L'enseignement de la géométrie en France et en Italie : quels choix et quels effets sur la formation des élèves ? (*)

Valentina Celi(**)

Le contenu de cet atelier s'inspire des résultats issus d'une recherche(1) dont le sujet porte sur l'enseignement de la géométrie en France et en Italie dans le secondaire et sur les effets que cet enseignement semble avoir sur la formation des élèves.

Après avoir dégagé les éléments principaux qui caractérisent l'enseignement de la géométrie en Italie(2), j'ai proposé aux participants de faire une analyse *a priori* de l'un des problèmes utilisés dans ma recherche. Les résultats issus de l'analyse de productions d'élèves français et italiens, auxquels j'ai proposé ce problème, m'ont conduite à m'interroger sur le rôle de certains objets d'enseignement et sur la cohérence qu'ils acquièrent dans les programmes des deux institutions concernées. C'est ainsi que, après avoir présenté et commenté ces résultats, j'ai conclu en proposant aux participants quatre questions qui, pour des raisons de temps, sont restées ouvertes.
Je suivrai ici le même plan. Néanmoins, j'intégrerai les résultats du travail des participants à l'atelier et fournirai aussi quelques éléments de réponse aux questions laissées ouvertes.

I. Le système scolaire italien

Les systèmes scolaires français et italien sont organisés de manière différente (cf. Tableau 1). C'est ainsi que, avant d'entrer au cœur du sujet, il m'a paru nécessaire de fournir les détails principaux qui caractérisent le système italien, certains aspects ayant eu une influence importante sur la méthodologie mise en place pour développer la comparaison dont il est question dans ma recherche.

Comme en France, en Italie il y a aussi deux établissements scolaires : l'École Secondaire Inférieure (ESI, 11-14 ans), une école pour tous avec orientation finale, et l'École Secondaire Supérieure (ESS, 14-19 ans), une école de formation séparée en filières. Le passage de l'une à l'autre est marqué par la passation *obligatoire* d'un examen.

(*) Compte rendu d'un atelier du Séminaire national de l'APMEP « Enseigner les maths c'est quoi ? Pourquoi ? Pour qui ? Comment ? » - Paris 17-18 mai 2003.
(**) IUFM d'Auvergne – Equipe Didirem Paris 7.
(1) CELI, V. (2002), *Comparaison de l'enseignement de la géométrie en France et en Italie pour des élèves de onze à seize ans. Effets sur leur formation*, IREM – Université Denis Diderot, Paris 7.
(2) Comme dans l'atelier, je ne fais pas ici de comparaisons systématiques et explicites entre les deux institutions concernées, en le laissant souvent à la charge du lecteur.

Les programmes pour l'ESI remontent à la réforme de 1979. Pour l'ESS, les programmes *officiels* remontent encore à la réforme des années vingt ; néanmoins, depuis les années quatre-vingt, des projets de réforme ont été mis en œuvre et de nouveaux programmes ont fait l'objet d'expérimentations dans l'attente d'une réforme non encore officialisée à ce jour.
Pour les deux établissements, les programmes sont globaux et très peu détaillés : les contenus géométriques sont les mêmes, c'est le niveau d'approfondissement qui change.
En Italie, on trouve des manuels scolaires découpés par années mais aussi par thèmes, ces derniers étant les plus fréquemment adoptés par les enseignants.
À l'ESI, un même professeur enseigne les mathématiques et les sciences expérimentales pendant les trois ans ; à l'ESS, un même professeur enseigne les mathématiques pendant les deux premières années ; ensuite, un autre professeur enseigne les mathématiques et les sciences physiques.

	Scolarité obligatoire	Sixième	11-12 ans	1^{re} année d'ESI	Scolarité obligatoire	
		Cinquième	12-13 ans	2^{e} année d'ESI		
		Quatrième	13-14 ans	3^{e} année d'ESI		« Licenza media » Orientation finale
Brevet Première orientation vers l'enseignement professionnel		Troisième	14-15 ans	1^{re} année d'ESS		
Deuxième orientation		Seconde	15-16 ans	2^{e} année d'ESS		
		Première	16-17 ans	3^{e} année d'ESS		
Baccalauréat		Terminale	17-18 ans	4^{e} année d'ESS		
			18-19 ans	5^{e} année d'ESS		Diplôme

Tableau 1 – Les systèmes scolaires français et italien

Dans ma recherche, vu la manière dont les programmes de géométrie se développent dans les deux institutions, je me suis intéressée aux cinq premières années du secondaire ; pour le système italien, je n'ai pris en compte que la filière scientifique dont les programmes se rapprochent le plus de l'esprit des programmes français[3].

