

Présentation et étude d'un micromonde pour l'apprentissage de l'algèbre : Aplusix

Hamid Chaachoua(*)

Introduction

Le calcul algébrique joue un rôle important dans l'enseignement des mathématiques. D'une part, ce cadre est souvent sollicité par les autres domaines mathématiques et, d'autre part, l'algorithmisation des résolutions des problèmes algébriques, à l'aide des règles de calcul, donne une certaine assurance aux élèves. Cependant, plusieurs travaux de recherche ont montré les difficultés rencontrées par les élèves dans la manipulation des expressions algébriques, en particulier par l'utilisation de règles erronées. Or, le milieu papier-crayon ne permet pas toujours d'avoir des rétroactions suffisantes et pertinentes pour valider le travail de l'élève : l'intervention de l'enseignant s'avère alors nécessaire.

Nous avons présenté dans cet atelier le logiciel Aplusix qui peut prendre en charge la question de la validation du travail de l'élève.

L'objectif de l'atelier est d'étudier les potentialités didactiques du logiciel Aplusix pour l'apprentissage et l'enseignement de l'algèbre au collège et au lycée.

Les tâches proposées aux participants de l'atelier

Après une phase de prise en main des aspects du logiciel nécessaires pour le suivi de l'atelier, nous avons présenté une séquence didactique construite autour de certaines tâches algébriques (factorisation, résolution d'équation, etc.). Ensuite, nous avons demandé aux participants d'analyser des protocoles informatiques d'élèves pour étudier les procédures des élèves et identifier les règles correctes ou erronées des élèves dans la réalisation de ces tâches algébriques. Enfin, les participants ont échangé sur l'intérêt didactique de l'utilisation d'un tel environnement informatique pour l'apprentissage de l'algèbre.

Présentation du logiciel

Aplusix (Bouhineau et al., 2003) est un logiciel d'aide à l'apprentissage de l'algèbre formelle avec lequel l'élève développe ses propres calculs. Il est doté pour cela d'un éditeur avancé d'expressions algébriques qui affiche les expressions sous la forme habituelle (en deux dimensions) et permet leur écriture et leur modification sous cette forme, en respectant la structure des expressions algébriques.

(*) MTAH - Laboratoire LEIBNIZ - Institut IMAG, Grenoble.

Le logiciel permet à l'élève de construire les étapes (symbolisées par des boîtes rectangulaires) de calcul de son choix et peut vérifier les calculs effectués en calculant l'équivalence des deux expressions. La figure 1 ci-dessous montre la vérification de l'équivalence des équations entre chaque étape. Aplusix apporte aussi des informations sur l'expression courante avec des indicateurs comme on peut le voir sur la figure 1. Ces indicateurs concernent le degré d'avancement du développement, de la factorisation ou de la réduction d'une expression algébrique. Dans le même esprit, un indicateur est associé à la résolution des équations. Dans la figure 1, l'élève a effectué un premier pas de calcul juste marqué par une flèche d'équivalence et un deuxième pas incorrect marqué par une flèche barrée. La barre d'état indique que l'expression courante est bien formée, non réduite, non développée et que l'équation n'a pas encore significativement progressé vers une solution.

