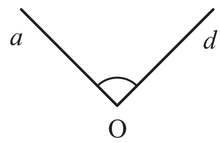
Le texte suivant nous a été proposé par Madame PHAN, médecin à Clermont-Ferrand. II propose une méthode originale pour construire, au compas et à la règle non graduée, mais « marquée » (voir article), une trisectrice puis une pentasectrice d'un angle donné. La rédaction de la justification des procédés de construction proposée par Madame PHAN n'est pas tout à fait « classique », mais nous avons choisi de la laisser en l'état, car elle témoigne d'une pratique originale mais rigoureuse des mathématiques par une « non spécialiste » ! Merci donc à Madame PHAN pour cette construction…
Une rédaction « classique » de cette étude, due à Raymond Raynaud, figure sur le site Internet de l'APMEP.
N.B. Bien entendu, malgré cette intéressante contribution, la trisection d'un angle à la règle non graduée et au compas reste impossible au 21e siècle. Le lecteur trouvera en annexe de l'article un commentaire de F. Lo Jacomo concernant le travail de Madame PHAN ; il pourra aussi se référer à l'article de Jean-Marie Arnaudiès et Pierre Delezoïde (Bulletin nº 446, p. 368 et 372 et nº 447, p. 510-513) et à la brochure APMEP nº 70 de Jean Aymès « Ces problèmes qui font les mathématiques : la trisection de l'angle » (100 pages, 9,90 €).

Tri- et penta-section d'un angle

Thi My Dung Phan

Problème 1 : La trisection d'un angle avec seulement compas et règle (non graduée, mais « marquée »)

1) La trisection

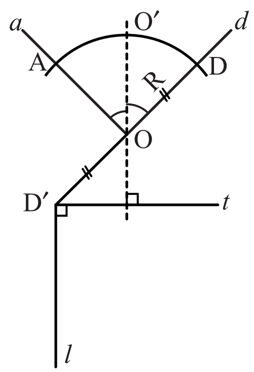


Soit l'angle $\widehat{aOd}$ à trisecter. On va passer de l'étape a) à l'étape b) comme suit :

Étape a)

– Construire l'arc $\overset{\frown}{AD}$, de centre O et de rayon R quelconque ($A \in [Oa)$, $D \in [Od)$).
– Construire le point D′ symétrique du point D par rapport au point O.

– Construire la bissectrice (OO′) de l'angle $\widehat{AOD}$.
– Construire la droite (D′*t*), perpendiculaire à la droite (OO′).
– Construire la droite (D′*l*), perpendiculaire à la droite (D′*t*).



Étape b)

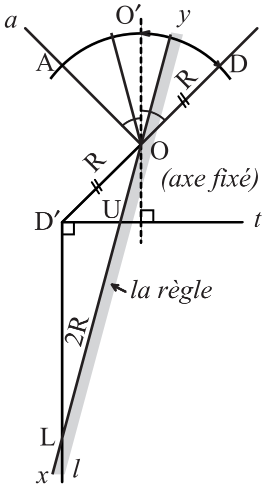
Deux repères L et U étant marqués sur la règle, tels que LU = 2R, faire glisser cette règle marquée de façon que :

– L soit sur (D′*l*) ;

– U soit sur (D′*t*) ;

– (LU) passe par O ;

comme sur la figure ci-contre.

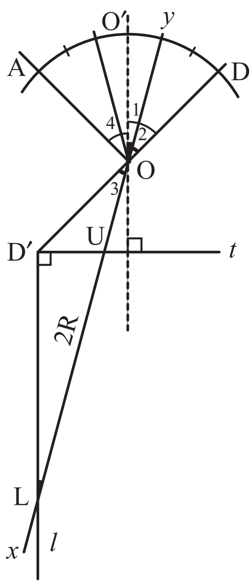


Nous allons montrer que (OL) est une des trisectrices de l'angle $\widehat{AOD}$.

2) Justification du fait que (OL) est une trisectrice de l'angle $\widehat{AOD}$

– Selon notre construction, on a : (OO′) perpendiculaire à (D′*t*) et (D′*l*) perpendiculaire à (D′*t*) : donc (D′*l*) est parallèle à (OO′),

et $\widehat{O_1} = \widehat{L}$ (angles correspondants).