(3) Mon travail s'appuie sur les programmes officiels français d'avant 1996 pour le Collège et d'avant 2000 pour le Lycée. Bien que des changements aient eu lieu lorsque ma recherche était en cours, j'ai pris en compte les anciens programmes, puisqu'il s'agit de ceux qui ont été suivis par les élèves observés.

II. Dans l'enseignement secondaire italien, l'organisation des contenus géométriques

Dans l'institution italienne, les contenus progressent suivant un développement relatif au savoir géométrique : des objets primitifs vers les objets plus complexes (sur le plan de la théorie). Une sorte de consensus implicite fait que, dans les divers manuels scolaires, la tradition euclidienne(4) joue encore un rôle important dans le développement du savoir géométrique : une idée d'exhaustivité semble guider les auteurs dans le choix des contenus et dans leurs relations mutuelles.

Géométrie dans le plan	**Droites parallèles** **Droites perpendiculaires** **Angles** **Triangles** **Quadrilatères particuliers** **(trapèze, parallélogramme, rectangle, losange, carré)** **Polygones** **Cercle et Disque**
Géométrie dans l'espace	**Droites et plans** **Polyèdres** **(prisme, parallélépipède, cube, pyramide, polyèdres réguliers)** **Solides de révolution** **(cylindre, cône, sphère)**

Tableau 2 – L'organisation des contenus géométriques dans l'enseignement italien secondaire

L'organisation des contenus géométriques (Tableau 2) – reconstituée à partir de l'analyse des textes officiels et de plusieurs manuels scolaires – est la même en passant de l'ESI à l'ESS. Les divers objets sont donc abordés à deux reprises au cours des cinq ans, avec un niveau de généralité et d'approfondissement croissant : à l'ESS, suivant le manuel, les contenus sont soit repris systématiquement et approfondis soit consolidés et approfondis. En outre, tout chapitre de la géométrie, dès qu'il est introduit, est abordé d'une manière exhaustive.
Ci-après, je donne quelques détails à propos des *transformations géométriques*, des *aires* et du *théorème de Thalès* tels qu'ils sont présentés dans l'institution italienne, ces objets étant assez représentatifs pour saisir la différence d'esprit qui anime les deux systèmes scolaires en question.

II.1. Les transformations géométriques

Les instructions officielles italiennes pour l'ESI prescrivent un enseignement *dynamique* de la géométrie dans lequel les *transformations géométriques* ne sont pas

(4) Je parle de *tradition euclidienne* en signifiant par là que nous avons hérité d'Euclide non seulement un savoir géométrique – qui suggère, au premier regard, une idée d'exhaustivité et d'immuabilité – mais aussi un exemple de style et de méthode pour que ce savoir soit transmis.

à interpréter comme un objet s'ajoutant à ceux qui, traditionnellement, constituent l'enseignement de cette discipline : leur introduction semble plutôt suggérer un éloignement de l'organisation *statique* de la géométrie d'Euclide pour adhérer à une nouvelle façon de l'exposer en s'inspirant de l'approche proposée à la fin du 19e siècle par Felix Klein.

Pour l'ESS, les instructions officielles laissent au professeur toute liberté d'organiser son enseignement suivant une approche traditionnelle ou bien en ayant recours à la géométrie des transformations. En effet, cela est possible puisque les *transformations géométriques* – introduites dans les programmes plus récents – cohabitent avec les objets géométriques classiques que sont les *critères de congruence et de similitude des triangles*.

Néanmoins, dans un bon nombre d'ouvrages scolaires, on constate que les transformations géométriques apparaissent plutôt comme un élément perturbateur du bel édifice euclidien : elles font l'objet d'un chapitre isolé – qui s'intègre mal aux autres contenus – et sont souvent présentées à travers un *langage formalisé*(5).

À propos des isométries, remarquons que l'ordre de développement n'est pas le même qu'en France (Tableau 3).

Dans l'enseignement français, la décision de commencer le chapitre des *transformations géométriques* avec la symétrie axiale semble provenir d'un souci pédagogique : cette isométrie est peut-être plus familière à l'élève et des exemples concrets permettent de l'introduire *naïvement*(6). Mais il y a aussi un autre élément qui donne cohérence – du point de vue mathématique – à ce choix : à partir de la composition de symétries axiales, on obtient les autres isométries, une caractéristique que l'on découvre partiellement en Troisième.

