L'induction chez les philosophes et dans la pratique mathématique

Robert Vidal(*)

Nous allons étudier dans cet article la notion d'induction que beaucoup de personnes croient réservée aux sciences de la Nature et montrer qu'elle a une place non négligeable en mathématiques, à côté de la déduction. Dans un premier temps, nous verrons l'étude qu'en font des philosophes tels qu'Aristote, Al-Jurjani, Arnauld et Nicole ; dans un deuxième temps, nous mettrons en évidence la pratique des mathématiciens, en essayant de comprendre les raisons d'une induction fausse émise par Fermat.

I.1. Le problème de l'induction chez Aristote

Aristote fait dans les *Seconds analytiques* la théorie du raisonnement déductif ou syllogisme qu'il définit ainsi dans les *Premiers analytiques* :

> « Le *syllogisme* est un discours dans lequel, certaines choses étant posées, quelque chose d'autre que ces données en résulte nécessairement par le seul fait de ces données. »(1)

La science hypothético-déductive, celle d'Euclide en particulier, est basée sur de tels syllogismes qui procèdent des prémisses – axiomes ou thèses – à leurs conséquences nécessaires, à condition que ces prémisses soient vraies. Le problème qui se pose est celui de la connaissance des principes premiers :

> « Certains soutiennent qu'en raison de l'obligation où nous sommes de connaître les prémisses premières, il ne semble pas y avoir de connaissance scientifique. Pour d'autres, il y en a bien une, mais toutes les vérités sont susceptibles de démonstration. »(2)

Aristote réfute ces deux arguments en montrant que la démonstration ne peut pas être le seul principe de connaissance scientifique. En effet, la démonstration doit reposer sur des principes premiers connus sans démonstration, sinon il faudrait que ces principes eux-mêmes soient démontrés à l'aide de principes antérieurs et ainsi de suite à l'infini. Il refuse cet argument de la *régression à l'infini*, ainsi que l'idée associée que toute connaissance serait démonstration. Il en arrive à la conclusion suivante :

> « Notre doctrine à nous, est que toute science n'est pas démonstrative, mais que celle des propositions immédiates est, au contraire, indépendante de la démonstration. »(3)

En quoi consiste donc ce nouvel accès à la connaissance ? Dans les *Topiques*, Aristote le définit ainsi :

(*) Lycée Dr Lacroix, Rue Gay-Lussac, 11100 Narbonne.

(1) Aristote, *Premiers analytiques*, Paris, Vrin, 1966, traduction de J. Tricot, p. 4-5.

(2) Aristote, *Seconds analytiques*, Paris, Vrin, 1966 , traduction de J. Tricot, p. 15.

(3) *Ibid.*, p. 16-17.

> « […] il faut déterminer le nombre des espèces de raisonnements dialectiques. Il y a, d'une part, l'induction, et, de l'autre, le raisonnement. – Ce qu'est le raisonnement, nous l'avons déjà dit plus haut. – Quant à l'induction, c'est le passage des cas particuliers à l'universel : si, par exemple, le plus habile pilote est celui qui sait, et s'il en est de même pour le cocher, alors, d'une façon générale, c'est l'homme qui sait qui, en chaque cas, est le meilleur. »(4)

L'induction apparaît ainsi comme un procédé connu par le moyen de la sensation, allant du particulier à l'universel, contrairement à la démonstration qui est le mouvement inverse de la pensée, allant de l'universel au particulier. À quelle condition ce procédé est-il sûr ?

Dans les *Premiers analytiques*, nous trouvons un exemple de tel raisonnement :

> « Admettons que A signifie le fait de *vivre longtemps*, B le fait d'être *dépourvu de fiel*, et Γ *les individus à longue vie*, soit *homme*, *cheval*, *mulet*. A est vérifié pour la totalité de Γ, car homme, cheval, mulet vivent longtemps. Mais B aussi (le fait d'être *dépourvu de fiel*) est vérifié pour tout Γ. Si donc Γ est remplacé par B, et que B n'a pas plus d'extension que Γ, nécessairement A est vérifié pour B. »(5)

Le syllogisme inductif est donc le suivant :

– L'homme, le cheval et le mulet vivent longtemps.
– Tous les animaux sans fiel sont l'homme, le cheval et le mulet.
– Tous les animaux sans fiel vivent longtemps.

