

Les problèmes de l'APMEP

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de « beaux problèmes », ... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice. La rubrique s'efforce de rendre compte de la pluralité des méthodes proposées par les lecteurs, des généralisations des problèmes, ... Entre la publication d'un énoncé et la publication de sa solution, un bulletin intermédiaire fournira des pistes pour faciliter l'étude du problème et rendre la rubrique davantage accessible.

Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés. Solutions et énoncés sont à envoyer à l'adresse suivante (réponse à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO,
9 quai de la Seine,
75019 Paris.

Indications sur des énoncés déjà publiés

Énoncé 310 (*entiers magiques*) :

Que pourrait valoir c pour $n = 7$?

Énoncé 311 (*ex-voto japonais*) :

Que peut-on dire de $\tan\left(\frac{\widehat{OA_iA_{i+1}}}{2}\right)$?

Nouveaux énoncés

Énoncé n° 312 (Pierre JULLIEN, 13-Meyreuil)

Soit dans le plan quatre points A, B, C et D tels que $AB = CD$ (égalité de longueurs). On note M le milieu de [AD] et N le milieu de [BC].

Montrer que la droite (MN) coupe les droites (AB) et (CD) sous le même angle.

ÉNONCÉ n° 313 (Michel BATAILLE, 76-Rouen)

Dans le plan, soit $A_1A_2A_3$ un triangle de centre de gravité G. Pour $i = 1, 2, 3$, le cercle (Γ_i) , de centre O_i et de rayon r_i , est tangent aux côtés passant par A_i , les points de contact et G étant alignés. Démontrer la relation :

$$\frac{r_1}{r_1 + GO_1} + \frac{r_2}{r_2 + GO_2} + \frac{r_3}{r_3 + GO_3} = 2.$$

SOLUTION

Ce problème semble nécessiter de gros calculs, et plusieurs lecteurs s'y sont attelés : François DUC (84–Orange), Christian DUFIS (87–Limoges), Christine FENOGLIO (69–Lyon) et René MANZONI (76–Le Havre). Mais c'est un résultat d'autant plus remarquable que la valeur 5 est atteinte si et seulement si le quadrilatère central est un trapèze, alors qu'on tend vers 6 (sans jamais l'atteindre) lorsque deux sommets du quadrilatère tendent vers un même point.

À vrai dire, le raisonnement est simple : calculer $s = \text{aire}(q)$, $S = \text{aire}(Q)$, et montrer que $S - 5s$ est toujours positif (en y faisant apparaître des facteurs carrés), $S - 6s$ toujours négatif. François Duc avait déjà proposé un problème similaire, mais plus simple, sur les triangles. L'aire du quadrilatère IJKL, cela peut être la somme des aires orientées des triangles OIJ, OJK, OKL, OLI ou le demi-produit vectoriel des diagonales :

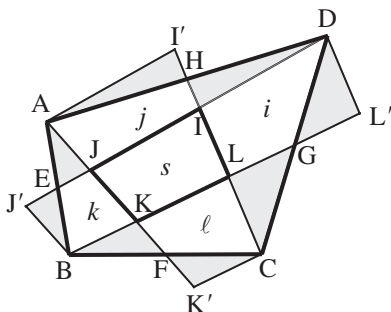
$$\frac{1}{2}(\overline{OI} \wedge \overline{OJ} + \overline{OJ} \wedge \overline{OK} + \overline{OK} \wedge \overline{OL} + \overline{OL} \wedge \overline{OI}) = \frac{1}{2}(\overline{OI} - \overline{OK}) \wedge (\overline{OJ} - \overline{OL}).$$

Christine Fenoglio signale que, si les diagonales de (Q) se coupent en O, pour OA, OB, OC, OD donnés, le rapport S/s ne dépend pas de l'angle des diagonales (en fait, les affinités conservant les rapports d'aires, il dépend seulement de $\frac{OA}{OC}$ et $\frac{OB}{OD}$).

Si l'on prend soin d'optimiser le choix du repère – les auteurs composent deux affinités d'axes (AC) et (AB) pour faire de ABC un triangle rectangle isocèle, Christian Dufis projette orthogonalement le quadrilatère de sorte que les milieux des côtés soient les sommets d'un carré, ... –, ce genre de calculs, à l'ère des calculatrices, ne fait plus peur.

