

Enseigner les mathématiques aujourd'hui. Pourquoi ? Pour qui ? Comment ?

Michèle Artigue(*)

I. Introduction

Lorsque le bureau national de l'APMEP m'a proposé de « plancher » sur ces questions lors du séminaire national en mai 2003, je dois avouer que je me suis sentie écrasée par l'ampleur de la tâche. Ces questions, comme chacun d'entre nous, je me les pose régulièrement, pas nécessairement peut-être sous une forme aussi générale car ce qui les amorce dans notre expérience a souvent un caractère beaucoup plus local. Mais se poser ces questions est une chose, apporter des éléments intéressants pour une discussion sur un sujet aussi rebattu en est une autre. Après y avoir beaucoup réfléchi, il m'a semblé que ce que je pouvais apporter pour nourrir la réflexion menée lors de ce séminaire, c'était d'essayer de faire partager ce que m'a apporté dans ce domaine mon expérience de ces dernières années où, en tant que vice-présidente d'ICMI⁽¹⁾ notamment, j'ai eu l'occasion de confronter mes visions à des réalités d'enseignement diverses, de découvrir que des réponses qui me semblaient naturelles ne l'étaient pas nécessairement pour d'autres, de découvrir aussi que, même si nous avons souvent l'impression que les conditions de l'enseignement des mathématiques se dégradent, nous connaissons, par rapport à de nombreux pays, une situation privilégiée et que, bien sûr, les réponses que nous tendons à apporter aux questions ci-dessus en portent la marque.

L'exposé qui est repris dans ce texte, a été organisé en trois parties. Dans la première, j'ai essayé de montrer qu'à ces questions qui se posent de façon récurrente, en France mais aussi ailleurs, on essaie généralement de répondre en combinant, avec des poids divers, des arguments de quatre types différents. Mais si les types sont stables, les poids respectifs et les arguments avancés au sein de chaque type varient au fil du temps, des contextes et des cultures. Et ce sont ces évolutions et ces variations sur lesquelles je reviendrai dans les deux parties suivantes, en mettant l'accent d'abord sur ce que je perçois comme des convergences dans les dynamiques, puis sur les diversités.

II. Une question récurrente...

Pourquoi enseigner les mathématiques ? Faut-il les enseigner à tout le monde et, si oui, jusqu'à quel niveau ? Quelles doivent être les ambitions prioritaires de cet enseignement et comment les réaliser ? Ces questions et d'autres analogues sont des

(*) Université Paris 7 et IREM.

(1) ICMI : International Commission on Mathematical Instruction.

questions qui reviennent de façon récurrente et qui, aujourd'hui, sont posées par diverses instances dans de nombreux pays et non seulement en France. Quelles réponses y a-t-on apporté et quelles réponses y apporte-t-on ?

Comme nous le rappelle A. Deledicq dans le second numéro de la nouvelle série de la revue PLOT [1], le philosophe Alain y répondait ainsi dans ses *Propos sur l'éducation* :

« Un grand homme d'État a exprimé en deux mots ce que chaque être humain doit savoir le mieux possible : géométrie et latin. [...]. La géométrie est la clef de la nature. Qui n'est point géomètre ne percevra jamais bien ce monde où il vit et dont il dépend. Mais plutôt il rêvera selon la passion du moment, se trompant lui-même sur la puissance antagoniste, mesurant mal, comprenant mal, comptant mal, nuisible et malheureux [...].

Il n'en faut pas plus mais il n'en faut pas moins. Celui qui n'a aucune idée de la nécessité géométrique manquera l'idée même de nécessité extérieure. Toute la physique et toute l'histoire naturelle ensemble ne la lui donneront point. Donc peu de science, mais une bonne science, et toujours la preuve la plus rigoureuse. Le beau de la géométrie est qu'il y a des étages de preuves, et quelque chose de net et de sain dans toutes. Que la sphère et le prisme, donc, nous donnent des leçons de choses. À qui ? À tous. Il est bien plaisant de décider qu'un enfant ignorera la géométrie parce qu'il a peine à la comprendre : c'est un signe au contraire qu'il faut patiemment l'y faire entrer.

Thalès ne savait point toute notre géométrie ; mais ce qu'il savait, il le savait bien. Ainsi, la moindre vue de la nécessité sera une lumière pour toute une vie. Ne comptez donc pas les heures, ne mesurez pas les aptitudes, mais dites seulement : " Il le faut ". »

Tout récemment, dans l'introduction qu'il a écrite à l'ouvrage issu des premiers travaux de la CREM⁽²⁾, J.-P. Kahane écrivait [2] :

« Pourquoi faut-il enseigner les mathématiques aujourd'hui ? En inaugurant les travaux de la commission, j'ai proposé que nous fassions de cette question la base de nos réflexions... Une formule qui vient à l'esprit est qu'il faut enseigner les mathématiques parce qu'elles sont belles et utiles ».

Et il explique ensuite ce qui fait, à ses yeux cette beauté et cette utilité, en dénonçant par ailleurs la confusion trop souvent faite entre utilité et utilitarisme, et ses effets désastreux.

Aux États-Unis, l'entreprise de rénovation des Standards NCTM⁽³⁾ est achevée et les premiers paragraphes de la présentation synthétique des principes qui ont gouverné cette rénovation et des standards auquel elle a abouti, sont les suivants :

« We live in a mathematical world, whenever we decide on a purchase, choose an insurance or health plan, or use a spreadsheet, we rely on mathematical understanding. The world wide web, cd-roms, and other media disseminate vast quantities of information. The level of mathematical thinking and problem solving needed in the workplace has increased dramatically.

(2) CREM : Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques.

(3) NCTM : National Council of Teachers in Mathematics.

