À propos des aires (3)

Groupe « Activités mathématiques au collège »

Des images aux formules

Voici la dernière partie de l'article sur les aires. Le Bulletin Vert nº 438 présentait le texte général sur la notion d'aire et les premières activités sur la mesure d'une aire par dénombrements. Après les activités de comparaison et de mesures par pesée, par découpage et recomposition, parues dans le Bulletin Vert nº 445, le présent document propose des dessins à afficher et à commenter au rétroprojecteur, des animations à fabriquer avec du carton et à présenter au rétroprojecteur ou à réaliser avec un logiciel de géométrie dynamique. Ces documents permettront de développer de bonnes images mentales sur les formules d'aires en faisant matérialiser, par découpage et recomposition, les différentes écritures d'une même formule.
Les documents sur le parallélogramme, le triangle et le disque sont essentiellement destinés à être exploités par le professeur en direction de toute la classe sous forme d'affiches ou à être animés au rétroprojecteur ou avec un logiciel de géométrie dynamique. L'activité sur le trapèze peut être proposée en prolongement du travail fait sur le parallélogramme et le triangle, l'élève mettant personnellement en œuvre les méthodes exposées et développées par le professeur.

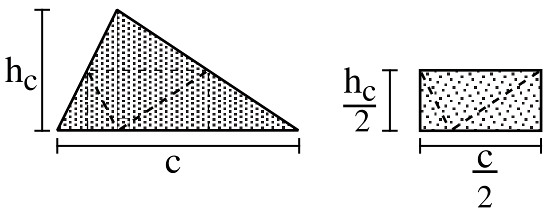
Le parallélogramme (cf. Fiche 1)

La première ligne de la fiche correspond au découpage classique permettant d'obtenir dans ce cas de figure un rectangle. La deuxième ligne donne une autre méthode aboutissant à un rectangle de même aire : le parallélogramme est la partie apparente d'un rectangle recouvert partiellement par deux triangles rectangles (1) et (2). En faisant glisser la pièce (1) vers la pièce (2), la partie apparente a toujours la même aire ; c'est aussi l'aire du rectangle obtenu en bout de course. Cette méthode permet de ramener l'aire d'un parallélogramme à celle d'un rectangle dans le cas où les éléments pris en compte ne permettent pas le découpage classique. C'est ce que montre la troisième ligne.
Cette même méthode permet d'illustrer le fait que deux parallélogrammes de même base et de même hauteur ont la même aire. Suivez les flèches du cadre !
La dernière partie du document montre la conservation des aires par glissements et prise en compte des deux côtés du parallélogramme avec leurs hauteurs associées. Un article de PLOT vous en propose une animation au rétroprojecteur. Vous ne manquerez pas de la réaliser.

Le triangle (cf. Fiche 2)

Ce document propose plusieurs découpages permettant de se ramener à un rectangle ou à un parallélogramme par conservation de l'aire. Mais il met en plus en évidence

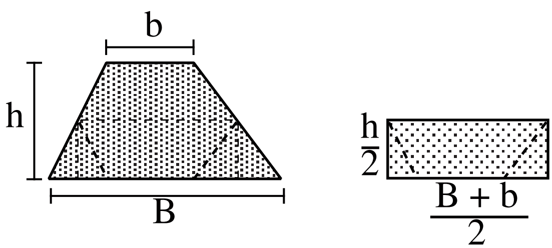
les différentes expressions correspondant à chaque découpage. L'égalité entre ces écritures littérales prend vraiment, ici, du sens.
Là encore, un logiciel de géométrie dynamique permet une animation beaucoup plus spectaculaire et efficace.
Signalons aussi le pliage ci-dessous permettant d'obtenir un rectangle et donnant une autre expression de la formule de l'aire du triangle.



$$A = 2\times\left(\frac{h_c}{2}\times\frac{c}{2}\right)$$

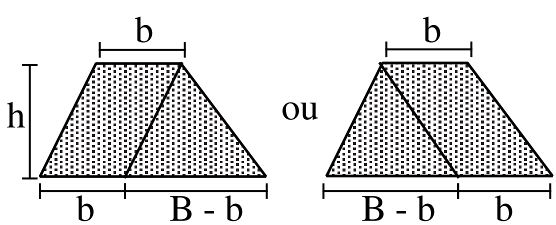
Le trapèze (cf. Fiches 3 et 4)

