Constructions géométriques par intersections de coniques

Jean-Marie Arnaudiès
et Pierre Delezoide

1. Présentation historique du problème

Il est connu depuis très longtemps que certains problèmes d'origine géométrique ne sont pas résolubles par l'utilisation exclusive de la règle et du compas. Certains de ces problèmes peuvent être résolus en autorisant l'utilisation de coniques dans les constructions. C'est le sujet que nous allons aborder ici.

Constructibilité

Il faut d'abord préciser ce qu'on entend par « constructible ». On part d'un ensemble fini de points du plan, dits points initiaux, ou données du problème. Par exemple, s'il s'agit de construire le centre du cercle circonscrit à un triangle, les sommets du triangle pourront être les points initiaux. S'il s'agit de construire un pentagone régulier, les points initiaux peuvent être son centre et l'un de ses points. Les points constructibles à partir de ces points initiaux sont les points définis récursivement de la manière suivante :
c'est un point initial
ou il appartient à l'intersection de deux figures constructibles distinctes.

Dans les constructions à la règle et au compas, les figures constructibles sont les droites constructibles, définies par deux points constructibles distincts, et les cercles constructibles qui sont les cercles de centre un point constructible et passant par (au moins) un point constructible. Dans les constructions utilisant les coniques, on ajoute à l'ensemble des figures constructibles les coniques propres définies par cinq points constructibles (par cinq points dont trois quelconques ne sont pas alignés, passe une conique propre et une seule). Les démonstrations de constructibilité, soit à la règle et au compas, soit à la règle, au compas et par intersections de coniques, sont en général assez simples et peuvent rester dans le domaine géométrique : il suffit d'exhiber une construction ; mais toutes les démonstrations connues de non constructibilité, que ce soit à la règle et au compas, ou à la règle, au compas et par intersections de coniques, font appel à la théorie des corps, ou dans certains cas (non constructibilité de π et e) à la théorie des corps et à la théorie des fonctions de variable complexe. On donnera ultérieurement des outils théoriques pour mener à bien une démonstration de non constructibilité à la règle et au compas et on établira que l'ennéagone (9 côtés) régulier n'est pas constructible à la règle et au compas.

Il faut noter que les points d'une figure constructible ne sont pas tous constructibles, loin s'en faut. Si l'ensemble des points initiaux est fini, à chaque étape de la construction le nombre de figures constructibles utilisables est fini, donc le nombre de nouveaux points constructibles ajoutés est fini. L'ensemble des points constructibles à partir de ces points initiaux est donc une union dénombrable d'ensembles finis, donc est au plus dénombrable. En conséquence, sur une droite constructible, ou sur une figure constructible en général, l'ensemble des points (individuellement) constructibles est au plus dénombrable.

La géométrie grecque

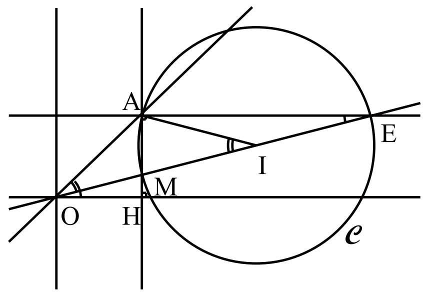
Le premier problème de non constructibilité (à la règle et au compas) rencontré historiquement est sans doute le problème de la duplication du cube. L'oracle de Délos ayant dit que pour atténuer le courroux des Dieux (qui avaient envoyé la peste sur Athènes) il fallait construire un autel (cubique) deux fois plus grand que le précédent, on demanda à Platon comment s'y prendre. Platon botta en touche en répondant que les Dieux étaient mécontents qu'on n'étudiât pas assez la géométrie. Cela se passait sans doute vers –400. Les principaux problèmes analogues qui ont intéressé les mathématiciens des périodes de la Grèce classique (Pythagore, –550) et hellénistique (Apollonius, –200) sont la duplication du cube, généralisé en le problème de la double moyenne proportionnelle, c'est-à-dire connaissant les longueurs a et b, comment construire des longueurs x et y telles que $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$, la trisection d'un angle, la construction de l'heptagone (7 côtés) régulier. On peut aussi citer le problème de la quadrature du cercle, mais on sait maintenant (Lindemann 1883, http://scienceworld.wolfram.com/biography/Lindemann.html) que π est transcendant et qu'il est par conséquent impossible de construire π par des moyens purement géométriques.

• La règle marquée

Ces problèmes ont d'abord été résolus par la méthode des « inclinaisons », *inclinatio* en latin et *νευσις* (neusis) en grec. Cette méthode consiste à faire pivoter une droite autour d'un point fixe jusqu'à ce qu'elle intercepte entre deux droites fixes une longueur donnée à l'avance. On peut réaliser concrètement une telle construction à l'aide d'une règle sur laquelle on a marqué la longueur à réaliser entre deux traits en la faisant glisser et pivoter autour du point fixe ; pour cette raison cette méthode de construction s'appelle aussi actuellement la méthode de la règle marquée. On peut remarquer que ce procédé de « construction » ne rentre pas facilement dans un modèle de constructibilité au sens énoncé plus haut dans cet article.