In such a world, those who understand and can do mathematics will have opportunities that others do not. Mathematical competence opens doors to productive futures. A lack of mathematical competence closes those doors. Students have different abilities, needs and interests. Yet everyone needs to be able to use mathematics in his or her personal life, in the workplace, and in further study. All students deserve an opportunity to understand the power and beauty of mathematics. Students need to learn a new set of mathematics basics that enable them to compute fluently and to solve problem creatively and resourcefully. »⁽⁴⁾

On pourrait bien sûr multiplier les citations mais je m'arrêterai là, ces quelques extraits étant suffisants pour amorcer la réflexion. En fait, quand on se penche sur les raisons invoquées pour justifier que l'on enseigne des mathématiques, on voit dans les argumentations développées se combiner quatre types d'arguments, que je décrirai ainsi :

- Il faut enseigner les mathématiques parce qu'il s'agit là d'un patrimoine de l'humanité, d'une des plus nobles réussites de l'esprit humain qui doit faire partie de la culture de tout individu.
- Il faut enseigner les mathématiques parce qu'elles sont essentielles à la formation de l'esprit, par la formation au raisonnement et à la rigueur qu'elles assurent bien sûr, mais aussi par la manière originale dont s'y conjuguent la liberté de l'esprit et le contrôle de la pensée.
- Il faut enseigner les mathématiques parce qu'elles sont la source de connaissances « utiles » voire nécessaires pour la vie sociale et professionnelle.
- Il faut enseigner les mathématiques enfin car il faut préserver et développer le capital scientifique de nos sociétés et qu'elles y contribuent de façon essentielle.

Dans les citations ci-dessus, on voit l'accent mis tantôt sur l'une ou sur l'autre catégories, la seconde et la troisième étant cependant privilégiées. Mais l'on sent bien aussi que, même si les catégories sont stables, les équilibres vont changer suivant l'interlocuteur visé, suivant aussi qu'il s'agit de défendre une culture de base en mathématiques pour tous, ou un enseignement avancé destiné à former diverses catégories de professionnels des mathématiques : enseignants, chercheurs,

(4) Nous vivons dans un monde mathématique, chaque fois que nous prenons une décision à propos d'un achat, que nous choisissons une assurance ou un plan de santé, que nous utilisons un tableur, nous nous appuyons sur une compréhension de nature mathématique. Le monde de l'Internet, les cd-roms et les autres media disséminent de grandes quantités d'information. Les capacités à penser mathématiquement et à résoudre mathématiquement des problèmes requises par le monde du travail ont cru très fortement.

Dans un tel monde, ceux qui comprennent et savent faire des mathématiques auront des possibilités que les autres n'auront pas. La compétence mathématique ouvre les portes de futurs productifs. L'absence de compétence mathématique les ferme.

Les élèves ont des capacités, des besoins et des intérêts différents. Cependant, chacun a besoin d'être capable d'utiliser les mathématiques dans sa vie personnelle, au travail, et dans des études ultérieures. Tous les élèves méritent d'avoir la possibilité de comprendre le pouvoir et la beauté des mathématiques. Les élèves ont besoin d'apprendre un nouvel ensemble de bases mathématiques qui les rendent capables de bien calculer et de résoudre des problèmes de façon créative et pleine de ressources.

mathématiciens de l'industrie ou de la finance, ... On sent bien aussi que les arguments doivent se plier aux évolutions scientifiques et culturelles. Le discours d'Alain, par exemple, même s'il avance des arguments forts dans lesquels nous ne pouvons que nous reconnaître, exprime une vision des rapports entre mathématiques et autres disciplines qui paraît aujourd'hui quelque peu impérialiste et l'on se garderait bien par ailleurs, dans une argumentation actuelle, de mettre en parallèle mathématiques et latin. Et l'on voit bien aussi que les arguments avancés dans les standards NCTM seraient de peu de poids pour justifier, conformément au souhait de leurs auteurs, un enseignement des mathématiques ambitieux pour tous, dans une société où l'enseignement serait mis au service d'une organisation sociale fortement hiérarchisée dont il faudrait éviter de perturber les équilibres⁽⁵⁾.

III. Des convergences évidentes

Comme je l'ai souligné au départ, un regard décentré par rapport à notre propre système d'enseignement peut sans doute nous aider à y voir plus clair, en nous confrontant à des différences troublantes et en nous amenant à questionner de ce fait ce qui nous semblait souvent aller de soi. Mais ce qui frappe cependant en premier lieu dans cette décentration, c'est, en dépit de la diversité des cultures d'enseignement, la convergence des conceptions développées et des discours qui les expriment. Aujourd'hui, en effet, me semble-t-il, la réflexion sur ces questions est marquée par quelques grandes tendances et, dans ce texte, j'évoquerai plus particulièrement quatre d'entre elles :

- Un enseignement des mathématiques qui se veut un enseignement pour tous,
- Un enseignement des mathématiques dont les objectifs sont de plus en plus pensés et formulés en termes de compétences relativement larges,
- Un enseignement des mathématiques qui se veut au service d'une citoyenneté démocratique,
- Un enseignement des mathématiques qui se veut ouvert sur l'extérieur.

III.1. Un enseignement des mathématiques pour tous

Pendant longtemps, les mathématiques ont été perçues comme une discipline réservée à une élite. Certes chacun subissait leur enseignement et se devait d'essayer d'en apprendre les rudiments. Mais il était bien admis qu'il y avait ceux qui y comprenaient quelque chose et la grande majorité de ceux qui, assez vite, n'y comprenaient plus rien ; ceux pour lesquels notamment le monde de l'algèbre comme celui de la démonstration géométrique restaient à tout jamais des terres étrangères. Nos sociétés s'accommodaient de cette inculture mathématique de la majorité de leurs membres, y compris d'une bonne partie de leurs élites.