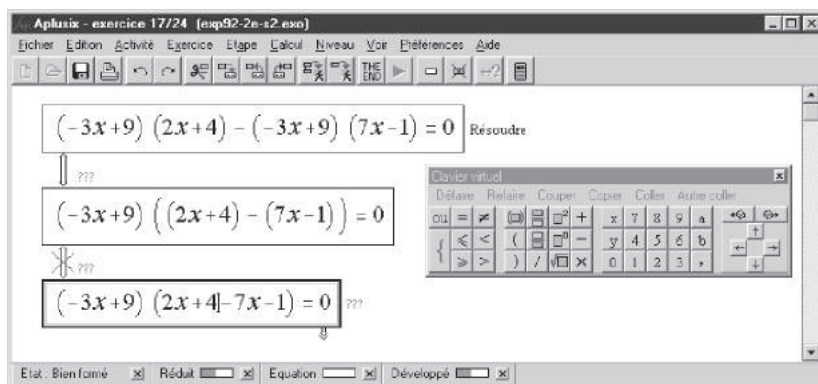


Figure 1 : un exemple de raisonnement avec Aplusix

Lorsque l'élève a terminé un exercice, il l'indique au logiciel qui vérifie que l'expression obtenue est une forme résolue du problème et que le chemin qui conduit de l'énoncé à cette expression n'est composé que d'expressions équivalentes. Le logiciel transmet alors un message textuel lui donnant une information sur l'état de la résolution de l'exercice : l'exercice est effectivement terminé, ou bien il reste une action encore à faire comme développer, réduire, ... Si l'exercice n'est pas fini, l'élève a le choix entre laisser l'exercice en l'état ou essayer de trouver une solution.

Le logiciel Aplusix propose des commandes telles que *calculer* (effectuer un calcul numérique), *réduire*, *développer* qui permettent à l'élève de sous-traiter des tâches à l'ordinateur, à l'instar des logiciels de calcul formel, avec des fonctionnalités plus limitées. Ces commandes permettent au logiciel de prendre en charge des tâches algébriques. Elles permettent ainsi, notamment, de développer, réduire ou ordonner des expressions en fournissant directement le résultat du calcul.

Outre la possibilité de paramétrer le logiciel du point de vue de la plupart des caractéristiques précédentes, le professeur dispose de deux outils importants : l'un permet de constituer des fichiers d'exercices pour les donner ensuite à résoudre aux

élèves, l'autre est un « magnétoscope » qui permet de rejouer toutes les actions des élèves.

Étude d'une séquence didactique

Nous avons présenté une séquence d'enseignement qui a été réalisée dans une classe de Seconde d'un effectif de 33 élèves. Nous avons suivi cette classe pendant l'année scolaire 2002-2003. Nous avons commencé par faire passer aux élèves un test général (pré-test) utilisant le logiciel Aplusix sur différents types de problèmes algébriques du collège avec le mode sans vérification. Celui-ci a eu lieu au mois de septembre, avant tout enseignement de l'algèbre. L'analyse de ce test nous a permis de repérer les difficultés des élèves sur les connaissances du collège. En prenant en compte les résultats de cette analyse, nous avons mis en place une séquence d'enseignement sur les thèmes « factorisation » et « résolution d'équations ». Plus précisément, les objectifs de la séquence sont : travailler les techniques de résolution d'équations et de factorisation et montrer l'utilité de la factorisation dans les problèmes de résolution d'équations. On a utilisé le mode de vérification permanente.

Voici le déroulement de la séquence :

- **Séance 1** (1 heure) : Résolution des équations du premier degré et du second degré qui peuvent être résolues sans la technique de factorisation.
- **Séance 2** (1 heure) : Résolution des équations du second degré où la technique de factorisation est nécessaire.
- **Séance 3** (1 heure) : Entraînement.

Ces séances ont été suivies par un post-test pour mesurer l'évolution des élèves par rapport au pré-test. Aucune vérification au niveau du logiciel et aucun affichage des indicateurs n'étaient choisis comme paramétrage du logiciel dans cette phase.

Les résultats du post-test montrent une progression importante chez les élèves et nous ont permis de repérer ceux qui sont encore en difficulté. Ensuite, nous avons mis en place un suivi individuel pour les élèves en difficulté et qui étaient volontaires.

Analyse de protocoles

Les participants ont analysé des protocoles informatiques d'élèves pour :

- Identifier les règles erronées mises en œuvre par les élèves dans la réalisation de ces tâches algébriques.
- Étudier comment les rétroactions de l'environnement, du point de vue de la validation du travail de l'élève, modifient ses procédures.