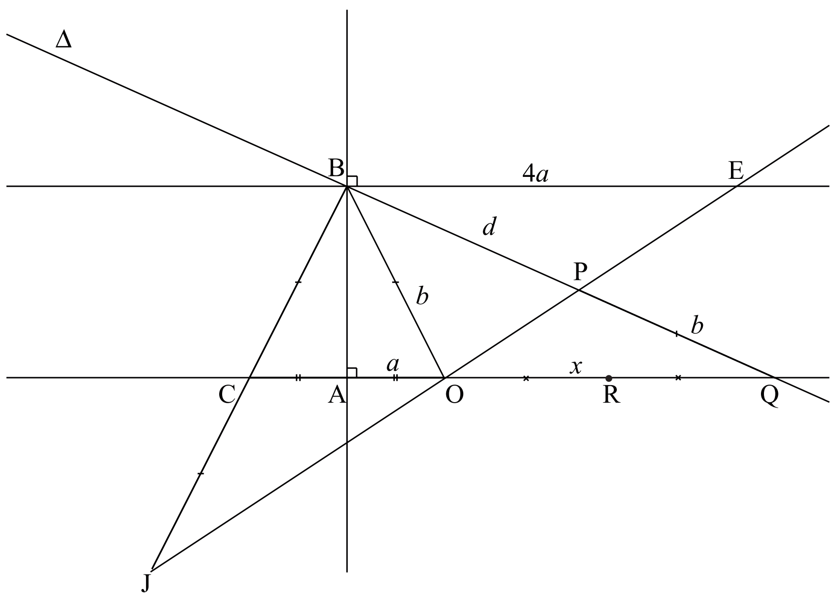
• Une trisection de l'angle

Voici par cette méthode une construction de la trisection de l'angle, construction probablement connue du mathématicien Hippocrate de Chios (–471/–410) d'après le site de l'université St Andrews, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk L'angle à couper en trois est l'angle aigu $\widehat{\mathrm{HOA}}$. On fait pivoter la droite (OM), M restant sur l'intervalle]HA] , de telle sorte que le segment [ME] ait pour longueur le double de la longueur OA. Cela arrive nécessairement une fois et une seule quand M décrit l'intervalle]HA] car cette longueur varie continûment de manière strictement décroissante de $+\infty$ à 0. Quand l'égalité est vérifiée, le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [ME], qui passe toujours par A, a pour rayon OA. Le triangle OAI, où I est le centre de $\mathcal{C}$, est isocèle en A, l'angle $\widehat{\mathrm{MOA}}$ est égal à $\widehat{\mathrm{MIA}}$ qui est le double de l'angle $\widehat{\mathrm{MEA}}$, égal à l'angle $\widehat{\mathrm{HOM}}$. L'angle $\widehat{\mathrm{HOM}}$ est donc le tiers de l'angle $\widehat{\mathrm{HOA}}$.



• *Une construction de la racine cubique*

Voici une figure illustrant une méthode du même type pour la construction d'une racine cubique. Cette méthode est due à Nicomède (–280/–210).



On suppose $0 < a < b$; on commence par construire un triangle OAB rectangle en A et tel que OA = a et OB = b. On note C le symétrique de O par rapport à (AB) et J le symétrique de B par rapport à C. Une droite Δ passant par B coupe la droite (JO) en P et la droite (CO) en Q ; on la fait pivoter autour de B jusqu'à ce que la distance PQ soit égale à b. On note E l'intersection de la droite (JO) avec la parallèle à (AO) menée de B et R le milieu de [OQ]. La distance BE est $4a$. Soit d = BP et $x = \mathrm{OR} = \dfrac{\mathrm{OQ}}{2}$; comme les triangles PBE et PQO sont homothétiques, $\dfrac{2x}{4a} = \dfrac{b}{d}$, donc $d = \dfrac{2ab}{x}$. D'après le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles OAB et QAB on a :

$$AB^2 = b^2 - a^2 = (d + b)^2 - (a + 2x)^2.$$

On en déduit

$$d^2 + 2bd = 4ax + 4x^2,$$

d'où

$$\frac{2ab}{x}\left(\frac{2ab}{x}+2b\right)=4x(a+x)\,,$$

soit encore

$$\frac{2ab}{x}\frac{2b}{x}(a+x)=4x(a+x)\,.$$

On obtient finalement :

$$x^3 = ab^2.$$

• *Problèmes d'éthique*

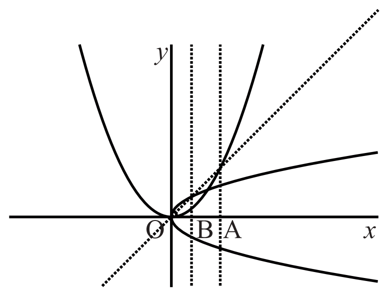
Ce genre de méthodes dites mécaniques ne plaisait pas à certains géomètres, dont Platon, car ils considéraient que cela faisait intervenir le monde sensible, par le mouvement, dans le monde des idées, la géométrie. Évidemment on pouvait répondre à cet argument eu faisant intervenir des courbes autres que les cercles et les droites, et ainsi virent le jour les cissoïdes et conchoïdes. Dans l'exemple précédent le point Q décrit une conchoïde de la droite (JO) dont on « prend » l'intersection avec la droite (OC). Cette façon de voir élimine en quelque sorte le mouvement, mais pas tout à fait car la conchoïde, par exemple, n'était définie que comme, dirait-on maintenant, une courbe paramétrée, au contraire du cercle ou des coniques : sections d'un cône par un plan. Les droites, cercles et coniques étaient conçus comme des objets géométriques engendrés en entier et non pas comme des ensembles de points éventuellement obtenus à l'aide d'un mouvement. On peut retrouver dans cette façon de voir les choses l'opposition entre les courbes définies par équations et les courbes définies paramétriquement.

Platon aurait sans doute apprécié à leur juste valeur les méthodes de constructions par intersections de coniques, mais ces méthodes semblent être apparues un peu plus tard.

Ménechme (–350) savait résoudre le problème de la double moyenne proportionnelle par intersection de paraboles, mais le mot n'existait pas encore. La connaissance des (sections) coniques se développa principalement à l'époque hellénistique grâce à Apollonius (–260/–190) à qui on doit les noms de parabole, hyperbole et ellipse. Il est probable qu'Apollonius savait comment résoudre les problèmes d'inclinaisons par intersections de coniques. Malheureusement son livre « Des inclinaisons » a été perdu.

