De l'intuition à l'argumentation, est-il possible d'apprendre à raisonner ?(*)

Philippe Lombard(**)

Nil sapientiae odiosius acumine nimio(1)

Je voudrais vous parler d'une collégienne qui pourrait s'appeler *Julie Lamalchance*… « *Lamalchance* » n'est évidemment pas son vrai nom, mais la petite *Julie* est une véritable élève de quatrième d'un collège de Montpellier et, comme j'ai bien dû changer son nom, je lui ai choisi un pseudonyme en rapport avec notre sujet. Vous allez d'ailleurs voir que celui que j'ai retenu résume assez bien le grand nombre de problèmes que nous rencontrons tous – élèves ou professeurs – avec l'apprentissage du raisonnement et de la démonstration, alors même que cet apprentissage est devenu l'un des leitmotiv du théâtre qui se joue tous les jours dans l'enseignement des mathématiques.

Côté cour, en effet, les mathématiciens professionnels semblent bien en peine d'expliquer au grand public l'utilité de leur discipline, si bien que si vous leur demandez : « à quoi donc peuvent bien servir les mathématiques ? », ils vous répondent le plus souvent qu'il y en a beaucoup dans les cartes bancaires ou la cryptographie, qu'il y en aussi énormément dans les fours à micro-ondes, les téléphones portables, la météorologie ou les cours de la Bourse… Certains mêmes ajouteront sans doute timidement à cette liste quelques retombées pratiques en matière de sciences physiques – civiles ou militaires… – mais la plupart ne sauront absolument pas vous dire en quoi peuvent bien consister exactement toutes ces merveilleuses utilisations !

Aux autres, en quelque sorte, de mettre en évidence et de s'extasier sur la « déraisonnable efficacité des mathématiques » ! Les mathématiciens se contentent quant à eux de penser que la « précieuse inutilité » de leur science les place naturellement au centre d'une foule d'applications possibles et que cela les dispense de justifier de sa pertinence. Comment s'étonner, dès lors, que côté jardin les professeurs se sentent très souvent incapables de convaincre leurs élèves de l'obligation qui leur est faite d'apprendre l'algèbre, la géométrie ou l'analyse ? Quand il ne s'agit pas, tout simplement, de la nécessité d'apprendre à compter ou calculer !

(*) Conférence au Colloque de Metz, 10 octobre 2003.

(**) Irem de Lorraine & Archives Poincaré.

(1) « Rien n'est plus détestable pour la sagesse qu'une finesse excessive ». Maxime de Sénèque citée par Edgar Poe dans ses « Histoires extraordinaires ».

Ils s'abritent alors derrière des généralités particulièrement vagues et mystérieuses, au premier rang desquelles trônent invariablement des mots comme *pluridisciplinarité* ou *transversalité*, ainsi que tous les piliers rebattus de la pédagogie à la mode. Les professeurs d'aujourd'hui, s'ils ne se contentent pas de se retirer purement et simplement dans leurs retranchements ou dans leur tour d'ivoire, ne semblent capables de résumer l'intérêt scolaire des mathématiques que sous quelque slogan du genre : « les mathématiques servent à structurer l'esprit »… et, cette fois encore, leur *précieuse inutilité* en ferait justement le support idéal pour l'apprentissage du *sens* et du *raisonnement*…

Disons-le donc brutalement : les maths serviraient uniquement à nous apprendre à raisonner ! Pourtant, ce double paradoxe n'est pas mince ! D'une part ce ne seraient pas vraiment les contenus du cours de mathématiques qui compteraient, mais une sorte de « musique de fond » apportant à chacun les secrets du penser juste… Et d'autre part les professeurs de mathématiques (contrairement aux idées les mieux ancrées…) ne chercheraient pas à sélectionner les élèves les plus aptes à poursuivre des études vers les sciences « dures », mais passeraient leur temps à apprendre efficacement à raisonner à chacun d'entre eux…

Plus personne ne se rappellerait-il donc désormais le fait qu'il n'y a pas si longtemps encore, les « forts en maths » passaient (à tort ou à raison) pour plus intelligents que la moyenne ? Les études à dominante mathématique ne seraient-elles plus réservées (dans la pratique) qu'à ceux qui ont la « bosse des maths » ? L'algèbre, la démonstration et l'arithmétique ne seraient-elle plus des disciplines sélectives propres à séparer ceux qui « savent raisonner » de ceux qui ne feront jamais partie de l'élite scientifique ?

Et, pour celles de ces petites têtes blondes qui survivent dans les sections nobles du lycée, aurait-on définitivement oublié, d'un côté, ces professeurs de latin qui, à force d'enlever des points pour chaque faute, rendaient des copies avec des notes négatives… et, de l'autre, ces professeurs de mathématiques pour lesquels le « raisonnement peut bien être juste » mais pour qui une minuscule faute de calcul, une erreur dérisoire de rédaction ou même de présentation, conduisent irrémédiablement à un « zéro pour la question » ? Les salles de professeurs, enfin, ne résonneraient-elles plus de lamentations du genre « ils ne veulent plus apprendre » ou « ils ne savent même plus raisonner » trahissant l'impuissance désespérée de ceux qui seraient pourtant, en dernière analyse, essentiellement chargés de « leur apprendre » à raisonner ?…

Bien sûr, une première explication de ce décalage apparent entre discours et réalité pourrait tenir dans le simple fait que ceux qui énoncent les théories ne sont pas forcément les mêmes que ceux qui les mettent en pratique. Ou bien dans le fait qu'il n'est pas toujours fiable de croire ce que les gens disent qu'ils font pour savoir ce qu'ils font en réalité… Et pourtant, le problème reste entier et complexe : du côté de l'élève, l'apprentissage des mathématiques suppose-t-il d'être doué pour le raisonnement ou permet-il effectivement d'apporter quelque chose à ceux qui le pratiquent et qui ne sont pas d'emblée aptes à conduire une réflexion ? et, du côté du maître (qui nous concerne plus directement ici), le professeur dispose-t-il véritablement d'outils lui permettant d'améliorer sensiblement le niveau de ses élèves en matière de raisonnement ? Je vais tenter d'analyser cette question en essayant tout d'abord de préciser et de circonscrire ce que l'on pourrait entendre par des termes comme « raisonner » ou « apprendre à raisonner », et en m'intéressant ensuite à quelques méthodes plus ou moins classiques qui peuvent être considérées comme des tentatives « d'apprentissage du raisonnement ». Il nous restera alors à chercher dans quelle mesure il est possible de considérer que les mathématiques sont susceptibles ou non de véritablement apprendre à raisonner…

Première partie : Intuition, argumentation, raisonnement.

Essayons tout d'abord de préciser ce que l'on entend généralement par *raisonnement* en mathématiques, afin de voir ce que recouvrent en fait les difficultés des élèves au niveau de l'apprentissage du raisonnement…

a) Quelques exemples

Je ne voudrais pas m'appuyer ici sur une vision trop restrictive du « raisonnement » en mathématiques, mais je me cantonnerai cependant à ce que l'on a coutume de considérer comme tel dans le contexte habituel de l'apprentissage des « démonstrations », qu'il s'agisse de géométrie élémentaire (disons alors plutôt au collège), d'arithmétique (essentiellement en spécialité de terminale S) ou d'analyse (à partir de l'université)…

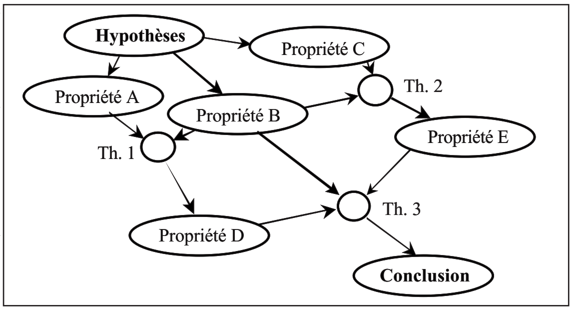


Figure 1

Bien sûr, « raisonner » (en mathématiques ou ailleurs) ne se résume pas à ce type de pratique intellectuelle et il n'est pas difficile de trouver des « moments de la pensée » qui ne s'intègrent pas systématiquement dans l'activité à laquelle je vais être obligé de me restreindre. Mais je considérerai, en simplifiant, que le type de problématique auquel je m'intéresserai consiste à trouver un « réseau argumentatif » permettant de passer de certaines *hypothèses* (c'est-à-dire de propriétés données au départ) à des *conclusions*, dont on cherche à établir la véracité.

Il s'agit donc de découvrir (et justifier) des propriétés intermédiaires (propriété A, propriété B, etc.) qui permettront progressivement – par appel à différents théorèmes (Th 1, Th 2, etc.) – de construire un cheminement logique suffisant pour faire finalement apparaître la propriété cherchée comme conclusion d'un théorème dont les prémisses auront été établies au passage. L'enseignement mathématique ne manque pas d'exemples de tels problèmes… Ils concernent notamment la géométrie élémentaire, comme cet énoncé classique de niveau quatrième :

Énoncé 1 : *Dans un parallélogramme* ABCD *(figure 2), on considère les points* K *et* L *situés aux tiers de la diagonale* BD*, montrer que* AK *et* CL *coupent les côtés* DC *et* AB *en leurs milieux.*

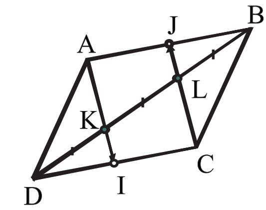


Figure 2

ou celui-ci, beaucoup plus savant (connu sous le nom de théorème de Morley) et dont la figure même donne une idée de la difficulté qu'il peut y avoir à inventer – conformément au diagramme précédent – un réseau argumentatif efficient :

Énoncé 2 : *Dans un triangle quelconque (figure 3), les droites qui partagent les angles en trois parties égales se coupent (comme sur la figure) en déterminant un triangle équilatéral.*

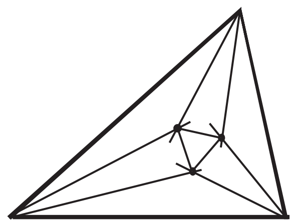


Figure 3

On peut aussi trouver une foule d'exemples qui réclament une démarche analogue dans les problèmes plus ou moins classiques qui relevaient autrefois, dans l'enseignement primaire ou secondaire de ce que l'on appelait la « méthode raisonnée » ou la « méthode algébrique » et dont voici un petit florilège :

Énoncé 3 : *12 roses coûtent 28 euros, combien coûteront 49 roses ?*

Énoncé 4 : *une tirelire contient des billets de 5 et de 10 euros, elle contient 37 billets en tout, pour une somme totale de 305 euros. Combien contient-elle de billets de chacune des deux sortes ?*

Énoncé 5 : *70 vaches tondent un pré en 24 jours, 30 vaches le tondent en 60 jours, combien faut-il de vaches pour le tondre en 96 jours ?*

… et n'importe quel professeur de mathématiques n'aura aucun mal à se remémorer avec nostalgie les exercices tels que celui-ci, qui illuminèrent ses études supérieures :

Énoncé 6 : Y *désigne une variable aléatoire réelle sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

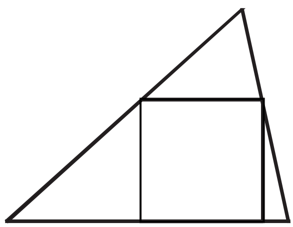
On suppose que, pour tout $t > 0$, *on a :* $E(e^{tY}) \leq C e^{t^2\sigma^2/2}$, *avec* C *et* $s > 0$.

Démontrer que, pour tout $\lambda > 0$, *on a :* $P(Y \geq \lambda) \leq C e^{-\lambda^2/2\sigma^2}$.