Exemples d'identification de règles erronées

Nous avons analysé plusieurs protocoles d'élève concernant la résolution de l'équation

$$(x - 2)(3x - 1) - 9x^2 + 1 = 0.$$

Analyse du travail de l'élève E.JM

$$\begin{array}{l} \boxed{(x-2)(3x-1) - 9x^2 + 1 = 0} \quad \text{Résoudre} \\ \Downarrow \\ \boxed{(x-2)(3x-1) + (3x-1)(3x+1) = 0} \\ \Downarrow \\ \boxed{(3x-1)((x-2) + (3x+1)) = 0} \\ \Downarrow \\ \boxed{(3x-1)(x-2+3x+1) = 0} \\ \Downarrow \\ \boxed{(3x-1)(4x-1) = 0} \end{array}$$

Cet élève a factorisé $-9x^2 + 1$ comme si c'était $9x^2 - 1$. En dehors de cette erreur toute la stratégie est correcte.

Quel est le statut de cette erreur ?

– Erreur d'inattention.

– Erreur « contextuelle » : devant la difficulté d'appliquer le produit remarquable, l'élève « bricole » l'expression pour se ramener à une forme de référence.

– Erreur stable : l'élève utilise la factorisation $(a-b)(a+b)$ dès qu'il y a deux carrés et un signe moins, c'est-à-dire aussi bien pour $a^2 - b^2$ que pour $-a^2 + b^2$.

L'examen du protocole montre que l'élève n'a pas marqué un temps de réflexion pour cette factorisation. Nous pensons donc que ce n'est pas une erreur contextuelle.

Analyse du travail de l'élève E.K B

Après avoir essayé d'écrire $-9x^2$ comme un carré, elle a choisi de commuter les deux termes et de se ramener à $-9x^2$. Ensuite, pour la factorisation de $1 - 9x^2$ elle propose $(1 - 3x)(1 - 3x)$. Deux hypothèses sont possibles :

– erreur d'inattention du signe.

– elle utilise une règle erronée $a^2 - b^2 = (a-b)(a-b)$.

Devant l'expression $\boxed{(x-2)(3x-1) + (1-3x)(1-3x) = 0}$, elle factorise par $3x - 1$ sans faire apparaître le signe moins dans le deuxième terme et sans l'opération.

$$\begin{array}{l} \boxed{(x-2)(3x-1) - 9x^2 + 1 = 0} \quad \text{Résoudre} \\ \Downarrow \\ \boxed{(x-2)(3x-1) + 1 - 9x^2 = 0} \\ \Downarrow \\ \boxed{(x-2)(3x-1) + (1-3x)(1-3x) = 0} \\ \Downarrow \\ \boxed{(3x-1)((x-2)(1-3x)) = 0} \end{array}$$

Elle obtient alors $\boxed{(3x-1)(x-2)(1-3x) = 0}$. Nous faisons l'hypothèse qu'il s'agit de suppression de parenthèses comme texte.

Ensuite, l'analyse du travail de cet élève dans d'autres exercices confirme l'utilisation de la règle erronée $a^2 - b^2 = (a-b)(a-b)$.

Exemple d'étude de rétroactions du logiciel

Nous avons analysé une production d'un élève où la vérification était à la demande. C'est à l'élève de décider de l'utilisation de la vérification pour valider ou contrôler son travail à une étape donnée. Ceci donne à Aplusix une dimension d'un environnement d'expérimentation. Par une succession d'actions de l'élève et de rétroactions du logiciel, l'élève est amené à développer des moyens de contrôles, modifie ses stratégies, rectifie ses erreurs de calculs ... comme le montre l'exemple de l'élève E1 :

