.

J'ai reçu des solutions de André BELET (12-Onet le Chateau), Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Jean-Christophe LAUGIER (17-Rochefort), Denis LIEUTIER (95-Cergy), Dominique MONCORGÉ (43-Le Puy en Velay), Bernard PETIT (29-Brest), Pierre RENFER (67-Ostwald), Marc ROUX (30-Nîmes) et quatre solutions fausses.

Les démonstrations se ramènent toutes à ceci :

La série (α_n) étant convergente, la suite des sommes partielles est une suite de Cauchy, d'où :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in N, \forall p \geq m, \forall q \geq p, \left|\sum_{n=p}^{q} \alpha_n\right| < \varepsilon \qquad (1)$$

On choisit deux « bonnes suites » (λ_i) et (ε_i) telles que la série de terme général $(\lambda_i\varepsilon_i)$ soit convergente, par exemple : $\lambda_i = i$ et $\varepsilon_i = \frac{1}{i^3}$, ou bien $\lambda_i = 2^i$ et $\varepsilon_i = 4^{-i}$… La relation (1) ci-dessus permet de définir une suite croissante d'entiers A_i telle que pour tout p et tout q vérifiant : $A_i \leq p \leq q \leq A_{i+1}$, $\left|\sum_{n=p}^{q} \alpha_n\right| < \varepsilon_i$, donc $\left|\sum_{n=p}^{q} \lambda_i\alpha_n\right| < \lambda_i\varepsilon_i$: ε_i étant donné, (1) permet de trouver un m_i, et A_i est l'un quelconque des entiers supérieurs ou égaux à m_i et strictement supérieurs à A_{i-1}. En posant $k_n = \lambda_i$ pour $A_i \leq n < A_{i+1}$, la série de terme général $k_n\alpha_n$ est bien convergente : quels que soient p et q tels que $A_u \leq p \leq A_{u+1}$ et $A_v \leq q \leq A_{v+1}$ ($u \leq v$ et $p \leq q$), on voit en segmentant la somme que : $\left|\sum_{n=p}^{q} k_n\alpha_n\right| < \sum_{i=u}^{v} \lambda_i\varepsilon_i$, or la série $\lambda_i\varepsilon_i$ est convergente par hypothèse.

Le choix des A_i doit être fait avec rigueur, A_0 n'étant pas nécessairement 0 (les questions de convergence sont indépendantes des premiers termes de la série). Par contre, le fait que k_n soit entier ne joue aucun rôle ; il autorise juste la remarque que, si k_n est entier, la suite (k_n) ne peut pas être strictement croissante (sinon k_n serait supérieur ou égal à n, et $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$ serait un contre exemple). Le signe de α_n est, lui aussi, sans importance (l'énoncé initial supposait $\alpha_n > 0$, mais Marie-Laure CHAILLOUT se place dans un espace de Banach quelconque), si ce n'est que, lorsque la série (α_n) est à termes positifs, d'autres démonstrations sont envisageables : en posant $R_n = \sum_{k>n} \alpha_k$, l'auteur du problème appelle A_i le plus petit entier tel que $R_{A_i} \leq \frac{S}{2^i}$ $(A_0 = -1)$. Comme $\sum_{i\geq 0} \frac{S}{2^i} = 2S$, si l'on pose $k_n = i$, pour $A_i < n \leq A_{i+1}$ on peut permuter les sommations et trouver : $\sum_{n\geq 0} k_n\alpha_n \leq 2S$. Également, la série de terme général $R_{n^{-t}}\alpha_n$ est convergente pour tout $t \in \,]0,1[$: il suffit d'appliquer la formule des accroissements finis à $R_{(n-1)^{1-t}} - R_{n^{1-t}}$ (exercice « très classique » signalé par Bernard PETIT). Marie-Laure CHAILLOUT renvoie, elle, à l'exercice 7, p. 101, fascicule XXVIII des *Éléments d'analyse (fondements de l'analyse moderne)* de Jean Dieudonné (Éditions Gauthier Villars, 1968) et Denis LIEUTIER propose l'exercice suivant : soit (α_n) une suite strictement croissante de limite infinie, la suite

$\left(\dfrac{\alpha_n}{n^2}\right)$ étant à valeurs dans [0;1]. $\left(\dfrac{\alpha_n}{n^2}\right)$ est-elle convergente ? Pas nécessairement : il suffit de poser $\alpha_n = 2^k n$ pour $2^k \leq n < 2^{k+1}$ pour s'en convaincre.