L'activité de la Fiche 3 permet aux élèves de mettre en œuvre les méthodes de découpage développées dans les documents précédents. Mais il les incite surtout à bien analyser les éléments des formules données : grande base, petite base, hauteur, en observant sur lesquels porte la division par 2. Les solutions à cette activité sont données dans la Fiche 4.
Comme pour le triangle, on a aussi le pliage ci-dessous et l'expression correspondante de l'aire du trapèze.

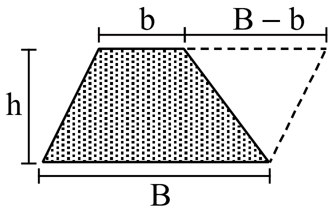


$$A = 2\times\left(\frac{B+b}{2}\times\frac{h}{2}\right)$$

Signalons encore les découpages et recompositions suivants qui amènent d'autres expressions de l'aire d'un trapèze. Si les égalités des expressions sont montrées géométriquement, on peut demander à des élèves de Quatrième de les démontrer algébriquement.



$$A = b\times h + \frac{(B-b)\times h}{2}$$



$$A = B \times h - \frac{(B-b)\times h}{2}$$

Le disque (cf. Fiches 5 et 6)

On ne peut bien sûr démontrer au niveau du collège la formule de l'aire du disque. Mais on peut donner des éléments forts qui permettront de l'accepter et de la mémoriser. De plus, le fait de donner deux méthodes renforce la véracité de la manipulation.

La Fiche 5 utilise la méthode d'Archimède. On peut trouver sur le site www.mathkang.org une animation de cette démonstration ainsi que celles des théorèmes de Thalès et de Pythagore qui utilisent justement les aires.

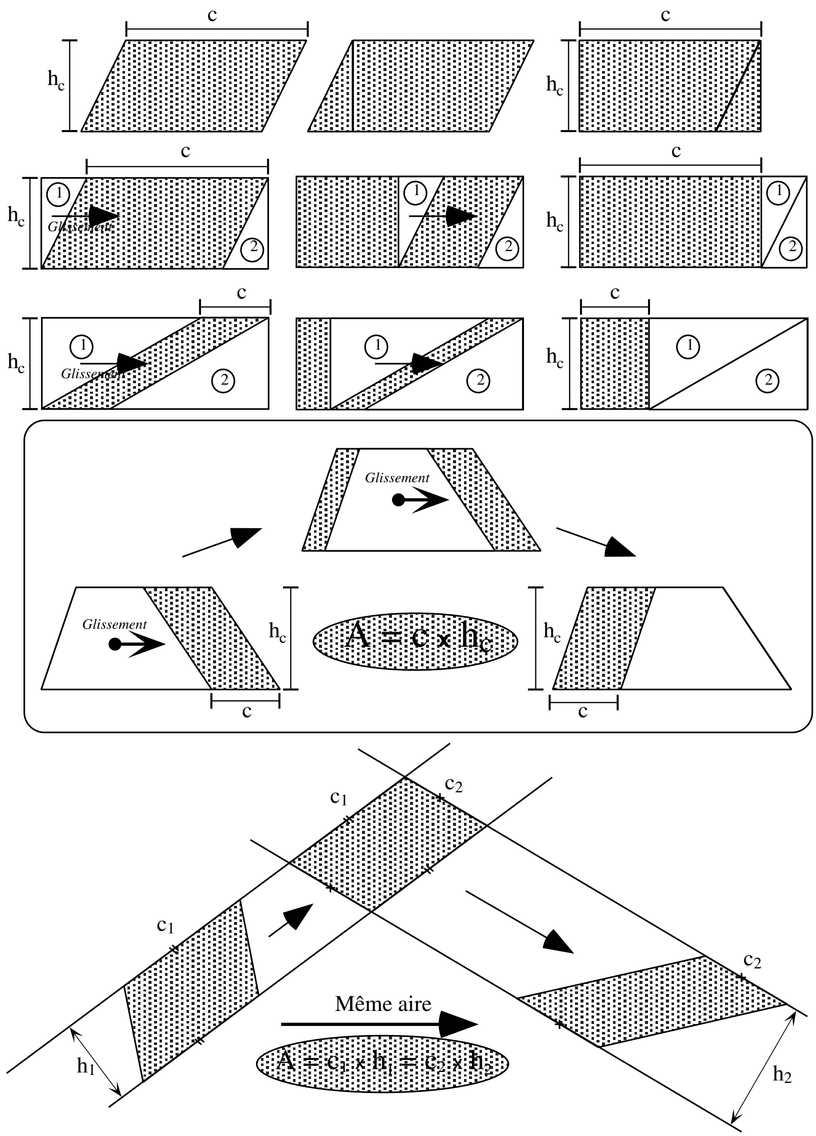
La Fiche 6 fait appel au principe de Cavalieri utilisé aussi pour obtenir les volumes des cylindres, cônes et boules.