Dans l'enseignement italien, le choix de commencer le chapitre des *transformations géométriques* avec la translation semble uniquement avoir une cohérence académique : les applications vectorielles associées sont de complexité croissante et les propriétés d'invariance vont en se restreignant. Du point de vue pédagogique, ce choix demeure discutable car, dans les manuels scolaires les plus adoptés, la translation est liée aux *vecteurs*, une notion encore trop abstraite pour le niveau scolaire concerné.

Dans les programmes français, on aborde : • la *symétrie axiale* en Sixième ; • la *symétrie centrale* en Cinquième ; • la *translation* et la *rotation* en Quatrième ; • la *composition de deux isométries* en Troisième où on retrouve encore la translation dans la partie relative aux premiers rudiments de calcul vectoriel.	Dans les programmes italiens, il s'agit d'un chapitre qui serait éventuellement abordé en première et/ou deuxième année de l'ESI et, généralement, selon l'ordre suivant : • la *translation* ; • la *symétrie axiale* ; • la *symétrie centrale* ; • la *rotation*. On les retrouve aussi au cours de la première année de l'ESS.

Tableau 3 – Les transformations géométriques

(5) Par exemple, depuis les premières classes de l'ESI, on fournit une définition ponctuelle de la symétrie axiale.
(6) Le reflet d'une image dans un miroir, activités de pliage, etc.

II.2. Le cas des aires

Dans les textes officiels, aucune prescription précise n’est fournie à propos des *aires*. Dans les manuels scolaires, ce chapitre qui leur est consacré se présente comme un bloc unique, après la partie sur les polygones. Il est abordé en une seule fois au cours de la deuxième année de l’ESI et approfondi à l’ESS.
La notion de *congruence* est le point de départ pour développer ce sujet, celle-ci étant déjà abordée dans le chapitre sur les triangles où l’on introduit les *critères de congruence des triangles*.
Pour distinguer l’aire-*grandeur* de l’aire-*mesure*, on utilise respectivement les termes *superficie* (ou *étendue*) et *aire*, celle-ci étant définie comme la *mesure de la superficie* par rapport à une unité fixée. Notamment, à partir de la notion d’*équidécomposabilité*, on introduit la notion de *figures équivalentes* pour arriver ensuite à la notion d’*aire* ; dans les manuels s’adressant aux élèves de l’ESS (où le point de vue axiomatique surgit davantage), avant d’introduire la définition de l’aire, on passe par la *théorie des grandeurs et des proportions*, cela d’une manière plus ou moins explicite suivant l’ouvrage. L’enchaînement adopté est *grosso modo* le suivant :

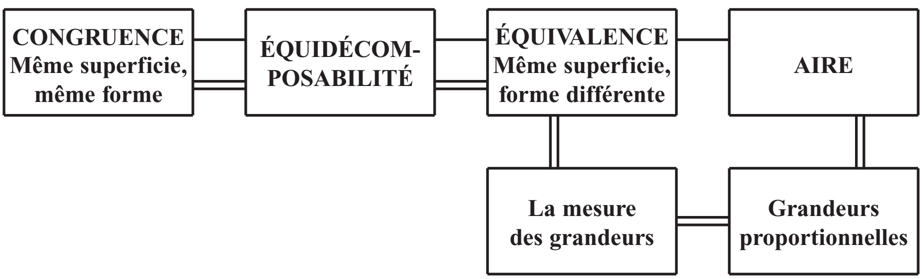

Tableau 4 – L’organisation du chapitre sur les aires

On présente ensuite les formules de calcul des aires des figures planes (rectangle, carré, parallélogramme, triangle, losange, trapèze, etc.), ces formules étant toujours justifiées en s’appuyant explicitement sur les notions d’*équidécomposabilité* et d’*équivalence*.

II.3. Le théorème de Thalès

Remarquons que, en principe, dans tout ouvrage scolaire, le *théorème de Thalès* est introduit d’abord – et parfois seulement – dans le cas général, où le nombre de parallèles est supérieur à trois[7]. Regardons ci-après quelques exemples tirés de manuels scolaires de niveaux différents.

a) Dans des manuels pour l’ESI[8]

Voici ci-dessous deux exemples d’énoncés que l’on trouve dans deux manuels s’adressant à des élèves du cycle inférieur :

(7) À ce propos, les textes officiels ne prescrivent rien de précis.
(8) Ce théorème est susceptible d’être enseigné à la fin de la deuxième année de l’ESI ou bien au début de l’année suivante.

Théorème de Thalès. Un faisceau de droites parallèles détermine sur deux transversales des segments correspondants directement proportionnels.