Mais la principale cause d'erreur est de vouloir calculer k_n directement à partir de α_n, ce qui est impossible par quelque méthode que ce soit.

Plus précisément : soit f une fonction continue, strictement positive, $f(x)$ tendant vers l'infini lorsque x tend vers 0. Aussi lente que soit la divergence de la fonction f, il existe une série (α_n) convergente telle que la série de terme général $f(\alpha_n) \cdot \alpha_n$ soit divergente. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe α_0 strictement compris entre 0 et 1 tel que $\alpha_0 + \dfrac{1}{f(\alpha_0)} = 1$, et plus généralement, pour tout $n \geq 1$, il existe α_n strictement compris entre 0 et α_{n-1} tel que : $\alpha_n + \dfrac{1}{f(\alpha_n)} = \dfrac{1}{f(\alpha_{n-1})}$. La suite α_n décroît, donc converge, sa limite ne peut être que 0, et $f(\alpha_n)$ tend vers l'infini. La série de terme général α_n converge donc vers 1, car : $\displaystyle\sum_{n=0}^{q} \frac{1}{\alpha_n} = 1 - \frac{1}{f(\alpha_q)}$. La série de terme général $f(\alpha_n) \cdot \alpha_n = \dfrac{f(\alpha_n)}{f(\alpha_{n-1})} - 1$ est, elle, minorée par la suite $\ln(f(\alpha_q))$, vu que pour tout x positif, $x > \ln(1 + x)$. Elle est donc divergente.

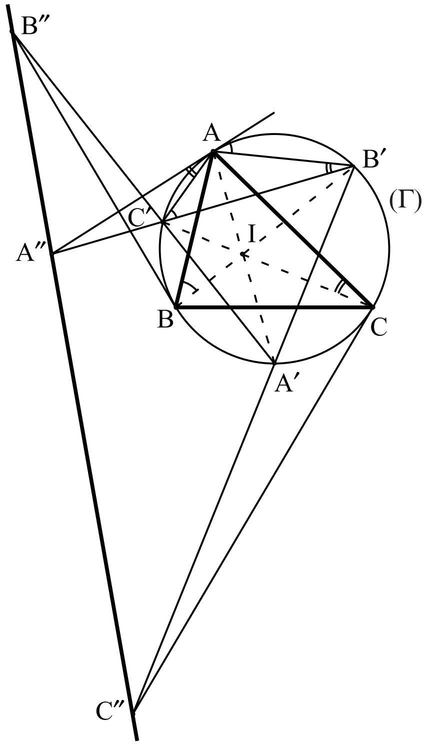
Énoncé nº 282 (Raymond PRUDHOMME, 76 - Isneauville)

Soit ABC un triangle et (Γ) son cercle circonscrit. Les bissectrices intérieures des angles A, B, C coupent (Γ) respectivement en A′, B′, C′. Les droites (B′C′), (C′A′), (A′B′) coupent respectivement les tangentes en A, B, C au cercle (Γ) en A″, B″, C″. Montrer que A″, B″ et C″ sont alignés.