C'est un genre de problème que je ne cite ici que pour insister sur le fait que l'analyse elle-même – bien que traitant en apparence des « approximations » de toutes sortes… – rentre parfaitement dans le cadre décrit jusque là : les « inégalités » relèvent, elles aussi, de « théorèmes » particulièrement rigoureux au plan logique. Il nous rappellera aussi – s'il en était besoin – que le diagramme de la figure 1, sans changer notablement de nature, peut recouvrir plus tard des complications substantielles par rapport au niveau du collège ou du lycée. Il pourra (par exemple) faire appel à des études de cas plus ou moins fastidieuses, à des réitérations systématiques (récurrences), voire à des passages à la limite…

Cela dit, il convient aussi de garder à l'esprit que si, dans les exemples précédents, le but est essentiellement de trouver une « démonstration » ou simplement une « valeur » susceptible de satisfaire aux conditions imposées par l'énoncé, on trouve aussi en mathématiques des situations un peu différentes dans lesquelles le schéma cognitif est cependant analogue. C'est classiquement le cas de ce que l'on peut considérer comme des problèmes de constructions géométriques tels que :

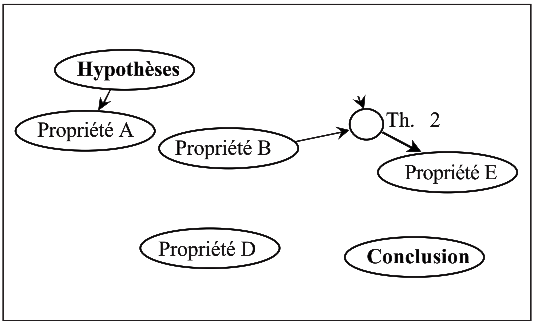
Énoncé 7 : *construire un carré inscrit dans un triangle donné, de façon que la figure obtenue ait l'allure ci-contre…*



qui exigent de mettre en place une stratégie progressive permettant de déboucher sur le résultat attendu. C'est aussi naturellement le cas de toutes les situations dans lesquelles on cherche à inventer des processus algorithmiques destinés à obtenir un résultat quelconque à partir de données soumises à des contraintes diverses.

b) Intuition, argumentation, raisonnement

Revenons au schéma représenté par la figure 1. Il est clair qu'une première ébauche d'un tel diagramme est généralement obtenue au niveau de *l'intuition*. Pour le dire de façon plus précise, ce que nous appellerons ici « l'intuition » a pour résultat de fournir, dès la première approche du problème posé, un embryon de réseau que nous pourrions schématiser sous la forme ci-contre.



C'est-à-dire que peuvent apparaître à l'esprit, d'entrée de jeu, des propriétés particulières à la situation, ou même des propositions et théorèmes susceptibles de participer à la résolution. C'est ainsi, par exemple, que la figure 2 attachée à l'énoncé 1 peut faire apparaître à certains des propriétés propres aux *médianes* d'un triangle, associées – immédiatement ou non – au théorème de concourance de celles-ci… (figure 4). De manière analogue, la configuration du théorème de Morley peut faire apparaître une nouvelle figure (figure 5) qui pourrait éventuellement être utile dans la mise sur pied d'une démonstration…

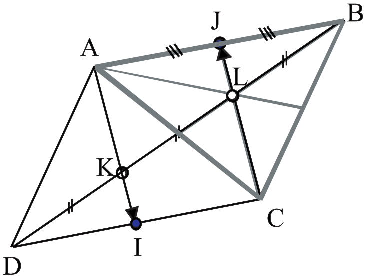


Figure 4

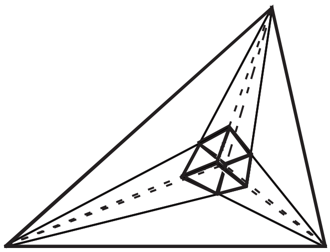


Figure 5

Mais il en va généralement de même pour la plupart des types de problèmes : l'énoncé 3 devrait faire penser à toute une génération à la « règle de trois » et à d'autres, plus jeunes, aux « tableaux de proportionnalité » ; à moins que l'on ne se contente de penser tout simplement à la méthode elle-même : « il faut calculer le prix à l'unité »… L'énoncé 4 est susceptible, lui aussi, de scinder les époques : les uns penseront certainement « méthode des fausses suppositions », les autres auront plutôt le réflexe « méthode algébrique »… L'énoncé 6 devrait, avec un minimum de « métier », diriger intuitivement vers « l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev »…

Et l'énoncé 5 risque fort, quant à lui, de provoquer plusieurs types d'intuitions contradictoires : on aura sans doute d'abord tendance à penser à un problème de « proportionnalité », avant de se rendre compte qu'un nombre de jours plus important doit induire un nombre plus faible de vaches … ce qui amènera alors à renverser l'intuition vers un problème « d'inverse-proportionnalité »… À moins que, pour d'autres, la vieille méthode dite de « fausse position » surgisse d'emblée à la mémoire…

Il va sans dire, évidemment, que toutes ces « intuitions », premièrement, ne fournissent que des parcelles du diagramme espéré (figure 1) et, deuxièmement, ne sont pas forcément justifiées : elles ne le seront au contraire que lorsqu'un schéma argumentatif complet et correct aura été mis en place ! Il n'en reste pas moins qu'une partie de l'apprentissage des mathématiques consiste à essayer d'aider les élèves à « avoir des intuitions » et à s'en servir correctement dans la démarche de résolution proprement dite. C'est ainsi que, dès les premiers exercices scolaires, l'intuition est indispensable pour aborder le moindre problème de calcul. Ce qu'il est convenu par exemple d'appeler aujourd'hui le « sens des opérations » et qui permet à « l'expert » de choisir la bonne opération à effectuer dans de nombreux types d'énoncés simples relève essentiellement de l'habitude acquise au cours de la formation. C'est indéniablement ce genre d'expérience qui permet, sans réfléchir vraiment, – c'est-à-dire par simple « analogie » – de savoir quelle opération appliquer pour résoudre des problèmes additifs, multiplicatifs, etc. Prenons-en un exemple simple. L'énoncé suivant :

> Énoncé 8 : *Un fermier possède un petit troupeau de 19 vaches, elles meurent toutes sauf 7, combien lui reste-t-il de vaches ?*

ne peut guère que faire penser – par analogie – à un problème soustractif. Il entraîne donc presque immédiatement la réponse 19 – 7 = 12 vaches. De même, avec un peu plus de « métier », le problème :

> Énoncé 9 : *En me rendant à la plage, j'ai croisé 6 hommes qui avaient chacun 6 femmes, chaque femme avait 6 enfants et chaque enfant avait 6 chats. Combien de personnes et d'animaux vont-ils à la plage ?*

amènera tout naturellement à engager une cascade de multiplications et d'additions correctement imbriquées pour obtenir le résultat…

Et combien de lecteurs se seront-ils rendus compte des pièges que je viens de leur tendre ?… L'intuition aura effectivement conduit le plus grand nombre à effectuer – sans vraiment réfléchir – les opérations indiquées, alors que le fermier du premier énoncé *conserve* « évidemment » 7 vaches… et que « je » est « évidemment » le seul être vivant *à se rendre* à la plage dans le second énoncé… C'est le piège classique de « l'âge du capitaine » : le *sens des opérations* est d'abord construit sur l'analogie, sur l'intuition, plutôt que sur un quelconque *raisonnement*.

C'est un problème très difficile de savoir en quoi tient vraiment « l'intuition ». Sans aller jusqu'à s'interroger philosophiquement (par exemple à la suite de Kant) sur sa nature plus ou moins transcendantale, il est clair qu'au niveau qui nous occupe de l'intuition mathématique, nul ne peut nier qu'elle joue un grand rôle dans la résolution des problèmes, qu'il s'agisse des éclairs de génie de quelque Ramanujan ou, beaucoup plus prosaïquement, du zeste d'imagination qui est souvent demandé aux élèves pour trouver la solution de tel ou tel exercice. Une hypothèse raisonnable (et praticable…) est d'abord que l'intuition face à un énoncé quelconque fonctionne à la manière de ce que les psychanalystes appellent le « transfert ». C'est un phénomène mystérieux, mais qui consiste avant tout à constater qu'un discours (voire une simple situation) peut communiquer des informations qui ne sont pas contenues de façon manifeste dans le discours lui-même. Les psychanalystes ne se privent généralement pas de faire appel aux explications les plus ésotériques pour tenter de justifier ce genre de communication « d'inconscient à inconscient », mais nous n'avons nul besoin d'aller si loin (du moins en première analyse !) au niveau des énoncés mathématiques.

Chacun sait, en effet, qu'un problème de mathématiques contient toujours des indices implicites plus ou moins volontaires qui permettent souvent de « souffler » des éléments de solution aux élèves : prise en compte du contexte, enchaînement des questions, etc. Cela va, en quelque sorte – et à l'inverse des pièges que j'ai utilisés précédemment – de l'énoncé neutre qui s'efforce de ne fournir aucune prise à l'élève mais dont la rédaction laisse involontairement percer une idée du chemin à explorer, à ce que l'on appelle aujourd'hui « l'effet Topaze » et qui consiste à insister lourdement sur une aide particulière, à l'image de cet instituteur de Marcel Pagnol qui, lors des dictées, s'ingéniait à prononcer « … des moutonsss'… » pour que ses élèves n'oublient pas le pluriel…

Mais la méthode d'apprentissage la plus sûre réside sans aucun doute dans l'apprentissage progressif de situations de plus en plus riches et complexes et dans la mise en place de points de repères cognitifs ou mnémotechniques auxquels pourront se raccrocher les élèves. Une des pédagogies les plus pratiquées à cet égard en géométrie consiste naturellement à chercher des idées à partir de la figure (éventuellement fausse…) et, par exemple dans la ligne des figures 4 et 5 précédentes, à encourager l'élève à « coder » systématiquement les figures et à chercher à en dégager des parties de configurations connues qui peuvent le ramener à des situations standards. De la même façon, tous ceux qui se sont demandé un jour comment ils réagissaient eux-mêmes devant des énoncés comme ceux des exercices

3 à 5 précédents (ou 8 et 9…) se sont sans doute aperçus qu’ils opéraient en réalité grâce au « métier », qu’ils ont acquis peu à peu lors de la fréquentation de nombreux exercices du même genre(2).

À l’autre bout, pourrait-on dire, de cette approche des difficultés du raisonnement par l’entrée propre de l’intuition, se situe le problème de « l’argumentation », c’est-à-dire de la mise en forme « rhétorique » du raisonnement retenu. Cet aspect est loin d’être négligeable dans la mesure où, en définitive, l’élève est le plus souvent jugé sur sa capacité à surmonter cette dernière étape et que celle-ci suppose non seulement « d’avoir trouvé » mais encore de « savoir rédiger correctement ». Je ne m’appesantirai pas ici sur cet aspect de la question, si ce n’est pour dire que la « rhétorique » demandée à l’élève est finalement une chose assez complexe qui se nourrit généralement de trois type d’ingrédients : d’abord la « mode mathématique » de l’époque considérée, ensuite les instructions officielles plus ou moins en prise avec les méthodes de correction utilisées dans les examens et enfin les manies, voire les « tics », de certains professeurs…

Il est sûr cependant que seule une exigence finale de rédaction permet de mettre au net une démarche de raisonnement et de vérifier sa validité. On a naturellement affaire en la matière à une dialectique dans laquelle intuition et nécessité de clarification par la rédaction finale contribuent en permanence à obliger l’élève à approfondir les idées qui lui viennent d’emblée à l’esprit et où, inversement, certains aspects de la formalisation définitive acceptable par le maître peuvent contribuer à guider l’imagination. On doit sans doute même considérer cette dialectique comme « spiralaire » au sens où, d’année en année, les élèves apprennent des situations de plus en plus complexes et sont obligés, par degrés, d’investir *au niveau de l’intuition* des réflexes appris pour des raisons de *rédaction méthodique*…

Mais c’est le moment de se rappeler que le titre de cet exposé situe précisément mon sujet « entre » intuition et argumentation, c’est-à-dire dans cette phase de « recherche » qui est censée aboutir, au-delà des intuitions pures, au sentiment *d’avoir dégagé un réseau complet* du type de celui de la figure 1. Sans s’être encore nécessairement posé la question de transformer ce réseau en cheminement linéaire de la pensée, qu’il est ensuite nécessaire de forger pour aboutir à la démonstration définitive…

c) Julie Lamalchance…

Pour tenter d’observer directement en quoi peut consister cette phase de *raisonnement* qui nous intéresse maintenant, nous allons bénéficier d’une « narration de recherche ». Il s’agit, comme cela commence à se savoir, d’un exercice pratiqué par certains professeurs de mathématiques et qui consiste à proposer un énoncé à un élève et à lui demander, non pas d’en trouver nécessairement la solution, mais de

(2) La présente conférence était associée à deux exposés complémentaires, l’un de Michèle Muniglia sur l’apprentissage du sens des opérations à partir de la lecture d’énoncés, l’autre de Jean-Pierre Ferrier sur l’importance de la formalisation comme aide éventuelle au raisonnement.