Le raisonnement inductif aboutit à une propriété universelle qui est la première proposition du syllogisme déductif suivant :

– Tous les animaux sans fiel vivent longtemps.
– L'homme, le cheval et le mulet sont sans fiel.
– L'homme, le cheval et le mulet vivent longtemps.

Aristote insiste sur la condition indispensable pour que ce procédé soit logiquement valide : c'est que « homme, cheval, mulet » constituent la totalité des animaux sans fiel :

> « Il est indispensable de concevoir Γ comme composé de tous les êtres particuliers, car l'induction procède par l'énumération d'eux tous. »(6)

L'induction est alors un passage du fait à la loi, puisqu'elle fournit le principe explicatif des faits observés, c'est-à-dire la cause pour laquelle l'homme, le cheval et le mulet vivent longtemps. Toutefois l'exemple même donné dans les *Topiques*, que nous avons cité précédemment, sur « l'homme qui sait », montre bien combien cette nécessité d'une énumération exhaustive (ici de tous les métiers) pose problème. Examinons ce problème posé par la démarche inductive : comment peut-on en effet s'assurer que, hors les êtres vivants énumérés, homme, cheval, mulet, il n'y en a pas d'autres qui seraient sans fiel, censé être porteur d'impuretés, et ne vivraient pas longtemps ? Dans une étude fort intéressante consacrée au raisonnement scientifique chez Aristote, Jacqueline Guichard résume la thèse d'Aristote en la matière :

---

(4) Aristote, *Topiques*, Paris, Vrin, 1950, traduction de J. Tricot, p. 28-29.
(5) Aristote, *Premiers analytiques*, *op. cit.*, p. 313, traduction modifiée sur les indications de J.P. Friedelmeyer.
(6) *Ibid.*, p. 313.

> « Il y a […] en l'homme une puissance de penser qui lui permet de saisir l'unité dans la multiplicité répétée des mêmes perceptions sensibles, le genre dans l'individuel ou l'universel dans le singulier. Ainsi, quand nous percevons l'individu Callias, nous l'identifions en même temps comme homme. L'âme humaine est constituée de telle sorte que non seulement la sensation persiste sous forme de souvenir, mais encore que la répétition d'une même chose ne constitue pas une multiplicité de souvenirs mais a l'unité d'une expérience dans laquelle l'âme peut saisir ce qui en constitue le principe, la notion universelle. »(7)

La démarche inductive peut donc être amplifiante, étendant à tout un genre ce qui est observé pour quelques-unes de ses espèces, et elle apparaît alors comme liée à l'intuition et nous aurons maintes fois l'occasion de constater combien elle peut induire en erreur les mathématiciens. Nous allons montrer comment les philosophes arabes, à la suite d'Aristote, insistent sur cet aspect négatif de l'induction.

I.2. Le problème de l'induction chez Al-Jurjani (mort en 1413)

Citons un texte du philosophe Al-Jurjani extrait du *Kitab at-Ta^{c}rifat* [*Livre des définitions*] :

> « C'est le jugement sur le tout à cause de sa présence dans le plus grand nombre de ses parties.
> S'il a dit dans le plus grand nombre de ses parties, c'est parce que si le jugement < portait > sur toutes ses parties, il ne serait pas une induction mais un syllogisme partitionné. Et ce < jugement > est dit induction parce que ses prémisses ne se réalisent que par le passage en revue de ses parties, comme lorsque nous disons : l'animal bouge sa mâchoire inférieure pendant la mastication, parce que l'homme, les bêtes de somme, les lions sont ainsi. C'est une induction incomplète qui n'aboutit pas à la certitude parce qu'elle autorise l'existence d'un < cas > particulier non examiné, comme le crocodile, et dont le jugement serait contraire à ce qui a été examiné car il bouge sa mâchoire supérieure pendant la mastication. »(8)

Al-Jurjani écarte de sa définition ce qu'il appelle « syllogisme partitionné », c'est-à-dire ce que recommandait Aristote dans les *Premiers analytiques* :

