La copie d'Einstein à l'épreuve de mathématiques du Bac.

Jean-Pierre Friedelmeyer(*)

Le jeune Einstein

Qui était le petit Albert Einstein avant de devenir le grand EINSTEIN ? Car à force de le voir en poster (Einstein se vend toujours bien) et de l'entendre évoqué comme LE grand savant mythique du XX^{e} siècle, on a du mal à l'imaginer ayant été un enfant ou un jeune homme comme un autre, allant à l'école et passant son baccalauréat.

Une légende tenace veut que le jeune Albert ait été un mauvais élève au collège ou au lycée ; tenace peut-être simplement parce qu'elle console à bon compte bien des élèves de leurs échecs à l'école, et surtout leurs parents, qui peuvent continuer à rêver d'un avenir brillant pour leur progéniture : « voyez Einstein, il était (aussi !) considéré comme un cancre par ses professeurs, et pourtant il est devenu le plus grand génie du XX^{e} siècle ! »

Cette légende a pu prendre corps à partir de certains traits de caractère manifestés par le jeune Albert dès l'école primaire et jusqu'au lycée : incapacité d'apprendre par cœur, manque d'intérêt total pour le sport, peu liant avec ses camarades avec lesquels il refuse absolument de s'associer à leurs bagarres. Elle aura certainement été alimentée par les souvenirs de sa sœur Maja qui écrit dans son « *Albert Einstein, Beitrag für sein Lebensbild* » (« contribution à sa biographie ») :

En vérité il se sentait très mal à l'aise à l'école. La manière d'enseigner dans la plupart des disciplines le contrariait, et de plus le professeur ne lui semblait pas très bienveillant. Particulièrement désagréable pour le jeune homme était le ton militaire dans l'école, et l'éducation systématique à la vénération des autorités, qui devaient habituer les élèves à la discipline militaire.

L'école concernée était située à Munich, où la famille d'Einstein possédait une petite entreprise d'ingénierie électrique, la firme Jacob Einstein & Co. Albert avait 15 ans lorsque, par suite de difficultés de leur entreprise, les parents d'Einstein quittent Munich pour Milan, où des parents proches et fortunés promettent de les aider à monter une nouvelle entreprise dans l'équipement électrique, à condition qu'ils s'installent en Italie. Resté seul à Munich dans un pensionnat, car il n'avait pas le droit de quitter l'Allemagne avant d'avoir effectué son service militaire, le jeune Albert tombe lentement dans la dépression. Le lycée était devenu pour lui un cauchemar : la plupart des enseignants le toléraient à peine, trouvant son attitude irrespectueuse, alors qu'elle était simplement le reflet de son désarroi. Avec un certificat médical et le soutien de son professeur de mathématiques, un des rares à l'apprécier (au point de lui donner une sorte de sauf-conduit disant qu'il est tellement

(*) Irem de Strasbourg

bon en mathématiques qu'il n'a plus rien à lui apprendre !), Albert reçoit l'autorisation de quitter le lycée et de rejoindre ses parents en Italie sans avoir fait son service militaire, mais en perdant le droit de passer son baccalauréat en Allemagne.

Quel avenir reste-il alors pour le jeune Einstein? Seuls des métiers pratiques lui étaient encore ouverts, ce qui plaisait beaucoup à son père qui souhaitait le prendre pour l'épauler dans son entreprise, mais qui déplaisait fortement à Albert dont le tempérament et les vœux étaient manifestement tout à fait à l'opposé d'activités pratiques. Le père et le fils arrivèrent à un compromis: Albert présentera l'examen d'entrée à l'École Polytechnique de Zurich, un collège technique suisse de réputation internationale (Dedekind y avait enseigné). Le recrutement s'y faisait par examen, avec cet avantage, qu'on n'était pas obligé d'avoir terminé le lycée pour s'y présenter. Mais le jeune homme échoue, ses résultats étant insuffisants en français, en chimie et en biologie, toutes matières qu'il n'avait pas travaillées par manque d'intérêt. Par contre, les excellents résultats en mathématiques et en physique impressionnent tellement le professeur de physique de l'École Polytechnique Heinrich Weber, que celui-ci lui propose d'assister à son cours en auditeur libre. Prenant en considération le fait qu'Albert avait deux ans de moins que la plupart des autres candidats, le principal, Albin Herzog lui offre de l'admettre sans examen l'année suivante, à condition d'obtenir son baccalauréat dans le lycée de son choix. Et c'est ainsi que le jeune Einstein arrive à Aarau, petite ville à l'ouest de Zurich, accueilli dans la famille de l'un de ses professeurs, Jost Winteler, famille qui devient rapidement une oasis inoubliable où il se sentira parfaitement adopté et heureux.