(D'après Bovio E., Manzone Bertone L., *Geometria Sperimentale*, Lattes 1987)

Définitions. Soit un faisceau de droites parallèles a, b, c, … interceptées par deux transversales t et t'. Les points A et A′, B et B′, C et C′, … sont dits **correspondants** s'ils sont interceptions d'une même droite du faisceau avec les deux transversales. De même, les segments AB et A′B′, CD et C′D′, AD et A′D′, … sont dits **correspondants** si leurs extrémités sont des ponts correspondants.
Théorème de Thalès. Un faisceau de droites parallèles interceptées par deux transversales détermine sur une transversale des segments directement proportionnels aux segments de l'autre transversale.
Conséquence du théorème de Thalès. Toute droite parallèle à un même côté d'un triangle, qui intercepte les deux autres, partage les côtés interceptés en segments proportionnels.
Conséquence du théorème de Thalès. La droite parallèle à un côté d'un triangle, menée par le milieu d'un autre côté, partage le troisième côté en deux segments congruents.

(D'après Mariscotti M., *Scienze Matematiche per la Scuola Media GEOMETRIA*, Petrini Editore 1992)

Dans les deux manuels, le théorème est présenté à la fin d'un chapitre consacré à la *similitude* et à l'*homothétie*. D'un point de vue mathématique, serait-il légitime de se questionner sur la cohérence que cet objet acquiert au sein du programme ?
Dans le premier manuel, il est admis et aucune activité spécifique n'est proposée. Dans le deuxième, l'auteur incite l'élève à valider l'énoncé à l'aide d'une preuve *pragmatique*(9). En effet, nous lisons :

« *… en* ***mesurant*** *deux segments quelconques déterminés sur une transversale et les segments correspondants déterminés sur l'autre transversale…* »

En revanche, le troisième énoncé proposé est validé à l'aide des *critères de similitude des triangles*. Des applications portent sur des constructions classiques (*partage d'un segment en n parties égales*, *construction de la quatrième proportionnelle*, etc.). Dans les pages d'activités pratiques, on propose des constructions à effectuer suivant des conditions imposées et des exercices à résoudre dans un cadre numérique.

b) Dans des manuels pour l'ESS(10)

Au cycle supérieur, on voit bien que le *théorème de Thalès* s'articule de manière cohérente avec d'autres objets d'enseignement. En effet, il est un objet *au service* d'autres objets : dans les deux manuels mentionnés ci-après, il est introduit pour permettre ensuite de justifier des propriétés relatives à la *similitude* et à l'*homothétie*.

(9) Balacheff distingue deux types de preuves : les preuves *pragmatiques* et les preuves *intellectuelles*. Les premières sont ancrées dans l'action effective et les autres dans le discours, la théorie. Cf. Balacheff, N. (1987), *Processus de preuve et situations de validation*, Educational Studies en Mathematics, nº 18.
(10) À l'ESS, ce théorème et ses conséquences sont enseignés au cours de la deuxième année.

Définitions. On appelle **faisceau de droites parallèles** l’ensemble de toutes les droites du plan qui sont parallèles à une droite donnée *a*. Deux droites *r*, *r′* qui croisent la droite *a* respectivement en les points A, A′ (figure) croisent aussi toute autre droite du faisceau. Les droites *r* et *r′* sont dites **transversales**. Le faisceau de droites parallèles détermine une correspondance biunivoque entre les points des transversales *r* et *r′* : deux points, un sur *r* et l’autre sur *r′*, sont correspondants s’ils appartiennent à une même droite parallèle à *a* (par exemple, dans la figure, les points A et A′, B et B′ se correspondent). De même, les segments [AB] et [A′B′] sont **correspondants**.
Théorème de Thalès. Les deux classes de segments correspondants déterminés par une faisceau de droites parallèles sur deux transversales sont directement proportionnelles.
Corollaire. Une droite parallèle à un côté d’un triangle détermine sur les deux autres côtés, ou sur leurs prolongements, des segments proportionnels.
Théorème (réciproque du corollaire). Une droite qui détermine sur deux côtés d’un triangle, ou sur leurs prolongements, des segments proportionnels, est parallèle au troisième côté.