À vos ciseaux, à vos rétroprojecteurs et ordinateurs. Bon travail.

Fiche 1

Des images aux formules

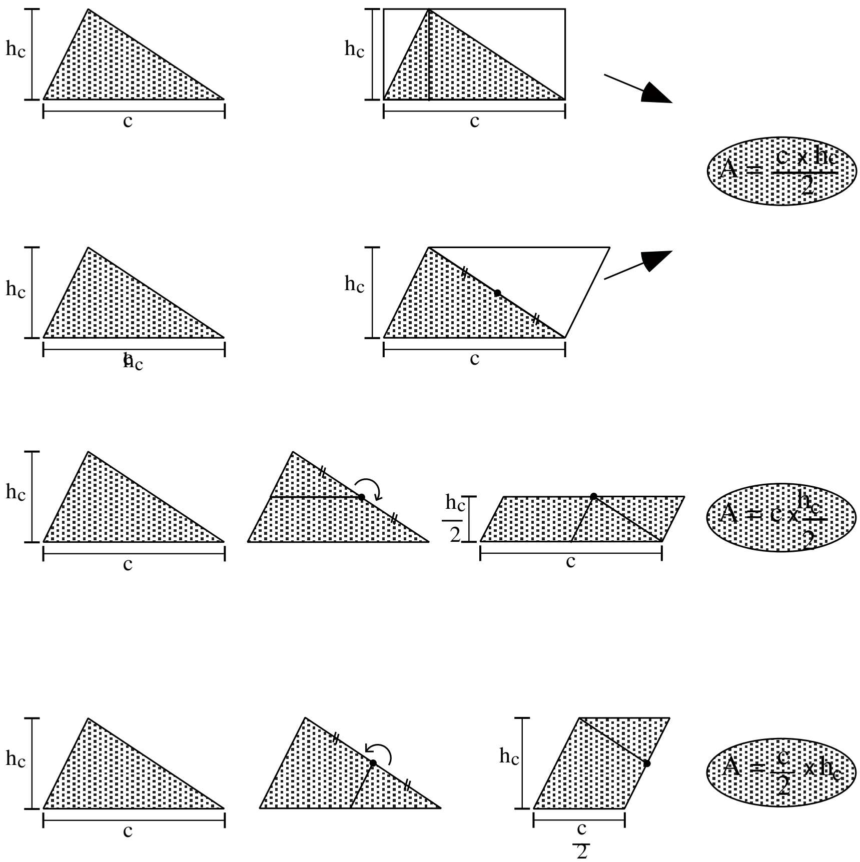
PARALLÉLOGRAMME



Fiche 2

Des images aux formules

TRIANGLE



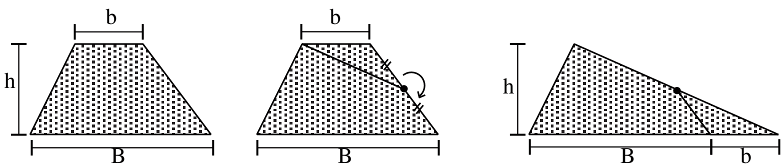
$$A = \frac{c \times h_c}{2} = c \times \frac{h_c}{2} = \frac{c}{2} \times h_c$$