Sa sœur écrit : *Là il n'était question ni d'un ton de commandement, ni d'éducation à la vénération des autorités. Les élèves étaient traités en tant qu'individus, l'accent était mis davantage sur la pensée indépendante que sur l'érudition, les jeunes gens voyaient en leur professeur non pas l'autorité mais, à côté de l'homme de science, également sa personnalité.*

Et c'est là qu'Einstein passe sa **Maturitätsprüfung**, équivalent de notre baccalauréat, en 1896, à l'âge de 17 ans et demi.

J'ai eu la chance de prendre connaissance de la transcription de sa copie de mathématiques que le professeur, **Dr. H. Hunziker**, (*Alte Kantonsschule Aarau*) a réalisée en août 2000, et pour laquelle il autorise la publication par l'APMEP de la traduction française, que je vous soumets ci-dessous. Nous l'en remercions de tout cœur.

Outre l'intérêt exceptionnel que représente cette copie pour une meilleure connaissance des capacités et résultats scolaires d'Einstein, les questions posées et le style des réponses du candidat nous offrent une photographie précise de ce qu'était l'enseignement des mathématiques en Suisse alémanique à la fin du XIXe siècle. Nos candidats d'aujourd'hui seraient certainement désarçonnés par le caractère très sommaire et laconique des questions posées, habitués qu'ils sont à être guidés pas à pas par une multitude de questions intermédiaires, qui ne leur laissent guère le choix de l'initiative, encore moins de l'invention.

Un autre fait marquant est la prédominance pesante de la géométrie, y compris dans l'épreuve qualifiée d'algèbre. Nous laissons au lecteur le soin d'apprécier la pertinence de ce genre de sujets, et pourquoi pas d'engager une discussion avec les collègues de l'APMEP sur les qualités et les défauts comparés du bac. d'aujourd'hui et de celui passé par Einstein.

La photo de classe de l'école cantonale d'Aarau, année 1876
(Einstein est assis à gauche)

Les questions

Épreuve de géométrie

(Durée 4 h ; pour Einstein, l'épreuve s'est déroulée le 19 septembre 1896 de 7 h à 11 h du matin. Faut-il rappeler qu'à cette époque les calculatrices électroniques n'existaient pas et que les élèves faisaient leurs calculs à l'aide d'une table de logarithmes?)

Premier exercice

Un triangle inscrit dans un cercle de rayon $r = 10$ a ses hauteurs proportionnelles à 2, 3 et 4. Calculer les angles et un côté.

Second exercice

On donne un cercle de rayon r dont le centre se trouve à l'origine O d'un repère orthonormal. On considère les cordes de ce cercle perpendiculaires à l'axe des x. Les cercles ayant ces cordes comme diamètres, sont tangents à l'ellipse de demi-axes $r\sqrt{2}$ et r aussi longtemps que la distance p de leur centre à O ne dépasse pas une certaine valeur maximale. Démontrer cette proposition et déterminer la valeur maximale de p.

Épreuve d'algèbre.

(Durée 2 h ; pour Einstein, l'épreuve s'est déroulée le 21 septembre 1896 de 9 h 30 à 11 h 30)

Énoncé

Dans un triangle on connaît les distances l, m, n du centre du cercle circonscrit aux sommets ; déterminer le rayon ρ du cercle inscrit lorsque $l = 1$; $m = 1/2$; $n = 1/3$.