> « […] il est indispensable de concevoir Γ < le mineur > comme composé de tous les êtres particuliers, car l'induction procède de l'énumération d'eux tous. »(9)

Il envisage donc une induction amplifiante et il insiste sur le fait que l'énumération des cas, ici les animaux qui mastiquent avec la mâchoire inférieure, nous renvoie à un savoir qui dépend de l'expérience. Cette expérience ne permet de fonder qu'un savoir limité à la particularité des cas connus. La donnée, exotique pour nous, du cas du crocodile nous montre combien cette induction amplifiante est risquée.
Pourquoi Al-Jurjani écarte-t-il le « syllogisme partitionné » ? Peut-être parce qu'il est logiquement valide, alors que l'induction incomplète ne l'est pas ; peut-être aussi parce que ce « syllogisme partitionné » est d'une utilisation rare, comme lorsqu'on

---

(7) Jacqueline Guichard in *Préludes à la récurrence dans l'antiquité*, IREM de Toulouse, 2002, p. 30.
(8) cité par Ahmed Djebbar in *Matériaux pour l'étude des démarches inductives et combinatoires dans la science arabe*, Paris, I.R.E.M, 1997, p. 7.
(9) Aristote, *Premiers analytiques*, *op.cit.*, p. 313.

dit tout corps est ou bien animal, ou bien végétal, ou bien minéral. Notons d'ailleurs, comme le signale Robert Blanché, que :

> « au fond, c'est déjà à cette sorte d'induction que se rapporte l'induction sur la longévité des sans-fiel, car Aristote sait fort bien, puisqu'il en mentionne quelques-unes dans ses écrits d'histoire naturelle, qu'il existe d'autres espèces d'animaux sans fiel que l'homme, le cheval et le mulet. »[10]

S'il insiste sur les dangers de l'« induction incomplète », c'est certainement parce que la pratique de ce raisonnement est suffisamment répandue dans la science arabe pour qu'on ait pu en voir les dangers. Il est en effet à noter que l'induction ne vise que l'opinion puisqu'elle permet la contradiction, comme dans le cas du crocodile. Ces mêmes critiques se retrouvent dans *La logique ou l'Art de penser* d'Arnauld et Nicole.

I.3. L'induction chez les philosophes du XVII^{e} siècle

Dans le chapitre XIX de la *Logique*, intitulé « *Des diverses manières de mal raisonner, que l'on appelle sophismes* », les auteurs abordent le défaut suivant :
« IX. *Tirer une conclusion générale d'une induction défectueuse.* »

Ils définissent ainsi l'induction :

> « On appelle induction, lorsque la recherche de plusieurs choses particulières nous mène à la connaissance d'une vérité générale. Ainsi lorsqu'on a éprouvé sur beaucoup de mers que l'eau en est salée, & sur beaucoup de rivières que l'eau en est douce, on conclut généralement que l'eau de mer est salée, & celle des rivières douce. »[11]

Comme Aristote, Arnauld et Nicole insistent sur le fait que les principes premiers sont forcément connus par induction :

> « C'est même par là que toutes nos connaissances commencent, parce que les choses singulières se présentent à nous avant les universelles, quoique ensuite les universelles servent à connaître les singulières. »[12]

On retrouve également chez ces auteurs la mise en évidence de la capacité, dont parlait Jacqueline Guichard, qu'a tout homme de saisir la notion universelle dans la répétition d'une expérience :

> « Mais ce n'est pas néanmoins l'examen particulier de tous les triangles qui m'a fait conclure généralement & certainement de tous, que l'espace qu'ils comprennent est égal à celui du rectangle de toute leur base & de la moitié de leur hauteur (car cet examen serait impossible), mais la seule considération de ce qui est renfermé dans l'idée de triangle que je trouve dans mon esprit. »[13]

Les auteurs terminent ce paragraphe par la mise en garde suivante :

> « Quoi qu'il en soit, réservant en un autre endroit de traiter de cette matière, il suffit de dire ici que les inductions défectueuses, c'est à dire, qui ne sont pas entières, font souvent tomber en erreur : & je me contenterai d'en rapporter un exemple remarquable. »

(10) Robert Blanché, *Le raisonnement*, Paris, P.U.F, 1973, p. 163.
(11) A. Arnauld et P. Nicole, *La logique ou l'art de penser*, Paris, Presses universitaires de France, 1965, p. 258.
(12) *Ibid.*, p. 259.
(13) *Ibid.*, p. 259.

