Processus de preuve dans la pratique de l’enseignement - analyses comparatives des classes allemandes et françaises en quatrième

Christine Knipping

Introduction

Le point de départ de ce travail a été une discussion avec des élèves d’un lycée franco-allemand. Pour les élèves français, qui avaient eu des enseignants de mathématiques français au collège et allemands au second cycle, il y avait une nette différence dans les preuves entre les deux types de cours. Selon eux, celles-ci avaient une grande importance en elles-mêmes dans les cours français, tandis que les exercices d’application prenaient le pas dans les cours allemands (Knipping 1998).

> « Oui, pour ma part, je trouve que les mathématiques en allemand sont beaucoup plus concrètes que les mathématiques enseignées par les professeurs français, euh, les professeurs français s’attachent plus à démontrer des théorèmes, ou faire beaucoup de démonstrations alors que les professeurs allemands vont plus directement au principal, et ils ne s’attachent pas à donner des choses, qui, en fait, sont superflues… »
>
> (Sophie, Classe de Seconde)

Le point de vue de ces élèves ayant vécu une double expérience a éveillé mon intérêt pour comparer les processus de preuve dans la réalité de l’enseignement en France et en Allemagne. Je me suis posé les questions suivantes : « Quels types de preuves et de processus de preuve trouve-t-on dans l’enseignement des mathématiques au quotidien en France et en Allemagne ? Quelle valeur et quel rôle y sont attribués aux preuves ? Quelle fonction les processus de preuve y ont-ils ? Comment les assertions mathématiques y sont-elles justifiées ? »

Pour mener mon étude, j’ai observé les processus de preuve dans six classes allemandes de niveau 8/9 et six classes françaises de Quatrième pendant environ deux semaines chaque fois (voir aussi [Knipping 2002]). Une analyse comparative des programmes a suggéré que les cours consacrés au théorème de Pythagore ou au théorème des milieux / théorème de Thalès devaient être intéressants. Dans le présent article, je me borne à présenter les analyses et les résultats correspondant à six unités d’enseignement, portant toutes sur le théorème de Pythagore.

1. Comment et pourquoi comparer l'enseignement ?

Les questions posées dans l'introduction s'inscrivent dans une perspective comparative et visent un objectif qui peut paraître ambitieux, voire impossible à atteindre. Il semble qu'on cherche à décrire des pratiques dans l'enseignement au quotidien, lesquelles sont plus diverses qu'uniformes dans la réalité d'un même pays. Contrairement à cet objectif ambitieux, mon but a été de me limiter à la comparaison entre douze classes, soit six de chaque pays. Quelle validité et quelle valeur ont les résultats d'une telle comparaison ? Quel est l'intérêt d'une comparaison qui ne vise pas la diversité de l'enseignement ? De telles objections contre une étude comparative postulent un point important : c'est la diversité qui enrichit l'enseignement et qui est moteur des changements. Mais la crainte qu'une comparaison de l'enseignement entre deux pays vise à nier ces différences et à tirer des conclusions généralistes de cas singuliers n'est pas justifiée. Pourquoi ?

La recherche des différences dans l'enseignement se fait dans ma propre recherche selon deux axes : l'analyse des observations de classes dans une perspective comparative, France-Allemagne, et l'analyse des observations de classes faites dans un même pays, observations de classes qui diffèrent selon des critères divers : contenu, enseignant, écrit ou oral, preuve des résultats du cours ou des résultats des exercices. Malgré des différences dans un même pays, des études comparatives de cas comme celle de Cogan et Schmidt (1999) ou l'étude vidéo de l'enquête TIMSS (voir [Kawanaka, Stigler, Hiebert 1999]) mettent en lumière des conceptions et des pratiques qui sont à l'œuvre dans l'enseignement d'un pays et dont ceux qui appartiennent la culture de ce pays n'ont généralement pas conscience.

« La comparaison interculturelle conduit aussi les chercheurs et les enseignants à une compréhension plus explicite de leurs propres théories implicites sur la façon dont les enfants apprennent les mathématiques. En l'absence de comparaison, nous avons tendance à ne pas questionner nos propres pratiques d'enseignement et pouvons même ne pas être conscients des choix que nous avons faits en construisant la procédure d'enseignement. » (Stigler & Perry 1988, p. 199, trad. CK).