• *La double moyenne proportionnelle par Ménechme*

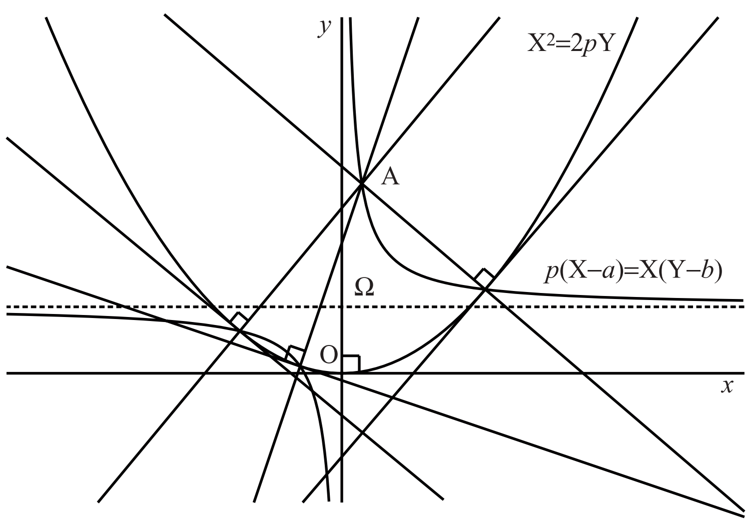
Il s'agit de trouver x et y tels que $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$, ce qui équivaut à $ay = x^2$ et $bx = y^2$ (on suppose a et b positifs) ; donc le couple (x,y) solution est le couple des coordonnées du point d'intersection autre que l'origine des deux paraboles figurées ci-contre. À partir des points initiaux que sont l'origine et les points A $(a,0)$ et B $(b,0)$, on construit (à l'aide de la droite d'équation $x = y$) les points de coordonnées (a,a) et (b,b) par lesquels passent respectivement la première et la deuxième parabole. On peut facilement construire à partir des points initiaux cinq points pour chacune des deux paraboles.



• *Normale à la parabole par Apollonius*

Il est presque certain qu'Apollonius savait résoudre à l'aide d'une hyperbole équilatère le problème de la détermination de la ou des normales à la parabole passant par un point donné. Dans le langage actuel on peut résoudre ce problème de la manière suivante :

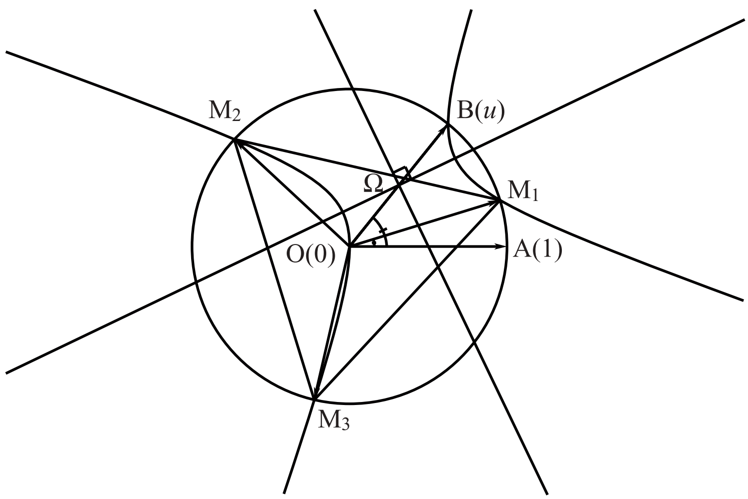
La parabole de sommet O a pour équation $X^2 = 2pY$ et on cherche à construire les normales à la parabole qui passent par le point A de coordonnées (a,b). Au point (x,y) de la parabole, l'équation de la tangente est $xX = p(Y + y)$; un vecteur tangent a pour coordonnées (p,x), donc la normale en (x,y) passe par (a,b) si, et seulement si, $p(x - a) + x(y - b) = 0$. Le point (x,y) doit donc vérifier deux conditions, être sur la parabole, soit $x^2 = 2py$, et vérifier $xy = (b - p)x + ap$, c'est-à-dire se trouver sur l'hyperbole équilatère dont le centre est le point Ω de coordonnées $(0,(b - p))$, dont les directions asymptotiques sont les directions des axes de coordonnées, et qui passe par (a,b). On peut facilement trouver cinq points constructibles à la règle et au compas sur chacune de ces coniques à partir des points initiaux que sont l'origine, le point de coordonnées $(0,p)$ et le point par où doivent passer les normales ; ces normales sont donc bien constructibles par intersections de coniques.



• *Trisection, méthode de Pappus*

Cinq siècles plus tard, Pappus renouvela les études sur les coniques en reprenant et en développant les écrits d'Apollonius, dont peut-être le fameux livre « Des inclinaisons ». Il explicita une construction de la trisection de l'angle par intersection d'un cercle avec une hyperbole équilatère. C'est à Pappus (précurseur de la géométrie projective) que nous devons la classification des problèmes géométriques en problèmes plans (*i.e.* résolubles à la règle et au compas), problèmes solides « $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\alpha$ » (stéréa) résolubles par intersection de coniques (par référence à la nature spatiale des coniques) et problèmes linéaires, c'est-à-dire résolubles par l'utilisation de courbes paramétrées comme les conchoïdes, spirales, etc.

Voici une méthode moderne où l'on retrouve l'hyperbole équilatère utilisée par Pappus :



Il s'agit de couper en trois l'angle $\widehat{AOB}$; on prend un repère orthonormé dans lequel l'affixe de O est 0 et celle de A est 1 ; l'affixe de B est alors un complexe u de module 1 ; l'équation à résoudre est $z^3 = u$. On cherche une conique qui coupe le cercle unité en les trois solutions de cette équation. En général, si deux coniques ont 3 points communs, elles en ont 4, il faut donc ajouter artificiellement une solution. Il paraît logique d'ajouter la solution u : l'équation à résoudre devient :

$$(z - u)(z^3 - u) = z^4 - uz^3 - uz + u^2 = 0.$$

En divisant par z^2 cette équation, on obtient :

$$z^2 - uz - \frac{u}{z} + \frac{u^2}{z^2} = 0,$$

puis, en tenant compte du fait que les racines sont de module 1,

$$z^2 + u^2\bar{z}^2 - uz - u\bar{z} = 0,$$

et enfin en multipliant par $\bar{u}$ (de module 1) on trouve l'équation complexe d'une conique :

$$\bar{u}z^2 + u\bar{z}^2 - z - \bar{z} = 0.$$

On verra que cette conique est une hyperbole équilatère : elle recoupe le cercle unité en les 3 racines de l'équation $z^3 = u$ et en u.

