

Modélisation des crues : phénomènes aléatoires moyens et extrêmes(*)

François Sauvageot(**)

Objectif de l'atelier

Dans cet atelier, nous avons présenté quelques problèmes liés à la modélisation des crues et à leurs prévisions, notamment à la lumière du modèle de la « Loire moyenne » (de Nevers à Montjean) développé en 1998 pour le compte de l'État, de l'Établissement Public d'Aménagement de la Loire et de ses Affluents (ÉPALA) et de l'Agence de l'Eau Loire-Bretagne. Après une brève description générale du modèle et des problèmes liés à l'environnement, nous avons donné quelques enjeux au niveau mathématique, puis des ouvertures pour présenter, au niveau Lycée, d'une part des concepts fondamentaux (comme les notions de moyenne, de probabilité, de fluctuation d'échantillons) et d'autre part des mathématiques en liaison avec d'autres disciplines (séquences pédagogiques, devoirs maison, TP, travail sur calculatrice et, bien entendu, TPE).

La modélisation

Le modèle étudié permet la simulation dynamique des écoulements dans les cours d'eau et les vallées inondables. Il intègre des schémas de représentations qui peuvent être différents d'un secteur géographique à l'autre, tout en coexistant dans un même modèle : représentation filaire, découpage en casiers, maillages bidimensionnels.

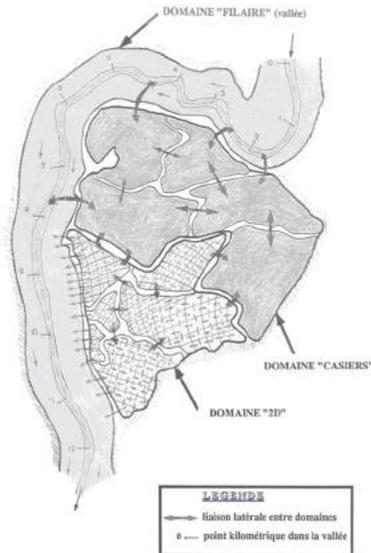
De Nevers à Angers, ont été modélisés : 450 km de Loire, les principaux affluents, 150 000 ha de zones inondables et 600 km de levées isolant 100 000 ha de val en 33 vals différents.

Le modèle Loire moyenne est construit à partir d'une topographie précise datant de 1995, définie, pour le lit du fleuve, par un profil en travers de Loire tous les kilomètres et, pour les vals, par la cartographie existante, principalement les cartes de l'Institut géographique national au 1/25 000^e, et une série de profils réalisés sur certains axes routiers ou sur des ouvrages pouvant influencer les écoulements (ponts, buses, ...).

Le calage du modèle a consisté à retrouver, par le calcul et avec la plus grande précision possible, les niveaux d'eau observés sur le terrain par la Direction régionale de l'environnement (DIREN) de Bassin pour les crues de novembre 1992, janvier 1994, mai et décembre 1996. Le modèle est capable de bien reproduire la réalité pour ces crues puisqu'il restitue, à plus ou moins 15 centimètres, 87% des 300 niveaux observés par les services de l'État lors de ces quatre crues.

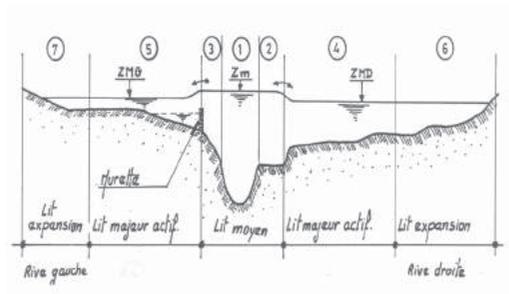
(*) Présentation disponible sur le site <http://www.math.jussieu.fr/~sauvageo>

(**) Maître de conférences à l'Université Paris 7 & Animateur à l'IREM Paris 7.