(D’après Cateni L., Fortini R., Bernardi C., *Il nuovo pensiero geometrico 1 per il biennio del liceo scientifico*, Le Monnier 1997)

Théorème. Dans une projection parallèle, à des segments congruents correspondent des segments congruents. *Réciproquement*, si l’on établit une correspondance entre les points A, B, C, … et A′, B′, C′, … de deux droites telle que à des segments congruents sur l’une correspondent des segments congruents sur l’autre, si les droites qui joignent A et A′, B et B′ sont parallèles, alors toutes les droites qui joignent les extrémités de segments congruents sont parallèles (on établit une projection parallèle entre les deux droites).
Théorème. Sur une droite *r*, si le segment AB est la somme de *n* segments consécutifs et congruents entre eux, alors en appelant A′, B′, C′ les points correspondants de A, B, C dans une projection parallèle, A′B′ est aussi la somme de *n* segments congruents entre eux.
Théorème. Si un segment AB est multiple d’un segment CD, le segment correspondant A′B′ dans une projection parallèle est multiple du segment correspondant C′D′.
Théorème. Sur une droite, si la longueur d’un segment [AB] est supérieure à celle d’un segment [CD], alors, en nommant [A′B′] et [C′D′] les segments correspondants sur une autre droite en projection parallèle, A′B′ > C′D′.
Théorème de Thalès. Un faisceau de droites parallèles détermine, sur deux droites interceptant ce faisceau, des segments proportionnels.
Théorème (réciproque du théorème de Thalès). Étant données deux droites *r* et *r′* sécantes en un point P et deux autres droites *s* et *t* qui interceptent *r* respectivement en les points A et B et *r′* en les points A′ et B′, si PA/AB = PA′/A′B′ alors *s* et *t* sont parallèles.

(D’après Maraschini W., Palma M., *MANUMAT 2*, Paravia 1994)

Dans les deux ouvrages, les activités pratiques proposées concernent surtout des problèmes de démonstration. L’utilité du théorème est limitée mais, à propos de la proportionnalité, n’oublions pas que les manuels italiens fournissent un outil plus puissant que le théorème de Thalès, à savoir les *critères de similitude des triangles*.

II.4. Quelques réflexions

Les trois objets d’enseignement ci-dessus exposés sont, d’après moi, des exemples assez éloquents et caractéristiques de l’enseignement de la géométrie en Italie. Néanmoins la question se pose de savoir si un attachement trop exclusif à la tradition permet de prendre en compte d’une manière constructive les aspects pédagogiques nécessaires dans la transmission du savoir en question.

La comparaison dont ma recherche fait l'objet m'a conduite à remarquer que, en revanche, dans l'enseignement français, les contenus progressent suivant un développement conforme à un développement cognitif supposé. Du plus familier vers le moins familier, de l'objet vers le concept, l'organisation des divers objets d'enseignement semble être un compromis entre les aspects pédagogiques et l'exigence d'une prise en compte d'une vision moderne du savoir géométrique(11).
Dans les manuels français, les contenus se bornent à l'essentiel et sont exprimés à travers un langage très simple ; en outre, l'aspect théorique (savoir) des mathématiques est réduit au profit des méthodes (savoir-faire). Or, ce réseau de contenus restreint conduit-il à aller plus loin ? Les activités proposées dans les manuels sont-elles sources d'enrichissement ? Ou bien, tournent-elles autour de ce petit réseau ? Ou encore, seraient-elles choisies de manière que l'on puisse éviter certaines difficultés ?
Dans la réalisation d'un projet d'enseignement, la prise en compte d'aspects pédagogiques et le respect d'une cohérence au niveau des contenus à transmettre ne va pas de soi : la comparaison que j'ai menée le montre assez clairement !

III. « Le triangle des milieux : un problème de périmètre et d'aire »

Je passe ici à la deuxième partie de l'atelier, où l'intérêt a porté notamment sur les *aires* – une notion qui est traitée suivant deux approches différentes dans les deux institutions concernées.
Dans ma recherche, il m'a paru intéressant d'en savoir plus sur les effets que les deux approches semblent avoir sur l'acquisition de cette notion chez des élèves français et italiens. C'est ainsi que – pour la partie expérimentale – j'ai réalisé des énoncés de problèmes portant, entre autres, sur les aires. Ces problèmes ont été proposés à des élèves français de Seconde et à des élèves italiens de la deuxième année de l'ESS. En choisissant des élèves de seize ans, j'ai ainsi pu affaiblir les décalages existants entre les deux enseignements Par ailleurs, cela m'a permis d'analyser la capacité des élèves à mobiliser leurs connaissances pour produire des *démonstrations*.

J'ai présenté aux participants l'un de ces problèmes. Notamment le texte suivant :

> Soit trois points non alignés A, B, C. Trace I, J, K, milieux respectifs des segments [AB], [BC], [AC].
> Dans les égalités suivantes :
> P (ABC) = m P(IJK)
> A (ABC) = n A (IJK)
> P et A désignent respectivement les mesures du périmètre et de l'aire des triangles, m et n deux nombres.
> Cherche les valeurs de ces nombres pour que les égalités soient vraies.
> Justifie en explicitant les propriétés de la figure.