– Dans le triangle D′UL ($\widehat{D'} = 90°$), on a :

$$D'L = UL\cos\widehat{D'LU} = UL\cos\widehat{L}$$

et donc :

$$D'L = 2R\cos\widehat{L} \qquad (1)$$

– Dans le triangle D′OL on a:

$$\frac{D'L}{\sin\widehat{O_3}} = \frac{OD'}{\sin\widehat{L}} \qquad (2)$$

avec

$$OD' = R$$

Remplaçons la mesure de D′L (d'après (1)) et celle de OD′ dans l'égalité (2), on a :

$$\frac{2R\cos\widehat{L}}{\sin\widehat{O_3}} = \frac{R}{\sin\widehat{L}}$$

soit

$$\sin\widehat{O_3} = 2\sin\widehat{L}\cos\widehat{L},$$

$$\sin\widehat{O_3} = \sin 2\widehat{L}$$

et enfin

$$\widehat{O_3} = 2\,\widehat{L}. \qquad (3)$$

Comme

$$\widehat{O_3} = \widehat{O_2} \qquad (4)$$

(angles opposés par le sommet), on a ((3) + (4)) :

$$\widehat{O_2} = 2\,\widehat{L}. \qquad (5)$$

Et comme $\widehat{L} = \widehat{O_1}$ (angles correspondants), on a finalement

$$\widehat{O_1} = \frac{1}{2}\,\widehat{O_2}.$$

Comme (OO′) est la bissectrice de l'angle $\widehat{a\mathrm{O}d}$, on en déduit :

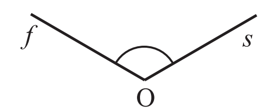
$$\widehat{O_1} = \frac{1}{3}\,\widehat{a\mathrm{O}d}.$$

Remarque : Nous ne trisectons ici que des angles inférieurs à 180°. Pour des angles plus grands, on peut les diviser en deux parties égales puis trisecter une de ces parties. La multiplication par deux de la mesure de l'angle obtenu se fait aisément au compas.

Problème 2. La pentasection d'un angle avec seulement compas et règle (non graduée, mais « marquée »)

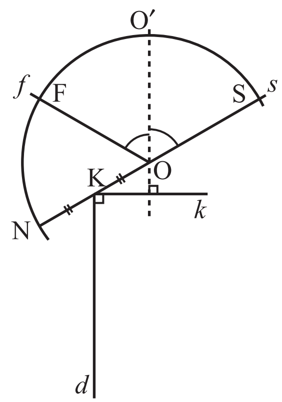
1) La pentasection

Soit l'angle $\widehat{f\mathrm{O}s}$ à pentasecter.
On va passer de l'étape a) à l'étape b) comme suit :



Étape a) (voir figure ci-contre)
– Sur la demi-droite [O*s*), placer un point S quelconque (distinct de O).
– Construire le point N symétrique de S par rapport à O.
– Construire le demi cercle de centre O et de rayon OS, d'intersection non vide avec]O*f*). Ce demi cercle coupe [O*f*) en F.

– Construire la bissectrice (OO′) de l'angle $\widehat{f\mathrm{O}s}$ (O′ appartient à l’arc $\overset{\frown}{\mathrm{FS}}$)
– Construire le point K milieu de [ON].
– Construire la droite (K*k*), perpendiculaire à (OO′), et la droite (K***d***) perpendiculaire à (K*k*) en K.



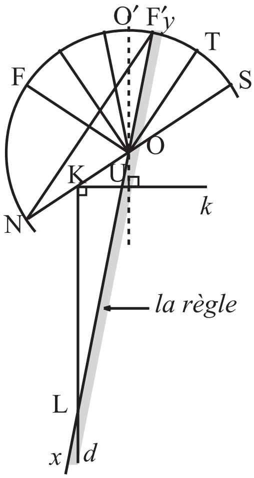
Étape b)

Soit L un point de [Kd), et U et F′ les points d'intersection de (OL) avec (Kk) et l'arc $\overset{\frown}{O'S}$ (voir figure).

Lorsque L varie sur [Kd), UL varie de R à $+\infty$. En faisant tourne la règle autour du point O, on peut donc trouver une position de (OL) telle que NF′ = UL.

Nous allons montrer que $\widehat{F'OS} = \frac{2}{5}\widehat{O}$. La bissectrice intérieure (OT) de $\widehat{F'OS}$ est alors telle que

$$\widehat{TOS} = \frac{1}{5}\widehat{O}.$$



2 Justification du fait que (OT) est une pentasectrice de l'angle $\widehat{FOS}$

$\widehat{NF'S} = 90°$ (angle inscrit interceptant le demi cercle).

Dans le triangle NF'S,

$$NF' = NS \cos \widehat{N}.$$

D'où:

$$NF' = 4\ OK \cos \widehat{N} \qquad (1)$$

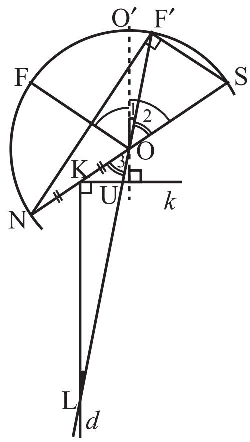
Or

$$\widehat{N} = \frac{1}{2}\widehat{O_3} \qquad (2)$$

($\widehat{O_3}$ angle au centre interceptant le même arc $\overset{\frown}{F'S}$ que l'angle $\widehat{N}$).

