Les problèmes de l'APMEP

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.
Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de « beaux problèmes »… si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice. La rubrique s'efforce de rendre compte de la pluralité des méthodes proposées par les lecteurs, des généralisations des problèmes…
Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés. Solutions et énoncés sont à envoyer à l'adresse suivante (réponse à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO,
9 quai de la Seine,
75019 Paris.

(attention : nouvelle adresse).

Solution des problèmes précédents

Énoncé nº 288 (Philippe DELEHAM, 97-Ouangani)

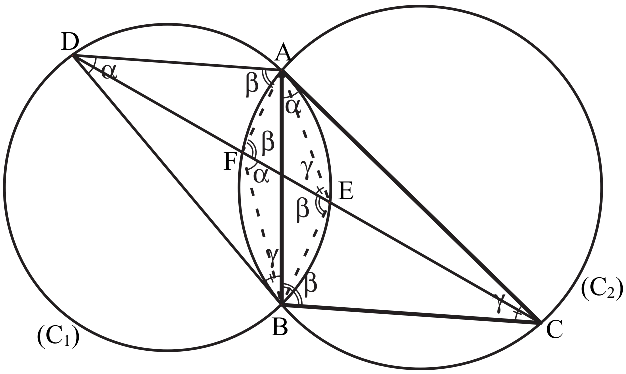
Deux cercles (C_1) et (C_2) se coupent en A et B. La tangente à (C_1) en A coupe (C_2) en C. La tangente à (C_2) en B coupe (C_1) en D. La droite (CD) coupe (C_1) en E et (C_2) en F. Montrer que

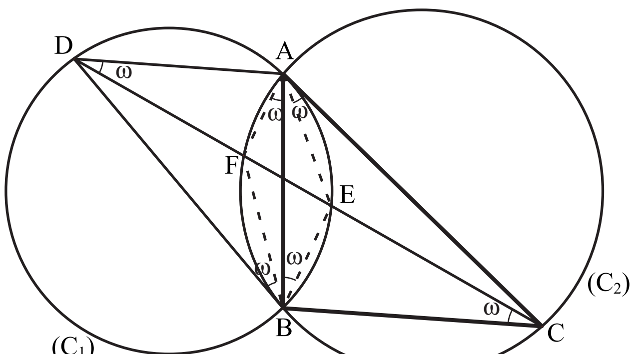
$$\frac{1}{FB^2}+\frac{1}{BD^2}+\frac{1}{DA^2}=\frac{1}{EA^2}+\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{CB^2}.$$

SOLUTION

Une bien belle configuration, qui a inspiré des réponses de : M. BAUVAL (78-Versailles), Patrick BENIZEAU (17-La Rochelle), Jacques BOUTELOUP (76-Rouen), Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Edgard DELPLANCHE (94-Créteil), Christian DUFIS (87-Limoges), Christine FENOGLIO (69-Lyon), Pierre MANACH (56-Lorient), René MANZONI (76-Le Havre), Charles NOTARI (31-Montaut), Serge PAICHARD (53-Laval), G. PRIGENT (93-Dugny) et Pierre RENFER (67-Ostwald).

On y verra pour commencer quatre angles, α, γ, $\beta = \pi - \alpha - \gamma$ et ω, qui apparaissent chacun, en tant qu'angles inscrits, en plusieurs endroits de la figure, et mettent en évidence le parallélisme des droites AD et BC (les angles alternes-internes valent tous deux β), un certain nombre de triangles semblables, notamment : ABC et DAB, mais aussi CAE et CDA, DBF et DCB, et même des trapèzes semblables : ACBD et FBEA. D'où plusieurs égalités :





ABC semblable à DAB entraîne

$$\frac{AB}{DA} = \frac{AC}{DB} \tag{1}$$

et

$$\frac{AC}{DB} = \frac{BC}{AB} \tag{2}$$

CAE semblable à CDA entraîne

$$\frac{CA}{CD} = \frac{AE}{DA} \tag{3}$$

et DBF semblable à DCB entraîne

$$\frac{DB}{DC} = \frac{BF}{CB} \tag{4}$$

Cette relation (4) peut s'écrire :

$$\frac{1}{FB} = \frac{DC}{CB \cdot BD},$$

donc :

$$\frac{1}{FB^2}+\frac{1}{BD^2}-\frac{1}{CB^2}=\frac{DC^2+CB^2-BD^2}{(CB\cdot BD)^2}$$
$$=\frac{2DC\cdot CB\cdot\cos\omega}{(CB\cdot BD)^2}=\frac{2DC\cdot\cos\omega}{AC\cdot AB\cdot BD}$$

en utilisant la formule d'Al Kashi (que Pierre Renfer appelle théorème de Pythagore généralisé), puis la relation (2).