(11) Dans ce sens, les *transformations géométriques* représentent un fil conducteur à travers lequel le programme de géométrie se dévoile au fil des années.

Je leur ai proposé de constituer des groupes de travail afin d'analyser ce texte et de répondre aux questions suivantes :

a. À quels outils géométriques peuvent recourir des élèves français et italiens pour résoudre ce problème ?
b. Quelles difficultés peuvent-ils rencontrer ?
c. Quelles conceptions erronées peuvent apparaître ?

III.1. Mise en commun des travaux de chaque groupe

Les participants ont fait appel aux nouveaux programmes scolaires où les *triangles isométriques* et les *triangles semblables* réapparaissent après trente ans d'absence et où l'*homothétie* n'est plus au programme de Seconde, mais elle est abordée en Première.

Un seul groupe, parmi les cinq qui se sont constitués, a proposé le recours aux transformations géométriques mais cela seulement dans le cas d'élèves en Terminale S(12). Par ailleurs, les outils proposés font partie de la géométrie classique. Les *triangles isométriques* sont proposés par tous et, notamment, un groupe précise que « l'aire est plus accessible par cette vision ». Pour les périmètres, ce même groupe envisage aussi une technique perceptive où « l'élève mesure les longueurs ».

Parmi les difficultés que les élèves peuvent rencontrer, les participants signalent :

• lors du recours au théorème des milieux ou aux propriétés du parallélogramme, difficulté à les réutiliser plusieurs fois ;

• difficulté à utiliser autre chose que la formule $\dfrac{b \times h}{2}$ ou alors à construire les hauteurs qui conviennent et à ne pas les confondre avec les médianes des triangles ;

• difficulté à « sortir du constat sur la figure pour établir une preuve, à trouver la démarche de démonstration ».

Les conceptions erronées possibles portent surtout sur une liaison périmètre-aire (même réponse pour les deux valeurs) ; autrement « l'aire de IJK est un tiers de ABC car on retire l'objet que l'on mesure ».

III.2. Les résultats de ma recherche

J'ai recueilli quarante copies d'élèves italiens et quarante copies d'élèves français : ils ont tous reproduit au moins la figure décrite dans l'énoncé mais aucun élève n'a eu recours aux transformations géométriques ; des outils plus classiques sont privilégiés dans les deux pays.

À propos de l'usage de la figure. Il y a deux façons de percevoir la figure en jeu : soit on la perçoit comme pavage de quatre petits triangles disjoints et congruents soit comme un petit triangle inscrit dans un grand triangle. Cela a une influence sur les outils mobilisés pour aboutir. Néanmoins, les outils disponibles peuvent influer sur la manière d'analyser la figure en question.

(12) Pourquoi pas en Première où, d'après les nouveaux programmes, les homothéties sont objet d'enseignement ? Hélas, cette question n'est pas ressortie pendant l'atelier…

C’est ainsi que l’on ne devrait pas s’étonner en constatant que les élèves français sont plus nombreux à tracer ou nommer les hauteurs des deux triangles (pour recourir ensuite à la formule de calcul de l’aire d’un triangle).
Remarquons, en revanche, qu’à propos des *angles égaux*, les résultats montrent que cela caractérise exclusivement les élèves italiens lorsqu’ils envisagent le recours aux critères de congruence et de similitude des triangles, ce qui les amène à reconnaître la *configuration de deux droites parallèles et une sécante*.

Les réponses des élèves. Comme le Tableau 5 le montre, les élèves français s’investissent davantage alors que les élèves italiens sont plus nombreux à ne pas répondre ou ne pas aboutir. Cela expliquerait partiellement la différence dans le nombre de réponses incorrectes car, en tous cas, vingt-trois élèves italiens répondent correctement aux deux questions contre quinze élèves français.

	Pas de réponse		**Réponse correcte**		**Réponse incorrecte**	
	Élèves italiens	*Élèves français*	*Élèves italiens*	*Élèves français*	*Élèves italiens*	*Élèves français*
Périmètres	12	5	28	28	0	7
Aires	13	6	24	20	3	14

Tableau 5 – Les réponses des élèves

Les procédures à propos des périmètres. Pour amorcer le problème, le *théorème des milieux* est l’outil le plus accessible aussi bien pour les élèves italiens que français.
Ici, ce qui est intéressant ce sont plutôt les *réponses fausses* (que l’on retrouve chez les élèves français).
Voici quelques *justifications* d’élèves :

> « *Le périmètre de* ABC *est égal à la somme des périmètres de ces quatre triangles qui les composent.* »