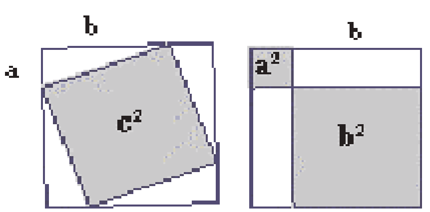
Dans mon étude de l'enseignement de la géométrie au collège, en France et en Allemagne, j'essaie de dégager ces différences pour mettre en évidence des phénomènes et processus didactiques, sur lesquels l'accent n'aurait pas encore été mis.

L'intérêt des études de cas comme celle-ci est bien différent des études statistiques. Les enquêtes statistiques cherchent à obtenir des résultats généraux, sur la base d'échantillons représentatifs. Par contre, dans une étude de cas, les échantillons ne sont pas représentatifs au sens statistique. On travaille sur un nombre de cas beaucoup plus restreint. Dans une étude de cas, chaque cas est analysé en détail pour mettre en évidence des phénomènes inattendus, on cherche à comprendre des phénomènes qui ne sont pas encore étudiés. Dans ma recherche, ce sont les processus de preuve et de démonstration en classe qui m'intéressent. Une étude de cas ne vise pas seulement à décrire, mais aussi à comprendre les phénomènes et les processus observés.

Dans cette perspective, un cas n'est intéressant que par sa singularité, mais aussi comme un exemple des autres cas qu'on peut trouver ailleurs, hors de l'expérimentation. Les cas que j'analyse ne sont pas nécessairement représentatifs de l'enseignement en France et en Allemagne. Mais on vise à décrire et à faire vivre les cas observés pour se rendre compte de certains types d'enseignement. Les types de processus de preuve décrits dans cet article ne se retrouvent pas exactement dans la réalité, ni dans les cas observés dans cette étude. Ce sont par contre des types abstraits, dérivés des analyses que j'ai réalisées. Pour illustrer ces types et en discuter, j'utilise plus loin deux exemples prototypiques appelés prototypes « Nissen » et « Pascal ». Chaque prototype (voir aussi [Kluge 1999]) caractérise un certain type d'enseignement, avec une approche particulière dans le processus de preuve. Dans une perspective comparative comme la mienne, cette démarche permet de mettre les traits caractéristiques d'un cas en lumière et de dégager les caractéristiques pertinentes des types différents.

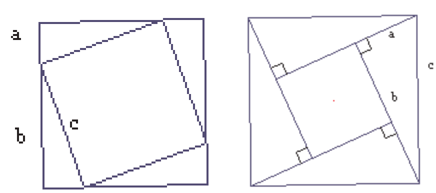
2. Quelles preuves trouve-t-on en classe ?

Le théorème de Pythagore est « le » théorème que presque tout le monde a appris à l'école, qu'il se rappelle encore et qu'il est capable d'énoncer : $a^2 + b^2 = c^2$. Le recours à ce théorème pour illustrer mon propos devrait donc être, pour la majorité des gens, d'autant plus frappant qu'il y a des différences essentielles non seulement dans les preuves mathématiques, mais aussi dans la façon dont ce théorème est enseigné. Je discuterai des différents types d'enseignement plus loin, mais je vais d'abord présenter les différentes preuves identifiées dans les classes observées.
Une classification des preuves du théorème de Pythagore par Fraedrich [Fraedrich 1995] contient un nombre important de types de preuves, dont quatre apparaissent dans les séquences que j'ai observées. Ces quatre types de preuves sont :
I. Preuve de complémentarité
II. Preuve arithmétique`
III. Preuve utilisant la similitude
IV. Preuve utilisant le théorème d'Euclide



I. Preuve de complémentarité

Figure 1



IIa IIb

II. Preuves arithmétiques

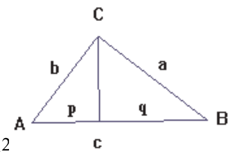
Figure 2

Dans le premier type de preuves (*figure 1*), deux figures – un carré d'aire c^2 et la réunion de deux carrés d'aires respectives a^2 et b^2 – sont complétées par l'adjonction chacune de quatre triangles rectangles égaux, de façon à former deux carrés égaux, donc, bien sûr, de même aire. Dans ce genre de preuve, a^2, b^2 et c^2 sont immédiatement interprétés comme les aires de trois surfaces apparaissant dans les figures et que l'on cherche donc à comparer. Le support visuel est fondamental dans ce genre de preuve. Les preuves du type II (*figure 2*) sont au contraire basées sur des calculs algébriques. On obtient le théorème de Pythagore en calculant de deux façons différentes les aires de deux carrés (les carrés de côtés respectivement c et $a + b$). Chaque carré est astucieusement découpé et son aire est, d'une part, égale au carré de la longueur du côté et, d'autre part, obtenue en sommant les aires des triangles et carrés que le découpage a fait apparaître. Dans les preuves du type II, tous les éléments apparaissant à un moment de la preuve admettent une interprétation géométrique.