Déterminons les éléments de cette hyperbole. L'équation s'écrit :

$$\bar{u}\left(z - \frac{u}{2}\right)^2 + u\left(\bar{z} - \frac{\bar{u}}{2}\right)^2 = \frac{u + \bar{u}}{4}.$$

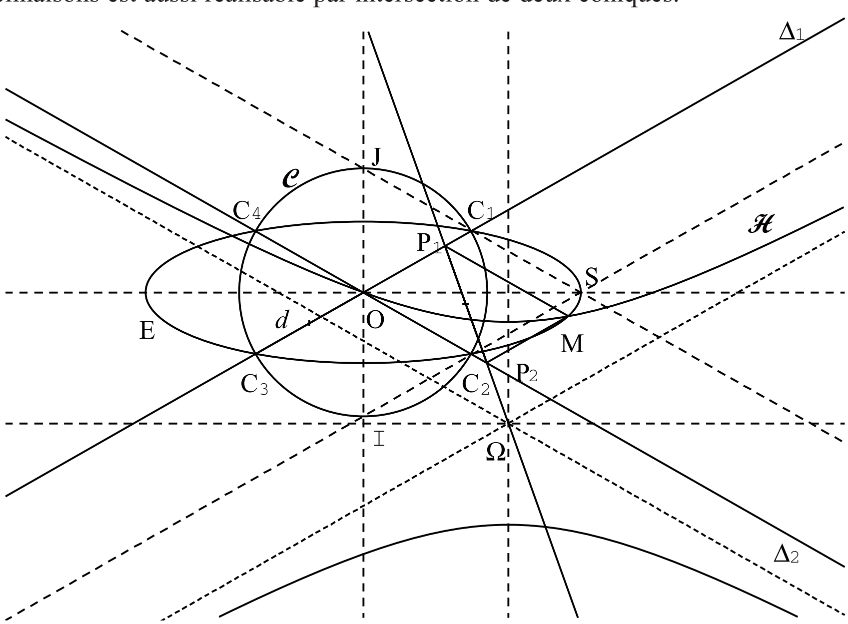
Le centre de symétrie de l'hyperbole, son centre donc, est le point Ω d'affixe $u/2$, facilement constructible (milieu de O et B). En choisissant v tel que $u = v^2$, l'équation devient

$$\left(\frac{z - u/2}{v}\right)^2 + \left(\frac{\bar{z} - \bar{u}/2}{\bar{v}}\right)^2 = \frac{u + \bar{u}}{4}.$$

Dans le repère orthonormé direct de centre Ω et d'axes dirigés par v et iv, l'équation s'écrit $\varsigma^2 + \bar{\varsigma}^2 = \frac{u + \bar{u}}{4}$ ou encore $x'^2 - y'^2 = \frac{u + \bar{u}}{8}$. Cette conique est donc bien une hyperbole : ses axes de symétrie sont les droites passant par Ω et parallèles aux bissectrices de l'angle $\widehat{\mathrm{AOB}}$; elle passe par B d'affixe u et comme on connaît son centre, ses axes de symétrie et ses asymptotes, il est facile d'en construire quatre autres points.

• ***Le livre perdu d'Apollonius***

Montrons par une méthode moderne ce qu'Apollonius avait probablement compris, c'est-à-dire que toute construction réalisable par la méthode des inclinaisons est aussi réalisable par intersection de deux coniques.



On a deux droites distinctes Δ_1 et Δ_2 qui se coupent en O, une distance $d > 0$ qui est ici matérialisée par le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon d, et d'autre part un point Ω qui n'est sur aucune des droites. On cherche à construire par intersection de coniques une droite passant par Ω coupant les droites Δ_1 et Δ_2 en des points P_1 et P_2 tels que $P_1P_2 = d$.

Le cercle $\mathcal{C}$ recoupe la droite Δ_1 en C_1, C_3 et Δ_2 en C_2, C_4 comme indiqué sur la figure. On pose $\vec{u_1} = \overrightarrow{OC_1}$ et $\vec{u_2} = \overrightarrow{OC_2}$, on utilisera le repère non orthonormé $\left(O, \vec{u_1}, \vec{u_2}\right)$; la longueur des vecteurs de base est d et leur produit scalaire est $d^2 \cos \alpha$. L'application qui à M (x,y) fait correspondre le couple de ses projections P_1 $(x,0)$ et P_2 $(0,y)$ sur les axes est bijective. Nous allons démontrer que l'ensemble des points M tels que $P_1P_2 = d$ est une ellipse $\mathcal{E}$ de centre O et que l'ensemble des points M tels que P_1, P_2, Ω soient alignés est une hyperbole $\mathcal{H}$ de centre Ω. Les points M qui correspondent aux droites cherchées sont les points communs à cette ellipse et à cette hyperbole.