> « ABC *est décomposé en quatre triangles égaux (*ABC *est quatre fois plus grand que* IJK*), donc le périmètre de* ABC *est égal à quatre fois le périmètre de* IJK*.* »

> « IJK *est deux fois plus petit que* ABC*, donc* $m = \frac{1}{2}$. »

Dans le dernier cas, concernant deux élèves français, nous reconnaissons dans le discours produit une difficulté à traduire le langage naturel en langage symbolique. En revanche, dans les deux autres cas (cinq élèves français), il s’agit plutôt de conceptions erronées à l’égard d’une liaison aire-périmètre.
Nous avons aussi trouvé des productions où quatre élèves français répondent correctement, mais s’appuient sur un discours faux où la difficulté à expliciter convenablement leur raisonnement semble dissimuler une acquisition impropre du *théorème des milieux*. Voici un extrait :

« Étant I, J, K *les milieux des côtés de* ABC*, ils divisent ces côtés en deux parties de même longueur. Par conséquent, ils forment un triangle qui est la moitié (deux fois plus petit) du triangle de départ ».*

Les procédures à propos des aires. Les procédures proposées dans les productions des élèves permettent de les distribuer en six catégories :

- Relation des longueurs des hauteurs de ABC et IJK et recours aux formules des aires (4 élèves italiens, 6 élèves français).
- Mesurage et formules de calcul de l'aire d'un triangle (6 élèves français).
- Congruence des quatre triangles qui constituent ABC (13 élèves italiens, 7 élèves français).
- Similitude des deux triangles (3 élèves italiens, 2 élèves français).
- Technique perceptive (4 élèves italiens, 6 élèves français).
- Propriétés fausses (6 élèves français).

Dans les deux premières catégories, de nombreuses erreurs apparaissent : prise en compte des médianes au lieu des hauteurs, erreurs dans les calculs (simplification), etc. La relation des hauteurs semblent poser beaucoup de problèmes : soit elle n'est pas explicitée, soit – en désignant par la même lettre les hauteurs des deux triangles – les élèves parviennent à une valeur erronée de n. Pour les élèves qui mesurent, par exemple, deux d'entre eux ne considèrent pas les hauteurs qui conviennent par rapport aux bases choisies.
Pour les élèves italiens qui exploitent la congruence des triangles, aucun problème ne se pose. Ici, il est intéressant de remarquer que sept élèves français ont aussi une vision de la figure comme d'un pavage de quatre triangles disjoints et congruents : néanmoins, ils ne justifient pas cette congruence (alors qu'ils pourraient le faire en recourant à la propriété de la symétrie centrale de conserver les aires).
Parmi les élèves qui s'appuient sur la notion de similitude (agrandissement/réduction), les élèves français montrent des difficultés de natures différentes. Par exemple, l'un d'entre eux évoque correctement la propriété des aires de deux figures sous l'effet d'un agrandissement/réduction mais, puisqu'il a fourni la valeur incorrecte $m = 4$, il conclut que $n = 16$. Un autre élève fournit une valeur correcte, mais il justifie sa réponse ainsi :

« Quand le périmètre est multiplié par x, l'aire est multipliée par 2*x. Donc l'aire est multipliée par* 2*,* $2 \times 2 = 4$ *».*

Évidemment, cet élève voudrait recourir à la variation des aires sous l'effet d'un agrandissement, mais il confond la notion de multiplication avec celle de puissance. Peut-être voit-il sur son tracé que ABC est partagé en quatre parties et arrange-t-il son raisonnement pour obtenir la bonne valeur de n.
Dans la catégorie des techniques perceptives, il y a encore une vision de la figure comme d'un pavage de triangles disjoints mais ces élèves affirment seulement que ABC est constitué de quatre triangles égaux, ce qui est dû sans doute à ce qu'ils perçoivent sur le tracé.

Dans la dernière catégorie, les élèves fournissent la valeur $n = 2$: ils ne semblent pas prendre en compte le tracé comme support perceptif utile pour aboutir, mais ils vont plutôt contre toute évidence ! Cela cache sans doute une acquisition impropre de quelques notions géométriques fondamentales. Parmi eux, par exemple, quatre élèves s'appuient plus ou moins explicitement sur une propriété fausse qui semble dépendre d'une acquisition erronée des propriétés des figures sous l'effet d'un agrandissement/réduction et qui peut s'exprimer ainsi :

« Puisque les côtés de IJK *sont divisés par* 2*, son aire est aussi divisée par 2. Donc* $n = 2$ *».*

À propos du discours des élèves. Le recours implicite ou contextualisé aux outils mis en jeu est une caractéristique des élèves italiens, mais, par ailleurs, j'ai constaté que les élèves français évoquent explicitement surtout le théorème des milieux. Toutefois, lorsqu'il s'agit de la notion d'agrandissement/réduction ou de la notion d'isométrie, aucun outil n'est évoqué.
Aucun élève ne produit de véritables démonstrations – éventuellement les élèves français en produisent par « petits bouts » –, l'*évidence* (sous diverses formes) jouant encore un rôle fondamental.