Les solutions d'Einstein

Épreuve de géométrie

Premier exercice

Comme les côtés d'un triangle sont inversement proportionnels aux hauteurs relatives, on a

$$a = \frac{1}{h_a}k = \frac{1}{2}k\ ;\ b = \frac{1}{h_b}k = \frac{1}{3}k\ ;\ c = \frac{1}{h_c}k = \frac{1}{4}k$$

Comme la détermination des angles ne dépend que du rapport des côtés, nous pouvons tirer la résolution la plus pratique de la similitude avec les Δ de côtés 6, 4 et 3(1).

$$\cos\alpha = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc} = \frac{-36+16+9}{24} \qquad \cos\alpha = -\frac{11}{24} \qquad \sin(\alpha - 90°) = 0{,}4583$$

$$\lg \sin(\alpha - 90°) = 9{,}66115 - 10 \qquad \alpha - 90° = 27°\ 16'\ 22'' \ *$$

* À côté, le correcteur a ajouté $\alpha = 117°16'\ 22''$, que Einstein avait omis de mettre.

$$\cos\beta = \frac{a^2-b^2+c^2}{2ac} = \frac{29}{36} = 0{,}8055 \qquad \log\cos\beta = 9{,}9061 - 10 \qquad \beta = 36°\ 20'\ ^{(2)}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{43}{48} \qquad \log\cos\gamma = 9{,}95226 - 10 \qquad \beta = 26°\ 23'$$

Calcul du côté a

Comme α est obtus, on a

$$a = 2r \cdot \sin(180° - \alpha) \qquad \log a = \log 20 + \log\sin(64°\ 43'\ 38'')$$

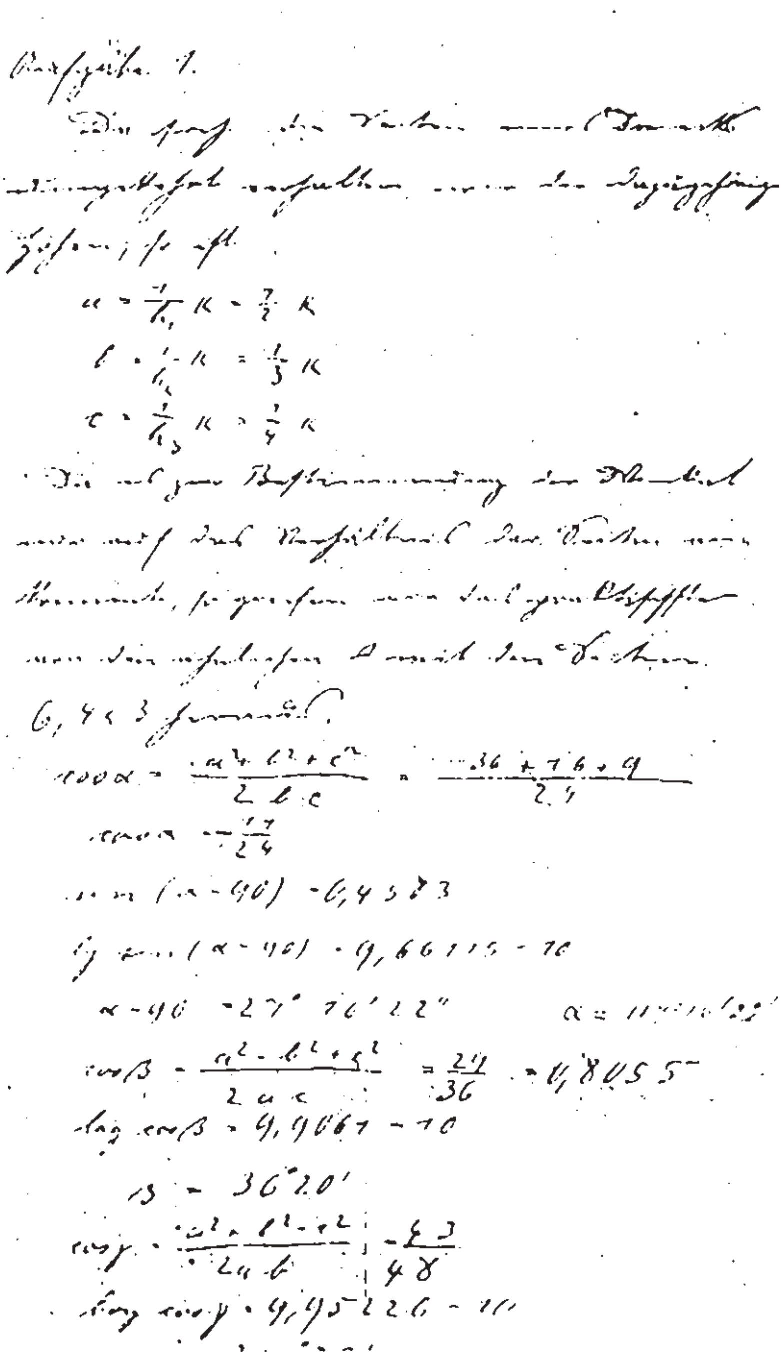
$$= 1{,}30103 + 9{,}94884 - 10 = 1{,}24987$$

$$\underline{a = 17{,}77}$$

(* ici le correcteur a souligné de deux traits le nombre 4 dans 64° et marqué dans la marge : *erreur dans la transcription, résultat exact*. – Il fallait en effet écrire : 62° 43' 38". Einstein s'est uniquement trompé dans la transcription mais a calculé avec les bons chiffres.)