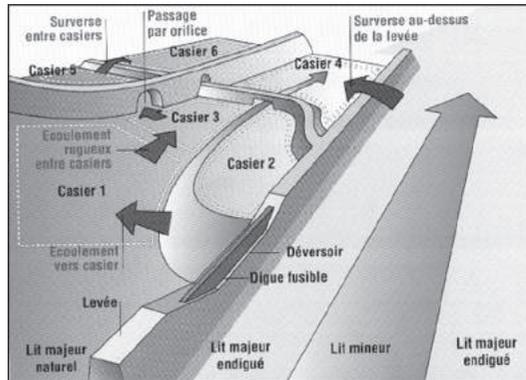


Différentes représentations

Le modèle filaire se construit à partir de profils en travers. L'hydraulicien synthétise avec 14 points les profils en travers levés par le géomètre. Il interpole des profils supplémentaires pour rester fidèle à la géométrie du lit du fleuve.



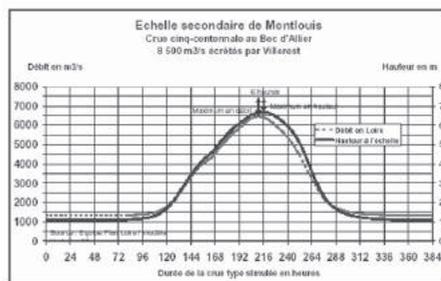
Le casier est une zone d'expansion du lit majeur caractérisée par des vitesses d'écoulement généralement faibles et dont les contours s'appuient sur la topographie naturelle ou sur des obstacles artificiels à l'écoulement des eaux. Chaque casier est défini géographiquement par ses contours qui correspondent, en général, à des obstacles physiques influençant l'écoulement : levées, coteaux, routes, talus, ... puis numériquement par sa superficie et par une courbe $\alpha(Z)$ où α est le pourcentage de la superficie du casier situé sous la cote Z . La planimétrie générale du terrain est ainsi entrée dans le modèle ce qui définit le volume d'eau susceptible d'être stocké dans la zone inondée.



Le domaine 2 D est formé de casiers élémentaires quadrangulaires, interconnectés par des liaisons internes à chaque segment. La densité et la taille moyenne des mailles sont adaptées en fonction de la cohérence de la précision des levés topographiques et des attendus du projet. Le vecteur vitesse d'écoulement peut être calculé en chaque centre de bloc élémentaire à partir des valeurs de cote d'eau et des débits échangés avec les blocs voisins.

Objectifs du modèle

Le modèle fournit des résultats hydrauliques (hauteurs d'eau, débits) qui doivent être utilisés en tenant compte de la précision liée d'une part au calage et d'autre part à l'élément considéré (filaire ou casier). La modélisation doit pouvoir, à l'échelle de la Loire moyenne, décrire avec précision la progression des événements dans le temps et donner ainsi une image dynamique de l'inondation globale.



Un des buts est d'analyser une crue cinquième centennale, i.e. dont la probabilité d'apparition est de 0,2% par an. C'est une crue extrême dont le risque est élevé : elle est 20 fois plus probable et fréquente que la crue utilisée pour calculer la protection des centrales nucléaires le long de la Loire.

Période de retour

La notion de période (ou temps) de retour est destinée à caractériser la fréquence d'apparition d'un phénomène. C'est sans doute dans un souci pédagogique qu'on a voulu traduire une probabilité en temps, notion supposée plus compréhensible pour les responsables et le grand public.

Ce n'était peut être pas une excellente idée, car cette notion, et plus encore celle de période de retour, véhicule un certain nombre d'idées fausses, en particulier celle d'une périodicité des phénomènes extrêmes.

Définition statistique du temps de retour : si p est la probabilité que le débit d'une rivière dépasse une valeur donnée au cours d'une année donnée, le temps de retour

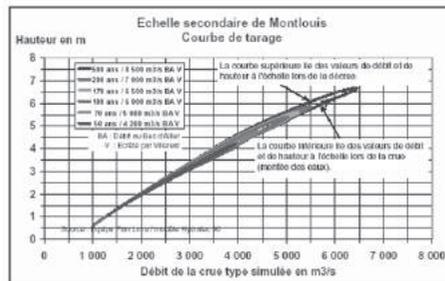
attaché à cet événement est défini comme l'inverse de cette probabilité, $T = \frac{1}{p}$.