$$\frac{b}{p} = \frac{c}{b} \rightarrow b^2 = c \cdot p$$

$$\frac{a}{q} = \frac{c}{a} \rightarrow a^2 = c \cdot q$$

$$a^2 + b^2 = c \cdot q + c \cdot p$$
$$= c \cdot (q + p) = c^2$$

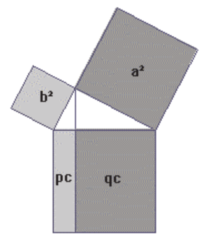


III. Preuve utilisant la similitude

Figure 3

$$a^2 = q \cdot c$$
$$b^2 = p \cdot c$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$



IV. Preuve avec théorème d'Euclide

Figure 4

Par contre, une telle interprétation n'est plus possible dans les preuves de type III (*figure 3*), également basées sur des manipulations algébriques de termes. L'application de la similitude des triangles est essentielle dans cette preuve, qui est donc plus complexe que les preuves précédentes. On utilise des égalités de rapports déduites de la similitude des triangles ABC, ACD et CBD pour démontrer que $a^2 + b^2 = c^2$. Les termes apparaissant dans les égalités représentent ici des longueurs, et non pas des aires comme dans les preuves précédentes. Une interprétation géométrique du théorème devient donc plus difficile. Dans le quatrième type de preuve (*figure 4*), le carré construit sur l'hypoténuse est découpé en deux rectangles, dont l'aire est connue grâce au théorème d'Euclide étudié dans les leçons précédentes. La preuve est fondée sur la visualisation du théorème qu'on appelle dans l'enseignement allemand « théorème des côtés de l'angle droit ».

En reprenant maintenant la comparaison France/Allemagne et mon appui sur l'enseignement, force m'est de constater que je n'ai vu aucune preuve des types III ou IV dans le prototype Pascal, ni dans les classes françaises observées. Si l'on regarde les programmes et les manuels, ces observations sont non seulement confirmées, mais aussi explicables. La preuve de type III est fondée sur l'application de la similitude, un concept qui n'était pas au programme jusqu'au niveau de la quatrième en France. Il en est de même pour le quatrième type de preuve : le théorème d'Euclide n'est pas au programme en France. Donc les preuves de type III et IV ne sont pas adéquates dans l'enseignement français à ce niveau. Par contre, ces preuves peuvent être utilisées en Allemagne dans les classe de « Gymnasium » où ces concepts sont au programme du même niveau que le théorème de Pythagore. Reste à savoir si ces preuves complexes sont du niveau des élèves et de leurs connaissances, ce qui est une autre question.

3. Deux types des processus de preuve

Dans mes analyses de preuves en classe, j'ai étudié non seulement les preuves mathématiques, mais aussi le contexte des preuves dans les cours, que je vais illustrer ici au moyen des prototypes « Nissen » et « Pascal ». Je me suis intéressée à l'introduction, au développement et à la justification du théorème de Pythagore, et à son application sous forme d'exercices. C'est la structure et l'enchaînement de l'énoncé, de la preuve et des exercices qui révèlent des différences entre les cours allemands et français observés. Ces analyses me permettent de conclure qu'il existe des différences dans les fonctions des preuves et des types de processus de preuve en classe.

4. Nissen

Dans le cas de Nissen, l'unité thématique sur le théorème de Pythagore est initiée par un problème de calcul : Comment calculer la longueur des chevrons d'une maison ayant un toit à deux pentes si l'on connaît la largeur de la maison (*figure 5*).

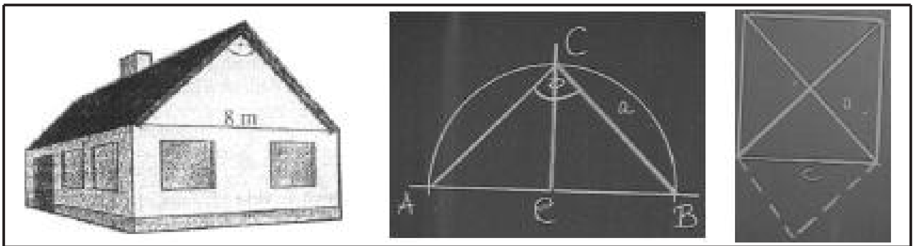
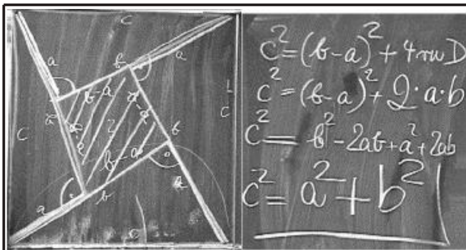
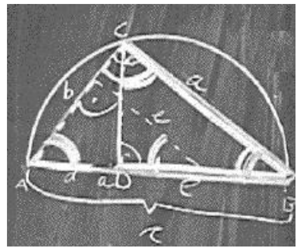


