

Les problèmes de l'APMEP

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de « beaux problèmes », ... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice. La rubrique s'efforce de rendre compte de la pluralité des méthodes proposées par les lecteurs, des généralisations des problèmes... Entre la publication d'un énoncé et la publication de sa solution, un bulletin intermédiaire fournira des pistes pour faciliter l'étude du problème et rendre la rubrique davantage accessible.

Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés. Solutions et énoncés sont à envoyer à l'adresse suivante (réponse à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO,
9 quai de la Seine,
75019 Paris.

Indications sur des énoncés déjà publiés

Énoncé 303 (médianes d'un quadrilatère : $5 \leq \text{aire}(Q) / \text{aire}(q) < 6$) :

Le rapport vaut 5 si le petit quadrilatère q est un trapèze, il tend vers 6 si Q et q tendent vers des triangles.

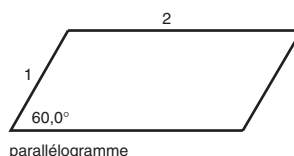
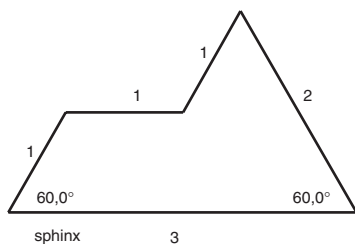
Énoncé 304 ($2x^2 + 1 = y^n$) :

Peut-on factoriser le premier membre ?

Nouveaux énoncés

Énoncé n° 305 (Pierre DUCHET, 75-Paris)

En appelant « sphinx » et « parallélogramme » les deux formes que voici :



- a) Peut-on paver complètement un triangle équilatéral, de côté n , avec des sphinx ?
- b) Combien peut-on placer (au maximum) de parallélogrammes à l'intérieur d'un hexagone régulier de côté n ?

Dans les deux cas, les pièces ne doivent pas se recouvrir. Elles peuvent être pivotées et retournées.

Énoncé n° 306 (Pierre PARO, 83-St Raphaël)

Une droite (Δ) coupe en α, β, γ les trois côtés $(BC), (CA)$ et (AB) d'un triangle ABC . Soient A', B', C' les projections orthogonales de A, B, C sur (Δ) . Montrer que la droite (Δ) est une droite de Simson relativement au triangle ABC si et seulement si les segments $[A'\alpha], [B'\beta]$ et $[C'\gamma]$ ont même milieu.

Solutions

Énoncé n° 297 (Jacques BOUTELOUP, 76-Rouen)

On considère quatre cercles du plan tangents deux à deux en des points distincts.

1) Démontrer que trois d'entre eux sont tangents extérieurement deux à deux, le quatrième étant soit tangent extérieurement, soit tangent intérieurement à chacun des trois autres.

2) On désigne par z_i les affixes des centres dans une représentation complexe du plan

euclidien, par r_i leurs rayons et l'on pose $c_i = -\frac{1}{r_i}$ lorsque le cercle correspondant

est tangent intérieurement aux trois autres, $c_i = \frac{1}{r_i}$ dans les autres cas. Démontrer les

relations :

$$2\sum c_i^2 = (\sum c_i)^2 \quad (1)$$

$$2\sum c_i^2 z_i = (\sum c_i)(\sum c_i z_i) \quad (2)$$

$$2\sum (c_i z_i)^2 = (\sum c_i z_i)^2 \quad (3)$$

SOLUTION

Cette configuration est connue sous le nom « cercles de Soddy » (voir par exemple : *Dictionnaire des mathématiques* de Bouvier, Le Lionnais et George, *Dictionnaire Penguin des curiosités géométriques* de Wells, *Redécouvrons la géométrie* de Coxeter et Greitzer, *Nouveaux divertissements mathématiques* de Martin Gardner, ...). « La relation (3), écrit l'auteur, est apparue sans démonstration, et sans considération de signe pour c_p , dans un petit article de *Science*

et *Vie* de juillet 2001. Elle était attribuée aux Américains Wilks et Mallows en 1998. Il est évident que cette relation est indépendante de l'orientation de Ox (son changement multiplie les z_i par un facteur λ), mais son indépendance du choix de l'origine O est par contre loin d'être évidente. C'est en supposant réalisée cette propriété que j'ai été conduit aux deux autres relations ».

La relation (1), la plus connue, est attribuée à Descartes. Elle apparaît sans démonstration dans l'exercice 56 du Hors Série de *Tangente* sur la géométrie. Le présent énoncé vise donc à compléter ces multiples publications partielles. J'ai reçu des solutions de Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Alain CORRE (03-Moulins), Christine FENOGLIO (69-Lyon), Georges LION (98-Wallis) et René MANZONI (76-Le Havre).