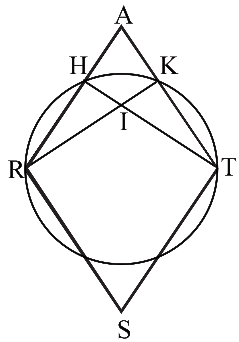
raconter *sa recherche de solution*. Autant dire que, concrètement, la note éventuelle ne mesure pas le fait d'avoir « trouvé » mais bel et bien la qualité de la narration réalisée. La copie que j'ai retenue est de décembre 1997, elle provient d'un collège de Montpellier(3) et elle portait sur le problème suivant :

ARST *est un losange. Le cercle de diamètre* [TR] *coupe* [AR] *en* H. *Les droites* (TH) *et* (AS) *se coupent en* I.

1) *Démontrer que* (TH) *est une hauteur du triangle* ATR.

2) *Démontrer que* (RI) *est perpendiculaire à* (AT). *La droite* (RI) *coupe* (AT) *en* K.

3) *Démontrer que les points* T, K, H *et* R *sont sur un même cercle.*



Vous raconterez sur votre feuille :

a) les différentes étapes de votre recherche,

b) les observations que vous avez pu faire et qui vous ont fait progresser ou changer de méthode,

c) la façon dont vous expliqueriez votre solution à un (ou une) camarade que vous devez convaincre.

Suivons la narration de la petite Julie : « *Je commence par tracer le losange* ARST *puis le cercle, le point* H. *Je relie* (TH) *et* (AS) *; ces droites se coupent en* I … ». Elle entre ensuite dans le vif du sujet :

1. *Pour prouver que* (TH) *est une hauteur du triangle* ATR *je relie* (TR) *et je trace ensuite les trois hauteurs (dont celle que je pense en être une* (TH)*) et après avoir fait ceci, je constate que* (TH) *est l'une des trois hauteurs du triangle* ATR. *L'énoncé est donc exact.*

Et elle ajoute à retardement dans la marge – repentir ou perfectionnisme ? – une sorte de « note de bas de page » relativement sibylline :

(*) *Je constate également que dans* ATR, *sur* (TH), (KR) *et* (AY) *le centre de gravité se trouve aux 2/3 en partant du sommet. Je pense donc que mon raisonnement est exact, et surtout que je comprenne bien ce qui est faux.*

Passons à la deuxième question : « 2. *Pour prouver que* (RI) *est perpendiculaire à* (AT) *je relie* (RI) *et je constate ensuite que cette dernière est une des trois hauteurs du triangle* ATR. » Et comme cette constatation ne saurait évidemment suffire… :

*Je recherche parmi mes théorèmes et stupeur, je ne trouve pas la bonne fiche et après ce petit incident, je me dis que si (*RI) *est une des trois hauteurs du triangle* ATR, *elle coupe* AT *perpendiculairement. Donc* (RI) *est perpendiculaire à* (AT).

Il ne reste plus alors qu'à régler le cas de la troisième question…

(3) Ce sont des professeurs de l'Irem de Montpellier qui ont mis au point ce type d'exercice. Une partie de la narration qui suit a été publiée et commentée par Marie-Claire Combes et Freddy Bonafé dans le compte-rendu d'un séminaire de didactique à l'Irem de Rennes : Produire et lire des textes de démonstration, édité par Ellipses Paris, 2001.
N.D.L.R. Voir aussi « *Les narrations de recherche de l'école primaire au lycée* » Brochure de l'Irem de Montpellier coéditée par l'APMEP (cf. Bulletin n° 443, p. 805). Prix : 9 €.

> 3. *Pour montrer que* T, K, H *et* R *sont sur un même cercle, il me suffit de construire ce cercle… coup de chance, ce cercle ayant pour centre* Y, *est déjà construit. Il ne me reste plus qu'à constater que* T, K, H *et* R *sont sur un même cercle que je vais appeler* C.

et à conclure :

> *Après tout ceci je constate avec émerveillement que le* 1), *le* 2) *et le* 3) *sont des démonstrations exactes plutôt que des énoncés.*

Je voudrais ouvrir ici une parenthèse pour rassurer les âmes sensibles… D'abord, la situation est catastrophique, c'est vrai, mais nullement désespérée. On va le voir dans quelques minutes. Ensuite je ne voudrais surtout pas que l'on croie un seul instant que je cherche à me moquer en quoi que ce soit des déboires de la petite Julie en géométrie. J'ai connu d'assez près des élèves de quatrième qui étaient loin d'être dans la queue de la classe et dont je ne peux m'empêcher de penser qu'elles auraient sans doute produit des narrations analogues … pour peu que leurs professeurs aient pratiqué ce type d'exercice … pour peu que leur père ne soit pas prof de maths … et pour peu qu'elles aient eu la chance d'avoir la savoureuse spontanéité d'écriture de la petite Julie (dont je rappelle au passage, pour ceux qui ne l'auraient pas noté, qu'elle est de Montpellier et qu'il convient donc de lire ses narrations en version originale, c'est-à-dire avec l'accent de l'académie concernée).

Mais enfin – et surtout – il me semble nécessaire d'insister sur un point particulièrement important pour notre sujet : l'exercice proposé à Julie est beaucoup plus difficile qu'il ne peut y paraître pour un professeur de mathématiques habitué à ce genre de jonglage avec les théorèmes, les propriétés et les rapports à la figure, bref : rompu aux diverses contorsions intellectuelles gratuites exigées ici des débutants…

L'activité de « narration de recherche » demande généralement de partir d'un problème relativement « entortillé » pour que l'élève ait matière à se perdre quelque peu dans les méandres de la solution, et il faut dire que l'énoncé proposé ici à la petite Julie répond parfaitement à ce type d'exigence ! En échange, il nous permet de mettre le doigt sur ce qui peut effectivement constituer une partie des obstacles classiques qui sont glissés, volontairement ou non, dans la plupart des problèmes de mathématiques. J'en soulignerai deux ici qui me paraissent relativement importants car ils reviennent à « piéger » le lecteur dans des « attracteurs » contradictoires, dont chacun pourrait offrir une piste plus ou moins praticable vers une solution, mais dont le caractère conflictuel empêche de choisir l'une ou l'autre de ces voies et enferme donc dans un dilemme inconscient qui interdit d'avancer vraiment.

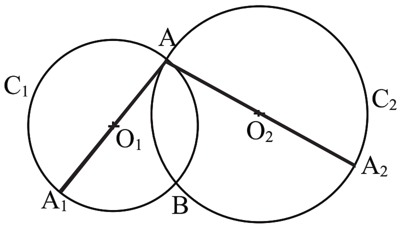
Le premier de ces conflits tient manifestement ici dans la « surdétermination » de la figure initiale. Il est clair, en effet, que toutes les questions seraient encore valables en partant tout simplement d'un triangle quelconque ART et du cercle de diamètre RT ; le losange n'est là que pour pouvoir parler de la troisième hauteur de ART en parlant de AS… Mais alors, on voit bien que ce losange introduit dans le problème des symétries (par rapport à AS et à RT) qui viennent complètement changer la donne : il n'y a aucun besoin des propriétés des hauteurs pour démonter la configuration car tout repose ici sur les symétries du losange ! Mais, bien entendu, l'énoncé se garde bien de laisser ouverte cette possibilité et s'ingénie au contraire à rompre la symétrie naturelle entre les points H et K en leur faisant artificiellement jouer des rôles complètement dissemblables…

Le second conflit pour l'élève, encore plus classique, se branche d'ailleurs directement sur ce dernier détail : le rôle que l'on fait jouer au point K en le définissant comme pied de la hauteur (et non pas – contrairement à H – comme intersection du côté avec le cercle), oblige l'élève à « dédoubler » ce point car il a sous les yeux une concourance entre le cercle, la hauteur SI et le côté AT, mais il doit l'oublier pour comprendre la question qui lui est posée. Pour le dire autrement, il se trouve que les concepteurs de logiciels de géométrie savent bien que c'est là la difficulté essentielle de leur programmation : un point est défini par une propriété mais il pourrait aussi l'être par une autre, et il faut effectivement faire « comme si » on avait en permanence affaire à deux points à la fois distincts et confondus… Ce qui est difficile pour le programmeur serait-il donc si aisé pour le débutant en géométrie ?

Mais retrouvons Julie quelques mois plus tard, en mars 1998, dans une nouvelle narration à propos de l'énoncé suivant :

C_1 *et* C_2 *sont deux cercles de centres respectifs* O_1 *et* O_2 *sécants en* A *et* B. *La droite* (AO_1) *coupe le cercle* C_1 *en* A_1.

La droite (AO_2) *coupe* C_2 *en* A_2. *Compléter la figure…*



1) *Dans la suite de l'exercice les questions* 1) *et* 2) *peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre. Prouver que les droites* (A_1A_2) *et* (O_1O_2) *sont parallèles.*

Quelle est la nature du triangle ABA_1 *? Pourquoi ?*

2) *Après avoir fait un raisonnement analogue pour un autre triangle de la figure, prouver que l'angle* A_2BA_1 *est plat. Qu'en déduit-on sur la position des points* A_1, B *et* A_2 *?*

Cette fois, la narration de Julie est plus courte… La première question nous permet de retrouver son style : « *Pour commencer, je trace tout ce que me demande de tracer l'énoncé. Je m'aperçois que* AA_1A_2 *est un triangle. Ensuite je fouille dans mon* ***mémento*** *à la recherche de la leçon sur les théorèmes des milieux…* »

Qui saura dire pourquoi elle recherche ainsi « la leçon sur le théorème des milieux » ? A-t-elle déduit cela de la constatation, fort judicieuse, qu'il y avait un triangle ? A-t-elle vu sur la figure qu'il y avait des milieux ? A-t-elle pensé au théorème parce que le parallélisme demandé lui semble être dans les conclusions du théorème des milieux ? Mais suivons sa narration :

C'est bien ce que je pensais, le théorème n° 1 : Si dans un triangle, une droite passe par les milieux des deux côtés, elle est alors parallèle au troisième côté.