Figure 5. Nissen : l'introduction du théorème de Pythagore par un problème appliqué

En classe, les élèves et le professeur considèrent le toit comme un triangle rectangle isocèle, *a* étant le côté qu'on cherche à calculer. Avec l'aide du professeur, les élèves construisent un triangle rectangle en utilisant le théorème de cercle circonscrit. En cherchant une méthode pour calculer le côté *a*, l'idée d'inscrire le triangle dans une configuration de carrés émerge. Puis, le professeur lance l'idée de comparer les aires de ces carrés. Les élèves constatent que l'aire du petit carré est égale à l'aire des deux triangles, de même l'aire du grand carré est égale aux quatre triangles. De ces égalités, les élèves concluent avec l'aide du professeur que : $c^2 = 2a^2$, puis calculent la longueur des chevrons. En partant d'un problème appliqué et particulier, le professeur stimule la motivation chez ses élèves pour apprendre le théorème de Pythagore. Elle explique aux élèves que la solution du problème peut être généralisée à des triangles quelconques et qu'on obtient dans ce cas la formule : $c^2 = a^2 + b^2$. Dans les cours suivants, cette formule est démontrée. Le problème d'application conserve toujours son statut paradigmatique, car les exercices d'application du théorème de Pythagore reviennent après les démonstrations (*figure 6*) au type de problème présenté au début.





$$\frac{a}{e} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{b}{d} = \frac{c}{b}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = c \cdot e \wedge b^2 = c \cdot d$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = c \cdot e + c \cdot d = c(e+d) = c^2$$

Figure 6. Preuve arithmétique et preuve utilisant la similitude dans la classe Nissen

Pour démontrer le théorème, deux preuves sont étudiées en classe, une *preuve arithmétique* et une *preuve utilisant la similitude*. Dans les deux preuves, des relations algébriques sont déduites par un dessin présent au tableau (*figure 6*). Dans la preuve arithmétique, ces relations s'appuient sur le calcul d'aire du grand carré ; dans la deuxième preuve, les relations sont fondées sur la similitude des triangles. Des manipulations algébriques mènent finalement à la formule de théorème de Pythagore.

Après avoir étudié deux preuves du théorème de Pythagore de façon collective avec l'ensemble de la classe, les élèves voient des exercices d'application. En classe et comme devoir, les élèves doivent résoudre des problèmes de calcul ; plus particulièrement, ils revoient des problèmes comme ceux du début. Dans ces exercices, le théorème de Pythagore est à appliquer directement (*figure 7*). Après avoir fait quelques exercices simples en classe, le professeur présente l'exercice du triangle isocèle. En utilisant la formule de Pythagore $a^2 + b^2 = c^2$, les élèves, avec l'aide du professeur, calculent la longueur du demi-côté du triangle isocèle et finalement la base de ce triangle. Puis, ils revoient un problème comme celui du début. Étant donné la longueur d'une échelle (7,2 m) et la distance de l'échelle à une maison (1,2 m), on cherche à calculer la hauteur de la maison. Une fois que cette idée a été explorée en classe, le professeur demande aux élèves de faire le calcul la maison.

Contrairement aux preuves dans la classe Nissen et dans les autres classes allemandes, qui sont assez exigeantes et complexes, les exercices d'application sont assez simples et restreints, en ce sens que la simple application de la formule est