Suit un exemple infirmant de multiples expériences de physique liées aux pompes aspirantes. Corrélativement, dans le paragraphe IV du même chapitre, Arnauld et Nicole mettent en garde sur le problème du *dénombrement imparfait*, qui est à la source, comme nous l'avons vu, de nombreuses erreurs dans des raisonnements par induction :

> « Il n'y a guère de défaut de raisonnement où les personnes habiles tombent plus facilement qu'en celui de faire des dénombrements imparfaits, & de ne considérer pas assez toutes les manières dont une chose peut être ou peut arriver, ce qui leur fait conclure témérairement, ou qu'elle n'est pas, parce qu'elle n'est pas d'une certaine manière, quoiqu'elle puisse être d'une autre, ou qu'elle est de telle & telle façon, quoiqu'elle puisse être encore d'une autre manière qu'ils n'ont pas considérée. »[14]

Considérons, pour terminer cette analyse de l'induction chez les philosophes des contemporains d'Euclide à ceux de Pascal, la position de Descartes. Dans la septième règle des *Règles pour la direction de l'esprit*, on trouve en effet le passage suivant relatif à l'induction :

> « Si enfin je veux montrer par énumération que la surface du cercle est plus grande que toutes celles des autres figures de périmètre égal, il n'est pas nécessaire de passer en revue toutes les figures, mais il suffit de faire cette démonstration sur quelques-unes en particulier, pour tirer par induction la même conclusion au sujet de toutes les autres. »[15]

Descartes semble faire fi des conseils d'Arnauld et Nicole et on peut s'assurer que sa pratique de mathématicien est en tout point conforme à son discours de philosophe, en particulier en théorie des nombres[16]. Toutefois, cette citation est la seule que nous ayons trouvée dans les *Regulae* mais elle est intéressante au niveau de la pratique mathématique que nous allons à présent examiner.

II. Une induction fausse de Fermat

Fermat a conscience de ce problème des inductions fausses puisqu'il écrit à ce sujet dans une lettre en 1657 :

> « on pourrait proposer telle chose et prendre telle règle pour la trouver qu'elle serait bonne à plusieurs particuliers et néanmoins serait fausse en effet et non universelle. »

Dans cette même lettre il reproche au « sieur Wallis » de raisonner trop souvent par « induction ». Et pourtant il émet lui-même une hypothèse qui se révélera fausse. Il considère les nombres F_n de la forme $2^{2^n} + 1$. Dans une lettre adressée à Frénicle d'août 1640, Fermat parle de ses découvertes sur les puissances de 2 :

« 1) Soit par exemple la progression double depuis le binaire avec ses exposants au-dessus :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536

Je dis que, si vous augmentez les nombres de la progression de l'unité, et que vous fassiez 3, 5, 9, 17, etc., tous les dits nombres progressifs ainsi augmentés, qui se trouveront avoir

(14) Ibid., p. 250-251.

(15) René Descartes, *Règles pour la direction de l'esprit* in *Œuvres philosophiques*, t. 1, Garnier, 1963, p. 113.

(16) voir la lettre à Mersenne du 31 mars 1638, citée par André Warusfel et alii in *Mathématiques, cours et exercices, Arithmétique*, Paris, Vuibert, 2002 (co-diffusion APMEP).