Nous n’aurons donc pas l’explication du « c’est bien ce que je pensais » … mais ce qui est sûr c’est que, contrairement à la narration du premier trimestre, Julie semble avoir désormais compris l’usage d’un théorème. Il ne lui reste plus qu’à justifier l’utilisation de cet énoncé :

> *Donc je mesure* AA_1 *: 4,8 cm et* O_1 *est à 2,4 cm donc au milieu. Je mesure* AA_2 *: 7,4 et* O_2 *est à 3,7. Je peux donc en conclure que* $O_1O_2 // A_1A_2$*. Je code désormais ce que je sais…*

Patatras ! Mais peut-on vraiment lui reprocher de s’en remettre à son double-décimètre alors que le début de l’énoncé mettait l’accent sur la *construction* de la figure ? … Poursuivons, puisqu’il y a encore deux questions, en commençant par celle qui demande de démontrer que l’angle ABA_1 est droit :

> *Cela me rappelle un théorème dans la* ***boîte à outils*** *parlant d’une droite perpendiculaire à deux droites parallèles. Je cherche, … j’ai trouvé, le voici : Si deux droites sont parallèles toute perpendiculaire à l’une est perpendiculaire à l’autre. Donc c’est le cas donc* B *est un angle droit. Je le code. Et tout triangle ayant un angle droit est rectangle donc* ABA_1 *est rectangle en* B.

… et que celui qui ne s’est jamais trompé lui jette la première pierre : sa boîte à outils pouvait-elle vraiment l’aider à éviter l’horrible piège tendu par l’énoncé ? Il est cependant indéniable que Julie – malgré la malchance qui ne semble pas la quitter… – a fait de nets progrès en matière de compréhension de la « règle du jeu » que l’on attend d’elle en géométrie. J’ajouterai pour ma part qu’elle me semble avoir progressé aussi en matière de règle du jeu vis-à-vis de la narration de recherche proprement dite ; il suffit pour s’en convaincre de lire la fin de celle-ci, qui touche à la dernière question. Je cite, une fois encore, in extenso :

> *Cette question est difficile, je ne la comprends pas.*

Autant dire que Julie est devenue une semi-professionnelle : elle ne s’amusera certainement plus jamais à raconter avec spontanéité ses tâtonnements dans le labyrinthe… Exactement sans doute comme si l’on vous proposait, à vous, de rédiger votre propre narration de recherche sur le théorème de Morley… En tout cas, comme on le voit, la petite Julie a décidé de me laisser me débrouiller tout seul pour nourrir la deuxième partie de cet exposé … et c’est sans doute le moment de vous rappeler que le titre de celui-ci était construit sur la forme interrogative : « *est-il possible* d’apprendre à raisonner ? »… À voir les résultats de Julie et ceux de la grande majorité des élèves, on peut d’ailleurs se demander s’il est possible de répondre à cette question autrement que de façon négative.

La triste réalité est plutôt que *l’on ne sait* pas apprendre à raisonner… L’apprentissage du raisonnement est probablement semblable à celui de la marche à pied, ou à celui de l’escalade : mettre un enfant devant une paroi à franchir, même avec une « boîte à outils » faite de piolets, de cordes ou de pitons, ne lui apprend guère à grimper… Et il est clair que celui ou celle qui apprendra le mieux le fera d’abord par sa motivation personnelle, et que cette motivation personnelle est généralement faite de curiosité, que cette curiosité repose peut-être même essentiellement sur l’envie d’être meilleur que les autres … et que certainement elle se nourrit avant toutes choses d’un peu de réussite !

À moins qu'il ne suffise d'enseigner des mathématiques – et d'ailleurs quelles qu'elles soient – pour se dire que l'on a appris à raisonner aux élèves…

Il n'empêche : le maître n'est pas forcément là uniquement pour se dire que ce qu'il fait, par le simple effet de la providence, est la solution à toutes les difficultés de l'apprentissage ; pas plus qu'il ne peut se contenter de s'inscrire, comme témoin impuissant, dans les structures quelque peu œdipiennes de la psychologie des enfants ; encore moins qu'il doive se satisfaire de n'être là que pour sélectionner, parmi ses élèves, ceux qui « ont la bosse des maths »… Pour lui, le problème *d'apprendre à raisonner* devrait être une préoccupation permanente, bien que ce problème reste malheureusement presque impénétrable ! Et dans la mesure où je ne saurais prétendre ici vous dire comment il faudrait faire pour améliorer nos méthodes d'enseignement, je vais m'efforcer d'analyser quelques-unes des difficultés fondamentales de cet apprentissage. Car chacune d'elles pourrait bien receler en définitive l'occasion de contresens majeurs à propos de la notion même de raisonnement mathématique.

Deuxième partie : À propos de quelques obstacles…

a) Bricolage et formalisation

L'apprentissage du raisonnement tel qu'il est envisagé à partir des démonstrations géométriques en quatrième présente en premier lieu une caractéristique essentielle : *la difficulté objective de ce qui est demandé aux élèves suffit à l'évidence pour expliquer qu'un très petit nombre d'entre eux parviennent à franchir les obstacles auxquels on les confronte*. Sans parler des difficultés plus ou moins secondaires dues à la mise en forme définitive, la capacité de mise en place d'un schéma de raisonnement du type de celui de la figure 1 repose sur une compréhension des propriétés et des théorèmes géométriques qui se révèle déjà délicate pour des candidats au Capes qui, en général, redécouvrent la géométrie élémentaire au moment des concours, alors même qu'ils disposent d'un niveau de culture substantiel. Cette compréhension ne peut qu'échapper à la grande majorité des élèves du collège qui n'en sont *a priori* qu'à un stade de première confrontation avec le sujet ! On peut toujours penser, évidemment, que les exercices proposés sont faciles et, qu'en tout état de cause, ils ne font appel qu'à un nombre assez limité de théorèmes, ou même que les supports didactiques comme les « boîtes à outils » permettent le plus souvent de circonscrire les recherches autour d'une liste réduite d'énoncés. Il me semble que l'on vient pourtant de voir, avec la narration de Julie, comment une telle méthode parvient à tourner complètement à vide. Laissons de côté la relative complexité des problèmes qui lui étaient posés (ils n'étaient si difficiles que parce qu'il s'agissait d'une narration de recherche), laissons de côté le fait que Julie ne donne pas vraiment l'impression de trouver d'emblée naturelle la « règle du jeu » de la démonstration et ce que l'on attendrait d'elle à cet égard, et arrêtons-nous sur le type d'aide que lui apportent son « mémento » ou sa « boîte à outils ».

Curieusement, la plupart des supports pédagogiques sur lesquels on insiste le plus sont du type suivant : « je dois regarder dans la liste des théorèmes que j'ai à ma disposition pour trouver ceux dont les hypothèses (voire les conclusions) s'accordent avec les hypothèses (ou les conclusions) contenues dans l'énoncé ». S'agit-il d'une transposition directe, au collège et au lycée, des façons de procéder universitaires, dans lesquelles les exercices amènent effectivement à s'interroger souvent sur la vérification pointilleuse des hypothèses de chacun des nombreux théorèmes rencontrés ? N'est-ce, en définitive, qu'une nouvelle variante du rappel rituel « il suffit de savoir appliquer son cours !… » ? Est-ce la mise en application de l'idée que, pour obtenir un schéma ressemblant à celui de la figure 1, il faut et il suffit qu'il soit complété comme un puzzle, en commençant par chercher dans la boîte les pièces qui s'ajustent aux bords de l'image ? Toujours est-il que l'on a l'impression que cette façon de procéder ne peut constituer qu'une aide particulièrement limitée…

Mais, même en admettant qu'elle puisse parfois ne pas se révéler complètement inefficace, l'aspect important de ce type de méthode réside dans le fait que l'on semble mettre prioritairement l'accent sur les *théorèmes* et sur les *propositions* générales plutôt que sur les *propriétés* géométriques « conjoncturelles » propres à la figure étudiée. Exactement comme si l'on estimait implicitement qu'un exercice – ici, l'étude d'une figure – ne pouvait se résoudre que comme application de vérités universelles, de généralités, et ne devait surtout pas résulter de « constatations » particulières spécifiques à la situation proposée. Il y a d'abord là une sorte de problème psychologique important : l'élève qui « voit » sur le dessin que (par exemple) des points sont alignés, doit en quelque sorte « censurer » cette intuition car elle constitue une « pièce du puzzle » qui ne viendrait pas à son heure. Or il est bien clair que, pour l'élève qui fait preuve d'une certaine agilité d'esprit, il y a de fortes chances que ce soient des *propriétés* et non des *théorèmes* qui viennent en premier lieu à l'esprit et que ce soient ces « intuitions » qui guident une recherche d'énoncés susceptible de boucher les trous – je veux dire préciser les « liens » – dans le diagramme de la figure 1. En fait la « boîte à outils » est une démarche complètement différente d'une démarche fondée sur l'intuition des propriétés alors qu'elle devrait au contraire être coordonnée de manière beaucoup plus constructive avec celle-ci.

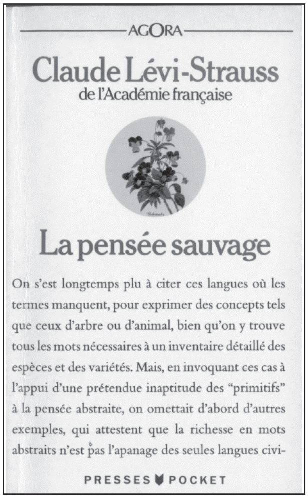
À l'inverse, comme c'est le cas (par exemple) dans les méthodes où l'on s'efforce de faire manipuler et modifier des figures à l'aide des logiciels de constructions géométriques, des tentatives de développement de propriétés « plausibles » cherchent à mettre d'abord l'accent sur la découverte de telles propriétés, car elles deviennent plus aisément *constatables* par « l'expérience »… Mais, malheureusement, le problème s'inverse alors souvent : la constatation expérimentale incite à considérer la recherche de justifications raisonnées comme un supplément inutile. On pourrait citer maints exemples où ce genre de quête systématique de la justification « dynamique » semble suffire, mais il nous suffira de revenir à l'exemple frappant de la petite Julie : dans sa deuxième narration à propos des milieux, il est très probable que la première question, insistant sur la construction « correcte » de la figure, amène assez naturellement l'élève à considérer que la vérification au double-décimètre du fait que les points sont bien des milieux soit parfaitement conforme à la règle du jeu qui lui est imposée !

Comme on le voit, la simple synergie entre les *propriétés* et les *liens* du diagramme de la figure 1 n'est pas une chose facile à gérer par l'élève. Elle l'est encore moins pour le professeur. Il me semble cependant que l'entrée que l'on choisit dans ce problème didactique – disons pour simplifier : primat du théorème ou primat de la propriété – n'est pas vraiment neutre vis-à-vis de la formation de l'esprit et, pour tout dire, de l'esprit scientifique… Le « raisonnement » – dans la mesure, répétons-le, où il peut se résumer autour du diagramme de la figure 1 – est un type d'activité qui englobe aussi bien la démonstration telle que nous l'avons vue dans l'exemple de Julie, que des recherches de constructions géométriques ou des mises au point d'algorithmes. Le choix relativement récent de privilégier ainsi la rédaction de démonstrations par rapport à d'autres formes semblables de démarches cognitives n'est pas sans signification : c'est le choix *le plus dogmatique* que l'on pouvait faire et il s'inscrit parfaitement dans le cadre de ce que fut la réforme des « maths modernes ».