L'ellipse $\mathcal{E}$: la distance P_1P_2 est la norme du vecteur $y\vec{u_2} - x\vec{u_1}$, son carré scalaire vaut $d^2\,(y^2 - 2xy \cos \alpha + x^2)$. L'ensemble des points M tels que $P_1P_2 = d$ est donc la conique d'équation $x^2 - 2xy \cos \alpha + y^2 = 1$, qui est bien une ellipse ; sou centre est l'origine O, elle passe par les points C_1 $(1,0)$, C_2 $(0,1)$, C_3 $(-1,0)$, C_4 $(0,-1)$ et il est clair, géométriquement et analytiquement, que les bissectrices des droites Δ_1 et Δ_2, dirigées par $\vec{u_1} + \vec{u_2}$ et $\vec{u_1} - \vec{u_2}$, sont des axes de symétries. Pour obtenir au moins un cinquième point de cette ellipse, prenons les intersections I et J du cercle $\mathcal{C}$ avec l'une des bissectrices de (Δ_1,Δ_2) ; traçons par exemple la parallèle à Δ_1 par I et la parallèle à Δ_2 par J, ces deux droites se coupent en un sommet S de l'ellipse (on obtient de manière analogue les quatre sommets). On peut remarquer en effet que les points P_1 et P_2 associés au point S sont respectivement les milieux de JS et IS, et par conséquent $P_1P_2 = IJ/2 = d$.

L'hyperbole $\mathcal{H}$: On reprend les notations précédentes, les vecteurs $\overrightarrow{\Omega P_1}$ de coordonnées $(x - a,-b)$ et $\overrightarrow{\Omega P_2}$ de coordonnées $(-a,y - b)$ sont liés si, et seulement si, $ab = (x - a)(y - b)$. On trouve ainsi l'équation d'une hyperbole de directions asymptotiques celles de Δ_1 et Δ_2, axes du repère, passant par O, et de centre Ω puisque dans le repère de centre Ω son équation est $x'y' = ab$. Les axes de symétrie de cette hyperbole sont parallèles aux bissectrices de (Δ_1,Δ_2) et passent par Ω, cela nous donne quatre points de $\mathcal{H}$: le point O et ses trois symétriques. Pour obtenir un cinquième point de $\mathcal{H}$, comme on connaît les asymptotes, on peut utiliser le fait qu'une droite coupe une hyperbole en deux points dont le milieu est le milieu des intersections de cette droite avec les asymptotes.

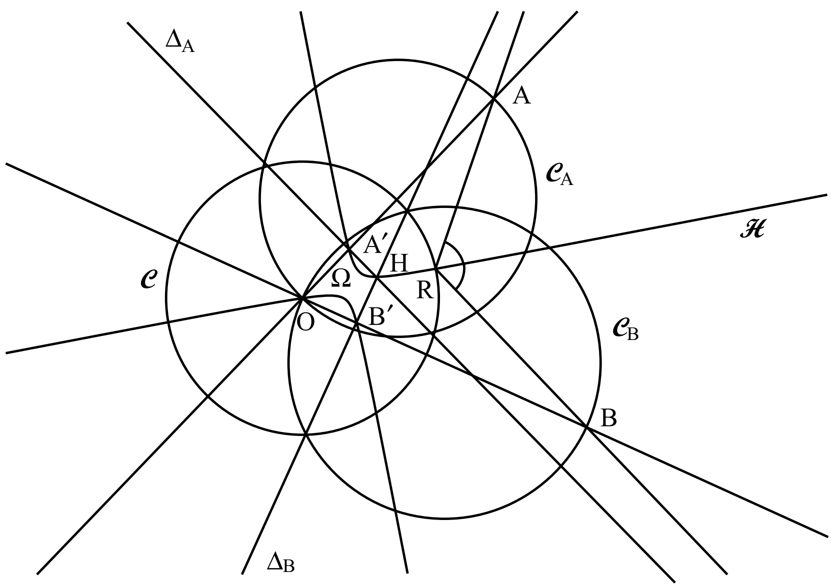
On a donc démontré que toute construction par une règle marquée peut être remplacée par une construction par intersection de deux coniques passant chacune par au moins cinq points constructibles à partir des données initiales. Nous verrons plus loin que la réciproque est vraie.

La géométrie de la culture islamique

Vers l'an 900, les géomètres de la culture islamique avaient connaissance d'une tentative d'Archimède pour construire l'heptagone régulier. Cette méthode, qu'il serait trop long de retracer ici, dite lemme d'Archimède, ne fait que déplacer le problème et ne permet en rien une construction de l'heptagone régulier, même à l'aide d'une règle marquée. La possibilité de dépasser les maîtres grecs en géométrie en résolvant un problème non encore résolu, dynamisa probablement leurs recherches et les premières constructions de l'heptagone régulier apparurent vers 970. Nous justifierons et décrirons ultérieurement une construction moderne de l'heptagone régulier et du 13-gone régulier.

• Le miroir circulaire

Parmi les nombreuses contributions des géomètres islamiques, nous retiendrons celle de Alhazen (vers l'an 1000) qui s'intéressa au problème de la réflexion sur un miroir circulaire ; ce problème a été introduit par Ptolémée dans l'Almageste. Il semble que Alhazen ait résolu ce problème par la méthode de la règle marquée et que Huygens en ait donné une solution par intersection de coniques. Étant donnés un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et deux points A et B extérieurs au cercle, on cherche à construire le point R du cercle où un rayon lumineux issu de B va se réfléchir pour arriver en A. On peut résoudre ce problème par une méthode analytique analogue à la méthode utilisée pour la trisection de l'angle. Nous nous bornerons ici à décrire la construction des points R solutions comme intersection de $\mathcal{C}$ avec une hyperbole $\mathcal{H}$.