> pour exposants des nombres qui ne sont pas de la dite progression double, seront nombres composés.
> 2) Bien qu’on puisse faire une anatomie particulière qui est trop longue à décrire, il suffit de vous faire comprendre, dans l’exemple qui suit, la proposition que j’y ai faite : Soit le nombre progressif augmenté de l’unité 8 193, duquel l’exposant est 13 nombre premier. Je dis que, si vous divisez 8 193 par 3, le quotient ne pourra être divisé que par un nombre qui surpasse de l’unité ou le double de 13 exposant susdit, ou un multiple dudit double de 13, etc., à l’infini. Que si l’exposant est un nombre composé, qui pourtant ne soit pas un de ceux de la progression double, je puis trouver tous les diviseurs fort aisément.
> 3) Mais voici ce que j’admire le plus : c’est que je suis quasi persuadé que tous les nombres progressifs augmentés de l'unité, desquels les exposants sont des nombres de la progression double, sont nombres premiers, comme
> 3, 5, 17, 257, 65 537, 4 294 967 297
> et le suivant de 20 lettres
> 18 446 744 073 709 551 617 ; etc.
> Je n’en ai pas la démonstration exacte, mais j’ai exclu si grande quantité de diviseurs par démonstrations infaillibles, et j’ai de si grandes lumières, qui établissent ma pensée, que j’aurais peine à me dédire. »[17]

Le troisième paragraphe est celui qui va nous intéresser.
Notons que dans une lettre ultérieure du 18 octobre 1640 à un auteur anonyme, sûrement Frénicle, il écrira :

> « Comme je ne suis pas capable de m’attribuer plus que je ne sais, je dis avec même franchise ce que je ne sais pas ; que je n’ai pu encore démontrer l’exclusion de tous les diviseurs en cette belle proposition que je vous avez envoyée, et que vous m’avez confirmée touchant les nombres 3, 5, 17, 257, 65 537, … ; car, bien que je réduise l’exclusion à la plupart des nombres, et que j’aie même des raisons probables pour le reste, je n’ai pu encore démontrer nécessairement la vérité de cette proposition. »[18]

Il est à noter que cette induction conduit à un résultat faux comme le prouvera Euler un siècle plus tard, en 1732. En effet le sixième de ces nombres : $2^{32} + 1$ indiqué par Fermat comme premier est de fait divisible par 641.
En fait, on sait à présent qu’il n’y a pas de nombres premiers parmi les nombres « de Fermat » pour n compris entre 5 et 16 et on se demande s’il en existe d’autres que ceux mis en évidence par Fermat.

Premier essai d’explication : le sens de l’esthétique

Essayons de comprendre, sinon d’expliquer, pourquoi Fermat a pu ainsi conjecturer ce résultat qui s’est ensuite révélé faux. Certes les calculs pour prouver qu’un nombre est premier étaient fort longs sans les outils actuels (ordinateur ou calculatrice), mais nous pensons qu’il y a aussi une explication d’un autre ordre, c’est-à-dire d’un ordre esthétique. Nous pouvons, comme le fait François le Lionnais dans *Les grands courants de la pensée mathématique*, parler ici de beauté classique dans le sens où lorsque l’on considère la suite des nombres premiers, c’est d’abord un certain désordre qui apparaît. Fermat découvre une formule simple au milieu de ce désordre apparent et cela lui apparaît comme une vérité. « Là, tout n’est qu’ordre et beauté. »

---

(17) Pierre Fermat, *Œuvres*, Paris, Gauthier-Villars, 1896, p. 205.
(18) Pierre de Fermat, *Précis des œuvres mathématiques*, Paris, J. Gabay, 1989, p. 142-143.

Comme le dit F. Le Lionnais,

> « C'est surtout lorsque nous nous attendions à un certain désordre que la régularité nous frappe et nous ravit ; don d'autant plus délectable qu'il semble aux uns immérité et aux autres conquis de haute lutte. »(19)

Dans une autre lettre adressée à Mersenne, de juin 1640, Fermat parle dans des termes tout à fait semblables de ses recherches sur les nombres, dits justement de Mersenne, de la forme $2^n - 1$, forme que l'on peut considérer comme une forme simple :

> « Voici trois propositions que j'ai trouvées, sur lesquelles j'espère de faire un grand bâtiment. »(20)

Remarquons que cette formulation fait penser à la distinction habituelle entre le classique et le baroque, Fermat se situant dans le premier cadre, le cadre classique :

> « Le Classique : des formes qui disciplinent des forces.
> Le Baroque : des forces qui tordent des formes. »

Un peu plus loin dans sa lettre, Fermat s'exprime ainsi :