Ce qui est attendu aujourd'hui de l'enseignement des mathématiques ce n'est plus simplement cela : la culture mathématique doit être accessible à tous et ce n'est sans doute pas un hasard si le premier principe à la base des NCTM Standards⁽⁶⁾ est un

(5) Le lecteur trouvera dans les travaux d'H. Gispert sur l'évolution de l'enseignement des mathématiques en France, des éléments tout à fait éclairants sur ce point [3].

(6) Ces principes et un résumé des standards sont consultables sur le site : <http://www.nctm.org/standards/principles.htm>.

principe d'équité qui est formulé de la façon suivante :

« All students, regardless of their personal characteristics, backgrounds, or physical challenges, must have opportunities to study – and support to learn – mathematics. This does not mean that every student should be treated the same. But all students need access each year they are in school to a coherent, challenging mathematics curriculum that is taught by competent and well-supported mathematics teachers.

Too many students – especially students who are poor, not native speakers of English, disabled, female, or members of minority groups – are victims of low expectations in mathematics. For example, tracking has consistently consigned disadvantaged groups of students to mathematics classes that concentrate on remediation or do not offer significant mathematical substance. The Equity Principle demands that high expectations for mathematics learning be communicated in words and deeds to all students. [...]

Likewise, students with special interests or exceptional talent in mathematics may need enrichment programs or additional resources to keep them challenged and engaged. The talent and interest of these students must be nurtured so that they have the opportunity and guidance to excel in mathematics.

Well-documented examples demonstrate that all children can learn mathematics when they have access to high-quality mathematics instruction. Such instruction needs to become the norm rather than the exception. »⁽⁷⁾

Mais dans le même temps, la réalité des classes, aux USA comme en France et ailleurs, montre bien les difficultés que pose la mise en œuvre d'un tel principe, vu son coût tant humain que financier, vu le changement de culture qu'il impose. Des tensions apparaissent, le développement d'un enseignement de mathématiques accessible à tous se faisant, pour certains, dans les conditions actuelles, au détriment de la formation des élites mathématiques qu'ils souhaiteraient privilégier ou tout au

(7) Tous les élèves, quels que soient leurs caractéristiques personnelles, leurs antécédents ou leurs défis physiques, doivent avoir la possibilité d'étudier les mathématiques et être aidés à les apprendre. Ceci ne signifie pas que tous les élèves doivent être traités de la même façon. Mais tous doivent avoir accès, pendant chacune de leurs années d'école, à un enseignement de mathématiques cohérent et stimulant, assuré par des professeurs compétents et bien assistés. Trop d'élèves, parce qu'ils sont pauvres, handicapés, de sexe féminin, ou appartenant à des minorités, parce que l'anglais n'est pas leur langue maternelle, sont victimes d'une baisse des exigences mathématiques. La création de filières a par exemple régulièrement enfermé les élèves de groupes désavantagés dans des classes où l'enseignement mathématique est concentré sur de la remédiation et n'offre rien de substantiel. Le principe d'équité exige que des attentes élevées en termes d'apprentissage mathématique soient communiquées par les mots et par l'action à tous les élèves.

De la même façon, les élèves ayant un intérêt ou un talent particulier pour les mathématiques peuvent nécessiter des programmes d'enrichissement ou des ressources supplémentaires pour rester stimulés et engagés. Le talent et l'intérêt de ces élèves doivent être nourris pour qu'ils aient la possibilité d'exceller en mathématiques et soient guidés vers l'excellence.

Des exemples bien documentés montrent que tous les enfants peuvent apprendre des mathématiques quand ils ont accès à une instruction mathématique de grande qualité. Une telle instruction doit devenir la norme plutôt qu'être l'exception.

moins protéger, voire au détriment de la formation mathématique tout court. Notre système éducatif, de par son système de classes préparatoires, de par aussi le bon niveau de formation de ses enseignants, semble aujourd'hui un peu plus à l'abri de ces tensions que d'autres et ce n'est sans doute pas un hasard si, alors que la « math-war » sévit aux USA, en France, le débat sur ces questions délicates, s'il est engagé, reste un débat mesuré.

III.2. Un enseignement pensé en terme de développement de compétences

Nous sommes habitués en France à un enseignement organisé autour de contenus. Certes les programmes précisent dans leurs attendus, un certain nombre de compétences visées par l'enseignement, mais ce sont les contenus qui les structurent. En fait, quand on examine aujourd'hui les réformes curriculaires, on voit qu'une importance croissante est accordée à l'identification des compétences que l'éducation mathématique doit développer et que c'est souvent autour de ces compétences que va s'organiser la structure curriculaire.

C'est le cas par exemple dans les standards NCTM qui posent successivement :

- des principes généraux : équité, curriculum cohérent et structuré, enseignement motivant prenant en compte les connaissances des élèves, basé sur l'activité de l'élève et la compréhension, évaluation cohérente avec ce qui précède et informative pour les enseignants et les élèves, appui sur la technologie ;
- des compétences générales par grands domaines à atteindre à la fin de la scolarité : nombres et opérations, algèbre, géométrie, mesure, analyse de données et probabilités, résolution de problèmes, raisonnement et preuve, communication, connections, représentations ;
- des priorités par groupes de niveaux pour les 12 niveaux de la scolarité élémentaire et secondaire : pour les deux premiers niveaux ($K < 3$), pour les trois suivants (K3-K5), pour les niveaux K6-K8 ensuite, et enfin pour les niveaux K9-K12, ces priorités étant assorties d'exemples.