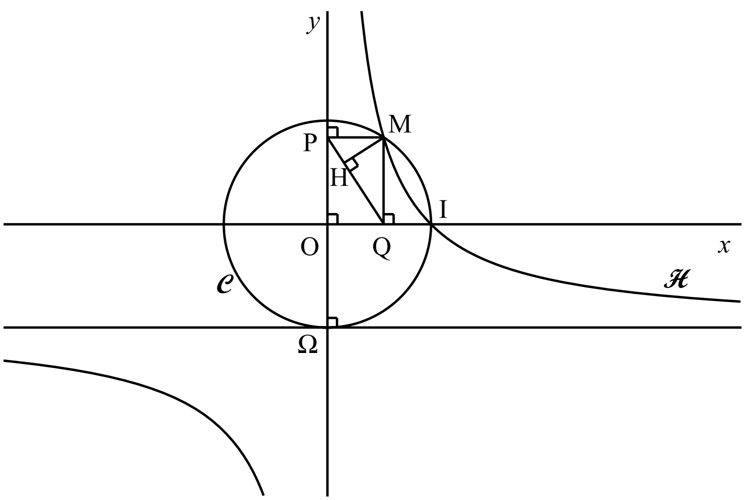
On construit les cercles $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ de diamètres respectifs [OA] et [OB] et les axes radicaux Δ_A et Δ_B de ces cercles avec le cercle $\mathcal{C}$. On construit les inverses A′ et B′ de A et de B dans l'inversion de cercle $\mathcal{C}$. L'hyperbole $\mathcal{H}$ a pour centre le milieu Ω de

A′ et B′, elle passe par O, A′ et B′ et ses directions asymptotiques sont les directions des bissectrices de l'angle $\widehat{AOB}$. Si B est visible de A après réflexion sur $\mathcal{C}$, il y a un seul point R commun à $\mathcal{H}$ et $\mathcal{C}$ tel que les segments [AR] et [BR] restent extérieurs au cercle et de directions symétriques par rapport à la normale en R à $\mathcal{C}$. Le point B est donc vu de A dans la direction de [AR). Si A et B sont intérieurs à $\mathcal{C}$, la construction reste valide et porte alors le nom de « Billard de Alhazen ».

• ***Le triangle d'Al Kayyam***

Citons encore le Persan Al Kayyam (vers 1100), connu comme poète chantant le vin, et comme géomètre novateur. Il semble avoir été le premier à donner une méthode pour résoudre géométriquement les équations de degré 3, méthode qui semble être celle qu'on a attribuée à Descartes (cf. plus loin). La figure représente une résolution du problème suivant : trouver un triangle rectangle dont l'hypoténuse soit égale à la longueur d'un côté augmenté de la hauteur sur l'hypoténuse.

Une construction est la suivante : on trace le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r, la longueur désirée pour l'hypoténuse du triangle, et deux axes orthogonaux se coupant en O. Dans le repère orthonormé ainsi obtenu, on considère le point I $(r,0)$ et Ω $(0,-r)$. L'hyperbole $\mathcal{H}$ de centre Ω qui passe par I et qui a pour directions asymptotiques les directions des axes recoupe $\mathcal{C}$ en un point M. Ce point M et ses projections orthogonales P et Q sur les axes forment un triangle rectangle MPQ vérifiant les conditions.



De cette période datent aussi, probablement, des constructions de l'ennéagone régulier (9 côtés).

La Renaissance et la période classique

• *Cardan et Descartes*

On peut se rappeler que c'est Cardan qui au début du XVI^e siècle publia dans son « Ars magna » les résolutions par radicaux des équations de degré 3 et 4. Ces méthodes n'étaient pas ses inventions. Même si les coefficients de l'équation sont réels, interviennent dans la résolution des racines cubiques de nombres éventuellement complexes (c'est d'ailleurs là sans doute l'origine de l'utilisation des nombres « imaginaires »). Ces formules de résolution prouvent que si on sait construire les racines cubiques d'un complexe, ce qui revient à une construction de racine cubique d'un réel accompagnée d'une trisection d'angle, alors on sait construire les solutions (réelles ou complexes) des équations de degré inférieur ou égal à 4 (à coefficients réels ou complexes). Il semble que Viète ait remarqué en 1593 qu'on peut en déduire qu'il est possible de résoudre toutes les équations de degré inférieur ou égal à 4 (à coefficients réels) à l'aide d'une règle marquée. Comme l'intersection de deux coniques quelconques peut être ramenée à la résolution d'une équation de degré 4 (à coefficients réels), nous en déduisons immédiatement que tonte construction réalisable par intersection de coniques peut être réalisée à l'aide d'une règle marquée. En étudiant attentivement le problème, on peut même démontrer qu'il suffit d'appliquer une seule fois la méthode de la règle marquée pour construire l'intersection de deux coniques ; cela est lié au fait que l'équation du second degré $\mathrm{X}^2 + q\mathrm{X} - \frac{p^3}{27} = 0$ associée à l'équation du troisième degré à coefficients réels $\mathrm{X}^3 + p\mathrm{X} + q = 0$ a soit deux racines réelles distinctes ou confondues, dont on prendra les racines cubiques, soit deux racines complexes conjuguées dont le carré du module est $-\frac{p^3}{27}$, qui est un cube parfait : il suffit donc dans ce cas de trisecter l'angle pour obtenir les racines cubiques. Même si ce fait était, semble-t-il, connu des géomètres ultérieurs, il est difficile de savoir auquel attribuer cette remarque. En tout cas, on attribue à Descartes (XVII^e siècle) la découverte (ou la redécouverte ?) d'une méthode directe de résolution des équations de degré 3 ou 4 à coefficients réels, par intersections de coniques. Cette méthode était en germe dans la résolution de la duplication du cube. Il suffit de remplacer x^2 dans l'équation par y partout où on le peut ; on obtient une équation de conique et les solutions sont données par les abscisses des points d'intersection avec la parabole d'équation $y = x^2$.

Par exemple l'équation :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

devient :

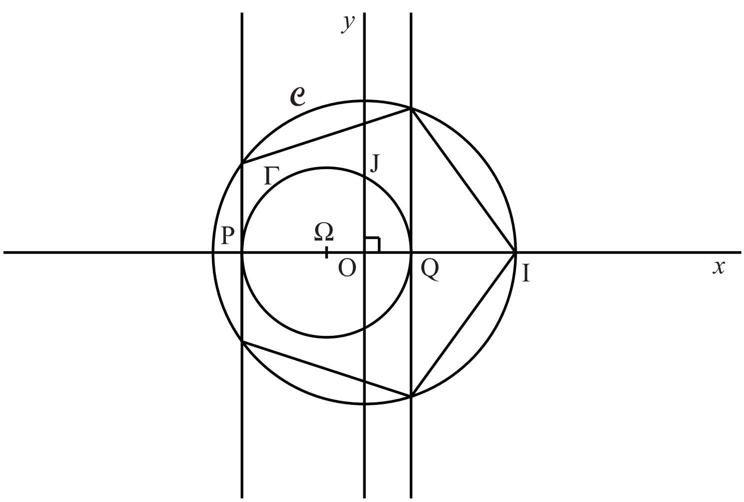
$$ay^2 + bxy + cy + dx + e = 0 \text{ et } y = x^2.$$

Il faut cependant noter que cette méthode ne permet de trouver directement que les solutions réelles d'une équation à coefficients réels.