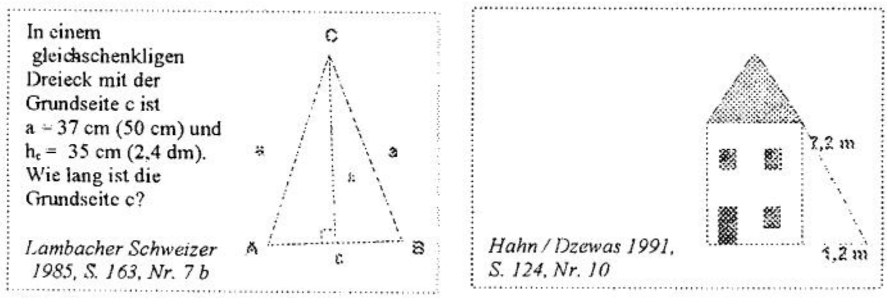


Figure 7. Nissen : exercices d'application

suffisante. La systématisation des savoirs, qu'on a trouvée comme fonction des preuves dans ces classes, ne se retrouve pas dans les exercices. Par contre, le problème d'application, qui a joué un rôle important dans l'introduction et dans le développement du théorème de Pythagore, gagne encore plus de valeur ici. Il sert comme modèle pour les exercices d'application. Le fait que les problèmes d'application dominent la scène peut provoquer une perception des mathématiques comme étant « concrètes ». De plus, le caractère algébrique des preuves, avec peu de raisons explicites et écrites justifiant le raisonnement, peut avoir pour effet de ne pas reconnaître un caractère démonstratif dans les preuves.

5. Pascal

Je vais maintenant présenter un deuxième type, illustré par le prototype Pascal, qui n'a été rencontré que dans les cours français. Ce type d'enseignement commence par la présentation de l'énoncé du théorème. Prouver signifie ici se ramener à des théorèmes, des définitions et des techniques qui ont déjà été validés en classe comme savoir officiel. La démonstration du théorème, menée la fois oralement et au tableau, caractérise ce type de processus de preuve, qui mène à l'établissement d'un nouveau savoir.

Comme ABCD a quatre côtés de même longueur, c'est un losange. Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires. Les triangles rectangles DHC et BGC sont superposables, leurs angles sont deux à deux égaux On en déduit que les angles BCG et DCH sont complémentaires. $\widehat{HCG} = 180°$. d'où l'angle BCD = 180 – 90 = 90° ABCD est un carré.		$\mathcal{A}(ABCD) = c \times c = c^2$ $\mathcal{A}(ABCD) = (a + b)^2 - 2ab$ (Aire EFGH – Aire des 4 triangles (ou Aire de 2 rectangles)) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ donc $\mathcal{A}(ABCD)$ $= a^2 + 2ab + b^2 - 2ab$ $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$

Figure 8. Preuve arithmétique dans la classe de Pascal

Le cours commence par une activité de collage. Le professeur demande aux élèves de découper quatre triangles rectangles égaux et de les coller comme dessiné au tableau (*figure 8*). L'activité n'est pas discutée en classe mais constitue le point de départ d'une preuve du théorème de Pythagore. Le professeur et les élèves nomment les côtés, certains points et angles de la figure, puis commencent par justifier que la figure intérieure est un carré. Les justifications exigent l'application des connaissances, par exemple les propriétés des triangles superposables, la complémentarité des angles d'un triangle rectangle. Puis, initiée par le professeur, l'aire du grand carré est calculée de deux façons différentes. Finalement, après quelques manipulations algébriques, la formule de théorème de Pythagore est obtenue.

La démonstration du théorème se fait la fois oralement et au tableau. L'établissement d'un nouveau savoir se fait par des justifications explicites et publiques. La résolution du problème s'appuie sur les processus de preuve et est expliquée de la même façon discursive que ces derniers. La résolution du problème suivant dans la classe de Pascal est un exemple de ce type : étant donné le dessin d'un triangle rectangle en A (*figure 9*) et les longueurs de la médiane AM = 5 et du côté AB = 6, on demande aux élèves de calculer les longueur BC et AC.

ABC est rectangle en A
AB = 6, M est le milieu du côté BC,
AM = 5.
Dans un triangle rectangle, le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit.
MA = MB = MC
$BC = 2 \times 5 = 10$
AC = ?
D'après le théorème de Pythagore, on a dans le triangle rectangle en A :
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$100 = 36 + AC^2$
$AC^2 = 100 - 36 = 64$
$AC = \sqrt{64} = 8$

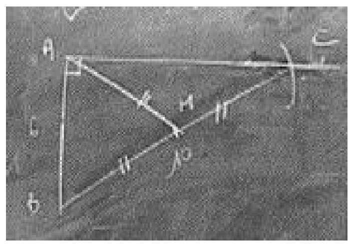


Figure 9. Devoir discuté en classe de Pascal

Des problèmes comme celui-ci font appel, non seulement au théorème de Pythagore, mais aussi à d'autres notions ou résultats géométriques, par exemple le cercle circonscrit à un triangle ou les propriétés des tangentes à un cercle. Je n'ai pas pu trouver dans des cours allemands des exercices de ce type. Une comparaison des manuels confirme cette observation. Donc, dans les classes allemandes, l'application d'autres théorèmes étudiés en classe ne se trouvait que dans les preuves du théorème de Pythagore, pas dans les devoirs que les élèves ont eu à faire. Dans l'enseignement allemand, l'application du « savoir officiel » est donc de la responsabilité du professeur, qui conduit et structure les processus de preuve. Par contre, elle est de la responsabilité à la fois des élèves et du professeur dans le prototype Pascal et les autres cas français.