Il convient en effet de se souvenir que cette réforme a été imposée (contre l'avis des autres scientifiques) par des mathématiciens partisans de « la » mathématique comme discours formel dégagé de ses affinités historiques avec les sciences physiques, par des pédagogues constructivistes persuadés qu'il suffisait de laisser les enfants redécouvrir par eux-mêmes l'axiomatique de Bourbaki et par des représentants des sciences de l'homme qui pensaient que les clefs de la nature humaine reposaient dans les structures ensemblistes…

Le siècle dernier a inventé la logique formelle et l'anthropologie, la psychanalyse et le communisme, le structuralisme et l'école française de didactique des mathématiques. Avec l'anthropologie, la seconde moitié du vingtième siècle a inventé la notion de civilisations « primitives »…

C'est-à-dire que là où le seizième siècle et les siècles qui suivirent n'avaient rencontré que des « sauvages », les anthropologues découvrirent la *pensée primitive*… Enfin, pas tout à fait : pour être vraiment exact et comme en témoigne par exemple la couverture de l'ouvrage fondateur, il découvrirent d'abord les « primitifs » sous les « sauvages » et ensuite la « pensée sauvage » sous l'écorce des « primitifs »… Mais l'important n'est pas là : ce qui est sûr c'est que la « pensée sauvage » était précisément « primitive » par rapport à notre pensée hautement civilisée et performante : elle était à notre pensée à nous ce que le *bricolage* peut représenter par rapport à la *pensée technique et scientifique* ! Bref : à en croire l'anthropologue, le « primitif » bricole là où le savant raisonne et formalise ses découvertes dans le cadre de la logique et de « la » mathématique ; le « primitif » tente désespérément de récupérer, de détourner, d'adapter des outils grossiers là où l'ingénieur inscrit sa



production dans des plans d'ensemble dont aucun détail n'échappe à sa réflexion prospective et anticipatrice…

Comment s'étonner, dans un tel contexte intellectuel, de la fascination apportée par un discours mathématique abstrait, définitif et, finalement, parfaitement ésotérique ? Le malheur est que cette fascination n'aura débouché que sur un échec cuisant. D'ailleurs non pas tant parce que les élèves n'y comprenaient rien – ce qui n'a jamais empêché les systèmes scolaires de fonctionner – que parce que les scientifiques ont fini par comprendre l'illusion didactique qui pouvait être à la base d'une telle réforme. Ce n'est pas parce que la science s'efforce en permanence de mettre au net sa pensée sous la forme la plus « définitive » possible que cette pensée est faite pour être considérée comme définitive. Ce n'est pas parce que l'ingénieur programme industriellement ses constructions que l'on peut faire l'économie des prototypes et de leur mise au point. Ce n'est pas parce que les mathématiques s'écrivent parfois dans des traités qu'elles ont été inventées dans l'ordre où elles sont présentées et racontées…

Et quand bien même la science et la technique pourraient faire l'impasse sur le bricolage à un certain stade de leur développement, comment s'imaginer que l'enfant puisse pénétrer directement dans cet univers en s'affranchissant de toute étape de « bricolage », de « bidouillage » et autre « cafouillage » ? Avec ses excès, la petite Julie nous montre bien à quel point l'apprentissage passe par des phases particulièrement approximatives ! Malheureusement, le maître, pris dans ses exigences de rigueur, oublie souvent que de tels stades sont indispensables. Un théorème, quel qu'il soit, n'est jamais un objet facile à appréhender et à utiliser. On le voit bien, par exemple, dans le cas d'un énoncé aussi simple d'apparence que celui qui concerne la « droite des milieux » dans un triangle. L'expérience a conduit souvent à faire tourner autour de cette propriété plusieurs énoncés tels que : « la droite des milieux est parallèle au troisième côté », « si une droite est parallèle au troisième côté et si elle passe par un des milieux, elle passe par l'autre », etc., car l'énoncé « brut » demanderait à être manipulé dans plusieurs sens suivant les circonstances. On s'en convaincra encore plus aisément à propos de la propriété de concourance des hauteurs rencontrée par Julie dans son premier exercice : le même énoncé demande parfois à être utilisé pour démontrer que trois droites sont concourantes et parfois pour montrer que la droite qui passe par l'intersection de deux hauteurs est perpendiculaire au troisième côté.

Les exemples ne manquent pas. On pourrait sans se tromper définir un théorème non pas comme une pièce essentielle dans un édifice consacré à l'établissement de la vérité, mais comme un carrefour très fréquenté où se croisent de façon privilégiée et complexe des propriétés importantes des figures de géométrie. L'apprentissage de ces théorèmes (et aussi, de manière moins discursive, des configurations classiques) est précisément l'apprentissage des multiples « cas de figure » où on peut faire appel à eux. Mais on mesure alors combien la méthode des « boîtes à outils » a de chances d'achopper sur le fait que l'élève ne peut en réalité comprendre un énoncé que s'il sait l'appliquer et qu'il ne peut apprendre à l'appliquer qu'à partir de *situations* *rencontrées et reconnues* et non pas d'explications préalables. L'élève qui trouve la solution – contrairement à Julie – a en réalité beaucoup de *chance* : ou bien il a déjà vu une question analogue et acquis un « métier » qui lui permet de trouver par analogie, ou bien il sait particulièrement bien se débrouiller dans une situation nouvelle en *récupérant*, en *recyclant* et en *adaptant* des idées qu'il avait déjà rencontrées, mais qu'il lui faut en quelque sorte « détourner » intelligemment pour surmonter une difficulté inconnue…

Pourquoi donc les philosophes et tous les tenants des sciences humaines croient-ils toujours que les mathématiques et les mathématiciens progressent vraiment en mimant les gestes ou les discours de la logique formelle ?

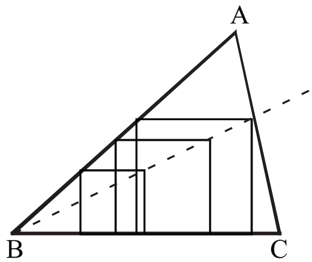
b) Analyse et synthèse

Cette façon de voir les choses induit d'autre part une deuxième conséquence perverse : elle nous fait oublier que *raisonner* n'est pas *démontrer* et donc, par conséquent, que l'apprentissage du raisonnement doit être envisagé (comme c'était d'ailleurs naguère le cas) sous la forme d'une partie autonome de l'activité mathématique, complémentaire évidemment mais différente de l'activité dite de *démonstration*. Dans une louable tentative d'aider les élèves à trouver une solution aux exercices de géométrie qui débouchent sur une démonstration, on a pensé en effet à leur faire chercher (par exemple dans leur « boîte à outils ») des pièces du puzzle à reconstituer pour obtenir la démonstration souhaitée… On s'est dit, en quelque sorte : « l'expert démontre en mettant bout à bout des théorèmes et des propriétés de façon à passer des hypothèses aux conclusions, il suffit donc de calquer cette façon de faire », mais c'est malheureusement méconnaître complètement la manière dont il est possible d'isoler – si elles existent – quelques bribes de méthodes qui seraient utilisées par « l'expert » pour trouver la solution d'un problème. Ce qui est sûr, en tout cas, c'est que bien peu « d'experts » vous donneront comme conseil d'essayer avant toute chose de chercher dans la liste quel théorème peut bien s'appliquer !

Je ne veux pas dire par là, naturellement que ce genre d'idées ne fonctionne jamais, comme d'ailleurs celle de « remonter » de manière analogue à partir de la conclusion, mais on a l'impression de ne pouvoir ainsi aider les élèves qu'à « faire des démonstrations » dont toutes les pièces auraient été prévues à l'avance dans la « boîte à outils ». C'est-à-dire que, sous prétexte de lui apprendre à raisonner, on enferme l'enfant dans une activité de reproduction qui ne laisse plus de place à la découverte. Que ce soit d'ailleurs au niveau de « l'à peu près » évoqué au paragraphe précédent, ou au niveau du sentiment d'avoir découvert par lui-même une parcelle de schéma du type de celui de la figure 1.

En vérité, un exercice qui demande de raisonner pour être résolu – comme tous ceux que j'ai cités au début de cet exposé – oblige toujours à surmonter des obstacles qui ne se résolvent pas en faisant appel à quelque « boîte à outils », aussi sophistiquée soit-elle… J'ai déjà souligné plus haut quelques-unes des difficultés objectives du premier énoncé proposé à la petite Julie. Elles revenaient, en gros, à placer l'élève face à des « attracteurs » plus ou moins artificiels qui ne peuvent que l'empêcher de « voir » la solution, car celle-ci n'apparaît en fin de compte que lorsque l'on parvient à sortir de ces « conflits » parasites… C'est encore plus frappant sur le deuxième énoncé. La première question, en effet, porte sur la droite A_1A_2 et son parallélisme avec O_1O_2 et (alors que la figure montre à l'évidence que cette droite passe par B) la seconde question soulève le problème de l'alignement effectif des points A_1, A_2 et B en suggérant une méthode de justification complètement étrangère à la démarche de la question précédente… L'auteur de l'énoncé l'a d'ailleurs parfaitement senti et il utilise pour s'en défendre une phrase classique utilisée par les professeurs de mathématiques dans ce genre de circonstances : « Dans la suite de l'exercice les questions 1 et 2 peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre » ! À l'élève de comprendre qu'il lui faut traiter la deuxième question en oubliant la première, car celle-ci ne peut que l'emmener dans une fausse piste par rapport à l'énoncé de la deuxième…

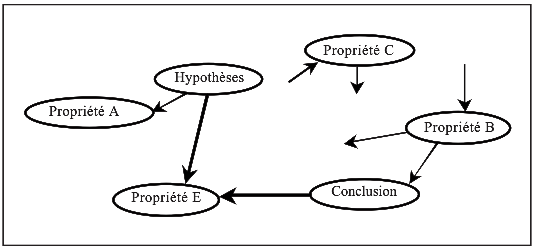
Mais en dehors de telles difficultés conjoncturelles, il est clair que tout problème intéressant confronte à des difficultés intrinsèques qui doivent être surmontées avant d'accéder à la solution. Il serait évidemment présomptueux de prétendre savoir les analyser toutes, mais je voudrais insister ici sur un aspect typique de ces difficultés, qui semble complètement oublié par la pédagogie des boîtes à outils — ou même des « résolveurs » plus ou moins informatisés — et auquel on rattachait autrefois les méthodes axées sur l'*analyse* et la *synthèse*. Considérons par exemple le problème de la construction du carré (énoncé 7). Une recherche par tâtonnements peut (par exemple) conduire l'élève à construire un premier carré dans le bas, à gauche, du triangle et à tenter de modifier sa construction pour finir sur un carré qui répondrait à la question… La question qui se posera à lui désormais sera : « où dois-je arrêter le processus pour avoir exactement le carré dont le quatrième sommet se trouve sur AC ? ».



De la même façon, dans le problème de la tirelire (énoncé 4), une approche par tâtonnements peut donner : « si j'ai 37 billets de cinq, j'aurai $37 \times 5 = 185$ euros, si j'ai 36 billets de cinq et 1 billet de dix, j'aurai $36 \times 5 + 10 = 190$ euros, si j'ai 35 billets de cinq et 2 de dix, etc. » et la question sera de nouveau du type : « où arrêter le processus pour obtenir le résultat cherché de 305 euros ? ».

Ceci est en fait emblématique des difficultés dans lesquelles conduisent généralement les démarches telles que celles des « boîtes à outils » (qui ne sont jamais que des tentatives de résolution « par synthèse ») car elles cherchent à atteindre la conclusion en partant des données dont on dispose. Le but d'un « raisonnement » est en fait de trouver le moyen de guider ou d'arrêter un tel processus d'approche. Cela ne se fait généralement que par une phase préalable (dite « d'analyse ») qui consiste à considérer et étudier ce que l'on veut obtenir (c'est-à-dire à supposer le « problème résolu »…) afin d'en tirer des indices permettant de mener correctement à son terme le processus espéré au niveau de la synthèse. Ainsi, dans le problème du carré, il suffit de remarquer que tous les sommets libres des carrés d'essai sont alignés avec le point B pour en déduire que le carré définitif recherché aura nécessairement pour quatrième sommet le point d'intersection de la droite en pointillé avec AC… Le raisonnement prendra alors une nouvelle tournure : « comment puis-je trouver le point en question sans me servir du carré final ? ». Il en va un peu de même pour la tirelire : « partant de 185 euros (dans le cas de 37 billets de cinq), je dois arriver à 305 euros, combien dois-je transformer de billets de cinq en billets de dix pour y parvenir ? ».