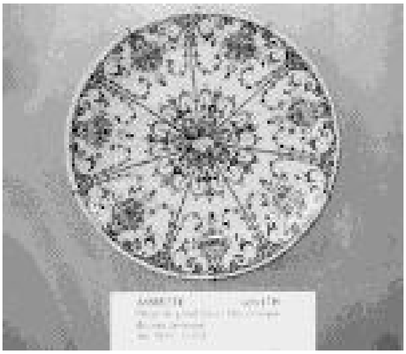
• Quelques céramiques

En visitant le musée de la céramique à Sèvres, un géomètre s'aperçoit rapidement que presque toutes les assiettes ont des décors dont les symétries sont très faciles à réaliser géométriquement : symétries hexagonales, octogonales et les symétries dont l'ordre est de la forme 2^n ou 3.2^n. Mais on peut voir d'assez nombreuses assiettes de symétrie pentagonale et décagonales (1% environ).

Cela s'explique par le fait que le pentagone est facilement constructible à la règle et au compas. On trace le cercle Γ de centre Ω (–1/4,0) passant par le point J (0,1/2) ; ce cercle recoupe l'axe des x en deux points P et Q ; les parallèles à l'axe des y passant respectivement par P et Q recoupent le cercle unité $\mathcal{C}$ en les sommets du pentagone régulier défini par son centre O et l'un de ses points I.



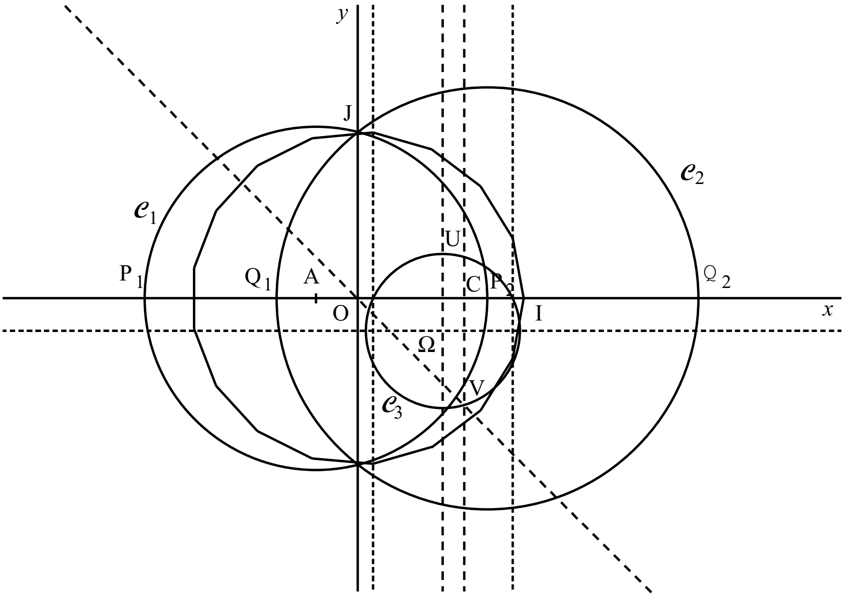
On peut aussi voir une assiette heptagonale et une assiette ennéagonale :



La période moderne

• Gauss et la construction du 17-gone régulier

La période moderne commence avec Gauss qui, grâce à l'invention de ce qu'on appelle maintenant les périodes de Gauss, donna la clé pour la constructibilité à la règle et au compas du 17-gone régulier. Ce qui était nouveau, c'est que la méthode utilisée était initialement totalement algébrique et que la construction géométrique n'est venue qu'après. D'ailleurs Gauss lui-même s'est d'abord contenté de montrer algébriquement que l'équation $X^{17} - 1 = 0$ était résoluble par radicaux carrés et d'en déduire que la construction était possible à la règle et au compas. D'autres que lui ont donné des constructions effectives, avant que lui-même, 20 ans plus tard, ne donne la sienne. Voici une construction originale due aux auteurs de cet article.



On prend un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$. Le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre A $(-1/4,0)$ passant par J recoupe l'axe Ox en P_1 $(p_1,0)$ et P_2 $(p_2,0)$. Le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre P_2 passant par J recoupe l'axe Ox en Q_1 $(q_1,0)$ et Q_2 $(q_2,0)$. On pose sur l'axe Ox le point C d'abscisse $(1/2 + p_2)/2$ (on le construit en traçant des milieux). Sur la parallèle à Oy passant par C on place les points U d'ordonnée 1/4 et V à l'intersection avec la droite d'équation $y = -x$. Le cercle $\mathcal{C}_3$ passe par U et V et son centre Ω a pour abscisse $q_2/4$ (peu différent de 1/2) ; ce cercle recoupe l'axe Ox en deux points qui sont des abscisses de sommets du 17-gone régulier, la plus grande de ces abscisses est $\cos(2\pi/17)$.