Tout d'abord, si les quatre cercles ne sont pas tangents extérieurement deux à deux, on peut supposer que (Γ_2) est intérieur à (Γ_1) , auquel cas (Γ_3) et (Γ_4) ne peuvent être ni extérieurs à (Γ_1) , ni intérieurs à (Γ_2) : ils sont tous deux intérieurs à (Γ_1) et extérieurs à (Γ_2) et – en faisant le même raisonnement avec (Γ_1) et (Γ_3) – extérieurs entre eux.

Pour la deuxième question, avec plus ou moins de calculs, les lecteurs utilisent l'inversion. Considérons un repère complexe dont le centre O est l'un des six points de contact (par exemple, le point de contact de (Γ_1) et (Γ_2)) et dont l'axe des réels est tangent aux deux cercles (Γ_1) et (Γ_2) . On identifiera désormais un point à son affixe. Les centres z_1 et z_2 de ces cercles sont des imaginaires purs de modules r_1 et r_2 , et le choix des signes de c_1 et c_2 montre que, dans tous les cas, $c_1 z_1$ et $c_2 z_2$ sont opposés : on peut donc supposer que $c_1 z_1 = i$ et $c_2 z_2 = -i$. L'inversion de pôle O et de puissance 1 transforme ces deux cercles en deux droites horizontales (Δ_1) et (Δ_2) , d'équations

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{c_1 i}{2} \text{ et } \operatorname{Im}(z) = -\frac{c_2 i}{2}.$$

Cette même inversion transforme un cercle (Γ) ne passant pas par O , de centre z et de rayon r , en un cercle de centre $z' = \frac{z}{K}$ et de rayon $r' = \left| \frac{r}{K} \right|$, où $K = |z|^2 - r^2$ est la puissance de O par rapport à (Γ) . Si, conformément à l'énoncé, on pose $c = -\frac{1}{r}$

lorsque O est intérieur à (Γ) (donc $K < 0$) et $c = \frac{1}{r}$ lorsque O est extérieur à (Γ) ,

$r' = \frac{1}{K} c$ et $z' = czr'$. (Γ_3) et (Γ_4) étant tangents à (Γ_1) et (Γ_2) et tangents entre eux, leurs inverses sont tangents aux deux horizontales (Δ_1) et (Δ_2) , donc de même rayon :

$r' = \frac{|c_1 + c_2|}{4}$, et ils sont tangents entre eux. Leurs centres $c_3 z_3 r'$ et $c_4 z_4 r'$ sont donc

sur une même horizontale : $\operatorname{Im}(z) = \frac{(c_1 - c_2)i}{4}$ et distants de $2r'$. En d'autres termes,

il existe $Z = \frac{c_3 z_3 + c_4 z_4}{2}$ et $\varepsilon = \pm 1$ tels que $c_3 z_3 = Z + \varepsilon$ et $c_4 z_4 = Z - \varepsilon$.

Dans ce repère où $c_1 z_1 = i$, $c_2 z_2 = -i$, $c_3 z_3 = Z + \varepsilon$ et $c_4 z_4 = Z - \varepsilon$, il est clair que :

$$2 \sum (c_i z_i)^2 = 4z^2 = \left(\sum c_i z_i \right)^2.$$

Cette relation étant homogène, elle reste vraie dans tout repère de centre O, donc en remplaçant z_i par λz_i pour tout complexe λ . Or ce même résultat vaut pour chacun des six points de contact des quatre cercles : plaçons en chacun de ces points un repère translaté de notre repère initial. Dans chacun de ces repères, les c_i sont inchangés et les z_i remplacés par $z_i + t$. Donc pour six valeurs de t on a :

$$2 \sum (c_i (z_i + t))^2 = \left(\sum c_i (z_i + t) \right)^2.$$

En développant, on trouve un trinôme $At^2 + 2Bt + C$, avec

$$A = 2 \sum c_i^2 - \left(\sum c_i \right)^2,$$

$$B = 2 \sum c_i^2 z_i - \left(\sum c_i \right) \left(\sum c_i z_i \right)$$

et

$$C = 2 \sum c_i^2 z_i^2 - \left(\sum c_i z_i \right)^2,$$

qui s'annule pour six valeurs distinctes de t , donc qui est identiquement nul. On en déduit que les relations (2) et (3) sont vraies dans tout repère complexe (c'est-à-dire en remplaçant z_i par $\lambda z_i + t$ pour tout λ et tout t , tout comme la relation (1), indépendante du repère.