Le temps de retour n'est donc qu'une autre façon d'exprimer, sous une forme qui se veut plus imagée, la probabilité d'un événement à un moment donné. Malgré son nom il ne fait référence à aucune notion de régularité ou de périodicité et peut même s'appliquer à des événements qui ne se sont pas produits et qui ne se produiront peut-être jamais à l'avenir. Citons à cet effet Maurice Pardé⁽¹⁾ :

« L'intervalle des très grandes crues mérite une attention particulière. Pour aucun élément de l'Hydrologie, les moyennes ne sont plus difficiles à établir et plus trompeuses. Ces phénomènes peuvent fort bien se grouper au nombre de deux, trois ou quatre dans un temps inférieur à l'intervalle moyen, puis manquer pendant une période bien plus longue. Signalons comme bizarreries de ce genre les trois crues de la Loire en 1846, 1856 et 1866, presque doubles, au Bec d'Allier, de la plus forte survenue depuis lors... ».

Il est ainsi légitime de s'intéresser aux crues millénaire ou décennaire d'une rivière qui n'existait pas il y a cinq mille ans, ou n'existera plus dans dix mille ans, et qui de toute façon s'est transformée au cours des siècles du fait de transformations naturelles et/ou anthropiques.

Mais cela ne va pas sans difficultés. Ainsi la relation entre la hauteur d'eau et le débit n'est pas univoque sur un fleuve de l'importance de la Loire. On observe ce phénomène dit d'hystérésis : pour un même débit, la hauteur d'eau est plus forte à la décrue qu'à la montée des eaux. Par conséquent le maximum en hauteur ne correspond pas toujours au maximum en débit, ce qui rend la détection et la mesure du maximum de la crue difficiles.



Statistiques de l'extrême

Comment prévoir ce qui dépasse tout ce que l'on a déjà vu ou qui n'est arrivé qu'une fois en plusieurs siècles ?

(1) Maurice Pardé, 1947, *Fleuves et rivières*, Armand Collin, Paris, 224 p.

Les observations x_1, \dots, x_n des hauteurs quotidiennes d'une rivière sont considérées comme des réalisations de n variables aléatoires X_1, \dots, X_n que l'on suppose indépendantes et identiquement distribuées. On note leur fonction de répartition F : $P(X_i \leq \alpha) = F(\alpha)$.

On s'intéresse au problème d'estimer les quantiles extrêmes supérieurs q_α définis par $1 - F(q_\alpha) = P(X_i > q_\alpha) = \alpha$ avec $0 < \alpha < \frac{1}{n}$. Pour cela, on choisit un seuil u comme valeur haute de la quantité à observer. On change la numérotation de façon à noter $u \leq x_m \leq \dots \leq x_1$ les m valeurs ordonnées au-dessus du seuil.

Par exemple si on a $n = 100$ observations, on prendra la 20^e plus grande. On note $u \leq x_m \leq \dots \leq x_1$ les m valeurs ordonnées au-dessus du seuil. On prendra par exemple $m = \frac{n}{5}$ et on ajuste les paramètres en prenant comme hypothèse que $P(X > u + y | X > u)$ suit une loi exponentielle (cas $n < 50$) ou $P(X > x) \approx Cx^{1/\tau}$ (cas $n > 100$ et x grand).

On estime alors q_α par la valeur trouvée en supposant que la loi asymptotique est exacte, soit u plus la moyenne des $(x_i - u)_{i=1\dots m}$ multipliée par $\ln\left(\frac{m}{n\alpha}\right)$ ou u multiplié par la moyenne géométrique des $(x_i - u)_{i=1\dots m}$ à la puissance $\ln\left(\frac{m}{n\alpha}\right)$.

On trouvera des compléments sur les valeurs et instants de record sur le site web.

Premier enjeu : le débit

Comme on l'a vu la courbe de débit est reconstituée à partir de la courbe de hauteur. C'est la hauteur qui est observée mais c'est le débit qui intervient dans les notions de « temps de retour ». D'où un exercice simple que l'on peut étudier en TD : y a-t-il une différence ?! On prend une rivière en V de pente t et une vitesse d'écoulement fixe v . Le débit est donc égal à la vitesse fois la section, soit :

$$d = \frac{vh^2}{t}. \text{ Le débit n'est donc pas proportionnel à la hauteur et on a des problèmes.}$$

Par exemple si on prend une loi exponentielle pour d , alors h ne suit pas une telle loi...