Une autre différence observée entre les situations d'exercices dans les classes allemandes et françaises est la suivante. Ce qui est important dans la résolution de l'exercice dans les cours français, ce n'est pas le résultat qu'on obtient, mais bien la justification donnée (*figure 9*). Au tableau et dans les cahiers des élèves, on trouve des traces de cette exigence, qui est pour les exercices souvent de la responsabilité des élèves. Par contre, on trouve rarement, tout au plus oralement, des justifications de ce type dans les cours allemands, où les calculs sont plutôt dominants (*figure 6*).

6. Différentes fonctions des processus de preuve en classe

Si maintenant nous résumons notre comparaison des différents types d'enseignement, nous pouvons dégager deux fonctions différentes des processus de preuve en classe. Le type de processus de preuve illustré par le prototype Nissen n'a pu être reconstruit que dans les cours allemands. Dans ce type, les processus de preuve sont amorcés par un problème concret de calcul ; le théorème de Pythagore y est présenté comme la solution d'un problème appliqué. Le sens et la justification du théorème général sont développés et compris à partir du cas particulier étudié, et ce de façon collective par l'ensemble de la classe. La fonction du processus de preuve est dans ce cas de dégager la signification d'un théorème en partant de problèmes appliqués et particuliers. L'application du théorème sous forme d'exercices renforce cette fonction. Je caractérise la fonction de ce type de processus de preuve par l'expression « voir que ». Un commentaire de la professeur Nissen alors que la preuve arithmétique est discutée en classe (*figure 6*) est une illustration de ce leitmotiv :

> **Professeur** : Nous ne savons pas encore ce que nous devons écrire au milieu. Mais tu sais, ce que je trouve de bien dans ta réponse, c'est que tu cherches des carrés qui aient d'une certaine façon cette surface. Mais on ne connaît pas encore vraiment la longueur du côté du carré intérieur. *b* carré serait un carré par ici…
> **Maren** : hum…
> **Professeur** : Ça ne marche pas bien. Peut-être allez-vous trouver autre chose. Sarah, on n'écrit pas, on n'écrit rien, on pense seulement, on regarde seulement.

La fonction du processus de preuve que nous avons décrite comme « voir que » peut être aussi caractérisée comme une fonction heuristique [Villiers 1990]. Par la preuve, les relations exprimées dans le théorème de Pythagore sont découvertes, ici par une discussion collective guidée par le professeur. Le leitmotiv de ce type de processus de preuve est de « voir » ces relations. Les calculs et les représentations visuelles sont à la base d'argumentations fondées essentiellement sur la contemplation des figures.

Par contre, le type illustré par Pascal, et que nous n'avons rencontré que dans les cours français, représente un deuxième type. Nous caractérisons la fonction de ce type de processus de preuve par l'expression « expliquer pourquoi ». Ce type d’enseignement commence par la présentation de l’énoncé du théorème. « Prouver » signifie ici se ramener à des théorèmes, des définitions et des techniques qui ont déjà été validés en classe comme savoir officiel. Le leitmotiv « expliquer pourquoi » de ce type d’enseignement est bien exprimé par Pascal dans l’extrait suivant du cours, pendant que la preuve arithmétique est discutée en classe (voir figure 8) :

> **Thierry** : BCG et DCH sont complémentaires.
> **Professeur** : Oui. (9 sec.) Ensuite, sont complémentaires, t’as écrit ? Oui ? Alors ?
> **Stéphanie** : On écrit que C, donc l’angle C est égal 180 moins…
> **Professeur** : Il faut d’abord dire que HC, pourquoi 180 ?
> **Stéphanie** : 180, parce que c’est plat.
> **Professeur** : Eh, il faut le dire quand même, hein ? On l’a pas encore dit. On l’a dit nous, mais on l’a pas écrit. Dans la démonstration il faut écrire tout ce qu’on a dit, donc tu vas la ligne, voilà HCG égale 180 degrés.