<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 5px;"> $(x+2)(x-3) = (x+2)(x-4)$ Résoudre </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 5px;"> $(x-3) - (x-4)$ </div> <p>1) l'élève E1 simplifie par le facteur $(x+2)$.</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 5px;"> $(x+2)(x-3) = (x+2)(x-4)$ Résoudre </div> <div style="text-align: center;">✂</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 5px;"> $(x-3) = (x-4)$ </div> <p>2) Il demande la vérification.</p>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 5px;"> $(x+2)(x-3) = (x+2)(x-4)$ Résoudre </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 5px;"> $x^2 - x + 2x - 5 = x^2 - 4x + 2x - 8$ </div> <p>3) Il reprend la deuxième étape et il développe les membres de l'égalité</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 5px;"> $(x+2)(x-3) = (x+2)(x-4)$ Résoudre </div> <div style="text-align: center;">✂</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 5px;"> $x^2 - x + 2x - 5 = x^2 - 4x + 2x - 8$ </div> <p>4) Il demande la vérification.</p>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 5px;"> $(x+2)(x-3) = (x+2)(x-1)$ Résoudre </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 5px;"> $x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - 4x + 2x - 8$ </div> <p>5) Il remplace 5 par 6 et $-x$ par $-3x$.</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 5px;"> $(x+2)(x-3) = (x+2)(x-4)$ Résoudre </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 5px;"> $x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - 4x + 2x - 8$ </div> <p>6) il demande à nouveau la vérification.</p>

Tableau 1 : Interactions de l'élève E1 avec l'environnement Aplusix

Bilan

Le bilan avec les participants a permis de souligner les points suivants :

- les potentialités du logiciel Aplusix comme un environnement d'expérimentation dans la mesure où les interactions entre l'élève et le logiciel permettent l'exploration et l'évolution des stratégies.
- la vérification des équivalences est une potentialité importante du logiciel qui permet de développer l'autonomie de travail chez les élèves et surtout ceux qui sont en difficulté.
- le magnéscope fournit pour l'enseignant un outil d'analyse de production d'élèves

Pour ce dernier point, nous avons montré aux participants un outil d'analyse de protocoles d'élèves, Anais, qui donne différents types de résultats : par élève, par type de problème, par exercice comme le montre l'extrait ci-dessous.

Statistiques par exercice				
Type de problème	Enonce	Nombre exercices	Quasi résolu	Taux
resoudreEquationDgGE2	$(2x+1)(x-3)+(-x+3)(2x-3)=0$	28	0	0%
resoudreEquationDgGE2	$(x+1)(x-1)+(x+1)(x-3)=0$	28	0	0%
resoudreEquationDgGE2	$(x+3)(x-1)+x^2-9=0$	3	0	0%
resoudreEquationDgGE2	$(x-2)(3x+1)-(x+1)(3x-1)=0$	28	1	3%
resoudreEquationDgLE1	$2x+4=6$	28	22	78%
resoudreEquationDgLE1	$3-2x=3x-6$	28	14	50%
resoudreEquationDgLE1	$3/2+x=1/3-\{1/2\}x$	28	1	3%
resoudreEquationDgLE1	$4(x-2)-2(x+1)=0$	28	4	14%
resoudreEquationDgLE1	$5-3x=9$	28	11	39%
resoudreInequationDgGE2	$(x+1)(x+2)-(x+3)(x+4)<0$	28	1	3%
resoudreInequationDgLE1	$-4x-1>0$	28	5	17%
resoudreInequationDgLE1	$2-x>0$	28	4	14%
resoudreInequationDgLE1	$3(x-1)-4(x+1)<0$	28	1	3%
resoudreInequationDgLE1	$3x+2<0$	28	13	46%
resoudreInequationDgLE1	$3x-8<2-2x$	28	11	39%

Tableau 3 : Données statistiques par exercice. Nombre exercices : désigne le nombre de fois où l'exercice a été traité par les élèves. **Quasi résolu :** exercice résolu correctement à une simplification près du résultat. **Taux :** correspond au pourcentage de quasi résolu par rapport nombre d'exercices.

Bibliographie

Bouhineau D., Bronner A., Chaachoua H., Huguet T. (2003) Analyse didactique de protocoles obtenus dans un EIAH en algèbre. Actes de la conférence EIAH 2003, Strasbourg, 15-17 avril, p. 79-90. Publication INRP, Lyon. ISBN 2 7342 0911 X.

Bisson G., Bronner A., Gordon M.B., Nicaud J.F. (2003) Analyse statistique de comportements d'élèves en algèbre. Actes de la conférence EIAH 2003, Strasbourg, 15-17 avril, p. 67-78. Publication INRP, Lyon. ISBN 2 7342 0911 X.