> « Voilà trois fort belles propositions que j'ai trouvées et prouvées non sans peine : […] et sans doute ces propositions passeront pour très belles dans l'esprit de ceux qui n'ont pas beaucoup épluché ces matières … »(21)

Comme l'explique James W. McAllister(22), quand une théorie se révèle en accord avec l'expérience alors ses propriétés esthétiques sont investies d'une valeur de vérité. Il en va ainsi pour la simplicité. Fermat travaille sur les nombres parfaits (égaux à la somme de leurs diviseurs stricts) et les caractérise par les nombres de Mersenne, de la forme $2^n - 1$, forme d'une grande simplicité. Le succès qu'il rencontre avec ces nombres induit chez lui l'idée qu'une formule simple a une certaine valeur de vérité, parce qu'il a déjà constaté maintes fois ce phénomène. Une formule simple ou symétrique semble être un critère de vérité. On est proche de la très vieille doctrine de l'unité des vertus, le « kalos kagathos » des Grecs, (à la fois beau à regarder et bon dans ses actions) ou la devise de la Renaissance « Pulchritudo splendor veritatis » (La beauté est la splendeur de la vérité). Nous voyons ici avec Fermat que cette valeur esthétique se révèle cause d'erreurs.

Ce processus inductif qui consiste à penser que, parce qu'on a trouvé des formules simples ou symétriques qui représentent bien la réalité, il en ira de même dans tous les cas est de nature conservatrice. Cette induction renvoie à l'idée que le futur sera identique au passé. On voit ici qu'il ne faut pas que cela se fige en tradition. En effet, la régularité, la simplicité sont parfois absentes d'un même domaine des mathématiques. Songeons par exemple à l'étude des polygones et polyèdres réguliers. Considérons en effet le nombre de ces objets dans les différents espaces de dimensions 2, 3, 4, …, n. Il y en a une infinité en dimension deux. Il n'y en a que cinq, les cinq solides platoniciens, en dimension trois. Il y en a six en dimension

(19) François Le Lionnais, *Les grands courants de la pensée mathématique*, Paris, Hermann, 1998, p. 440.
(20) Pierre Fermat, *Œuvres*, Paris, Gauthier-Villars, 1896, p. 198.
(21) *Ibid.*, p. 198-199.
(22) *La Recherche* ; n° 324, octobre 1999.

quatre. Il y en a trois dans les dimensions supérieures, relative aridité. On constate bien des exceptions dans les premières dimensions. La beauté de la structure des Mathématiques ne garantit en rien leur vérité ou même leur utilité. Toutefois, comme on peut le constater en voyant l'enthousiasme d'un Fermat, et, comme le dit François le Lionnais :

> « elle apporte aux uns le pouvoir de vivre des heures incomparables, aux autres, la certitude que les mathématiques continueront à être cultivées pour le plus grand profit de tous et la plus grande gloire de l'aventure humaine[(23)] par des hommes qui n'en espèrent pour eux-mêmes aucun profit matériel. »[(24)]

Une explication plus théorique

Une autre explication peut être donnée de l'erreur de Fermat, mise à part l'explication d'André Weil d'une erreur de calcul de Fermat :

> « One may imagine that, when he first conceived the conjecture, he was so carried away by his enthusiasm that he made a numerical error, and then never checked his calculation again. »[(25)]

> « On pourrait imaginer que, lorsqu'il conçut pour la première fois sa conjecture, il fut si emporté par son enthousiasme qu'il commit une erreur de calcul, et ne revérifia plus ses calculs par la suite. »[(26)]

Comme l'explique Sierpinski[(27)], Fermat a pu tirer son théorème de l'inégalité $n + 1 \leq 2^n$ (qui se démontre aisément par récurrence). D'où il déduit que : 2^{n+1} divise 2^{2^n} pour tout entier n non nul. Or $F_n = 2^{2^n} + 1$ divise $2^{2^{n+1}} - 1$ (règle $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$). Donc F_n divise $2^{2^{2^n}} - 1$ qui divise son double : $2^{F_n} - 2$. On a donc F_n divise $2^{F_n} - 2$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ et Fermat a pu conclure au fait que les F_n étaient premiers en utilisant un vieux résultat que l'on a prétendu être connu des Chinois il y a plus de 25 siècles : le « théorème » chinois[(28)].