Gauss a clairement démontré que les polygones réguliers ayant p côtés, où p est un nombre premier de Fermat, sont constructibles à la règle et au compas. Les nombres premiers de Fermat sont les nombres premiers de la forme $2^{2^n} + 1$; les seuls connus à ce jour sont 3, 5, 17, 257, 65 537) ([6], p. 154). On lui attribue aussi le résultat suivant : les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas sont les polygones réguliers dont le nombre de côtés est de la forme $2^a p_1 p_2 \ldots p_k$, où les nombres $p_1, \ldots, p_k$ sont des nombres premiers de Fermat distincts. Si on sait que les polygones réguliers ayant un nombre de côtés égal à un nombre premier de Fermat sont constructibles à la règle et au compas, il est facile d'en déduire à l'aide de l'identité de Bachet (dite aussi de Bézout) que ces polygones réguliers sont constructibles. Par exemple pour construire le polygone régulier à 30 côtés, il suffit de remarquer :

$$2 \times 5 - 3 \times 3 = 1$$

d'où

$$\frac{2\pi}{30} = \frac{1}{2}\left(2\frac{2\pi}{3} - 3\frac{2\pi}{5}\right).$$

Le fait que seuls ces polygones réguliers soient constructibles à la règle et au compas ne semble pas avoir été explicitement démontré par Gauss. De même Gauss a paternellement conseillé aux géomètres amateurs de ne pas tenter de chercher des constructions à la règle et au compas de la trisection de l'angle ou de la duplication du cube, sans en démontrer l'impossibilité.

• Après Gauss, Wantzel

Il semble que ce soit à Pierre Wantzel dans « Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème peut se résoudre avec la règle et le compas », publié dans le Journal des mathématiques pures et appliquées en 1837, qu'il faille attribuer les premières démonstrations explicites de non constructibilité à la règle et au compas. Il y avait à cette époque une grande activité autour du problème de la constructibilité et de la résolubilité par radicaux. C'est dans ce contexte que se sont développées les idées de Galois, mais en aucun cas Wantzel n'a pu utiliser les idées de Galois, mort en mai 1832, mais dont les papiers principaux ne furent connus qu'à partir de 1846. On attribue à P. Wantzel le résultat suivant : dans un repère constructible à partir des points initiaux, les points constructibles sont les points dont les coordonnées peuvent s'écrire à l'aide des rationnels, des opérations algébriques et de racines carrées réelles. Nous y reviendrons ultérieurement.

• *J. Pierpont*

En utilisant des méthodes algébriques devenues alors bien connues, James Pierpont publia en 1895 dans l'American Mathematical Society Bulletin, une démonstration du fait que les polygones réguliers constructibles à l'aide de la règle marquée, ou par intersection de coniques, sont les polygones réguliers dont le nombre de côtés est de la forme $2^a3^bp_1 \dots p_k$, où les entiers $p_1, \dots, p_k$ sont des nombres premiers deux à deux distincts, de la forme $1 + 2^p3^q$. Il généralisait ainsi le résultat attribué à Gauss. Ces nombres premiers sont appelés les nombres de Pierpont ; il semble qu'il y en ait une infinité et qu'ils soient à peu près bien répartis, mais cela, comme beaucoup d'autres conjectures concernant les nombres premiers, reste à démontrer ou à infirmer.

• *Récemment*

Les recherches sur ce sujet ont connu depuis quelques années une nouvelle impulsion, en partie grâce aux logiciels de dessin géométrique actuellement disponibles. En 1984 J.-C. Carrega a publié dans la Revue de Mathématiques Spéciales (Vuibert) une étude où il généralise aux points constructibles par intersection de coniques la caractérisation de Wantzel, et où il reprend la caractérisation des polygones réguliers constructibles par intersection de coniques. En 1988, M. Gleason a précisé les résultats de J. Pierpont en démontrant que la construction des polygones réguliers constructibles par intersections de coniques était possible en utilisant uniquement la trisection des angles. En 1997, Carlos Videla a publié un article de contenu analogue à celui de J.C. Carrega. Enfin dans un article que nous avons publié en 2001 dans la revue américaine Advances in Mathematics (article en français), nous avons, entre autres, distingué les constructions réalisables par construction de racines cubiques de réels de celles réalisables par trisection d'angles, caractérisé par leur groupe de Galois les équations dont les solutions sont constructibles par intersection de coniques, explicité des constructions originales des polygones réguliers à 5, 7, 13, 19, 37 côtés, constructions par intersections de coniques, et des 17 et 257-gones réguliers, constructions à la règle et au compas.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Heath. *A manual of Greek Mathematics*, t. 1, Dover, New York, 1963.

[2] Collette, J.-P., *Histoire des Mathématiques*, Éditions du Renouveau pédagogique, Inc., Ottawa, 1971.

[3] Dahan-Dalmédico, A. & Peiffer, J., *Routes et dédales*, Études vivantes, 1982.

[4] Rashed R., *Histoire des sciences arabes*, Éditions du Seuil, Paris, 1997.

[5] Martin G.E., *Geometric constructions*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[6] Delahaye J.-P., *Merveilleux nombres premiers*, Belin, 2000.

[7] Gauss F., *Recherches Arithmétiques*, trad. par Poulet-Delisle, A.C.M., Blanchard (réimpression), 1953.

[8] Wantzel P., *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas*, Journal de Mathématiques pures et appliquées p. 366-372, Paris, 1836-37.

[9] Pierpont J., *On an undemonstrated theorem of the Disquisitiones Arithmeticæ*, American Mathematical Society Bulletin, 2, p. 206-207 and plate 11, 1895-96.

[10] Carrega J.-C., *Théorie des corps*, Hermann, 2001.

[11] Gleason A.M., *Angle trisection, the heptagon, and the triskaidecagon*, Amer. Math. Monthly 95, n° 3, p. 185-194, 1988.

[12] Videla C.R., *On points constructible from conics*, Mathematical intelligencer 19 p. 53-57, 1997.

[13] Cuppens R., *Faire de la géométrie supérieure en jouant avec Cabri Géomètre II*, tome 1, numéro 124 et tome 2, numéro 125, Publication de l'A.P.M.E.P., Juillet 1999.

[14] Arnaudiès J.-M., Delezoide P., *Nombres (2,3)-constructibles*, Advances in Mathematics 158, 2001.