Mais pour les anciens comme moi qui ne savent pas encore manipuler ces engins, ceux qu'Yves Chevallard appelait, pendant l'Université d'Été 2004 d'Animath, « les assiégés », il doit bien exister une méthode moins laborieuse.

Appelons E, F, G, H les milieux de [AB], [BC], [CD], [DA] ; I = (DE) ∩ (CH), J = (AF) ∩ (DE), K = (BG) ∩ (AF) et L = (CH) ∩ (BG) les sommets de (q), et I', J', K', L' les symétriques de I, J, K, L par rapport à H, E, F, G respectivement. Les triangles KFB et K'FC étant égaux, le quadrilatère KK'CL et le triangle BCL ont même aire ℓ , et de même :



$$\text{aire}(\text{LL}'\text{DI}) = \text{aire}(\text{CDI}) = i,$$

$$\text{aire}(\text{II}'\text{AJ}) = \text{aire}(\text{DAJ}) = j,$$

$$\text{aire}(\text{JJ}'\text{BK}) = \text{aire}(\text{ABK}) = k,$$

de sorte que, si l'on pose :

$$\varphi = \frac{\text{aire}(\text{AK}'\text{CI}')}{S} = \frac{j+s+l}{S}, \quad \psi = \frac{\text{aire}(\text{BL}'\text{DJ}')}{S} = \frac{k+s+i}{S},$$

on a :

$$\varphi + \psi = 1 + \frac{s}{S}$$

et il reste à prouver que :

$$\frac{7}{6} < \varphi + \psi \leq \frac{6}{5}.$$

Considérons un repère où A, B, C, D aient pour coordonnées respectives : (2, 0), (2a, 2b), (-2, 0), (-2a', -2b'), b et b' étant tous deux strictement positifs. La droite (AF) d'équation :

$$bx - (a-3)y = 2b$$

coupe (CK'), parallèle à (BG), donc d'équation :

$$(2b+b')x - (2a+a'+1)y = -2(2b+b')$$

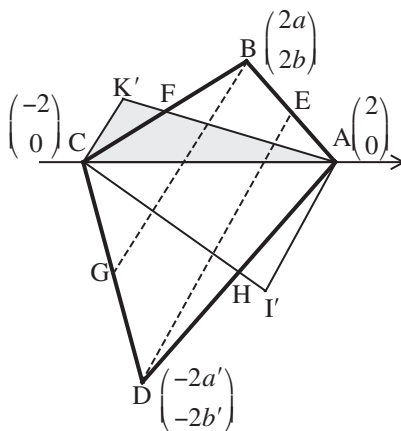
en K' d'ordonnée :

$$\frac{2b(4b+2b')}{7b+3b'-(ab'-ba')} = h.$$

Par un calcul similaire, l'ordonnée de I' vaut :

$$\frac{-2b'(4b'+2b)}{7b'+3b-(a'b-b'a)} = -h'.$$

Or les triangles K'CA, I'AC, BCA et DAC ont pour hauteurs (en valeurs absolues) : h, h', 2b, 2b', donc pour aires : 2h, 2h', 4b, 4b', de sorte que :



$$\varphi = \frac{h+h'}{2(b+b')}.$$

Et si l'on pose :

$$\alpha = \frac{ab' - ba'}{b+b'}, \quad \beta = \frac{b-b'}{b+b'},$$

$$\frac{h}{2(b+b')} = \left(\frac{1+\beta}{2}\right) \left(\frac{3+\beta}{5+2\beta-\alpha}\right) = \left(\frac{1+\beta}{2}\right) \left(\frac{3}{5} + \frac{3\alpha-\beta}{5(5+2\beta-\alpha)}\right),$$

$$\frac{h'}{2(b+b')} = \left(\frac{1-\beta}{2}\right) \left(\frac{3-\beta}{5-(2\beta-\alpha)}\right) = \left(\frac{1-\beta}{2}\right) \left(\frac{3}{5} - \frac{3\alpha-\beta}{5(5-(2\beta-\alpha))}\right).$$

D'où en additionnant :

$$\varphi = \frac{3}{5} + \left(\frac{3\alpha-\beta}{5}\right) \left(\frac{3\beta+\alpha}{25-(2\beta-\alpha)^2}\right).$$

Maintenant, que représentent géométriquement α et β ? ($b-b'$) est l'ordonnée du milieu N de [BD], de sorte que l'aire algébrique du triangle NCA vaut : $2(b-b')$.

