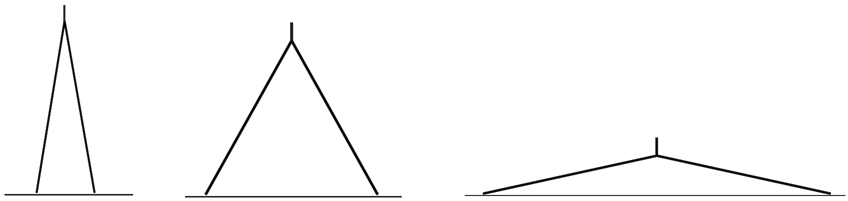
Le compas de Pierre

Jean-Paul Bardoulat

Placée dans le cadre de l'étude de la notion de fonction en classe de seconde, cette activité, suggérée par mon ami et collègue Pierre Dupont, a pour but de faire réfléchir les élèves sur la difficulté, à ce niveau, de déterminer le maximum d'une fonction.

Prenez un compas, tenez-le face aux élèves bien vertical, ses deux pointes sur une table, vous obtenez un triangle. Faites varier l'écartement des deux branches, l'aire de ce triangle varie nettement, elle peut même être nulle. Question : **dans quelle position du compas l'aire du triangle est-elle maximale ?**



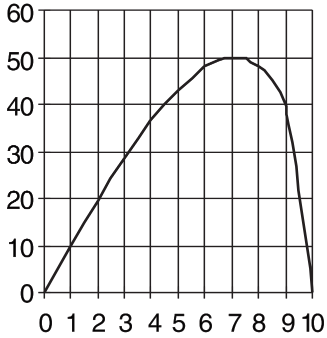
Quelques élèves répondent spontanément : « lorsqu'il est équilatéral ». Certains doutent cependant de cette séduisante réponse, tout en avouant ne pas savoir. Comment traiter ce problème ? Puisque cette aire varie et que l'on est dans un contexte « fonctions », quelques-uns proposent alors de tracer la courbe de la fonction « aire du triangle ».

Fixons la longueur des branches du compas à 10 cm (ce qui correspond à peu près à celles d'un compas standard). « Mais il y a deux variables, la base et la hauteur ! » remarquent quelques élèves après quelques instants de réflexion. Vous devrez alors attirer habilement leur attention sur les liens possibles entre ces variables. Ensuite, peut être devrez-vous les aider à choisir celle qu'ils utiliseront : la base du triangle, la demi-base ou la hauteur. Le triangle étant isocèle, ces deux dernières ont l'avantage d'éviter un dénominateur et conduisent au même résultat. En appelant x la demi-base, et $\mathcal{A}(x)$ l'aire du triangle vos élèves trouveront facilement :

$$\mathcal{A}(x) = x\sqrt{100 - x^2}, \quad x \in [0\,;10]$$

et obtiendront la table de valeurs et la représentation graphique suivantes à l'aide de leur calculatrice :

x	$\mathcal{A}(x)$
0	0,0000
1	9,9499
2	19,5960
3	28,6180
4	36,6610
5	43,3010
6	48,0000
7	49,9900
8	48,0000
9	39,2300
10	0,0000



L'aire maximale semble donc être proche de 50 cm² pour x voisin de 7 cm.

En désignant par x_m la valeur de x pour laquelle l'aire est maximale et en diminuant le pas de la variable dans la table de valeurs on trouve successivement, comme le montrent les tableaux ci-contre :

$x_m \in\ ]6,9\ ;\ 7,1[$

$x_m \in\ ]7,05\ ;7,09[$

x	$\mathcal{A}(x)$
6,8	49,858
6,9	49,943
7	49,99
7,1	49,998
7,2	49,966

x	$\mathcal{A}(x)$
7,04	49,998
7,05	49,999
7,06	50
7,07	50
7,08	50
7,09	49,999
7,1	49,998

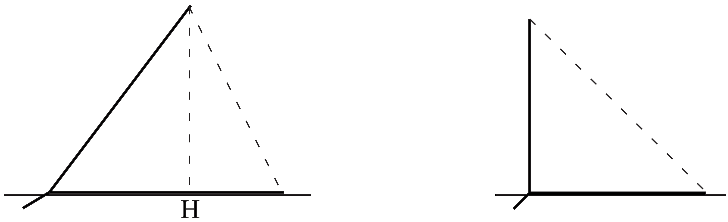
La calculatrice ne nous permettant pas une meilleure précision, nous ne pouvons donc trouver ni x_m, ni la valeur exacte de l'aire maximale !