C'est aussi le cas avec le tout récent projet Danois KOM⁽⁸⁾[4]. Une priorité y est donnée à la clarification des compétences visées, dans des dimensions à la fois « analytiques » et « productives ». Ces compétences sont déclinées de la façon suivante :

- Penser mathématiquement.
- Poser et résoudre des problèmes mathématiques.
- Analyser et construire des modèles mathématiques.
- Reasonner mathématiquement.
- Représenter des entités mathématiques.
- Manipuler des symboles et formalisations mathématiques.
- Communiquer en, avec et à propos de mathématiques.
- Savoir utiliser aides et instruments, dont les TIC.

Et, à titre d'exemple, la définition donnée de la première compétence citée est la suivante :

(8) KOM : Competencies and the Learning of Mathematics.

« *Thinking mathematically (mastering mathematical modes of thought) such as : posing questions that are characteristics of mathematics, and knowing the kind of answers (not necessarily the answers themselves or how to obtain them) that mathematics may offer ; understanding and handling the scope and limitation of a given concept ; extending the scope of a concept by abstracting some of its properties, generalising results to larger classes of objects ; distinguishing between different kinds of mathematical statements (including conditioned assertions (" if-then "), quantifiers laden statements, assumptions, definitions, theorems, conjectures, cases).* »⁽⁹⁾

Ces compétences sont ensuite déclinées suivant les domaines et les niveaux d'enseignement, et évaluées selon trois dimensions qui sont respectivement :

- le degré de couverture,
- le rayon d'action,
- le niveau technique.

Le troisième exemple que je citerai est celui du projet qui a été élaboré pour l'école de base en Italie par la Commission italienne pour l'enseignement des mathématiques⁽¹⁰⁾. Ce projet présente lui aussi une structure où les compétences jouent un rôle essentiel, comme le montre le tableau 1 extrait de [5].

Les compétences transversales listées sont celles au développement desquelles les mathématiques peuvent apporter une contribution significative et ce sont les suivantes :

- Exprimer d'une manière adéquate des informations par des nombres, pourcentages, tableaux et graphiques.
- Explorer et conjecturer, reconnaître des régularités.
- Programmer et construire des modèles de situations réelles.
- Opérer des choix dans des situations d'incertitudes.

Les noyaux sont divisés en noyaux thématiques et noyaux de processus. Pour les premiers, les thèmes retenus sont les suivants : nombres, espace et figures, relations, données et prévisions ; pour les seconds, les processus retenus sont les suivants : mesurer, argumenter et conjecturer, poser et résoudre des problèmes. À ces noyaux sont d'autre part associés des contextes d'apprentissage intra et extra mathématiques.

(9) Penser mathématiquement (maîtriser des modes de pensée mathématiques) tels que : poser des questions qui sont caractéristiques des mathématiques, et connaître les types de réponses (mais non nécessairement les réponses elles-mêmes ou les moyens de les obtenir) que les mathématiques peuvent offrir ; comprendre et manier la portée et les limites d'un concept donné ; étendre la portée d'un concept par abstraction de certaines de ses propriétés, généraliser des résultats à de plus larges classes d'objets ; distinguer entre divers types d'énoncés mathématiques (incluant des énoncés conditionnels (« si-alors »), des énoncés quantifiés, des hypothèses, des définitions, des théorèmes, des conjectures, des cas particuliers).

(10) Ce projet est consultable sur le site : www.dm.unito.it/personale/docente/professoriordinari/arzarello/scuola.

Enfin le programme précise pour chaque noyau, les compétences à atteindre, en distinguant les compétences à atteindre à la fin de chaque cycle, c'est-à-dire à 8, 11 et 13 ans, et les contenus associés.

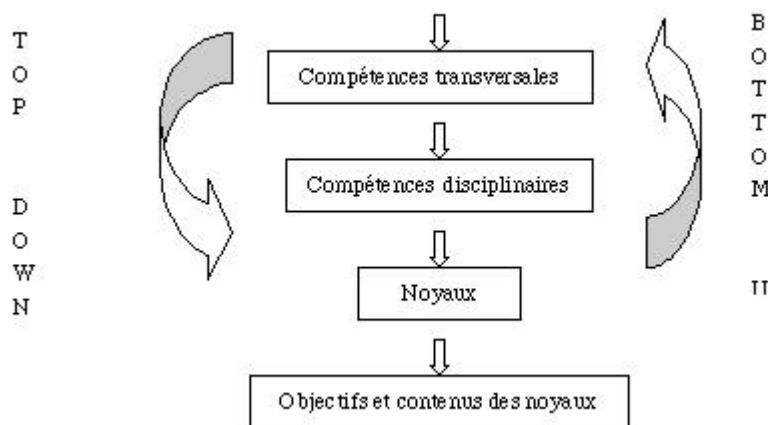


Tableau 1 : Organisation du projet curriculaire italien

On peut s'interroger sur les raisons de telles évolutions convergentes. J'y vois personnellement le souci de définir plus précisément ce qu'est cette culture mathématique dont le développement est visé par l'enseignement, de montrer en quoi elle peut contribuer à la formation des élèves, en dépassant une vision strictement centrée sur l'apprentissage de la rigueur, de souligner enfin que l'apprentissage de contenus et savoir faire précis, s'il reste bien sûr essentiel, est à mettre au service de valeurs mathématiques plus transversales qui transcendent les contenus. Les mathématiques y apparaissent certainement de façon moins technique mais la richesse et la diversité des formes de pensée qu'elles permettent de développer y sont plus visibles, et l'on perçoit mieux aussi les rapports possibles avec les autres disciplines scolaires et la société. Plus ou moins directement pèse aussi sur ces choix la vision d'une formation de l'individu qui doit lui permettre, tout au long de sa vie, et en particulier de sa vie professionnelle, de s'adapter aux évolutions scientifiques, technologiques et sociales, de se remettre en question, et le fait que, dans une telle vision, la formation de rapports adéquats au savoir est autant mise en avant que l'apprentissage de connaissances précises. Nous voudrions cependant souligner que nous en sommes là, encore une fois, au niveau du discours et que, même si, de plus en plus, les projets de rénovation curriculaire s'accompagnent d'expérimentations et de la mise à la disposition des enseignants de multiples ressources (informations mathématiques, commentaires d'ordre didactique, propositions de progressions possibles et d'activités, vidéos de réalisations dans les classes, ...), notamment via Internet, ceci ne suffit pas à déterminer quelle peut être et va être la vie de ces projets lorsqu'ils se mettent en place à grande échelle, dans un contexte scolaire donné. Quelle sera l'influence sur les pratiques réelles ? Les changements proposés peuvent