(1) Einstein écrit bien Δ à la place de « triangle ».

(2) Alors que deux lignes plus haut Einstein a pris lg comme abréviation de logarithme, dans la suite il écrira log.



Copie de la première page du manuscrit d'Einstein

Second exercice

Si nous désignons la distance du centre d'un tel cercle à l'origine par p, alors son rayon $= \sqrt{r^2 - p^2}$. Son équation est :

$$(x - p)^2 + r^2 - p^2y^2 = r^2 - p^2 \quad \text{(* raturé par Einstein)}$$
$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = r^2 - p^2$$
$$x^2 - 2px + y^2 = r^2 - 2p^2$$

Nous cherchons alors l'équation de l'enveloppe, c'est à dire l'intersection de deux tels cercles dont les p diffèrent d'une valeur infiniment petite. Pour le point d'intersection, l'accroissement de x et de y qui découle de l'accroissement infiniment petit d(p) doit entraîner une équation identique à 0. Donc :

$$x^2 - 2px + y^2 - r^2 + 2p^2 = 0$$
$$x^2 - 2px + y^2 - r^2 + 2p^2 + (-2x + 4p)\,\mathrm{d}p = 0$$

En soustrayant : $4p - 2x = 0$

Et en remplaçant dans la première équation :

$$x^2 - 2px + y^2 - r^2 + 2p^2 = 0$$
$$x^2 - x^2 + y^2 - r^2 + \frac{1}{2}x^2 = 0$$
$$\frac{1}{2}x^2 + y^2 = r^2$$

Pour $x = 0$ $y = \pm r$; pour $y = 0$ $x = \pm r\ \sqrt{2}$

Nous devons maintenant encore examiner la condition pour laquelle un cercle du système est tangent à l'ellipse $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = r^2$

~~Comme dans les deux figures (cercle du système et ellipse), la plus grande valeur de x correspond à l'ordonnée 0 et que le centre de tous les cercles se trouve à l'intérieur de l'ellipse nous n'avons besoin que de vérifier si, pour $y = 0$, l'un des deux points du cercle est situé en dehors de l'ellipse. Comme la totalité de la figure à vérifier est symétrique par rapport à l'axe des y, nous n'avons à considérer que l'un des côtés (positif)*~~

* Visiblement Einstein s'est rendu compte que cette argumentation n'était pas pertinente et l'a rayée. Le correcteur a marqué à côté : *Démonstration intenable* (*Beweis nicht stichhaltig,*)

Nous devons comparer directement les deux équations du cercle et de l'ellipse, et identifier les x et les y des deux équations.

$$\text{Ellipse } \frac{1}{2}x^2 + y^2 = r^2 \qquad \text{I}$$
$$\text{Cercle } x^2 - 2px + y^2 - r^2 + 2p^2 = 0$$

~~En éliminant y~~

$$\cancel{\frac{1}{2}x^2 - 2px + r^2 - \frac{1}{2}x^2 - r^2 + 2p^2 = 0}$$

$$\cancel{x^2 - 4px + 4p^2 = -4p^2 + 4p^2}$$

~~L'expression~~

$$\cancel{\sqrt{-4p^2 + 4p^2}} \quad *$$

* On ne connaît pas les raisons pour lesquelles ce qui précède est rayé, bien que la relation qui en découle : $x = 2p$ soit utilisée dans la suite. L'examinateur a simplement commenté par le mot *Exact*, inscrit dans la marge.

$x = 2p$ remplacé dans I $\quad 2p^2 + y^2 = r^2 \quad y = \sqrt{r^2 - 42p^2}$

Pour que la racine soit réelle, il faut $r^2 < 2p^2$ (*) $\quad p\sqrt{2} < r \quad p < \dfrac{r}{\sqrt{2}}$

Lorsque $p \geq \dfrac{r}{\sqrt{2}}$ alors il n'y a plus de contact avec l'ellipse.