Plus précisément, $\beta = \frac{\overline{NC} \wedge \overline{NA}}{S}$. Alors que, si l'on appelle M le milieu de [CA], en

l'occurrence l'origine du repère, $\alpha = \frac{\overline{MB} \wedge \overline{MD}}{S}$. Il est clair sur ces expressions que

α et β sont indépendants de tout repère : pour un quadrilatère (Q) donné, en permutant les noms des sommets dans un sens ou dans l'autre, on transforme α en β et β en $-\alpha$ (ou α en $-\beta$ et β en α), et on transforme φ en ψ . Si bien que

$$\varphi + \psi = \frac{6}{5} + \left(\frac{(3\alpha-\beta)(3\beta+\alpha)}{5}\right) \left(\frac{1}{25-(2\beta-\alpha)^2} - \frac{1}{25-(2\alpha+\beta)^2}\right).$$

Et si l'on pose :

$$u = 25 - (2\beta - \alpha)^2, \quad v = 25 - (2\alpha + \beta)^2,$$

on remarque que :

$$u - v = (3\alpha - \beta)(3\beta + \alpha),$$

ce qui entraîne :

$$\varphi + \psi = \frac{6}{5} - \frac{(u-v)^2}{5uv}.$$

Il ne reste plus qu'à démontrer :

$$\frac{1}{30} > \frac{(u-v)^2}{5uv} \geq 0.$$

Or, b et b' étant tous deux positifs,

$$-1 < \beta = \frac{b-b'}{b+b'} < 1,$$

et β peut prendre n'importe quelle valeur entre -1 et $+1$ exclus. Par symétrie, on peut en dire autant pour α . D'ailleurs, les diagonales AC et BD se coupent au point O d'abscisse 2α , ce qui rejoint la remarque de Christine Fenoglio que le rapport

$\frac{S}{s}$, fonction de α et β , dépend uniquement de $\frac{OA}{OC} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ et $\frac{OB}{OD} = \frac{1+\beta}{1-\beta}$, et aucunement de l'angle des diagonales. On en déduit que u et v sont toujours positifs, donc

$$\frac{(u-v)^2}{5uv} \geq 0,$$

mais on doit en outre prouver que :

$$(u-v)^2 < \frac{uv}{6},$$

soit :

$$(3u-2v)(2u-3v) < 0,$$

ou encore :

$$(5-2\beta^2+4\alpha\beta+\alpha^2)(5-2\alpha^2-4\alpha\beta+\beta^2) > 0.$$

Or pour α fixé, le trinôme :

$$-2\alpha^2 + 4\alpha\beta + (5 + \beta^2)$$

atteint son minimum en l'une des bornes de l'intervalle. Il est donc minoré soit par :

$$3 - 4\alpha + \alpha^2 = (3 - \alpha)(1 - \alpha),$$

soit par :

$$3 + 4\alpha + \alpha^2 = (3 + \alpha)(1 + \alpha),$$

tous deux strictement positifs. Il en va de même du second facteur, ce qui achève la démonstration.

Que peut-on ajouter au sujet des cas limites ? $\frac{S}{s}$ tend vers 6 lorsque $\alpha \rightarrow \pm 1$ et

$\beta \rightarrow \pm 1$. Or β tend vers 1 lorsque D se rapproche de (AC), α tend vers ± 1 lorsque

D se rapproche de (BC) ou (BA), ce qui prouve bien que $\frac{S}{s}$ tend vers 6 lorsque deux des sommets de (Q) tendent l'un vers l'autre.

Mais le cas $\frac{S}{s} = 5$, quant à lui, est particulièrement intéressant, car il équivaut d'une part à :

$$(3\alpha + \beta)(3\beta - \alpha) = 0,$$

d'autre part à :

$$u = v.$$

Or

$$3\alpha - \beta = -4 \left(\frac{\overline{BG} \wedge \overline{DE}}{S} \right), \quad 3\beta + \alpha = -4 \left(\frac{\overline{AF} \wedge \overline{CH}}{S} \right),$$

d'où le résultat prévu : $\frac{S}{s} = 5$ si et seulement si IJKL est un trapèze.