affecter peu la réalité des classes si le système parvient à s'adapter selon sa tendance naturelle qui est celle de l'assimilation. Mais si une telle assimilation se révèle impossible, la distance étant trop grande, et si les changements introduits ne sont pas plus ou moins rapidement remis en question, vers quels équilibres le système tendra-t-il à se stabiliser? Qu'y gagnera-t-on et qu'y perdra-t-on en termes d'apprentissages des élèves par rapport à la situation antérieure? Il y a là des questions très difficiles qui tiennent à l'écologie des savoirs scolaires, un domaine de recherche où nos connaissances, en dépit de travaux comme ceux menés dans le cadre de la théorie de la transposition didactique [6] et de ses prolongements écologiques [7], sont aujourd'hui encore très limitées et ne permettent pas d'anticiper les dynamiques. Elles peuvent aider au mieux à les réguler si le système se donne les moyens nécessaires à cette régulation, en termes d'observation des pratiques réelles et de leur évolution, en termes de formation des enseignants, en termes d'ajustements curriculaires.

III.3. Des mathématiques au service de la citoyenneté

Cette tendance est, elle aussi, une tendance forte et n'est en rien indépendante de ce qui précède. On attend des mathématiques qu'elles contribuent à la formation d'un citoyen vivant dans un pays démocratique et un certain environnement, capable de traiter de façon critique, les nombreuses informations auxquelles il a accès, capable de prendre part activement aux débats de société. C'est en particulier le thème de l'ouvrage « Mathematics and Democracy » [8], réalisé sous les auspices du NCED aux USA et paru en 2002, et c'est ce qui sous-tend fortement la notion de « quantitative literacy » qui, malheureusement, n'a pas d'équivalent en français. Cette notion est associée à « la capacité à gérer les aspects quantitatifs de la vie, une capacité inséparable des contextes et qui se développe plus horizontalement que verticalement ». Dans l'ouvrage concerné, ce que peut recouvrir cette « quantitative literacy » est décliné suivant un certain nombre de domaines : vie quotidienne et finances personnelles, citoyenneté, culture, santé, gestion et travail. Dans l'identification des besoins correspondants, on sent d'ailleurs bien la marque d'une société libérale dans laquelle ce que prend en charge la société en matière de santé et d'éducation par exemple, est limité, ceci obligeant à des planifications budgétaires dans le long terme qui ne sont pas forcément nécessaires dans d'autres systèmes sociaux.

Les besoins mathématiques qui sont ainsi délimités sont loin de se réduire au traditionnel savoir compter, en particulier, par l'importance qu'y prend tout ce qui relève du raisonnement dans l'incertain. Être citoyen responsable dans une société démocratique, c'est ainsi notamment comprendre quelles informations on peut tirer et quelles informations on ne saurait tirer des statistiques diverses, sous forme de sondages ou autres, dont nous sommes abreuvés. C'est pouvoir raisonner ou suivre de façon critique des raisonnements portant sur des situations de risque. Tout ceci nécessite un bagage mathématique qui, dans la plupart des pays, ne faisait pas jusqu'ici partie de la scolarité obligatoire et se posent, vu la complexité des mathématiques engagées, des questions difficiles de transposition didactique et de

formation des enseignants. Un des effets de cette tendance est sans aucun doute la place croissante prise par les statistiques et probabilités dans les programmes de différents pays, et le démarrage de plus en plus précoce de ces enseignements. La France, on l'a vu tout particulièrement ces dernières années avec la réforme des lycées, n'échappe pas à cette tendance générale, en ce qui concerne les statistiques et a développé dans ce domaine, au niveau de la seconde, un programme qui est sans doute un des plus ambitieux par l'initiation qu'il met en place aux statistiques inférentielles. En revanche l'entrée dans la pensée probabiliste y est toujours aussi tardive, ce qui contraste avec un certain nombre de pays où la rencontre mathématique avec le hasard s'effectue dès l'école élémentaire.

Comment cette tendance va-t-elle affecter l'enseignement des mathématiques, dans le moyen et long terme ? Il est sans doute trop tôt pour le dire mais nous voudrions souligner, comme le font d'ailleurs un certain nombre d'auteurs dans l'ouvrage déjà cité, que si en tant que discipline scolaire, les mathématiques ont un rôle privilégié à jouer dans le développement de cette « quantitative literacy » chez les élèves, il serait sans doute très dangereux de vouloir réduire l'enseignement des mathématiques, à quelque niveau que ce soit, à cette composante. Les mathématiques comme science sont bien plus que cela et la formation mathématique des élèves doit aussi être bien plus que cela. Il y aurait là une faute analogue à celle dénoncée par J.-P. Kahane quand, dans le texte cité plus haut, il dénonçait l'amalgame parfois fait entre utilité et utilitarisme. En revanche, l'enseignement des mathématiques y trouvera sans aucun doute des moyens de renforcer ses liens avec les autres disciplines car, pas plus que les mathématiques ne sauraient se réduire au développement d'une « quantitative literacy » chez les élèves, elles ne sauraient contribuer à ce développement de façon isolée.