Fiche 3

Des images aux formules

TRAPÈZE

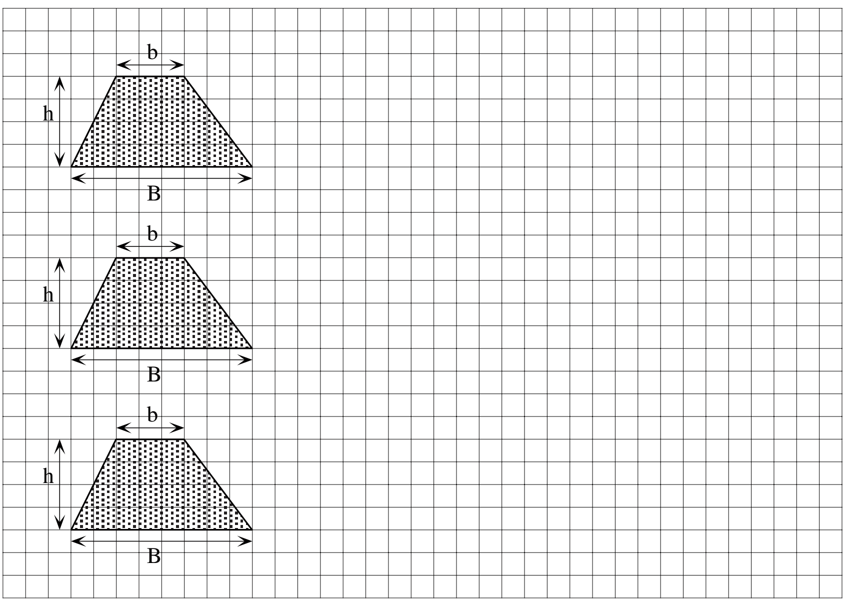
Voici un découpage du trapèze qui donne un triangle de même aire. La connaissance de la formule de l'aire du triangle permet d'obtenir une expression de l'aire du trapèze.



$$A = \frac{(B + b) \times h}{2}$$

En t'inspirant des "découpages" et recompositions effectués sur le triangle (Fiche TRIANGLE), trouve des procédés de recomposition qui permettent d'obtenir les expressions suivantes de l'aire d'un trapèze :

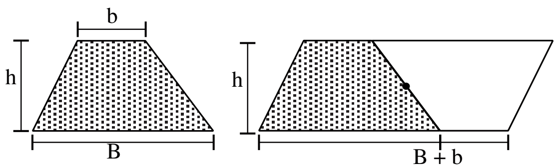
$$A = \frac{(B + b) \times h}{2} \qquad A = (B + b) \times \frac{h}{2} \qquad A = \left(\frac{B + b}{2}\right) \times h$$