La démonstration du théorème, menée à la fois oralement et au tableau, caractérise ce type de processus de preuve, qui mène à l’établissement d’un nouveau savoir. La résolution de l’exercice s’appuie sur les processus de preuve et est expliquée de la même façon discursive que ces derniers. Ce qui est important dans la résolution de l’exercice, ce n’est pas le résultat qu’on obtient, mais bien la justification donnée. Si l’on revient aux fonctions de preuves distinguées par de Villiers, c’est la fonction discursive ou communicative qui est importante ici. Cette fonction correspond au fait qu’une preuve doit être expliquée aux autres. Nous n’avons rencontré cette fonction discursive des preuves que dans les cours faits en France, où l’on attend des étudiants qu’ils soient capables d’élaborer et d’expliquer la solution de problèmes.

La comparaison des classes observées montre aussi que dans le prototype Nissen (*figure 6*), autant que dans les autres cas allemands, on ne trouve pas seulement une preuve mais deux. Si l’on considère la vérification comme fonction fondamentale d’une preuve, une deuxième preuve n’est pas nécessaire. Alors, pourquoi une deuxième preuve ? De Villiers et Hanna [Hanna 1989] ont mis en évidence qu’une preuve a d’autres fonctions qu’une fonction de vérification. Pour l’enseignement en particulier, c’est la fonction explicative qui est importante. Les preuves de type I et II ont évidemment une telle fonction. Pourquoi alors étudier une preuve de type III ou IV ?

La fonction de systématisation que nous n’avons pas encore regardée mérite ici notre attention ([Villiers 1990]). Chaque preuve, fondée sur d’autres concepts et théorèmes, permet de revoir des savoirs et connaissances. Une telle révision peut être l’accès à une systématisation des savoirs en classe. L’application des savoirs déjà vus en classe donne de la valeur à ces savoirs et montre leur pertinence. Mon interprétation de la raison pour laquelle on observe deux preuves dans les classes en Allemagne est donc que les preuves, dans ce cas, ont aussi une fonction de systématisation des savoirs. L’exigence des preuves III et IV soutient cette

interprétation. Est-ce que les élèves prennent nécessairement la responsabilité de la systématisation de leurs connaissances en même temps ? C'est là une question importante que je discuterai plus loin.
Ces différences renvoient à des modes différents de développement et de justification du savoir. Pourquoi ? Le type de processus de preuve que j'ai caractérisé par l'expression « voir que », peut être associé à une sorte de compréhension contemplative du savoir, le type « expliquer pourquoi » à une compréhension discursive. Pendant et par ces processus de preuve, ce sont donc des savoirs mathématiques différents et des pratiques différentes du savoir que les élèves apprennent.

7. L'enseignement face aux élèves

Si on revient au point de départ de ce travail, on trouve que les expériences des élèves qui ont vécu l'enseignement français et l'enseignement allemand reflètent des différences importantes. Leurs perceptions des preuves comme étant superflues et le fait qu'ils ne voient pas d'intérêt de prouver en classe, montre aussi qu'il y a un problème.

Même si les preuves sont importantes dans les programmes allemands, au moins au Gymnasium, « filière noble » des collèges et lycées, les élèves interviewés n'ont pas conscience de les rencontrer dans l'enseignement allemand. Ils décrivent les mathématiques en Allemagne comme étant « beaucoup plus concrétes », l'enseignement comme un chemin direct au « principal ». Si l'on considère le prototype Nissen, une telle réaction peut s'expliquer. Les problèmes d'application et de calcul jouent un rôle important dans ce type de processus de preuve. De plus, le lien entre le problème d'introduction et les problèmes d'application du théorème est fort, tant et si bien qu'on peut percevoir ces problèmes comme « principaux ». Le fait que les preuves ne sont développées qu'oralement et qu'il n'y a que des traces algébriques au tableau peut encore renforcer cette impression. De plus, dans les processus de preuve, c'est le professeur qui prend la responsabilité du vrai et qui fait la grande partie de travail, en particulier la structuration du raisonnement. Tout cela peut provoquer l'impression que les preuves ne sont pas « principales ».

Dans les processus de preuve de type Pascal, la preuve du théorème développé en classe prend pour modèles les exercices à rédiger. Les démonstrations, en tant que légitimation des solutions d'un problème, jouent un rôle important qui n'apparaît pas seulement dans la preuve présentée par l'enseignant au tableau. Les élèves ne sont pas seulement supposés trouver une solution ou donner un résultat, on attend d'eux des preuves détaillées et argumentées, rédigées selon un certain schéma. Il est important d'expliquer son raisonnement et quelles propriétés on utilise pour justifier devant l'enseignant et les autres élèves le résultat que l'on annonce. Ces activités, exigeantes pour les élèves, ne sont apparemment pas appréciées par les élèves franco-allemands interviewés.