Deuxième enjeu : la notion de probabilité conditionnelle

Pour illustrer les événements rares, nous proposons une réflexion sur cette notion, par exemple pour des TPE « citoyens » (couplage Math/ECJS), via son impact dans le « sophisme du procureur ». Il consiste à confondre « la probabilité qu'un événement survienne » avec « la probabilité d'innocence de l'accusé ».

Prenons l'exemple des tests ADN et supposons que la probabilité pour que deux profils ADN soient identiques est environ⁽²⁾ de 1/10 000. Si maintenant, suite à une affaire de mœurs, on trouve un suspect dont le profil ADN est exactement celui trouvé sur la victime, doit-on en déduire qu'on n'a qu'une chance sur 10 000 de se tromper en l'accusant ? **NON**.

Faisons le calcul... Supposons que pour parvenir à trouver le suspect, on ait dû comparer le profil ADN trouvé sur la victime avec 20 000 profils (issus d'un fichier de la police scientifique). La probabilité de trouver au moins un profil identique est

$$1 - \left(1 - \frac{1}{10\,000}\right)^{20\,000},$$

soit 86% de chances, et cela devient

$$20\,000 \left(1 - \frac{1}{10\,000}\right)^{19\,999} \frac{1}{10\,000},$$

soit 27% de chances, si l'on veut trouver exactement un profil identique.

Il ne faut pas en déduire que les tests ADN ne servent à rien, ni qu'on ne peut rien dire à partir d'eux. Si par exemple la victime reconnaît son agresseur et qu'ensuite on effectue un test ADN qui est positif, alors les calculs précédents ne s'appliquent pas : il faudrait pouvoir remplacer 1/10 000 par la probabilité pour que simultanément une victime ait cru reconnaître son agresseur et que le profil des deux, agresseur et faux agresseur, coïncident. Une telle statistique est difficile à établir car le nombre de cas d'étude est très faible. C'est le contexte qui permet d'affiner la suspicion. Néanmoins c'est avec un raisonnement aussi absurde que 258 femmes ont été accusées au Royaume-Uni pour infanticide : l'expert en pédiatrie, le Pr Roy Meadow, arrivait à convaincre que la probabilité qu'une mort subite du nourrisson arrive deux fois de suite était égale à la probabilité d'innocence de la mère. Et de conclure qu'il y avait autant de chances pour cela que pour un outsider coté à 80 contre 1 de gagner 4 années de suite le Grand Prix National, soit 1/73 000 000. Sally Clark a passé 5 années en prison à cause de cet argument et il y a encore 54 femmes en prison sur les mêmes bases.

La probabilité d'innocence, $P(I)$, n'est pas la probabilité qu'il y ait eu un accident, $P(A)$, mais plutôt celle qu'il y ait eu un accident sachant qu'il y a eu décès, $P(A|D)$. Si l'on se place dans l'hypothèse où seuls l'accident et le meurtre, (M) , sont

considérés, la formule de Bayes donne immédiatement : $P(I) = \frac{P(A)}{P(A) + P(M)}$.

En particulier il ne faut pas chercher à savoir si un accident est improbable (1/73 000 000), mais s'il l'est nettement moins qu'une autre hypothèse. Dans le cas

de Sally Clark un calcul de cette nature permet d'obtenir $P(I) > \frac{2}{3}$! Mais insistons

(2) Les profils sont maintenant plus fins, mais se basent sur une population de type caucasien, ce qui introduit un biais indéniable.

sur le fait que de tels calculs n'ont pas lieu d'être, car ainsi que l'écrit Auguste Comte, l'application du calcul des probabilités aux sciences morales est le scandale des mathématiques.

Troisième enjeu : les fluctuations d'échantillonnage

Toujours pour illustrer les événements rares, on pourra étudier les fluctuations d'échantillonnage, largement illustrées dans les problèmes de sondages. Un exemple d'utilisation de classeur Excel en seconde est donné par Michel Henry⁽³⁾ de l'IREM de Franche-Comté.

Pour estimer une proportion, on utilise la modélisation suivante. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre p (i.e. $P(X = 1) = p$ & $P(X = 0) = 1 - p$), et f_n la moyenne de $(X_k)_{k=1..n}$ ou « fréquence empirique ». D'après la loi des grands nombres f_n tend vers p lorsque n tend vers l'infini, mais, attention !, f_n est une variable aléatoire, pas une quantité déterministe...