* L'inégalité est fausse sans que l'examinateur ne le signale, mais les inégalités suivantes sont correctes.

Évaluation

Malgré quelques incorrections et quelques fautes, le travail d'Einstein en géométrie fut apprécié par l'examinateur, le Professeur H. Ganter, avec la note maximale 6 (signalons qu'en Suisse les élèves sont notés de 1 à 6).

Épreuve d'algèbre

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\rho}{l} = \rho \quad ; \quad \sin\frac{\beta}{2} = \frac{\rho}{m} = 2\rho \quad ; \quad \sin\frac{\gamma}{2} = n = 3\rho$$

Comme dans tout Δ on a la relation

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = 1$$

En introduisant les valeurs ci-dessus on obtient l'équation:

$$14\rho^2 + 12\rho^3 - 1 = 0 \qquad \rho = 1/x$$

$$\cancel{\frac{x^2}{16}} * \frac{14}{x^2} + \frac{12}{x^3} - 1 = 0 \qquad 14x + 12 - x^3 = 0 \quad \text{ou} \quad x^3 - 14x - 12 = 0$$

La formule de Cardan s'applique alors

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad \text{où } p = -14,\ q = -12 \ *$$

* Outre le terme barré $\cancel{\dfrac{x^2}{16}}$, la copie d'Einstein présente pas mal de ratures dans cette partie : Einstein avait d'abord écrit partout 16 au lieu de 14, qu'il a écrit par la suite par-dessus le 16.

Le discriminant $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$ $\cancel{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ (*) est négatif, de sorte que sa racine est irrationnelle (**). Il faut donc appliquer la méthode trigonométrique, avec

$$\cos u=\frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$\begin{aligned}\log(\cos u)&=\log 6+\frac{3}{2}\log 3-\frac{3}{2}\log 14\\&=0,77815+0,71568-1,71919\\&=9,77474-10\\u&=53°\ 28'\ 4''\end{aligned}$$

Les 3 racines s'écrivent

$$2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{u}{3}\ ;\ 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{u}{3}+120°\right)\ ;\ 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{u}{3}-120°\right)$$

Pour le problème seules les racines positives sont utilisables. Comme $2\sqrt{-\frac{p}{3}}$ est positif, l'autre facteur doit aussi être positif, pour que le produit soit positif. $u/3$ est un angle aigu, donc son cosinus est positif, donc la première racine convient. Le cosinus du second angle (situé dans le second cadran) est négatif, donc la racine ne convient pas. Le cosinus du troisième $u/3 + 240°$ est plus petit que 260° (***) donc encore dans le troisième cadran, donc la troisième racine ne convient pas.

$$\log x=\log 2+\frac{1}{2}\log\frac{14}{3}+\log\cos 17°\ 49'\ 21''$$

$$\log x = 0{,}61420 \quad \log 10\rho = 0{,}38580$$

$$\rho = 0{,}243$$

<u>fin de la copie d'Einstein</u>

* Einstein a barré le radical qu'il avait d'abord écrit.
** Einstein aurait dû écrire *imaginaire* ou *complexe*. C'est pourquoi le correcteur a souligné le mot *irrationnel*.
*** Le correcteur a écrit la bonne réponse par-dessus, soit 270°.

Évaluation

Là aussi, Einstein a obtenu la note maximale, soit 6.

Bibliographie

Albert Einstein, *Prüfungsarbeiten in Mathematik*, Staatsarchiv des Kantons Aargau, 1896.

Albrecht Fölsing, *Albert Einstein – Eine Biographie*, Suhrkamp Verlag, 1995, traduction anglaise par Ewald Osers, éd. Viking, 1997.

H. Hunziker, *Albert Einstein, Maturitätsprüfung in Mathematik, 1896*, Alte Kantonsschule Aarau (28 August 2000).

John Stachel, *The collected Papers of Albert Einstein*, Vol. 1, Princeton University Press, 1987.

Traduction en français des questions et des réponses d'Einstein par Jean-Pierre Friedelmeyer, à partir de la transcription faite en caractères d'imprimerie par le professeur Hunziker, et avec le manuscrit d'Einstein.