Cet accent mis sur le développement de mathématiques citoyennes va dans le sens d'une ouverture plus grande des mathématiques, et c'est le dernier point que nous voudrions brièvement évoquer dans la partie suivante.

III.4. Des mathématiques ouvertes sur le monde

Cette tendance à l'ouverture se manifeste à la fois dans les rapports entre mathématiques et autres disciplines scolaires et dans les rapports entre l'institution scolaire et son extérieur. En France, elle s'est notamment manifestée ces dernières années par la mise en place d'un certain nombre de dispositifs nouveaux, travaux croisés puis itinéraires de découverte au collège, travaux personnels encadrés au lycée. Les ambitions sont ici élevées car il faut reconnaître que, dans l'enseignement des mathématiques, l'interdisciplinarité est le plus souvent une interdisciplinarité de façade se réduisant à un habillage plus ou moins discret des mathématiques que l'on veut enseigner, sans se préoccuper plus avant des questionnements propres aux autres disciplines, sans construire une véritable articulation des cultures disciplinaires autour d'un projet commun. Or ce qui est visé ici, c'est, au contraire, un travail dans le long terme, articulant réellement au moins deux disciplines et, pour ce qui est des TPE, sur des sujets choisis par les élèves eux-mêmes. Réaliser de telles ambitions, on s'en doute, ne peut aller de soi. Une étude ICMI est actuellement en cours sur le

thème : « Modélisation et application des mathématiques ». Le document de discussion qui lui est associé⁽¹¹⁾ souligne à la fois l'importance de la modélisation dans les pratiques mathématiques actuelles mais aussi les difficultés que pose la transposition de ces pratiques au niveau de l'enseignement. À partir de l'étude des réussites et échecs dans ce domaine au niveau international, elle se propose en particulier de mieux cerner ces problèmes de transposition et de capitaliser les connaissances que nous pouvons avoir aujourd'hui pour les gérer, à tous les niveaux d'enseignement. On peut remarquer que, contrairement à ce qui se passe pour la plupart des études ICMI, les français sont ici peu présents. Ce n'est pas étonnant car il faut bien avouer que cette ouverture des mathématiques n'est pas une des forces traditionnelles de notre enseignement. La situation est par exemple tout autre dans les pays nordiques où l'enseignement par projets mono ou pluridisciplinaires est culturellement bien installé. La moitié de l'enseignement jusqu'au lycée est, en Norvège par exemple, organisée autour de projets, et de projets très souvent pluridisciplinaires. Les maîtres y sont d'ailleurs polyvalents jusqu'au lycée. Et, au niveau de l'école élémentaire, les élèves passent un jour par semaine dans des activités hors de l'école pour mieux relier apprentissages scolaires et vie hors de l'école. Au Danemark, une université comme celle de Roskilde a, depuis sa création, un enseignement organisé à tous les niveaux, pour moitié autour de projets [9]. Notre culture d'enseignement est très différente et on comprend bien les difficultés que peut poser, dans ce contexte, l'introduction de dispositifs qui veulent forcer à un travail pluridisciplinaire auquel les enseignants ne sont en rien préparés. La plupart des enseignants qui s'y engagent, même avec enthousiasme, peinent à le rendre rentable au niveau de la formation mathématique des élèves [10].

Nous avons jusqu'à présent insisté sur les convergences, au moins au niveau de tendances générales, chaque système d'enseignement ayant cependant plus ou moins de facilité à s'inscrire dans cette évolution générale, de par ses caractéristiques propres. Dans la quatrième partie de ce texte, je souhaiterais en revanche insister sur certaines différences, et le faire cette fois, en me centrant plus particulièrement sur un contenu précis : l'algèbre.

IV. Des diversités indéniables reflétant la diversité des cultures d'enseignement

Comme le soulignait à la cérémonie d'ouverture du congrès ICME9 en juillet 2000, au Japon, le président d'ICMI, le professeur Hyman Bass, si les mathématiques peuvent prétendre à l'universalité, il n'en est pas de même pour l'enseignement des mathématiques qui est fortement assujéti aux cultures dans lesquelles il s'inscrit⁽¹²⁾. Le monde de l'éducation y est de plus en plus sensible et ce n'est pas un hasard si une des études ICMI en cours a pour thème l'étude comparative des cultures d'enseignement des mathématiques dans des pays asiatiques de tradition

(11) Ce document a été publié par la revue Recherches en Didactique des Mathématiques dans son numéro 23/1 de 2003.

(12) Le discours fait par H. Bass à cette cérémonie d'ouverture est accessible sur le site de l'ICMI : www.mathunion.org/ICMI/, dans le Bulletin ICMI n° 49.

confucéenne d'une part, et un certain nombre de pays de culture dite « occidentale » d'autre part⁽¹³⁾.