> « Je pense que les profs français pensent que d'exprimer notre pensée ça nous fait structurer notre raisonnement et donc au bout d'un moment, on n'aura plus besoin d'écrire pour structurer le raisonnement, mais en fait, la plus longue démonstration que j'ai vu faire depuis deux ans, c'est de faire cinq lignes, maximum, et pourtant je pense que ça n'empêche pas la formulation mathématique, je pense que c'est vraiment le système français, très cartésien, qui veut tout structurer, qui fait qu'on est obligé de tout démontrer.
>
> (Marie, Classe de seconde)

Marie ne voit pas l'intérêt des activités de démonstration en classe, elle n'éprouve guère le besoin de prouver qu'un résultat est vrai et de comprendre pourquoi. Tandis que les autres commentaires dans l'interview montrent que ces élèves, en filière littéraire, ont bien compris la démarche et le caractère d'une démonstration. Ils acceptent que les démonstrations jouent un rôle important dans les mathématiques scientifiques, mais ils ne voient pas leur valeur à l'école.

En résumé, on peut donc constater qu'un enseignement de type Nissen, partant des problèmes appliqués et particuliers dans les processus de preuve, peut offrir aux élèves des significations et des motivations pour étudier un théorème. Tandis que la preuve même et son caractère démonstratif peuvent être « perdus » ou pas reconnus dans une telle démarche. En particulier, l'appui sur des problèmes d'application et des calculs dans les exercices à résoudre peut affaiblir l'effort de l'enseignement de la preuve en classe. La valeur communicative de la preuve peut même rester totalement inconsciente ou être ignorée. Un enseignement de type Pascal risque par contre d'ignorer l'aspect de la motivation et le besoin des élèves. Même si les devoirs en classe soutiennent la fonction communicative des preuves, cette fonction n'est pas nécessairement vécue comme telle par les élèves, qui perçoivent les preuves comme des activités que l'on doit faire pour le professeur. Il en est de même de la fonction explicative des preuves, qui est la base des preuves I et II discutées au début de cet article, et qui n'est pas nécessairement claire pour les élèves.

Je conclurai de cette étude comparative que l'enseignement de la preuve reste difficile, dans une approche ou dans l'autre. D'autres études sur les processus de preuve en classe sont nécessaires pour mieux comprendre ces difficultés. Mais j'espère que les différents types que j'ai pu identifier seront utiles pour dégager de nouvelles pistes de recherche.

Bibliographie

Cogan, L. S. et Schmidt, W. H. (1999). An Examination of Instructional Practices in Six Countries. In G. Kaiser, E. Luna et I. Huntley (Hrsg.), *International Comparisons in Mathematics Education*. London, Philadelphia : Falmer Press, 11, 68-85.

Fraedrich, A. M. (1995). *Die Satzgruppe des Pythagoras*. Mannheim : BI Wissenschaftsverlag.

Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. In G. Vergnaud, J. Rogalski et M. Artigue (Éds.), *Proceedings of the 13th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Paris : Université de Paris, 2, 45-51.

Kawanaka, T., Stigler, J. W. et al. (1999). Studying Mathematics Classrooms in Germany, Japan, and the United States : Lessons from TIMSS Videotape Study. In G. Kaiser, E. Luna et I. Huntley (Éds.), *International Comparisons in Mathematics Education*. London, Philadelphia : Falmer Press, 11, 86-103.

Kluge, 5. (1999). *Empirisch begründete Typenbildung. Zur Konstruktion von Typen und Typologien in der qualitativen Sozialforschung*. Opladen : Leske + Budrich.

Knipping, C. (1998). Les buts de l'enseignement des mathématiques selon la perspective des étudiants d'un lycée franco-allemand. In F. Jaquet (Éd.), *Actes de la CIEAEM 50*. Neuchâtel : 100-104.

Knipping, C. (2002) Proof and Proving Processes : Teaching Geometry in France and Germany. In Weigand, H-G. (Éd.) *Developments in Mathematics Education in German-speaking Countries. Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics*, Bern 1999, Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin, 44-54.

Stigler, J. W. et Perry, M. (1988). Cross Cultural Studies of Mathematics Teaching and Learning : Recent Findings and New Directions. In D. A. Grouws, T. J. Cooney et D. Jones (Hrsg.), *Perspectives on Research on Effective Mathematics Teaching*. Reston : National Council of Teachers of Mathematics, 194-223.

Villiers, M. de (1990). The Role and the function of proof in mathematics. In *Pythagoras*, 24, 17-24.