De même on peut démontrer que $\frac{n}{n-1}$ fois la moyenne des $(X_k - f_n)_{k=1..n}^2$ converge vers la variance $p(1-p)$.

Un intervalle de confiance pour p au niveau de confiance α est obtenu en admettant que le théorème de la limite centrale est valable en prenant la valeur en n plutôt que la limite pour n infini. Si donc t_α est tel que $P(-t_\alpha < Y < t_\alpha) = \alpha$, lorsque Y suit une loi normale centrée réduite, alors un intervalle de confiance pour p au niveau de confiance α est donné par l'intervalle centré en f_n et de demi-longueur

$$t_\alpha \left(\frac{nf_n(1-f_n)}{n-1} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Les estimateurs de la moyenne p et de la variance $p(1-p)$ que nous venons de donner sont des estimateurs sans biais, c'est-à-dire qu'ils convergent en loi vers la constante qu'ils approximent et que leur espérance est constante. C'est l'explication du $\frac{n}{n-1}$ dans la formule de l'estimateur de la variance. On parle de « correction pour les petites populations ». Mais c'est surtout le théorème de Pythagore ! Cette correction s'interprète en termes de degrés de liberté : il en faut 1 pour estimer la moyenne et $n-1$ pour estimer la variance.

Ainsi, si dans un sondage d'opinion, on enregistre 14% des intentions de vote pour A et 17% pour B, il faudrait dire (avec 850 sondés) « Avec une certitude de 95%, les intentions de vote sont, entre 11,7% et 16,3% pour A et entre 14,5% et 19,5% pour B ». On ne peut donc pas exclure que A récolte plus de suffrages que B, même si les électeurs ne changent pas d'opinion d'ici les élections...

Avec une confiance de 90%, les intervalles deviennent [12% ; 16%] et [14,9% ; 19,1%], ce qui laisse encore de la marge. Il faut arriver à 77% de confiance

(3) Bulletin de l'APMEP 444, p. 88.

pour que les intervalles soient disjoints : $[13,6\% ; 15,4\%]$ et $[15,4\% ; 18,6\%]$.

Quel enseignement en tirer ?

Vouloir ordonner totalement les résultats d'une estimation statistique est sans objet. En particulier le classement des lycées donné par les médias est ridicule : on peut au mieux donner, disons, cinq groupes de lycées et dans chaque groupement les lycées sont indiscernables statistiquement parlant. Il en va de même du classement des hôpitaux, du classement des candidats à une élection, etc.

Markov

Au début du XX^e siècle, Markov, en prévoyant l'apparition de voyelles et consonnes dans un texte, s'est aperçu que la mécanique classique peut s'appliquer en probabilité : pour prédire le devenir d'un système, il suffit de savoir son présent et il n'est pas besoin de connaître son passé.

On pourrait même penser que tout est markovien, au moins approximativement. En effet « ce qui s'est produit avant-hier a beaucoup moins d'influence sur ce qui se passera demain que ce qui s'est passé hier ; et finalement ce qui s'est produit il y a dix jours n'a plus aucune importance pour nous ».

On appelle variable aléatoire sans mémoire, celles qui vérifient, pour s et t positifs, $P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s)$. Les seules lois continues vérifiant cela sont les lois exponentielles, dont la densité de probabilité est $\lambda e^{-\lambda x} dx$ (voir par exemple le problème de CAPES 2001). En temps discret, on tombe sur les lois géométriques, qui donnent l'instant de premier succès d'une loi de Bernoulli : $P(X = n) = p(1 - p)^{n-1}$.

Mémoire et idées : un devoir à la maison ?

La nature a en fait une mémoire d'éléphant ! De la mécanique quantique aux transitions de phase, de nombreux phénomènes reposent sur des interactions à distance infinie. Néanmoins on peut voir que dans certains cas, tout se passe comme si le processus était markovien, mais avec un choix aléatoire de paramètres.

C'est le cas de l'émergence des idées (ou de l'intelligence artificielle) : supposons que l'on hésite entre deux idées, A et B. Au début, on affecte un poids 1 à chacune et on choisit au hasard entre les deux. Le lendemain on recommence mais entre temps on a augmenté le poids de l'idée choisie la veille de 1.