Par ailleurs,

$$u = 16 \left(\frac{(\overline{AF} \wedge \overline{BG})(\overline{CH} \wedge \overline{DE})}{S^2} \right), \quad v = 16 \left(\frac{(\overline{BG} \wedge \overline{CH})(\overline{DE} \wedge \overline{AF})}{S^2} \right).$$

Mais l'égalité :

$$(\overline{AF} \wedge \overline{CH})(\overline{BG} \wedge \overline{DE}) = (\overline{AF} \wedge \overline{BG})(\overline{CH} \wedge \overline{DE}) - (\overline{BG} \wedge \overline{CH})(\overline{DE} \wedge \overline{AF})$$

provient de :

$$\overline{AF} \wedge \overline{CH} = (\overline{DE} \wedge \overline{AF}) - (\overline{AF} \wedge \overline{BG}) = -(\overline{BG} \wedge \overline{CH}) + (\overline{CH} \wedge \overline{DE})$$

et :

$$\overline{BG} \wedge \overline{DE} = (\overline{AF} \wedge \overline{BG}) - (\overline{BG} \wedge \overline{CH}) = -(\overline{CH} \wedge \overline{DE}) + (\overline{DE} \wedge \overline{AF}),$$

conséquences immédiates de :

$$\overline{AF} + \overline{BG} + \overline{CH} + \overline{DE} = \vec{0}.$$

L'intérêt de la méthode ci-dessus est que, même sans calculette, elle peut être généralisée au cas où, au lieu d'être les milieux de [AB], [BC], [CD] et [DA], E, F, G, H sont définis par :

$$\overline{AE} = \lambda \overline{AB}, \quad \overline{BF} = \lambda \overline{BC}, \quad \overline{CG} = \lambda \overline{CD} \quad \text{et} \quad \overline{DH} = \lambda \overline{DA}$$

avec $0 < \lambda < 1$. On n'a plus alors :

$$\varphi + \psi = 1 + \frac{s}{S},$$

mais le fait que :

$$\text{aire}(\text{AED}) + \text{aire}(\text{CGB}) = \lambda S = \text{aire}(\text{BFA}) + \text{aire}(\text{DHC})$$

entraîne :

$$\varphi + \psi = \frac{(1-\lambda)(3\lambda-1)}{\lambda^2} + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)^2 \frac{s}{S}.$$

Or le calcul de h et h' donne :

$$\varphi + \psi = 2 \left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \right) - \left(\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \right) \frac{(u-v)^2}{uv}$$

avec :

$$u = (1+\lambda^2)^2 - (1-\lambda)^2 (\beta - \lambda\alpha)^2 = \frac{(\overline{\text{AF}} \wedge \overline{\text{BG}})(\overline{\text{CH}} \wedge \overline{\text{DE}})}{S^2},$$

$$v = (1+\lambda^2)^2 - (1-\lambda)^2 (\alpha + \lambda\beta)^2 = \frac{(\overline{\text{BG}} \wedge \overline{\text{CH}})(\overline{\text{DE}} \wedge \overline{\text{AF}})}{S^2},$$

d'où :

$$\frac{s}{S} = \frac{(1-\lambda)^2}{1+\lambda^2} - \left(\frac{\lambda^4}{(1+\lambda^2)(1-\lambda)^2} \right) \frac{(u-v)^2}{uv}.$$

Le maximum de $\frac{s}{S}$ est atteint lorsque $u = v$, donc (comme une fois encore

$\overline{\text{AF}} + \overline{\text{BG}} + \overline{\text{CH}} + \overline{\text{DE}} = \vec{0}$) lorsque le quadrilatère (q) est un trapèze. Si maintenant (Q) et (q) tendent vers des triangles, donc α vers ± 1 et β vers ± 1 , u et v tendent l'un vers $4\lambda^2$, l'autre vers $4(1-\lambda+\lambda^2)$, et il reste à prouver que l'on a toujours :

$$\left((1-\lambda+\lambda^2)u - \lambda v \right) \left((1-\lambda+\lambda^2)v - \lambda u \right) > 0,$$

– ce qui revient à minorer $-(1-\lambda)\beta^2 + 2\lambda\alpha\beta + \left((1+\lambda^2) + \lambda(1-\lambda)\alpha^2 \right)$ –, pour achever de démontrer que :

$$\frac{(1-\lambda)^3}{1-\lambda+\lambda^2} < \frac{s}{S} \leq \frac{(1-\lambda)^2}{1+\lambda^2}.$$