Énoncé n° 298 (Pierre BORNSZTEIN, 78-Maisons-Lafitte)

Soit $n \geq 7$ un entier, et S un ensemble de n points du plan tels que, parmi cinq quelconques de ces points, on puisse toujours en trouver quatre qui soient cocycliques. Montrer qu'au moins $n - 1$ de ces points sont cocycliques.

SOLUTION

Pour ce problème partiellement combinatoire, partiellement géométrique, j'ai reçu des solutions de Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), René MANZONI (76-Le Havre) et Pierre SAMUEL (92-Bourg la Reine), qui diffèrent essentiellement dans l'argumentation géométrique.

Soit S un ensemble de n points. *Hypothèse* : pour toute partie de cinq points de S, quatre au moins sont cocycliques. *Conclusion* : au moins $n - 1$ points de S sont cocycliques.

Si S vérifie l'hypothèse, il est clair que toute partie de S vérifie l'hypothèse. Supposons qu'en outre toute partie de $n - 1$ éléments de S vérifie la conclusion. Soit A un point quelconque de S : tous les points de $S \setminus \{A\}$ sont sur un même cercle (Γ_A) sauf éventuellement un point A' . Soit B un point de S distinct de A et A' : tous les

points de $S \setminus \{B\}$ sont sur un même cercle (Γ_B) sauf éventuellement un point B' . (Γ_A) et (Γ_B) ont en commun tous les points de S autres que A, A', B, B' : si $n \geq 7$, cela fait au moins 3 points, ce qui suffit à prouver que (Γ_A) et (Γ_B) sont confondus en un cercle passant par tous les points de S sauf éventuellement B' , puisque (Γ_A) passe par B . D'où la récurrence : si S , vérifiant l'hypothèse, a au moins 7 points, et si la conclusion est vraie pour toute partie de S , la conclusion est vraie pour S .

Malheureusement, un problème se pose au démarrage de la récurrence : le résultat n'est pas vrai pour tout ensemble de six points. En effet, si $n = 6$, il se peut que les cercles (Γ_A) et (Γ_B) ci-dessus ne soient pas confondus. Mais cela nécessite que A, A', B, B' soient quatre points distincts et que (Γ_A) et (Γ_B) n'aient en commun que les deux points restants C et C' . Or parmi les cinq points $\{A, A', B, B', C\}$, quatre au moins sont cocycliques : ce sont nécessairement $\{A, A', B, B'\}$ puisque $(\Gamma_A) = (BB'C)$ ne passe ni par A ni par A' , et $(\Gamma_B) = (AA'C)$ ne passe ni par B ni par B' . La seule configuration de six points vérifiant l'hypothèse sans vérifier la conclusion s'obtient à partir de trois cercles deux à deux sécants : $(\Gamma_A) = (BB'CC')$, $(\Gamma_B) = (CC'AA')$ et $(\Gamma_C) = (AA'BB')$.

Si maintenant il existait une configuration S de 7 points vérifiant l'hypothèse et non la conclusion, S posséderait une sous-configuration de six points du type ci-dessus : soit alors D le septième point. Comme toutes les intersections de (Γ_A) , (Γ_B) et (Γ_C) appartiennent à $\{A, A', B, B', C, C'\}$, D appartient au plus à un de ces trois cercles, et nous pouvons supposer que D n'appartient ni à (Γ_B) ni à (Γ_C) . Or, par hypothèse, parmi les cinq points $\{A, A', B, C, D\}$, quatre au moins sont sur un même cercle (Γ) : comme $(\Gamma_C) = (AA'B)$ ne passe ni par C ni par D et $(\Gamma_B) = (AA'C)$ ne passe ni par B ni par D , le seul de ces cinq points qui n'appartient pas (Γ) est nécessairement A ou A' . Supposons que ce soit A' : $(\Gamma) = (ABCD)$, et donc D n'appartient pas à (Γ_A) , sinon (Γ) et (Γ_A) auraient trois points communs sans être confondus (A n'est pas sur (Γ_A)).