Pour le dire de façon plus générale, revenons sur le diagramme de la figure 1. Comme nous l'avons dit, la solution est de compléter ce schéma en trouvant le passage menant de l'hypothèse à la conclusion. C'est la phase de « synthèse » qui ne pourra se raconter qu'une fois les idées trouvées !



Mais pour *trouver* ces idées, les méthodes de résolution proposées à l'élève se résument le plus souvent à chercher (dans son cours…) en commençant par les flèches qui partent de la zone appelée « hypothèse » (exemple de la propriété A) ou par celles qui aboutissent à la zone dite « conclusion » (exemple de la propriété B).

Des méthodes plus intuitives fondées sur l'étude « dynamique » des figures consistent, quant à elles, à conjecturer des propriétés intermédiaires « plausibles » qu'il conviendra ensuite de rattacher aux autres pour construire un passage entre hypothèse et conclusion (exemple de la propriété C). Mais, apparemment paradoxale, la méthode « d'analyse » consiste à chercher systématiquement des propriétés qui soient *à la fois des conséquences* des hypothèses et des conclusions (propriété E), de manière à renforcer l'intuition et aller plus loin dans la découverte de propriétés susceptibles de servir de point d'appui pour la synthèse finale.

C'est (entre autres) ainsi que cherchent les experts : la quête de démonstration des conjectures classiques en mathématiques, faute d'idées tombées du ciel, repose souvent sur l'étude des conséquences que pourrait avoir le résultat cherché. Ceci dans l'espoir d'apercevoir parmi celles-ci soit des phénomènes manifestement faux – ce qui réglerait négativement le problème – soit des phénomènes insuffisamment explorés qui pourraient alors s'inscrire *a posteriori* comme des étapes dans une démarche de démonstration. Mais c'est aussi tout naturellement ainsi que surgissent des idées de solution à l'échelle même des exercices les plus simples. Ainsi l'intuition de l'étude des médianes que j'ai signalée au début à propos de l'exercice sur le parallélogramme (énoncé 1) ne provient nullement du fait que l'on connaîtrait un théorème permettant de prouver que CJ *est* une médiane ; elle provient au contraire du fait que si, comme on doit le démontrer, le point J est milieu de AB, alors CJ *est la médiane* du triangle ABC… Ce sera ensuite à la démarche de recherche de tenter de tirer profit de cette idée ! De même, la question de l'alignement dans le deuxième exercice proposé à Julie n'a guère de chances d'être comprise autrement que par une attaque plus ou moins consciente de ce genre : il n'y a certainement aucun théorème dans la boîte à outils de Julie lui disant que si on a deux angles droits adjacents, alors on peut en déduire un alignement… mais en revanche, il devient raisonnable de penser qu'en se disant : « j'ai un angle droit, donc *si les points sont alignés* j'en aurai un autre » on peut parvenir à l'idée d'un *renversement* du raisonnement qui cherchera à prouver l'alignement à partir des deux angles droits…

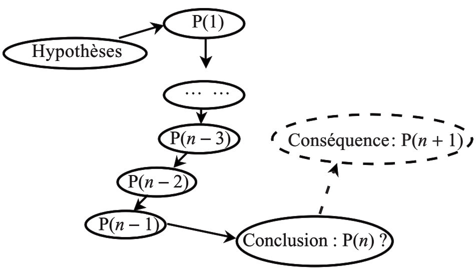
Les exemples ne manqueraient pas pour montrer que les élèves, confrontés à des situations problématiques aussi simples que des vérifications d'égalité entre deux expressions, renâclent bien souvent pour « partir du second membre » afin d'obtenir le premier, en se demandant « s'il ont bien le droit de le faire »… Les exemples ne manqueraient pas non plus pour montrer, à l'inverse, que la démarche du mathématicien consiste très souvent à *analyser un problème*, en partant de la fin, avant toute tentative de rédaction d'une démonstration effective. On pensera par exemple à tous les schémas de raisonnement classiques du type contraposition, raisonnement par l'absurde ou même raisonnement par récurrence. Arrêtons-nous par exemple un instant sur celui-ci.

Si l'on veut prouver, par exemple, que $P(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ est égal à $n(n + 1)/2$, on peut procéder comme suit :

a) on calcule $P(n + 1) = (1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (n + 1)$, c'est-à-dire : $P(n + 1) = P(n) + (n + 1)$,

b) donc, en remplaçant : $P(n + 1) = n(n + 1)/2 + (n + 1)$, ce qui entraîne bien la formule souhaitée : $P(n + 1) = (n + 1)(n + 2)/2$

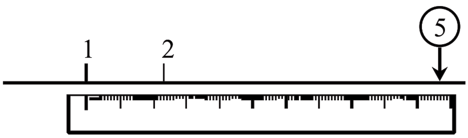
On voit dès lors que la conclusion $P(n)$, si elle était démontrée, impliquerait la propriété $P(n + 1)$. Il convient donc d'en tirer l'idée que « $P(n - 1)$ permet de montrer $P(n)$, mais que $P(n - 2)$ implique $P(n - 1)$, … » pour mettre en place le schéma de démonstration ci-contre.



Mais le miroir aux alouettes de la logique formelle a fait oublier la différence essentielle entre analyse et synthèse et, par là, la nature même de la notion de raisonnement. En fait il y a deux moments différents de la pensée à mettre en œuvre dans tout problème. Celui de l'analyse consiste à explorer les conséquences d'une situation, hypothétique ou non. C'est ainsi que procèdent les garagistes ou les médecins. Confrontés à une panne et à des symptômes, il testent des explications possibles en passant d'abord en revue leurs conséquences. Ainsi, si votre voiture ne démarre pas, le garagiste se dira : « c'est peut-être l'arrivée d'essence » et cherchera les conséquences d'une telle conclusion sous la forme : « oui, mais si c'est bien l'arrivée d'essence, alors c'est peut-être la pompe »… et il inspectera tel ou tel organe du véhicule de façon à mettre le doigt sur la cause effective de la panne. Au contraire, le moment de la synthèse ne consiste plus à chercher ; il suppose *que l'on ait trouvé* et que la question soit simplement de mettre au point une démarche créative permettant de passer de choses connues (ou données) à des choses recherchées (ou souhaitées). La spécificité et la difficulté des mathématiques – comme cela apparaît à l'évidence sur l'exemple du raisonnement par récurrence – est précisément dans le fait qu'elles demandent de maîtriser aussi bien l'*analyse* que la *synthèse*. Mais, malheureusement, les méthodes actuelles semblent s'ingénier à mélanger les aspects du problème, focalisées qu'elles sont sur des activités de démonstration qui sont censées ressembler à celles de l'expert et donner à l'élève l'envie de raisonner !

Avant de s'investir autant dans des exercices gratuits et non motivants, il serait incontestablement plus productif de s'appuyer sur des activités de construction ou de mise au point d'algorithmes simples qui mettent tout autant les capacités de l'élève à contribution et permettent plus aisément de doser les difficultés auxquelles il est confronté. Je n'en prendrai qu'un exemple extrêmement simple que l'on m'a présenté récemment. Un élève de sixième à qui était posé l'exercice suivant : *place le point "5" sur la droite graduée ci-dessous* :

a été envoyé au tableau pour expliquer sa méthode à ses camarades, et a fait le dessin suivant :



en déclarant : « Je place le point "5", et je vérifie avec mon double-décimètre que la distance est correcte… ». N'est-ce pas là, précisément, une confusion de la part de l'élève qui revient à ne pas distinguer la partie « analyse » de la partie « synthèse » ? Mais n'est-ce pas là, *a contrario*, la démonstration que la question – aussi simple qu'elle paraisse – mettait pleinement en jeu ces deux phases du raisonnement ? Car comment trouver la solution si on ne procède pas de manière plus ou moins explicite en deux temps :

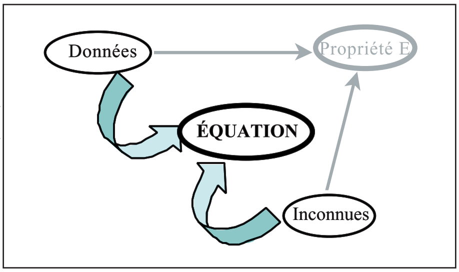
a) se faire un dessin approximatif (c'est-à-dire supposer le problème résolu),

b) déduire de ce dessin un moyen de déterminer précisément ce que l'on cherche.

La distinction et la maîtrise de ces deux temps est clairement une des difficultés majeures des mathématiques. Mais celles-ci ont mis au point avec le temps des outils particulièrement puissants pour tirer parti de la méthode d'analyse et synthèse sous des formes spécifiques et formalisées, qui en deviennent presque mécaniques.

Revenons une dernière fois sur l'exemple de la tirelire.

Ce n'est un secret pour personne que la solution « raisonnée » que j'ai exposée un peu plus haut — et qui faisait les délices de la fin d'études primaires d'antan — n'a plus guère les faveurs des professeurs d'aujourd'hui. Ils la trouvent particulièrement difficile pour les élèves … et pour eux-mêmes ! Et chacun préfère la *solution algébrique* qui consiste à dire : « j'appelle x et y les nombres respectifs de billets de cinq et de dix euros, etc. ». Or c'est précisément là l'équivalent numérique de la méthode d'analyse et synthèse. En effet, la mise en place de l'équation revient à trouver des conditions vérifiées par les données connues et par les éléments inconnus, sur lesquels on calcule « comme si on les connaissait » pour traduire les conditions imposées par l'énoncé. À la propriété E du diagramme précédent, correspond, exactement sur le même modèle, la recherche de l'équation…



c) Une question d'outils et de langages

Les défenseurs de l'acquisition du « sens » et du « raisonnement pour eux-mêmes » font irrésistiblement penser à l'histoire classique de ces douaniers suisses qui avaient été habitués à surveiller pendant des années un certain contrebandier qui les avait largement bernés. Lorsque celui-ci décida brusquement de se retirer des affaires, finies les courses poursuites en camion ou en voiture de sport, il ne circulait plus désormais qu'à bicyclette et passait tranquillement tous les jours devant nos gabelous helvétiques avec, dans ses sacoches, une matière assez bizarre qui faisait penser à quelque chose comme du sable… C'était impalpable, presque liquide tant on pouvait difficilement le saisir dans la main sans que cela ne s'écoule entre les doigts… Mais ce qui est sûr c'est qu'il résistait à toutes les analyses. Les douaniers pensaient bien, évidemment, que le soi-disant repenti les roulait dans la farine avec son sable, mais ils eurent beau retourner, soupeser ou analyser la substance mystérieuse, ils ne trouvèrent jamais le secret de ce trafic ! Ils n'eurent droit à la clef de l'énigme que le jour où le contrebandier décida de prendre vraiment une retraite définitive… Et ce jour-là, comme il était venu leur annoncer qu'ils ne le verraient plus passer quotidiennement avec ses sacoches remplies de sable, les douaniers le supplièrent de leur livrer son secret… « Ah ! leur dit alors le vieux passeur, vous n'aviez pas compris ? mais ce n'est rien que du sable fin… En fait, c'étaient les vélos qui changeaient chaque jour ! »

Il en va un peu de même en matière de sens ou de raisonnement en mathématiques : ces mots ne recouvrent en définitive guère de réalité tangible, ils sont avant tout liés à des « outils » et ce n'est que la maîtrise de ces outils qui peut en constituer le « sens » ou qui peut être désignée abstraitement comme une activité de « raisonnement ». Focaliser sur le « sens » revient à focaliser sur le sable et à ne plus voir les aspects importants, parce que « fonctionnels », du problème pédagogique.