D'où ((1) + (2)) :

$$NF' = 4\,OK \cos \frac{\widehat{O_2}}{2} \qquad (3)$$



En outre, dans le triangle KUL (K = 90°),

$$KL = UL \cos \widehat{L}.$$

D'où

$$KL = NF' \cos \widehat{L} \qquad (4)$$

Dans le triangle KOL,

$$\frac{KL}{\sin \widehat{O_3}} = \frac{OK}{\sin \widehat{L}} \qquad (5)$$

Or

$$\widehat{O_3} = \widehat{O_2} \tag{6}$$

(angles opposés par le sommet). D'où ((5) + (6)) :

$$\frac{KL}{\sin \widehat{O_2}} = \frac{OK}{\sin \widehat{L}} \tag{7}$$

et donc

$$KL = OK \frac{\sin \widehat{O_2}}{\sin \widehat{L}} \tag{8}$$

((4) + (8)) donne :

$$NF' \cos \widehat{L} = OK \frac{\sin \widehat{O_2}}{\sin \widehat{L}} \tag{9}$$

soit ((3) + (9)) :

$$4OK \cos \frac{\widehat{O_2}}{2} \cos \widehat{L} = OK \frac{\sin \widehat{O_2}}{\sin \widehat{L}}$$

d'où

$$4 \cos \widehat{L} \sin \widehat{L} = \frac{\sin \widehat{O_2}}{\cos \frac{\widehat{O_2}}{2}}$$

et donc

$$2 \sin 2\widehat{L} = 2 \sin \frac{\widehat{O_2}}{2}.$$

D'où

$$2\widehat{L} = \frac{1}{2}\widehat{O_2}.$$

Comme

$$\widehat{O_1} = \widehat{L}$$

(angles correspondants), on obtient :

$$\widehat{O_2} = \frac{2}{5}\widehat{O}$$

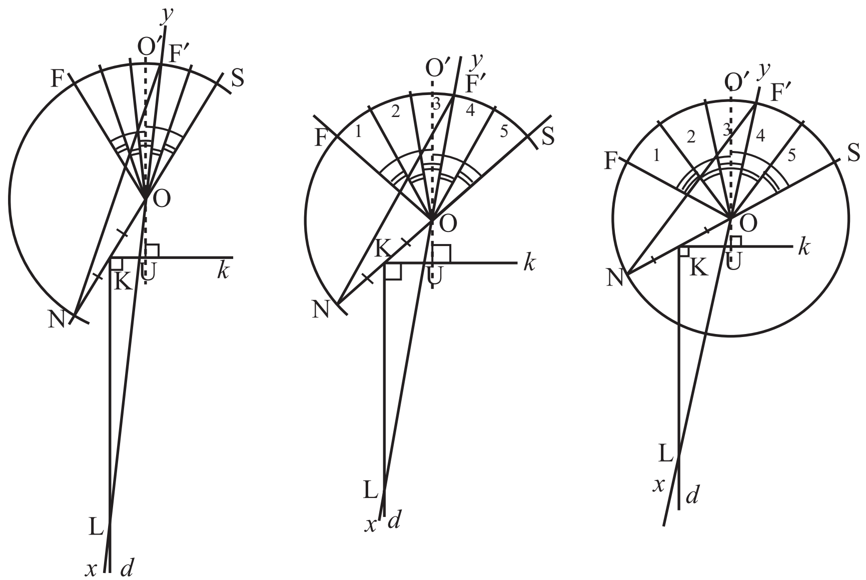
et

$$\frac{1}{2}\widehat{O_2} = \frac{1}{5}\widehat{O}.$$

((DT) est bien une pentasectrice de l'angle fOs.

Remarque : on ne pentasecte ici que des angles inférieurs à 180°. Pour des angles plus grands, on peut les diviser par deux, puis construire une pentasectrice de l'angle réduit de moitié comme ci-dessus.

Annexe : Quelques exemples de pentasection



$$NF' = UL$$

$$\widehat{O_1} = \widehat{O_2} = \widehat{O_3} = \widehat{O_4} = \widehat{O_5} = \frac{1}{5}\widehat{O}$$

Commentaire (de F. Lo Jacomo)

L'auteur cherche (implicitement) l'intersection d'une courbe d'équation polaire

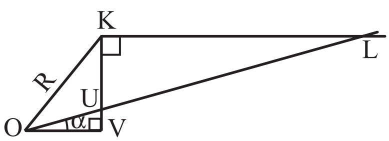
$$\rho = a + \frac{b}{\cos\theta}$$

avec une horizontale.

Les courbes de ce genre sont nombreuses, et certaines (par exemple la trisectrice de Mac Laurin) permettent effectivement de triséquer un angle. Celle de Madame Phan n'est pas moins intéressante que les autres ; voici le principe de ses constructions :

Si $\widehat{\text{VOK}} = k\alpha$, alors :

$$\text{UL} = \frac{\text{R}\sin k\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\text{R}\cos k\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\text{R}\sin(k-1)\alpha}{\sin 2\alpha}$$



Pour $k = 3$, il suffit de faire tourner la droite jusqu'à ce que UL = 2R, et, pour $k = 5$, jusqu'à ce que UL = 4R cos 2α, corde d'un cercle de rayon 2R.