De même,

$$\frac{1}{EA^2}+\frac{1}{AC^2}-\frac{1}{DA^2}=\frac{CD^2+DA^2-AC^2}{(DA\cdot AC)^2}$$
$$=\frac{2CD\cdot DA\cdot\cos\omega}{(DA\cdot AC)^2}=\frac{2CD\cdot\cos\omega}{DB\cdot AB\cdot AC}$$

en utilisant, cette fois-ci, les relations (3) et (1).

Manifestement, ces deux expressions sont égales, d'où l'égalité cherchée.

Le parallélisme de AD et BC, Christine Fenoglio le démontre en faisant intervenir l'intersection I de AC et BD : sa puissance par rapport à (C_1) vaut $IA^2 = ID\cdot IB$, et par rapport à (C_2) : $IB^2 = IA\cdot IC$, d'où :

$$\frac{IA}{IB}=\frac{ID}{IA}=\frac{IB}{IC},$$

ce qui permet d'invoquer le théorème de Thalès.

Par ailleurs, G. Prigent se sert (pour calculer explicitement CD^2) d'une relation vraie dans tout trapèze isocèle convexe DACB :

$$AB^2+CD^2=AC^2+BD^2+2AD\cdot BC,$$

que l'on démontre en développant les carrés scalaires $\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)^2$ et $\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}\right)^2$.

Edgard Delplanche utilise la relation de Stewart (pour en déduire : $AE\cdot CD = AC\cdot AD$) : si C, D et E sont sur une droite (Δ), tout point A vérifie, en mesures algébriques,

$$AC^2\cdot\overline{DE}+AD^2\cdot\overline{EC}+AE^2\cdot\overline{CD}+\overline{DE}\cdot\overline{EC}\cdot\overline{CD}=0.$$

En effet, si O est la projection orthogonale de A sur (Δ), en posant : $OA = y$, $\overline{OC}=c$, $\overline{OD}=d$ et $\overline{OE}=e$, la relation de Stewart se ramène à l'identité :

$$(y^2+c^2)(e-d)+(y^2+d^2)(c-e)+(y^2+e^2)(d-c)+(e-d)(c-e)(d-c)=0,$$

qui est clairement vérifiée.

Marie-Laure Chaillout constate d'autres relations :

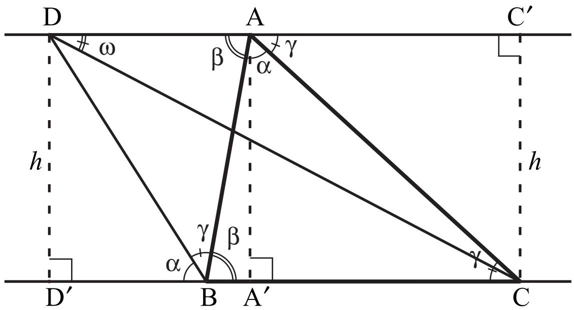
$$AD\cdot BC=AB^2=DC\cdot EF=DC^2-DB^2-CA^2.$$

Pour la première égalité, on utilise les triangles semblables DAB et ABC, pour la seconde, les trapèzes semblables ACBD et FBEA, et pour la troisième, la puissance de D par rapport à (C_2) : $DC \cdot DF = DB^2$, et de C par rapport à (C_1) : $CD \cdot CE = CA^2$. On en déduit notamment :

$$DC^2 = DB^2 + BA^2 + AC^2.$$

Mais le vrai sens de ce problème, c'est Philippe Deleham qui nous le livre : ω est l'angle de Brocard du triangle ABC (ainsi que du triangle DAB), défini par :

$$\cot\omega = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma.$$



On reconnaît d'ailleurs la construction que Brocard en donne en 1881. En posant $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$, S = aire de ABC et R = rayon du cercle (C_2) circonscrit à ABC,

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cdot \cos\alpha = 4S \cdot \cot\alpha,$$

d'où :

$$\cot\omega = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$$

Comme, en développant la formule de Héron, on obtient :

$$(4S)^2 + (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2),$$

$$\frac{1}{\sin^2\omega} = 1 + \cot^2\omega = \frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{4S^2},$$

d'où :

$$\frac{1}{BF^2} = \frac{1}{(2R \cdot \sin\omega)^2} == \frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{(4RS)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2},$$

vu que $4RS = abc$. Le même calcul appliqué au triangle DAB nous donne :

$$\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BD^2} + \frac{1}{DA^2},$$

et la relation cherchée résulte du rapprochement de ces deux égalités.