Revenons par exemple sur l’exercice assez simple du parallélogramme (énoncé 1). Comment croire qu’un raisonnement quelconque puisse permettre d’obtenir une explication du fait que les points I et J sont les milieux des côtés si ce « raisonnement » ne s’appuie pas sur des connaissances, des implicites, des réflexes qui constituent en eux-même un « métier » et qui sont des préalables indispensables à toute démonstration ? Comment croire, une fois cette « démonstration » effectuée, que toutes les « explications » obtenues soient parfaitement satisfaisantes et ne laissent dans l’ombre aucun point important ? À commencer, par exemple, par la liste des axiomes auxquels il conviendrait – pour une « explication » digne de ce nom – de réduire la liste des vérités intermédiaires auxquelles fait appel le raisonnement… Ce « raisonnement » aura beau donner l’impression d’une rigueur absolue, il n’est en définitive qu’un exercice de style lié à un langage convenu et pleinement admis par chacun des acteurs de la pièce. Celui-ci pourra être, comme nous l’avons fait jusqu’ici, celui de la géométrie affine élémentaire et des propriétés des médianes, mais chacun sait bien que les mêmes acteurs sont prêts, selon les programmes, à faire appel à d’autres conventions, comme par exemple celles du calcul vectoriel, celles de la géométrie analytique, celles des transformations et même, pourquoi pas, celles du birapport si l’on remarque que la famille constituée par les droites DC, JC, AC et BC n’est rien d’autre qu’un de ces bons vieux faisceaux harmoniques qui supportaient les raisonnements de naguère… Il y a certes une part commune de « logique élémentaire » dans toutes ces entrées dans l’exercice, mais il est clair que les « règles du jeu » sont à chaque fois si différentes qu’il n’est plus possible de regarder le « raisonnement » en lui même autrement que comme la mise en œuvre ritualisée d’outils qui ont été mis au point durant des générations et qui finissent par « penser à notre place ».

On s’en convaincra vite si l’on songe par exemple à la démonstration du théorème de Morley que j’évoquais plus haut. Les outils, quels qu’ils soient, nécessiteront alors un travail et une subtilité de mise en œuvre qui dépasse largement les capacités de « raisonnement » de quelque mathématicien moyen que ce soit : savoir « raisonner » dans des situations fréquemment rencontrées ne semble pas d’un grand secours pour surmonter les difficultés qui surgissent dès que la situation est vraiment nouvelle ! Reprenons – pour sortir un peu de la géométrie – les quelques problèmes déjà cités dans la première partie. Il est clair que le simple exercice de proportionnalité (énoncé 1) illustre déjà assez bien à lui seul le fait que la solution ne vient pas à l’esprit par un véritable « raisonnement », mais qu’au contraire on se contente de « reconnaître » un schéma de problème connu et classé depuis longtemps dans la catégorie « règle de trois » ou « tableau de proportionnalité ». Mais arrêtons-nous un peu plus sur l’énoncé 5, c’est-à-dire sur le problème des vaches et du pré…

> *70 vaches tondent un pré en 24 jours, 30 vaches le tondent en 60 jours, combien faut-il de vaches pour le tondre en 96 jours ?*

On notera tout d’abord que le nombre incalculable d’intuitions du type « il s’agit de proportionnalité » à la lecture de ce genre d’énoncés suffirait largement à démontrer ce qui était dit plus haut : les problèmes de proportionnalité ne se « raisonnent » pas, ils se reconnaissent par analogie (vraie ou fausse !) sur le type d’énoncé proposé…

Mais, précisément, si les premières tentatives qui cherchent généralement à forcer l'exercice vers la proportionnalité sont vouées à l'échec, comment raisonner correctement pour trouver la solution ? Je laisse le lecteur se mesurer à la question. Je n'ai choisi cet énoncé que parce qu'il fait partie, en vérité, d'un type de problème très classique au début du siècle dernier : il relève en fait de la méthode dite de « fausse position ».

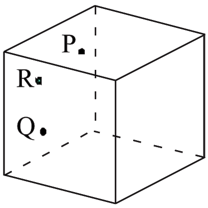
En voici la solution « raisonnée » (qui se laisserait présenter de manière magistrale sous la forme d'un diagramme du type de ceux qui m'ont servi jusqu'à présent) :

En 24 *jours, le pré produit* $70 \times 24 = 1680$ VJ
En 60 *jours, le pré produit* $30 \times 60 = 1800$ VJ
En $(60 - 24) = 36$ *jours, le pré a donc produit* $(1800 - 1680) = 120$ VJ *de plus qu'en* 24 *jours*.
En $(96 - 24) = 72$ *jours, le pré produira* $[72 : 36] \times 120 = 240$ VJ *de plus qu'en* 24 *jours*…
En 96 *jours, le pré produit donc* $1680 + 240 = 1920$ VJ .
Cette quantité correspond finalement à : 1920 : 96 = **20** *vaches*…

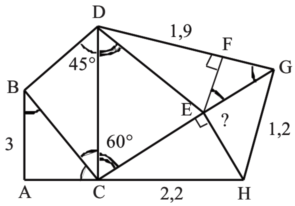
Comme, on le voit, la méthode consiste à considérer la « production » totale du pré et à la comptabiliser en unité convenable, c'est-à-dire ici en « vaches-jours »… Le reste revient à se ramener à un problème de proportionnalité en considérant l'accroissement de cette production et en supposant que celle-ci est proportionnelle au temps ! Traduisons : la production en herbe du pré se « modélise » par une fonction affine (stock initial plus accroissement régulier en fonction du nombre de jours) et l'accroissement de production est donc une fonction linéaire du temps… Il serait sans doute plus « moderne », en pratique, de déterminer les coefficients de la fonction affine à partir des données, puis de remplacer la variable par 96… Toutefois ce serait un peu plus compliqué ! Mais, dans un cas comme dans l'autre, peut-on vraiment soutenir que le *raisonnement* ait la moindre chance de faire parvenir au résultat si on n'a jamais rencontré la situation et la méthode auparavant ?

Les problèmes mathématiques ont une première particularité qui permet de les distinguer aisément parmi beaucoup d'autres : ce sont des problèmes très difficiles. Leur solution repose sur des techniques spécifiques découvertes et améliorées sans cesse au fil des siècles. Ce sont ces méthodes qu'il convient d'apprendre et c'est le plus souvent l'apprentissage de ces méthodes que l'on désigne sous le nom « d'apprentissage du raisonnement ». Dans la plupart des problèmes traités, il s'agit donc de s'entraîner à utiliser des « outils » et il est malheureusement bien rare que ces outils s'appliquent à des situations étrangères aux mathématiques ou aux sciences physiques. La seconde particularité des problèmes mathématiques qui les distingue aussi des autres domaines de la pensée tient dans le fait que les outils utilisés ont pratiquement tous les caractères de *langages*. Ils sont, si l'on préfère, « structurés comme des langages », et *ils s'apprennent donc comme des langages*. C'est-à-dire par leur mise en œuvre effective et non par des discours extérieurs sur ces langages, par la fréquentation de problèmes types et des réponses apportées, et non par des traités ou des théories, des grammaires ou des rhétoriques, qui ne sauraient venir que dans un second temps et ne peuvent s'adresser qu'à ceux qui ont déjà accompli pour eux-mêmes la partie « pratique » du chemin. Apprendre à raisonner revient à s'entraîner à mettre en jeu des combinatoires de « signes », à composer des « phrases » avec ces signes. Celles-ci dépassent le plus souvent l'entendement (au sens habituel que l'on donne à ce terme), mais elles sont particulièrement bien adaptées à certains types de problèmes. Je ne veux cependant pas dire par là que tout se ramène à des *langages* qui soient toujours de la nature du langage naturel. Au contraire.

On peut, d'une part, rencontrer des foules de situations pour lesquelles la solution ne passe pratiquement pas par la formulation ordinaire : il suffit par exemple de considérer des exercices comme :
La démarche demandée à l'élève consistera bien à exiger de découvrir le bon « chemin », la *bonne combinaison* ordonnée d'étapes permettant de parvenir au résultat cherché, exactement comme dans un schéma du type 1. Mais on sent bien qu'en l'occurrence la mise en place d'un *discours* n'apporte plus rien de



Dessiner l'intersection
du cube avec le plan PQR.



Calculer la mesure de l'angle HEG
en tenant compte des éléments connus.

fondamentalement efficace à la pensée par rapport au problème lui-même : la solution, tout en étant en quelque sorte « muette », recouvre des démarches parfaitement analogues à celles de la rédaction de démonstrations…

Inversement, la langue peut devenir importante dans des situations de raisonnement apparemment « abouti » comme celui du raisonnement par récurrence évoqué plus haut. Une fois mise au point la procédure de démonstration détaillée précédemment, il convient encore, en effet, de la « mettre en forme » pour dépasser les difficultés classiques liées à l'apparition de l'infini. Faut-il dire : « la propriété est vraie pour $(n + 1)$ dès qu'elle est vraie pour n donc, comme elle est vérifiée pour $n = 1$, elle l'est pour $n = 2$, comme elle l'est pour $n = 2$, elle l'est pour $n = 3$, et *ainsi de suite*… ce qui prouve qu'elle est vraie pour tout entier n » ? Faut-il plutôt dire : « la propriété est vraie pour $(n + 1)$ dès qu'elle est vraie pour n, donc si vous me donnez un n quelconque, il me suffira de prouver que la propriété est vraie pour $n - 1$, puis pour $n - 2$, et *ainsi de suite* jusqu'à 1 ; or la propriété est vérifiée pour 1, si bien qu'elle sera vérifiée pour tout entier n », ceci de manière à masquer mieux l'infinité des vérifications qui semblaient nécessaires pour démontrer la formule pour tout n ? Faut-il dire enfin, comme le permet en définitive la théorie des ensembles : « la propriété est vraie pour $n = 1$ et, comme $P(n)$ implique $P(n + 1)$, elle est vraie sur **N** d'après *le principe de récurrence* » ?

D’une certaine manière, les langages mis en place par les mathématiques jouent sur tous les registres connus entre subtilité de la langue naturelle et rigidité absolue de la logique formelle… Mais avant d’en arriver là – je veux dire à ce niveau de complexité réservé, on l’espère, aux professionnels – il est clair que les élèves sont bien obligés de se contenter d’effleurer les difficultés et doivent franchir une partie seulement des obstacles ! Bien que l’on ait cru un peu vite, au moment des « maths modernes », que la théorie des ensembles constituait « le » langage universel, il faut aujourd’hui se rendre à l’évidence : les mathématiques sont constituées d’un réseau de langages plus ou moins spécialisés et formalisés. Et même si l’ambition des mathématiciens est, en permanence, de conférer une unité et une harmonie à tous ces langages, il est prématuré et même absurde de vouloir imposer aux enfants des unités de façade qui ne reviennent qu’à compliquer les choses au point de les rendre impénétrables.

Qu’on le veuille ou non, les langages que l’élève est amené à s’approprier sont essentiellement des techniques combinatoires sur des « formalismes » beaucoup plus proches de l’algèbre que de la langue naturelle et c’est justement dans la puissance « déraisonnable » de ces formalismes que réside, en dernière analyse, l’intérêt des outils mathématiques que l’on veut lui inculquer.