Vos élèves risquent alors de douter de vos compétences pour les avoir conduits à une « impasse ». C'est le moment de leur expliquer que le but essentiel de l'activité était de leur faire découvrir la difficulté qu'il y a parfois à déterminer un maximum.

Comme le problème est de nature géométrique et pour restaurer votre autorité, suggérez-leur de revenir à la géométrie... Pour les aider vous pouvez attirer leur attention sur la difficulté liée à la position présentée du compas qui fait varier, à la fois, la base et la hauteur du triangle... Mais que si un seul de ces éléments variait ce serait peut être plus facile...

Incitez ceux qui ne trouvent pas à placer une branche du compas sur la table... La base du triangle étant ainsi fixée, seule la hauteur correspondante varie... L'aire du triangle est alors proportionnelle à cette seule hauteur... L'aire est donc maximale lorsque celle-ci est maximale, ce qui se produit ... lorsque cette hauteur est confondue avec la branche mobile... C'est-à-dire lorsque le triangle est rectangle !

L'aire maximale du triangle est donc celle du demi-carré de côté 10 cm, soit 50 cm², x_m est alors la longueur de la demi-diagonale de ce carré soit $5\sqrt{2}$ cm (ce qui représente approximativement 7,071 cm).



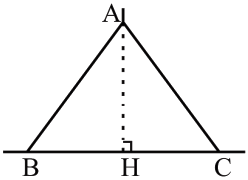
Annexe

Il existe d'autres méthodes pour déterminer l'aire maximale du triangle, sans utiliser la dérivée, dont certaines sont exposées dans des publications de l'APMEP. En voici quelques exemples :

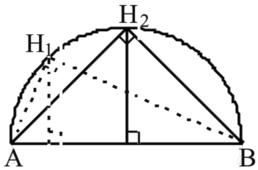
Dans la brochure APMEP nº 154 (2003) « Pour un enseignement problématisé des mathématiques au lycée », pages 164-165 :

1. Méthode par comparaison au maximum supposé : on montre aisément que $50^2 - (\mathcal{A}(x))^2 = (50 - x^2)^2$, ce qui permet d'en déduire que pour tout x de [0 ; 10], $50 \geq \mathcal{A}(x)$ et que le maximum est atteint pour $x^2 = 50$, soit $x = 5\sqrt{2}$.

2\.



H étant le milieu de [BC], l'aire du triangle ABC est le double de celle du triangle ABH. Tous les triangles ABH sont rectangles en H et ont une hypoténuse de 10 cm. Parmi tous ces triangles celui dont l'aire est la plus grande est le triangle rectangle isocèle, ce qui donne $2x^2 = 100$ soit $x = 5\sqrt{2}$.



Selon une méthode rappelée dans la brochure APMEP nº 146 (2002) « Les Olympiades académiques de mathématiques 2002 », pages 98-99 :

$\mathcal{A}(x) = x\sqrt{100 - x^2}$, donc pour tout réel x de [0 ; 10], $\mathcal{A}(x) \geq 0$, donc $\mathcal{A}$ varie comme $\mathcal{A}^2$. $(\mathcal{A}(x))^2$ est donc le produit de deux nombres x^2 et $(100 - x^2)$ dont la somme est constante. $(\mathcal{A}(x))^2$ est donc maximum lorsque ces deux nombres sont égaux soit pour $x = 5\sqrt{2}$.

Solution « trigonométrique » :

L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin\hat{\mathrm{A}}$, soit $\sin\hat{\mathrm{A}}$. Cette aire est donc maximale lorsque $\sin\hat{\mathrm{A}}$ est maximum, c'est-à-dire lorsque $\hat{\mathrm{A}}$ est droit.