SOLUTION

Ménélaüs, Desargues, axe radical, faisceau, polaires, inversion, barycentres, … la diversité des solutions reçues des 25 lecteurs qui ont répondu, en 1999, à cet énoncé : Richard BECZKOWSKI (71-Chalon-sur-Saône), Jacques BOUTELOUP (76-Rouen), Christophe BRIGHI (57-Hettange-Grande), J.-C. CARREGA (69-Lyon), Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Alain CORRE (03-Moulins), Jacques DAUTREVAUX (06-Saint-André), Philippe DELEHAM (97-Ouangani), Edgard DELPLANCHE (94-Créteil), Christian DUFIS (87-Limoges), Christine FENOGLIO (69-Lyon), Michel HEBRAUD (31-Toulouse), Guy HUVENT (59-Lille), Stéphane LABOUREAU (71-Ciel), Jacques LEGRAND (64-Biarritz), René MANZONI (76-Le Havre), Albert MARCOUT (10-Ste Savine), Charles NOTARI (31-Montaut), Serge PAICHARD (53-Laval), Grégoire PECOU (29-Ile-Tudy), Maurice PERROT

(75-Paris), Marguerite PONCHAUX (59-Lille), Raymond RAYNAUD (04-Digne), Pierre RENFER (67-Ostwald), David RIGAUT (83-Fréjus) … est impressionnante, sans parler des remarques et généralisations.



30% des lecteurs ont fait appel au **théorème de Ménélaüs**. Que ce soit en utilisant les angles des triangles semblables A″AB′ et A″C′A ou la puissance du point A″ par rapport au cercle (Γ) :

$$\overline{A''B'}\cdot\overline{A''C'} = A''A^2,$$

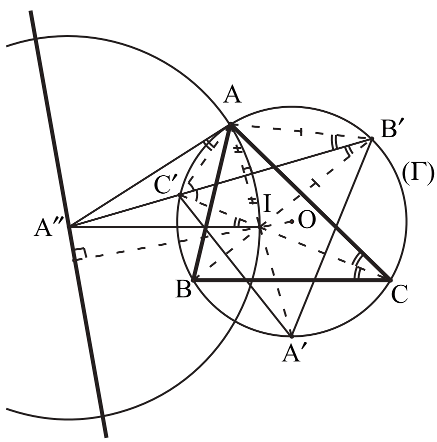
on remarque que :

$$\frac{\overline{A''B'}}{\overline{A''C'}} = \frac{A''B'^2}{A''A^2} = \frac{\sin^2\frac{\hat{B}}{2}}{\sin^2\frac{\hat{C}}{2}},$$

si l'on note A, B, C les trois angles du triangle ABC, et le fait que les points A″, B″ et C″sont alignés résulte de :

$$\frac{\overline{A''B'}}{\overline{A''C'}}\cdot\frac{\overline{B''C'}}{\overline{B''A'}}\cdot\frac{\overline{C''A'}}{\overline{C''B'}} = 1.\ \cdot$$

L'auteur et 30 % des lecteurs ont utilisé l'**axe radical**. Le centre I du cercle inscrit dans ABC, intersection de AA′, BB′ et CC′, vérifie : A″I = A″A, B″I = B″B, C″I = C″C, et cela peut se prouver de plusieurs manières : en étudiant les angles du triangle IAB′, on montre qu'il est isocèle d'axe B′C′ ; en remarquant que B′C′ est bissectrice de AB′I et de AC′I, donc la symétrie par rapport à B′C′ envoie A en I ; en constatant que I est l'orthocentre de A′B′C′ (A′A perpendiculaire à B′C′), et le symétrique de l'orthocentre par rapport aux côtés du triangle appartient au cercle circonscrit (le symétrique de I est donc A). Cela dit, la puissance A″A² de A″ par rapport à (Γ) est la même que la puissance A″I² de A″ par rapport au cercle-point I, donc A″ (tout comme B″ et C″) appartient à l'axe radical de ces deux cercles, perpendiculaire à



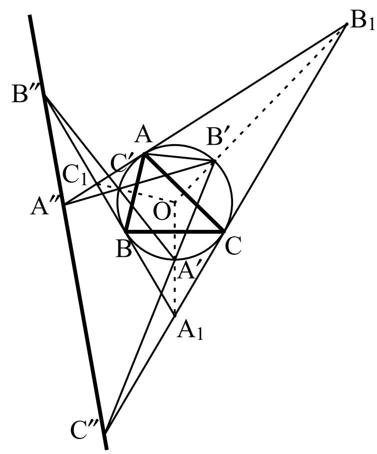
la droite des centres (OI). Cet axe est aussi le lieu des points M tels que $MO^2 - MI^2 = R^2$. Certains ajoutent que (OI) est la droite d'Euler du triangle A′B′C′, donc la droite passant par A″, B″ et C″ est parallèle à l'axe orthique de A′B′C′. L'homothétie de centre I et de rapport 2 transforme A′B′C′ en $I_AI_BI_C$, triangle formé par les centres des cercles exinscrits. Michel HEBRAUD précise que ABC et A′B′C′ sont orthologiques.