Que seraient donc les « raisonnements » autour des fractions si la notation « $\frac{p}{q}$ » n’était suffisamment miraculeuse pour que les calculs apparaissent « naturels », alors que le formalisme des pourcentages échoue lamentablement dès que l’on veut effectuer la moindre opération ? Peut-on vraiment croire que le concept de « nombre réel » ait pu être maîtrisé à partir de la Renaissance sans la découverte du formalisme issu de la notation décimale de position et de l’usage de la virgule ? Pendant combien de siècles a-t-on « pensé » le calcul infinitésimal et le calcul intégral comme le résultat magique et injustifiable de l’utilisation des symboles $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ et $\int g(x)\,\mathrm{d}x$? Les nombres complexes n’auraient-ils donc pas été inventés par une « transgression » de l’écriture algébrique des racines de l’équation du troisième degré consistant à écrire – de façon en quelque sorte « in-sensée » – des racines carrées de nombres négatifs ? Un bon formalisme – et particulièrement ceux inventés par Leibniz – est celui qui pense à notre place en permettant, *exactement comme un langage*, de fournir des automatismes inconscients qui souvent se révèlent pertinents *a posteriori*. Dès lors, comme « Le » langage, la plupart de ces langages ne s’intériorisent pas véritablement au niveau du raisonnement mais au niveau de l’*analogie*, et ce sont ces analogies qui fournissent des intuitions – juste ou fausses – qui devront passer les filtres de la vérification…

Le maître ne peut malheureusement que tenter de faire accepter cette *règle du jeu*, mais il n’en aura les moyens que si, d’une part, il inscrit cet apprentissage dans une progression *spiralaire* de ses élèves et si, d’autre part, il s’attache avant toute chose à développer des apprentissages suffisamment répétitifs pour pouvoir servir de supports à des réflexes de reconnaissance intuitive de problèmes déjà rencontrés.

Conclusion

On l'aura compris, mon but n'était pas de donner des recettes à mettre en œuvre pour apprendre le raisonnement ou la démonstration. Il me semble au contraire plus proche de la vérité de dire que *l'on ne sait pas apprendre à raisonner*, du moins si l'on doit considérer que le mot raisonnement désigne une capacité qui peut se développer en tant que telle, hors de contextes précis. Faire des mathématiques nécessite évidemment de faire appel à des facultés logiques de base (déduction, non-contradiction, imagination, etc.) mais d'abord ces facultés en elles-mêmes ne sont nullement l'apanage des mathématiques et ensuite rien ne prouve que (mis à part le fait de les utiliser régulièrement) les mathématiques contribuent plus qu'une autre discipline à les inculquer ou à les renforcer. Il me semble beaucoup plus raisonnable de penser que, dans ce domaine comme dans d'autres, la faculté de raisonner passe en premier lieu par une familiarité avec les questions qui sont abordées et, en second lieu, par l'apprentissage d'outils spécifiques dont l'usage demande, certes des capacités logiques ou une agilité d'esprit, mais surtout une maîtrise qui ne peut résulter que de la pratique et de l'habitude… Ce sont ces qualités-là qui, en dernière analyse, constituent sans doute l'essentiel de ce qu'il est convenu d'appeler la « capacité au raisonnement », et ce sont ces qualités-là qui sont susceptibles d'acquisition, d'apprentissage et de perfectionnement ! Bien sûr, il n'en reste pas moins que la « question du raisonnement » est primordiale en sciences et en mathématiques et que les enseignants de sciences et de mathématiques ne sauraient éluder le problème de savoir comment on peut faire progresser les élèves qui ont des difficultés en matière de logique ou d'intuition. De même que la société toute entière ne saurait se dispenser de chercher à comprendre comment « l'esprit scientifique » peut être suscité et développé chez ses enfants…

Le problème n'est malheureusement pas neuf et nous avons vu au passage que la seconde moitié du vingtième siècle a pu croire que le progrès en la matière se résumait en une opposition entre « pensée sauvage », réduite en quelque sorte à la notion bricolage, et « pensée scientifique » dévolue à la formalisation structuraliste. Il aura été bien tentant de croire pendant un temps, en effet, que les arcanes et la puissance des mathématiques étaient solubles dans les structures ensemblistes et dans le formalisme des démonstrations. On avait simplement oublié de se convaincre que le langage des mathématiques modernes ne pouvait sans doute pas s'apprendre d'emblée : il allait « comme un gant » aux maîtres qui le découvraient à partir d'une culture qui leur était propre, il restait impénétrable à l'élève que l'on croyait aider, par ce discours, à se construire des savoirs. Seuls les savoir-faire déjà acquis par le maître lui permettaient de comprendre les concepts « modernes » et de les considérer comme naturels.

C'est à ce dialogue – à cette opposition et à cette complémentarité – entre *métier* et *théorisation* que nous confronte directement le problème de l'apprentissage du raisonnement. Hors des réponses simplettes, il n'est peut-être pas inutile de rappeler ici, pour conclure, que les Grecs eux-mêmes avaient formulé depuis longtemps la difficulté, et de la plus belle façon qui soit… Ils possédaient en effet dans leur mythologie deux déesses dédiées à « l'intelligence ». La première s'appelait Métis, c'était une nymphe qui représentait la ruse, l'intelligence pratique et parfois même la roublardise. Elle était consacrée par exemple aux navigateurs dont l'expérience et l'intuition, l'agilité d'esprit et le « métier », leur permettaient de se tirer d'affaire dans les situations difficiles, de trouver la bonne route parmi les dangers, d'échafauder des plans ou des itinéraires permettant d'arriver à bon port. Elle représentait généralement les capacités difficiles à saisir d'une pensée susceptible de s'adapter à des problèmes peu formalisables, à des paramètres impossibles à quantifier, à des données changeantes, à des décisions instinctives plutôt qu'à des déductions véritablement rigoureuses… La seconde déesse personnifiant l'intelligence, mais disons cette fois une intelligence plus scientifique, plus « technique », n'est autre que Athéna. Elle correspond de son côté à ce que l'on peut considérer comme une forme de pensée plus évoluée que celle, plus intuitive et moins formelle, qui est rattachée classiquement à Métis.

Mais ce qui vaut précisément d'être conté ici et qui pourrait être particulièrement en prise avec notre sujet, c'est le mythe relatif à la naissance de la déesse Athéna : il se trouve en effet que Zeus, chef incontesté de l'Olympe, avait séduit et épousé la nymphe Métis et qu'il l'avait rendue enceinte… Mais apprenant qu'une prophétie lui prédisait que la descendance de Métis le détrônerait un jour comme il avait lui-même détrôné son père, il décida purement et simplement de se débarrasser de la mère ainsi que de sa promesse d'enfant en avalant la nymphe… Seulement voilà : quelques mois plus tard – correspondant certainement à la durée normale de gestation – Zeus ressentit une violente douleur à l'intérieur de sa tête… Sur les conseils d'Hermès il commanda alors à Héphaïstos de lui ouvrir le crâne… et c'est ainsi que l'on vit surgir de celui-ci, toute armée, la déesse Athéna…

Comment dire mieux, d'une part, que la pensée scientifique ne peut s'élaborer que par l'activité intellectuelle : elle seule est susceptible de permettre la maturation, la mise en forme définitive de la capacité d'invention du praticien qui, quant à elle, est principalement faite de finesse et de sens technique ; comment insister plus, d'autre part, sur le fait que, si « l'intelligence pure » existe, elle repose nécessairement sur la pratique, sur le « métier », et donc qu'elle naît fondamentalement de l'habitude, de la manipulation systématique et de l'expérience acquise dans la fréquentation quotidienne ?

En mathématiques comme ailleurs – sans doute même plus qu'ailleurs – la rigueur ne fait que succéder aux savoir-faire qui réussissent. Les traités ou les mises en forme satisfaisantes ne font que succéder aux méthodes qui ont fait leurs preuves. Et, pourquoi le taire, les professeurs ne découvrent le plus souvent un « sens » aux techniques qu'ils ont appris à domestiquer au cours de leurs études… que le jour où ils sont amenés à les enseigner à leur tour !

Comment croire, dans ces conditions, qu'il soit possible de transmettre du « sens » ou de la « capacité à raisonner » autrement qu'au travers d'exercices techniques, d'abord très simples, progressifs, nécessairement un peu répétitifs et routiniers ? L'École a une grande responsabilité à cet égard. D'abord, évidemment, au niveau de l'institution elle-même, chargée de choisir et définir les contenus à enseigner, mais aussi au niveau de chaque professeur.

Il n'est pas raisonnable que les diverses commissions chargées de modifier sempiternellement les programmes décident un beau jour qu'il convient d'enseigner la théorie des ensembles et les structures, sous prétexte que les mathématiciens professionnels et les tenants des « sciences de l'homme » jugent indispensable de mettre en avant de tels outils le plus tôt possible dans la scolarité. Il n'est pas plus raisonnable que l'on décide un beau jour de revenir aux « cas d'égalités » des triangles sous le prétexte que ceux-ci peuvent se relire au travers de la théorie des invariants et du programme d'Erlangen. Il est encore moins raisonnable de chercher à glisser artificiellement des parcelles de théories probabilistes ou statistiques sous le simple prétexte d'adapter l'enseignement à des représentations passagères de la « vie citoyenne »… Mais peu importe, en définitive, les prétentions salvatrices et révolutionnaires à ce niveau : l'expérience montre assez bien que « de toutes façons, ce sera mal »…

Le vrai problème réside toujours, en dernière analyse, au sein même de la classe, et repose essentiellement sur les épaules du maître…

Je voudrais simplement avoir réussi à expliquer que l'École se doit d'avoir l'humilité et la lucidité de penser qu'elle ne sait pas vraiment apprendre à raisonner en dehors de la transmission d'outils et de méthodes qui ont été forgés au cours des siècles pour résoudre certains problèmes.

Je ne veux bien sûr pas dire par là que toutes les tentatives, toutes les activités du maître dans telle ou telle direction – comme par exemple celle de la démonstration – soient inutiles ou déplacées. Ma seule ambition était de rappeler, grâce à l'exemple de la petite Julie, que ce qui se passe dans la tête de la grande majorité des élèves n'a pas grand chose à voir avec l'image idéale de la réflexion mathématique dans laquelle on se complaît trop souvent… Peut-être dois-je la remercier de sa participation involontaire à mon exposé ? Si c'est le cas, je le fais volontiers, mais je voudrais surtout terminer ici sur un hommage à tous les membres de l'Irem de Montpellier qui ont mis au point et qui pratiquent la « narration de recherche ».

Non pas que je désire proclamer qu'il est « indispensable » de pratiquer des narrations de recherche dans les classes ! Mais je voudrais insister sur le fait que ces professeurs se sont d'abord intéressés à comprendre *ce qui se passe dans la tête d'un élève* lorsqu'il cherche à résoudre un problème, et que c'est à partir des observations et des entretiens qu'ils ont menés à cette occasion qu'il se sont rendu compte qu'il pouvait être intéressant de demander aux élèves de dire une partie des difficultés qu'ils rencontraient…

Mais que l'on ne s'y méprenne pas : personne ne dit que cela doive devenir un exercice de style qui mérite absolument d'être imposé systématiquement, ou que les narrations de recherche doivent absolument être évaluées au même titre que les résolutions d'exercices ou de problèmes. Non. Et même leurs créateurs ne se trompent pas sur la question : la narration de recherche, même si elle est notée, est d’abord une façon pour eux de chercher à savoir où en sont leurs élèves vis-à-vis des difficultés du raisonnement. J’aimerais simplement ajouter à cela une remarque plus personnelle ; il me semble que la « narration de recherche » a une conséquence indirecte beaucoup plus importante encore pour les élèves : c’est que les professeurs qui la pratiquent ont nécessairement appris à faire la différence entre des problèmes difficiles qui s’adaptent bien à la narration de recherche et qu’ils réservent précisément à cette fin, et des problèmes plus « raisonnables » qui peuvent être donnés au cours des contrôles classiques.

De ce point de vue, il n’est pas sûr du tout que la petite *Julie Lamalchance* mérite vraiment le pseudonyme que je lui avais choisi pour cette occasion…