Les différences de culture d'enseignement se manifestent de façons diverses mais, dans cette partie, je souhaiterais les aborder à travers des questions de contenu, en prenant l'exemple de l'algèbre. L'algèbre est partout présente comme objet d'enseignement dans la scolarité obligatoire. C'est un domaine essentiel tant en ce qui concerne les mathématiques que les rapports entre les mathématiques et les autres disciplines, mais l'on sait aussi que c'est un domaine où s'est traditionnellement consommée pour beaucoup de personnes la rupture avec les mathématiques : l'entrée dans le monde de l'algèbre a été pour elles le moment où les mathématiques ont cessé de faire sens. Cette situation est générale mais, de plus en plus considérée comme inacceptable – on le comprendra aisément après avoir lu ce qui précède – et, dans la plupart des pays, on essaie d'y remédier en développant pour améliorer cet enseignement des stratégies diverses. La Qualifications and Curriculum Authority (QCA) en Angleterre a lancé au début des années 2000 une étude comparative sur l'enseignement secondaire de l'algèbre dont les résultats ont été publiés en 2002 [11]. Cette étude, qui a porté sur 12 pays⁽¹⁴⁾, met en évidence la diversité des organisations curriculaires existantes et leurs effets sur l'enseignement de l'algèbre. Par exemple, les pays de l'échantillon où jusqu'au niveau du lycée on a un système peu ou non différencié (Angleterre, France, Italie, Canada, Australie, Japon dans l'échantillon considéré) semblent, à l'exception du Japon, avoir moins d'exigences au niveau symbolique pendant cette phase non différenciée que ceux où la différenciation s'opère beaucoup plus tôt. Les exigences croissent en revanche ensuite plus brutalement. Le Japon a une position tout à fait à part de ce point de vue car, dès l'école élémentaire, l'accent est mis sur la symbolisation de relations mathématiques et qu'au niveau 15-16 ans, les attentes semblent beaucoup plus élevées que dans les autres pays de l'échantillon⁽¹⁵⁾. Mais les différences constatées n'apparaissent pas toutes liées à des différences d'organisation curriculaire globale. On note en particulier une réelle diversité dans les choix effectués pour introduire les élèves au monde de l'algèbre. En France, comme en Hongrie, Israël et Italie, l'entrée privilégiée est celle par les équations et l'on peut y voir un choix privilégiant l'ordre

(13) Le document de discussion associé à cette étude est lui aussi consultable sur le site ICMI, dans le même bulletin n° 49.

(14) Ce sont, outre la Grande Bretagne, les pays ou états suivants : Hong Kong, Singapour, Japon, Hongrie, France, Italie, Allemagne, Pays Bas, Israël, le Québec et la Colombie Britannique au Canada, l'état de Victoria en Australie.

(15) Selon les collègues japonais qui commentaient cette étude dans une table ronde en décembre 2002, lors de la conférence associée à l'étude ICMI sur l'algèbre à Melbourne, l'apprentissage de l'écrit, bien plus exigeant du point de vue cognitif au Japon que dans les pays occidentaux, facilite sans doute un accès précoce au symbolisme. D'autre part, ces mêmes collègues soulignaient que le haut niveau de technicité symbolique attesté par les manuels japonais ne devait pas faire illusion sur le rapport à l'algèbre des élèves japonais qui, comme différentes études le montraient, ne semblaient pas mieux outillés que d'autres pour répondre à des questions où ce n'était pas principalement la technique qui était en jeu mais le sens d'un travail algébrique, même relativement élémentaire.

du développement historique de ce domaine. D'autres pays, en particulier les pays anglo-saxons ou ceux qui en ont subi leur influence directe, privilégient une entrée dans l'algèbre vue comme moyen d'exprimer des régularités (patterns) et de généraliser. Ce type d'entrée s'accompagne de plus en plus souvent, comme l'a bien montré la récente étude ICMI sur l'algèbre d'un enseignement de l'algèbre plus précoce, pouvant commencer dès l'école élémentaire. Enfin une troisième tradition, bien représentée par les Pays Bas, met l'accent sur la modélisation de situations en privilégiant variables et fonctions, et l'articulation des différents modes de description et représentation des objets fonctionnels : langage naturel, tables de valeurs, représentations graphiques et symboliques par des expressions algébriques.

Une question émerge immédiatement de cette diversité : y a-t-il des entrées plus faciles que d'autres et, si oui, pourrait-on éviter en les privilégiant, l'échec d'un certain nombre d'élèves ? Pour essayer de répondre à cette question, il est intéressant de revenir sur un certain nombre de difficultés posées par l'entrée dans la pensée algébrique identifiées par les recherches didactiques menées dans ce domaine depuis plus de vingt ans [12]. Une des difficultés majeures identifiée est celle de la transition entre pensée arithmétique et pensée algébrique. Le travail algébrique s'appuie en effet sur les compétences acquises dans le domaine numérique mais, par certaines de ces caractéristiques, il rompt avec la culture arithmétique qui est celle des élèves quand ils commencent à s'y engager. Ces ruptures sont multifformes. Elles concernent par exemple le sens de l'égalité qui, essentiellement d'abord symbole de production doit devenir un symbole d'équivalence, le sens des lettres qui n'ont plus simplement le statut d'étiquettes ou d'unités de mesure mais doivent aussi représenter des nombres et être gérées comme telles dans les calculs. Elles concernent les modes de contrôle de l'activité mathématique où un contrôle interne de nature formelle doit prendre le pas, au moins à certains moments, sur le contrôle externe par le contexte, ceci étant la clef de la puissance de l'algèbre, comme le soulignait déjà Leibniz au XVII^e siècle. Quand l'entrée dans l'algèbre se fait via la mise en équations, ces ruptures se combinent avec une autre rupture liée aux modes de résolution des problèmes eux-mêmes. À la méthode arithmétique qui progresse du connu vers l'inconnu, doit se substituer la méthode analytique où connu et inconnu sont d'emblée traités conjointement pour arriver à des relations dont la manipulation formelle permettra d'exprimer l'inconnu en fonction du connu. Il y a là une rupture majeure difficile à surmonter pour un certain nombre d'élèves, d'autant plus que les premiers problèmes qui leur sont souvent proposés pour introduire l'algèbre sont des problèmes qu'ils pourraient résoudre arithmétiquement. Mais même quand ce n'est pas le cas, comprendre ce que l'on gagne à utiliser l'algèbre ne s'impose pas d'emblée et il faut qu'une certaine maîtrise algébrique se soit déjà développée pour que la puissance et l'économie de pensée de la méthode algébrique s'imposent. De ce point de vue, une entrée par les formules et la généralisation semble s'avérer moins coûteuse car le travail de mathématisation algébrique s'y effectue en suivant le fil de la pensée arithmétique et ce n'est sans doute pas un hasard si les pays où l'algèbre est enseignée précocement sont souvent ceux qui privilégient cette approche.