Une inversion de pôle D transforme A, A', B, B', C, C' en a, a', b, b', c, c' , et les cercles $(\Gamma_A), (\Gamma_B), (\Gamma_C)$ en trois cercles $(\Gamma_a), (\Gamma_b), (\Gamma_c)$. Elle transforme (Γ) en une droite passant par a, b et c . Appelons α, β, γ les points d'intersection : $\alpha = (bb') \cap (cc')$, $\beta = (bb') \cap (aa')$ et $\gamma = (aa') \cap (bb')$. b, b', c et c' étant cocycliques, $\overline{ab} \cdot \overline{ab'} = \overline{ac} \cdot \overline{ac'}$, et de même : $\overline{bc} \cdot \overline{bc'} = \overline{ba} \cdot \overline{ba'}$ et $\overline{\gamma a} \cdot \overline{\gamma a'} = \overline{\gamma b} \cdot \overline{\gamma b'}$. Or, en appliquant le théorème de Ménélaüs au triangle $\alpha\beta\gamma$, a, b, c alignés entraîne :

$$\frac{\overline{\beta a}}{\overline{\gamma a}} \cdot \frac{\overline{\gamma b}}{\overline{\alpha b}} \cdot \frac{\overline{\alpha c}}{\overline{\beta c}} = 1.$$

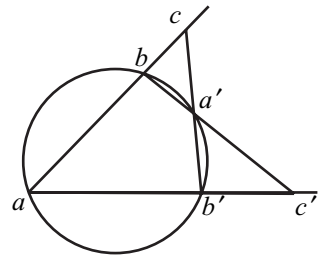
On en déduit :

$$\frac{\overline{\beta a'}}{\overline{\gamma a'}} \cdot \frac{\overline{\gamma b'}}{\overline{\alpha b'}} \cdot \frac{\overline{\alpha c'}}{\overline{\beta c'}} = 1.$$

ce qui entraîne : a', b', c' eux aussi alignés, ou encore : $\{D, A', B', C'\}$ cocycliques. Dès lors, parmi les cinq points $\{D, A', B', B, C\}$ on ne peut pas en trouver quatre cocycliques, ce qui contredit l'hypothèse.

La principale difficulté, c'est d'argumenter géométriquement que pour 7 points du plan, il ne peut pas exister 7 cercles tels que chaque cercle passe par 4 points et chaque point appartienne à 4 cercles. Combinatoirement, cela semble possible avec les cercles $(BB'CC')$, $(CC'AA')$, $(AA'BB')$, $(DABC)$, $(DAB'C')$, $(DA'BC')$ et $(DA'B'C)$: on voit là une jolie configuration où points et cercles jouent des rôles étonnamment symétriques. Mais, géométriquement, cette configuration n'est pas réalisable et, pour le prouver, il semble indispensable d'utiliser l'inversion.

Pierre Samuel commence par envoyer le point D à l'infini par une transformation circulaire : les quatre cercles passant par D deviennent quatre droites (abc) , $(ab'c')$, $(a'bc')$, $(a'b'c)$, avec $\{b, b', c, c'\}$ cocycliques tout comme $\{c, c', a, a'\}$ et $\{a, a', b, b'\}$. Puis, l'inversion de pôle a qui laisse invariant le cercle $(bb'cc')$ transforme le cercle $(aa'bb')$ en la droite (cc') et le cercle $(aa'cc')$ en la droite (bb') : l'image de a' appartient donc aux trois droites (aa') , (bb') et (cc') ce qui est impossible, car $(aa') \cap (cc')$ et $(bb') \cap (cc')$ sont conjugués harmoniques par rapport à c et c' .



Marie-Laure Chaillout se contente d'une seule inversion de pôle D : (bb') est l'axe radical de $(bb'cc')$ et $(bb'aa')$, et (aa') l'axe radical de $(aa'bb')$ et $(aa'cc')$, leur intersection p appartient donc à l'axe radical de $(bb'cc')$ et $(aa'cc')$, soit (cc') , mais c' est aussi le pôle de (cc') par rapport à $(aa'bb')$, d'où contradiction puisqu'il ne peut pas être sur le cercle $(aa'bb')$.

Enfin, René Manzoni s'en tient aux égalités angulaires : après l'inversion de pôle D, la cocyclicité de $\{a, a', b, b'\}$ et les alignements (abc) , $(ab'c')$, $(a'bc')$ et $(a'b'c)$ permettent d'écrire $(ab, ab') = (a'b, a'b')$, soit $(ac, ac') = (a'c', a'c)$ et $(ba, ba') = (b'a, b'a')$, soit $(bc, bc') = (b'c', bc)$. Pour qu'en outre $\{a, a', c, c'\}$ d'une part, $\{b, b', c, c'\}$ d'autre part soient cocycliques, il faudrait que les quatre angles (ac, ac') , $(a'c', a'c)$, (bc, bc') et $(b'c', b'c)$ soient droits, donc que a, a', b, b' soient tous quatre sur le cercle de diamètre cc' , ce qui n'est manifestement pas le cas.