On peut aussi voir que les cercles de centres A″, B″, C″ et de rayons respectifs A″A, B″B, C″C passent par I et sont orthogonaux à (Γ), donc constituent un **faisceau** d'axe radical (OI).

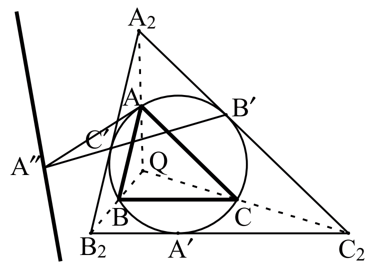
Bon nombre de lecteurs signalent que A″ est défini si et seulement si le triangle ABC n'est pas isocèle en A : comme (B′C′) est orthogonal à (AI), A″ est défini si et seulement si la bissectrice (AI) de ABC est distincte de (AO), perpendiculaire à la tangente (AA″). Sinon, A″ est un point à l'infini, et si le triangle est équilatéral, A″, B″ et C″ sont tous trois à l'infini, Richard BECZKOWSKI remarque plus généralement que (IA″) est parallèle à (BC) : par symétrie par rapport à (B'C'), les angles de droites (IA″,IC′) et (AA″,AC′) sont opposés, or

$$(AA'',AC') = (CA,CC') = -(CB, CC').$$

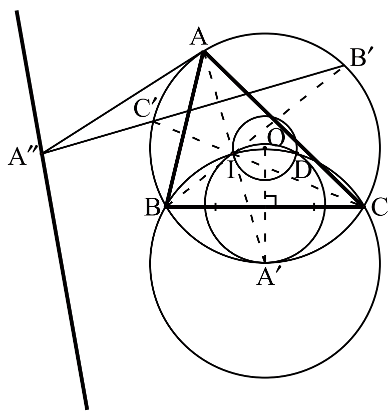
20% des lecteurs font appel au **théorème de Desargues**. Les tangentes en B et C à (Γ) se coupent en A_1, situé sur la médiatrice de [BC] (éventuellement à l'infini), tout comme A′, milieu de l'arc BC. Les triangles $A_1B_1C_1$ et A′B′C′ sont donc homologiques, ce qui signifie que les trois droites A_1A', B_1B', C_1C' sont concourantes (en O) et entraîne que les côtés homologues (B_1C_1) et (B′C′), (C_1A_1) et (C′A′), (A_1B_1) et (A′B′) se coupent en trois points alignés A″, B″, C″. Philippe DELEHAM et Jacques BOUTELOUP précisent que la droite obtenue est la polaire trilinéaire du point V de coordonnées barycentriques $\left(\dfrac{a}{p-a}, \dfrac{b}{p-b}, \dfrac{c}{p-c}\right)$ étudié notamment à l'occasion de l'énoncé 260 (cubique des 17 points : bulletin 420, janv-fév 1999, p. 95-96 ; V ne fait pas partie des 17 points).



D'autres méthodes ont été utilisées, sans parler du calcul trigonométrique fait par un lecteur sur les affixes des points en question. Plusieurs lecteurs se sont servi de la transformation par **polaires réciproques**. Par rapport au cercle (Γ), (B′C′) est la polaire de A_2, intersection des tangentes à (Γ) en B′ et C′. La tangente en A est la polaire de A. L'intersection A″ admet donc pour polaire AA_2. A″, B″, C″ seront alignés (sur la polaire d'un point Q) si et seulement si (AA_2), (BB_2) et (CC_2) se coupent en Q. Or la tangente en A′, (B_2C_2), est parallèle à (BC), vu que A′ est le milieu de l'arc $\widehat{BC}$, et de même (C_2A_2) est parallèle à (CA) et (A_2B_2) à (AB) le triangle $A_2B_2C_2$ est homothétique de ABC et Q est le centre d'homothétie.