> « Si n est un entier supérieur à 1, n est premier si et seulement si $2^n - 2$ est divisible par n ».

Malheureusement ce résultat est lui-même faux et provient d'une induction incomplète. Il est vrai pour tous les entiers inférieurs à 341 mais est faux pour 341 : $341 = 11 \times 31$ et pourtant

$$\begin{cases} 2^{341} - 2 = \left(2^5\right)^{68} \times 2 - 2 \equiv (-1)^{68} \times 2 - 2 \equiv 0 \pmod{11} \\ 2^{341} - 2 = \left(2^5\right)^{68} \times 2 - 2 \equiv (1)^{68} \times 2 - 2 \equiv 0 \pmod{31} \end{cases}$$

(23) Il est intéressant de remarquer la similitude avec le *Ad majorem Dei gloriam* d'Ignace de Loyola.
(24) François Le Lionnais, *op.cit.*, p. 458.
(25) André Weil, *Number theory, An approach through history, From Hammurapi to Legendre*, Birkhauser, 1984, p. 58.
(26) traduction libre.
(27) W. Sierpinski, *L'induction incomplète dans la théorie des nombres*, Acta Mathematica, Volume XXVIII, N° 1.
(28) voir l'article de Jean de Biasi, *Les nombres de Fermat*, Bulletin A.P.M.E.P n° 313, avril 1978.

d'où l'on déduit

$$2^{341} - 2 \equiv 0 \pmod{341}.$$

Conclusion

Nous ne voudrions pas que reste à l'esprit de nos lecteurs le seul exemple négatif dû à Fermat que nous venons d'étudier. L'induction est la dernière étape de la démarche expérimentale bien connue dans les sciences de la Nature, mais néanmoins présente en mathématiques. Elle y est d'ailleurs de plus en plus importante avec l'avènement des ordinateurs et ceci confirme en tous points ce qu'en disait Charles Hermite au début du siècle dernier :

> « On peut néanmoins, à l'égard des procédés intellectuels propres aux géomètres, faire cette remarque fort simple, que justifiera l'histoire même de la science, *c'est que l'observation y tient une place importante et y joue un grand rôle. Toutes les branches des mathématiques fournissent des preuves à l'appui de cette assertion* […]. »(29)

En mathématiques, l'induction se traduit par l'énoncé d'une conjecture, susceptible d'être confirmée ou infirmée par un raisonnement ; dans le premier cas cette conjecture devient un théorème, définitivement vrai. Dans le cas des sciences de la Nature, l'induction débouche sur l'énoncé d'une hypothèse, susceptible d'être confirmée ou infirmée par de nouvelles expériences ; dans le premier cas cette hypothèse devient une loi, provisoirement vraie.

Bibliographie principale

[1] Aristote,
Premiers analytiques, Paris, Vrin, 1966, traduction de J. Tricot.
Seconds analytiques, Paris, Vrin, 1966 , traduction de J. Tricot.

[2] A. Arnauld et P. Nicole, *La logique ou l'art de penser*, Paris, Presses universitaires de France, 1965.

[3] Robert Blanché, *Le raisonnement*, Paris, P.U.F, 1973.

[4] Ahmed Djebbar in *Matériaux pour l'étude des démarches inductives et combinatoires dans la science arabe*, Paris, I.R.E.M, 1997.

[5] Pierre Fermat, *Œuvres*, Paris, Gauthier-Villars, 1896.

[6] Jacqueline Guichard et autres auteurs in *Préludes à la récurrence dans l'antiquité*, IREM de Toulouse, 2002.

[7] François Le Lionnais, *Les grands courants de la pensée mathématique*, Paris, Hermann, 1998.

[8] Robert Vidal, thèse de doctorat de philosophie sous la direction de D. Parrochia, *Étude historique et critique de méthodes de démonstration en arithmétique*, à paraître, Université Jean Moulin, Lyon III.

(29) Charles Hermite, *Œuvres complètes*, Tome IV, Paris, Gauthier-Villars, 1917, p. 586.