IV. En guise de conclusion

L'enseignement italien est ancré dans la tradition euclidienne. C'est ainsi que les grandeurs géométriques, et notamment les aires, y sont traitées explicitement alors que, en France, le passage au numérique est beaucoup plus rapide, trop, sans doute, pour que les élèves puissent s'approprier des moyens de contrôle des formules de calcul des aires.

a) La notion d'*aire* : comment s'y prendre pour que cela soit un outil efficace ?

Dans le problème ici présenté, l'échec relatif des élèves français peut s'expliquer par le fait que, dans l'enseignement français, tel qu'il apparaît dans les manuels, le thème sur les aires n'est pas assez approfondi(13).
Ne me semble pas négligeable non plus le fait que seuls les élèves italiens avaient à leur disposition un outil puissant tel que les critères de congruence et de similitude des triangles : la présence de ces objets ne cache-t-elle pas des conceptions erronées que le problème que j'ai proposé ne m'a pas permis de mettre en évidence ?
J'en viens aux nouveaux changements des programmes français en me posant des questions sur la manière d'organiser de façon cohérente la progression des outils au cours de la scolarité.

(13) Pourtant, des travaux ont été proposés pour que les enseignants comblent ce manque. Rappelons que, déjà en 1983, M.-J. Perrin et R. Douady publiaient une brochure s'adressant aux maîtres de l'école primaire et aux professeurs de Collège, où le processus d'apprentissage proposé visait à construire graduellement et à donner du sens à la notion d'aire de surfaces planes (*Mesure des longueurs et des aires*, Brochure 48, IREM Université Paris 7). Et encore, n'oublions pas que le bulletin de l'APMEP a récemment publié une suite d'articles à propos des aires (cf. APMEP, nº 438, nº 445 et nº 446).

b) Dans l'enseignement français, le retour des *triangles isométriques* et des *triangles semblables*. N'arrivent-ils pas trop tard dans le déroulement du programme de géométrie ? Quelle articulation avec les objets anciens ?

Sous le prétexte d'offrir un outil qui facilite un travail d'approfondissement et évite toute révision systématique, on a réintroduit les « cas d'égalité » des triangles et les triangles « de même forme » ; par la même occasion, les rédacteurs soulignent l'importance que les problèmes sur les aires doivent acquérir. De cette manière, ne va-t-on pas créer l'illusion que les élèves savent accomplir des tâches sur les aires alors qu'aucun changement n'a eu lieu dans les programmes des années précédentes ?

Les outils classiques que sont les critères de congruence et de similitude des triangles semblent s'opposer à une cohabitation cohérente et saine avec les transformations géométriques : ce qui se passe dans l'enseignement italien semble être un exemple assez éloquent. C'est ainsi que, actuellement et d'une manière symétrique, la question se pose dans l'enseignement français.

c) Les *transformations géométriques* : un concept fondamental dans l'investigation géométrique ou plutôt un outil qui, en quelques occasions, peut utilement rejoindre les outils classiques ? Quelle articulation avec les objets nouveaux ?

Et pour conclure, je reviens enfin au théorème de Thalès.

d) Le *théorème de Thalès* : quelle signification faut-il lui attribuer dans les programmes actuels ? Quelle articulation avec les objets nouveaux ?

Dans l'enseignement français, le choix de son énoncé semble être un compromis entre plusieurs objets qui n'apparaissaient plus ou qui sont introduits naïvement dans les programmes : en effet, avec un tel énoncé, y a-t-il nécessité d'avoir les critères de similitude ? D'autre part, semble aussi occulté l'objet homothétie qui, puisqu'il doit être introduit naïvement, ne semble pas devenir un outil puissant et efficace. En fait, l'énoncé du théorème en question – tel qu'il est aménagé dans l'enseignement français – semble être le résultat d'un souci pédagogique : il permet d'éviter toute complexité et, par conséquent, d'offrir à l'élève des situations où il s'avère un outil très efficace et convenable. Néanmoins, il paraît nécessaire de le remettre en discussion si l'on veut viser à donner plus de sens et de cohérence aux contenus que l'on enseigne.