On peut bien sûr discuter de l'intérêt d'une introduction précoce de l'algèbre, à un moment où les apprentissages numériques sont encore très peu stabilisés, mais on peut aussi penser qu'au début du collège, il y a un espace adapté à un travail de ce type permettant de commencer à faire vivre une valeur essentielle de l'algèbre qui est de permettre la généralisation, d'entrer progressivement dans le symbolisme mathématique algébrique, tout en préparant le champ à l'étude des questions de dépendance fonctionnelle qui sera ultérieurement un des champs majeurs d'intervention de l'algèbre scolaire. On peut d'ailleurs s'interroger sur la place minimale qu'occupe dans la scolarité de nos élèves le travail sur les formules, qu'il s'agisse de les produire ou de les manipuler, si l'on excepte l'enseignement professionnel, alors même que, pour beaucoup d'adultes, c'est à travers ce type d'objet que va continuer à vivre un minimum d'algèbre.

V. Conclusion

J'ai dans ce texte essayé de contribuer à la réflexion souhaitée par l'APMEP sur un certain nombre de questions fondamentales pour l'enseignement, au premier rang desquelles les suivantes : Pourquoi enseigner les mathématiques et à qui les enseigner ? Qu'enseigner et comment l'enseigner ? Je l'ai fait, en essayant de montrer comment le regard sur les réponses apportées sur ces mêmes questions par d'autres pays, proches ou lointains, tant culturellement que géographiquement, peut nous éclairer, en nous confortant dans certains points de vue et en nous amenant à en questionner d'autres. J'ai pour cela essayé de pointer un certain nombre de convergences et divergences. Les convergences se situent souvent au niveau des grandes tendances mais, dès que l'on entre plus dans le détail du fonctionnement des systèmes éducatifs, on perçoit à quel point ce dernier est déterminé par leurs caractéristiques propres, éminemment variables d'un pays à l'autre ; on perçoit aussi le poids de la culture au-delà même de la seule culture d'enseignement. Même si nous avons des ambitions analogues, ceci impose à chacun de développer des stratégies propres, en sachant tirer parti des forces de son système éducatif et en essayant de remédier à ses faiblesses. Mais, quelles que soient les ambitions déployées et les stratégies développées pour les réaliser, et je terminerai par cela, ce qui s'impose de plus en plus à tous ceux qui réfléchissent sur ces questions, c'est que le maillon clef de l'évolution, c'est l'enseignant qui ne doit pas être considéré comme le simple exécutant de décisions prises ailleurs et c'est la formation des enseignants.

Références

- [1] Deledicq A. (2003). Que sont et à quoi servent les mathématiques (2ème partie), *Plot* n° 105 – Nouvelle série, n° 2, p. 2-8.
- [2] Kahane J.-P. (coor.) (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques*. Paris : Odile Jacob.
- [3] Gispert H. (2002). Pourquoi, pour qui enseigner les mathématiques ? Une mise en perspective historique de l'évolution des programmes de mathématiques dans la société française au XX^e siècle, *Bulletin de l'APMEP*, n° 438, 36-46.

[4] Niss M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics : the Danish KOM project. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (eds), *Proceedings of the third international mediterranean conference on mathematics education*. 115-124. Athènes : Hellas.

[5] Arzarello F. (2002). Qu'enseigne-t-on aujourd'hui en mathématiques dans les écoles élémentaires d'Europe et que pourrait-on y enseigner ? La situation en Italie. Actes du colloque « *Qu'enseigne-t-on aujourd'hui en mathématiques dans les écoles élémentaires d'Europe et que pourrait-on y enseigner ?* », Paris, janvier 2002 (à paraître).

[6] Chevallard Y. (1990). *La transposition didactique* (2^e édition). Grenoble : La Pensée Sauvage.

[7] Artaud M. (1997). Introduction à l'approche écologique en didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In M. Bailleul, C. Comiti, J.L. Dorier, J.B. Lagrange, B. Parzys, M.H. Salin (éds), *Actes de la 9^{ème} École d'été de didactique des mathématiques*, 101-139. ARDM.

[8] Steen L. (ed.) (2002). *Mathematics and democracy. The case for quantitative literacy*. The National Council on Education and the Disciplines.

[9] Niss M. (2001). University mathematics based on problem-oriented students projects : 25 years of experience with the Rolskilde model. In Holton D., Artigue M., Kirchgräber U., Hillel J., Niss M. & Schoenfeld A. (2001). *The teaching and learning of mathematics at university level. A ICMI Study*, 153-166. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

[10] Artigue M. & Bühler M. (2002). Quelle place pour les mathématiques dans les TPE. In M. Bridenne (éd), *Nouveaux dispositifs d'enseignement en mathématiques dans les collèges et les lycées*. Actes des Journées de Dijon, 123-140. IREM de Dijon.

[11] Sutherland R. (2002). *A comparative study of algebra curricula*. Qualifications and Curriculum Authority. Londres.

[12] Chick H., Stacey K., Vincent J., Vincent J. (Eds) (2001). The future of the Teaching and Learning of Algebra, *Proceedings of 12th ICMI Study Conference*, The University of Melbourne, Australia.