Soit $\alpha_n = \frac{k}{n}$ la fréquence du choix A durant les n premières itérations. Alors α_n est une martingale, ce qui signifie exactement que, en moyenne, ce qui se passe demain est égal à ce qui se passe aujourd'hui. On a $P\left(\alpha_n = \frac{k}{n}\right)$ est indépendant de

k et vaut donc $\frac{1}{n+1}$. En effet, toutes les façons d'arriver à $\alpha_n = \frac{k}{n}$ ont la même probabilité, à savoir $\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$, et il y a $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ telles façons.

Mais si on choisit α au hasard (uniformément entre 0 et 1) et qu'on affecte la probabilité α à A et $1 - \alpha$ à B, alors la probabilité d'une certaine façon d'arriver à $\frac{k}{n}$ est l'intégrale entre 0 et 1 de $\alpha^k(1-\alpha)^{n-k}$, ce qui donne bien la même chose que précédemment ! Ce calcul peut être fait pour n petit et pour tout k , de façon à ne pas avoir à calculer d'intégrale à paramètre.

Marches aléatoires

Le phénomène précédent peut être modélisé par une marche aléatoire renforcée : partant de I on peut aller vers A ou B avec un poids 1 chacun (i.e. avec une probabilité $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ pour chacun), et partant de A ou B on retourne en I avec un poids 1. À chaque itération, on rajoute 1 au poids du parcours utilisé.

On peut faire des marches aléatoires renforcées sur des graphes connexes, finis et orientés.

Quels que soient les poids de départ, on finit par tomber sur une distribution limite. On peut l'expérimenter en Terminale ES avec des graphes à deux, trois ou quatre sommets, et simuler ainsi l'apprentissage d'un robot.

La marche aléatoire (non renforcée) sur \mathbf{Z} illustre la loi des grands nombres : il s'agit de se déplacer sur un ensemble indexé par les entiers relatifs de telle façon que, si on se trouve en n , on a une probabilité p d'aller vers $n + 1$ et une probabilité $1 - p$ d'aller en $n - 1$. L'étude du mouvement se fait via la loi des grands des nombres et le théorème de la limite centrale, mais il est aisé de le simuler et donc de découvrir empiriquement ces deux lois.

Un autre cas est la « ruine du joueur » : cette fois-ci la marche s'effectue sur un intervalle $[0, a]$. Le principe est que deux joueurs misent 1 à chaque tour. Le premier gagne avec probabilité p et perd 1 avec probabilité $q = 1 - p$. Chacun des deux joueurs a un capital au départ : c et $a - c$, et s'arrête quand il n'a plus d'argent.

En physique ce modèle correspond aux phénomènes de diffusion : une particule se déplace et s'arrête dans un des états absorbants 0 ou a , en partant de c .

Le cas a infini permet d'étudier le problème du premier temps de passage en 0.

Lois de l'arcsinus : un joli TP ?

On considère le cas symétrique $p = q = \frac{1}{2}$. On part de 0 et on se déplace donc selon une marche aléatoire durant n instants pour arriver en S_n et on se pose les questions suivantes : jusqu'où au maximum est-on allé ? quand est-ce que ce maximum a été atteint ? repasse-t-on par 0 ? si oui, quand y repasse-t-on pour la dernière fois avant de s'arrêter ?

Puisqu'on se déplace en moyenne de 0, la loi des grands nombres affirme qu'on ne doit pas trop s'écartier de son point de départ. Mais peut-on quantifier cette affirmation ?

Les réponses sont contre-intuitives. Ainsi le maximum M_n peut prendre toutes les valeurs k entre 0 et n et la probabilité qu'il vaille k est une fonction décroissante ; en particulier cette probabilité est maximale en 0 ! Le maximum le plus probable est donc 0, le point de départ, ce qui correspond aux marches pour lesquelles on est toujours resté à gauche du point de départ.

Il n'y a pas de retour en 0 avec une probabilité $\frac{1}{2}$: il n'est pas rare que la marche reste de signe constant ! Par conséquent, même si on reste proche de 0, il est rare qu'on y passe !

Le temps du premier maximum et du dernier passage en 0 ont des probabilités maximales en 0 et n , et leurs fonctions de répartition tendent vers un arcsinus.

Les démonstrations sont basées sur de la combinatoire élémentaire et sur des principes géométriques très jolis.