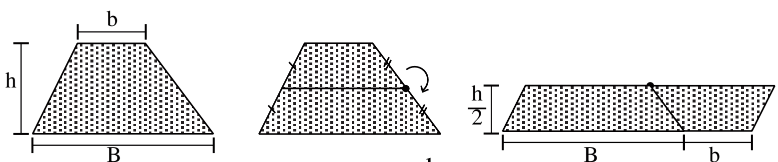
Fiche 4

Des images aux formules

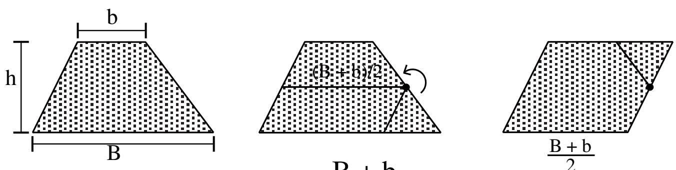
TRAPÈZE



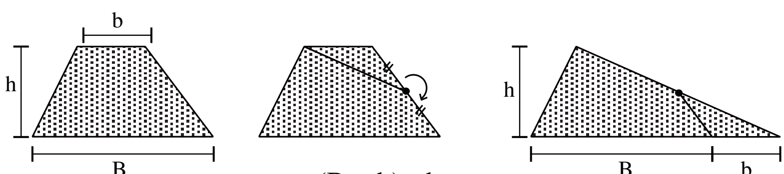
$$A = \frac{(B + b) \times h}{2}$$



$$A = (B + b) \times \frac{h}{2}$$



$$A = \frac{B + b}{2} \times h$$



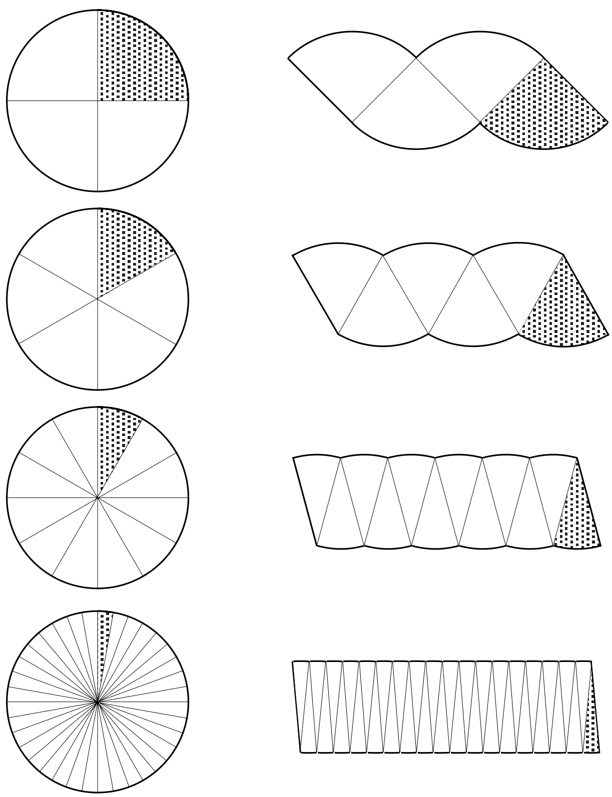
$$A = \frac{(B + b) \times h}{2}$$

$$A = \frac{(B + b) \times h}{2} = (B + b) \times \frac{h}{2} = \frac{B + b}{2} \times h$$

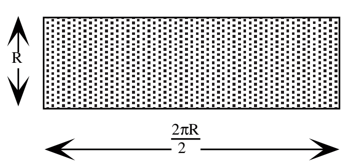
Fiche 5

Des images aux formules

DISQUE



En partageant un disque en un très grand nombre de secteurs, on obtient une figure qui est proche d'un rectangle dont l'un des côtés est le rayon du cercle et dont l'autre côté mesure le demi-périmètre du cercle.

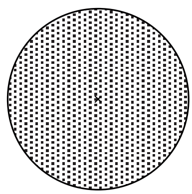


$$l \times L = R \times \frac{2\pi R}{2} = R \times \pi\ R = \pi\ R^2$$

Fiche 6

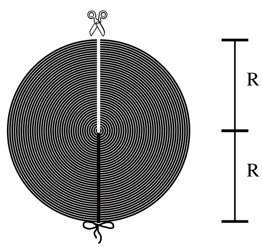
Des images aux formules

DISQUE



Rayon : R

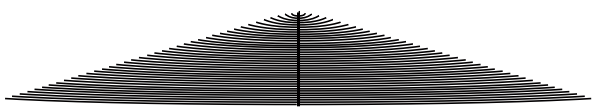
Périmètre du cercle : $2\pi R$



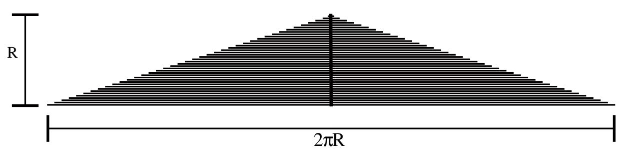
Imaginons le disque formé d'une bande de papier enroulée depuis son centre (ruban de serpentin).

Passons une ficelle par le centre et lions la partie inférieure suivant un rayon.

Découpons la partie supérieure suivant le rayon opposé au précédent.



Écartons les bandes de papier obtenues par découpage pour les amener à l'horizontale.



L'ensemble des bandes forme un triangle de base $2\pi R$ et de hauteur R, isocèle par symétrie.

Le triangle obtenu a la même aire que le disque de départ.

On a donc : $A = \dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{2\pi R \times R}{2} = \pi R^2$