René MANZONI propose trois solutions dont une par **inversion**. Considérons l'inversion de pôle I qui laisse (Γ) invariant, et appelons D, E, F les symétriques de I par rapport à OA′, OB′, OC′ respectivement. La droite (B′C′) est transformée en un cercle passant par B, C, I, donc D (par symétrie par rapport à la médiatrice de [BC]). La tangente en A est transformée en un cercle tangent en A′ à (Γ) et passant par I, donc lui aussi par D. D est donc l'inverse du point A″, E l'inverse de B″ et F l'inverse de C″. Comme OD = OI = OE = OF, les points D, E, F sont sur un cercle passant par I, donc leurs inverses A″, B″, C″ sont alignés. On retrouve en outre le parallélisme de (IA″) et (BC). René MANZONI ajoute que le passage de la solution par l'axe radical à celle par inversion « est immédiat, puisqu'un faisceau de cercles ayant I pour point de Poncelet est transformé en un faisceau de cercles concentriques par une inversion de pôle I ».



Le calcul par les **coordonnées barycentriques** des points n'est pas fastidieux, et il permet de généraliser le problème en remplaçant le cercle par une conique quelconque et les trois droites AA′, BB′ et CC′ par trois céviennes quelconques. C'est ce que propose Jacques BOUTELOUP : soit Ω un point non situé sur les côtés de ABC. Dans le repère de base ABC, de point unitaire Ω, les droites AΩ, BΩ, CΩ recoupent la conique d'équation $\alpha yz + \beta zx + \gamma xy$ en A′ $(-\alpha, \beta + \gamma, \beta + \gamma)$, B' $(\gamma + \alpha, -\beta, \gamma + \alpha)$ et C' $(\alpha + \beta, \alpha + \beta, -\gamma)$. La tangente en A à la conique, d'équation $\gamma y - \beta z = 0$, recoupe B′C′, d'équation $-\alpha x + (\gamma + \alpha)\, y + (\alpha + \beta)\, z = 0$ en A″ $(\beta - \gamma, \beta, -\gamma)$ qui appartient à la droite

$$(\beta + \gamma - \alpha)\, x + (\gamma + \alpha - \beta)\, y + (\alpha + \beta - \gamma)\, z = 0,$$

tout comme B″ et C″ obtenus par permutation.

En restant dans le cas du cercle, Edgard DELPLANCHE étudie le cas où (AA′), (BB′) et (CC′) sont des céviennes quelconques, concourantes en M : le cercle de centre A″ passant par A est le cercle d'Apollonius du triangle AC′B′, donc

$$\frac{A''B'}{A''C'} = \frac{\sin^2 \mu'}{\sin^2 \nu},$$

si l'on pose $\mu' = \widehat{AC'B'} = \widehat{ABB'}$, $\nu = \widehat{AB'C'} = \widehat{ACC'}$, etc. (voir première figure). L'expression angulaire du théorème de Céva permet alors d'écrire :

$$\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu = \sin\lambda' \cdot \sin\mu' \cdot \sin\nu'$$

et de conclure en utilisant le théorème de Ménélaüs.

Mais d'autres généralisations sont possibles : Serge PAICHARD remarque qu'on peut remplacer des bissectrices intérieures par des bissectrices extérieures, et Christine FENOGLIO trouve alors un grand nombre d'alignements et de parallélismes, compte tenu que les droites obtenues sont perpendiculaires à (OI) ou (OI_A) ou (OI_B) ou (OI_C). Enfin, Michel HEBRAUD nous suggère de généraliser le problème en utilisant des trisectrices : on obtient la figure de Morley, et on peut faire appel à l'étude de Henri Lebesgue dans *Leçons sur les constructions géoémtrique*.