On trace le trajet dans le plan en joignant les points (k, S_k) par des segments, on obtient ainsi une ligne brisée qui illustre la marche effectuée. À un chemin tel que $M_n \geq m$ et $S_n = k \leq m$ correspond un chemin tel que $S_n = 2m - k$ par réflexion : à partir du moment où on arrive en m on prend à chaque fois la direction opposée, ce qui a pour effet de réfléchir le trajet par rapport à la droite $y = m$.

Il vient $P(M_n \geq m \text{ et } S_n = k \leq m) = P(S_n = 2m - k)$ et donc, par somme télescopique, $P(M_n = m) = P(S_n = m \text{ ou } S_n = m + 1)$.

Un argument combinatoire montre que $P(S_n = k)$ vaut $2^{-n} C_n^{\frac{n+k}{2}}$ si n et k ont la même parité et 0 sinon. D'où la décroissance annoncée.

Pour qu'on atteigne le maximum à l'instant k , il faut que la valeur en $k-1$ soit égale au maximum sur l'intervalle de temps $[0, k-1]$, que l'on monte de 1 à l'instant k puis que le maximum sur $[k, n]$ soit S_k . Autrement si l'on considère la marche à partir de l'instant k , et que l'on fait un changement de repère pour que (k, S_k) soit la nouvelle origine, alors cette marche a un maximum nul. Autrement la probabilité que le maximum soit atteint à l'instant k et pas avant est égale à

$$P(S_{k-1} = M_{k-1}) \frac{1}{2} P(M_{n-k} = 0). \text{ Ou encore, par réflexion, } \frac{1}{2} P(S_{k-1} = 0) P(M_{n-k} = 0),$$

ce qui, avec les formules précédentes, vaut approximativement $\frac{2}{n\pi} \left(\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$. La

fonction de répartition converge donc vers un arcsinus.

Expérimentations

Pour pouvoir « jouer » avec les variables aléatoires, il est utile de savoir les simuler sur une calculatrice.

Le principe est simple : on tire au hasard un nombre entre 0 et 1, selon une loi uniforme, et on utilise la fonction de répartition F pour déterminer une valeur qui, elle, suivra la loi qui admet F comme fonction de répartition.

En termes mathématiques, soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$. Si X est une variable aléatoire admettant F comme fonction de répartition et si on pose $F^*(t) = \inf \{x \in \mathbf{R} \mid F(x) \geq t\}$, alors $F^*(U)$ a la même loi que X et $F(X)$ a la même loi que U .

Avec ce principe, voici un programme pour TI-89 permettant de simuler une loi de Poisson. On se donne une précision ε puis on calcule une liste « loi » contenant les fréquences cumulées d'une loi de Poisson de paramètre λ en se limitant aux fréquences inférieures à $1 - \varepsilon$.

```

poisson( $\lambda$ ,  $\varepsilon$ )
Prgm
newList(0)  $\rightarrow$  loi
 $e^{(-\lambda)} \rightarrow p$ 
 $p \rightarrow f$ 
 $0 \rightarrow k$ 
While  $f < 1 - \varepsilon$ 
 $k+1 \rightarrow k$ 
 $\text{floor}(f/\varepsilon) * \varepsilon \rightarrow \text{loi}[k]$ 
 $p * \lambda / k \rightarrow p$ 
 $f+p \rightarrow f$ 
EndWhile
 $1 \rightarrow \text{loi}[k+1]$ 
EndPrgm

```

Ainsi `poisson(1, 0.001)` fournit la liste `[0,367 ; 0,735 ; 0,919 ; 0,981 ; 0,996 ; 1]` de sorte que l'on va simuler une variable X qui prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 et 5 avec les probabilités 0,367, 0,368, 0,184, 0,072, 0,015 et 0,004. Ce qui est bien la loi de Poisson, à 10^{-3} près. Le programme suivant permet de faire des tirages (attention, il faut créer la liste « loi » grâce au programme précédent avant d'utiliser ce programme) :

```

ceiling( $1/\varepsilon$ )  $\rightarrow$  pas
rand(pas)/pas  $\rightarrow$  y
 $0 \rightarrow k$ 
While  $\text{loi}[k+1] < y$ 
 $k+1 \rightarrow k$ 
EndWhile
Disp k

```