Jeu de « saute-mouton » sur un polygone

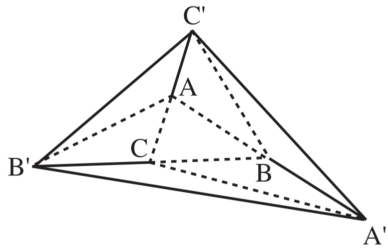
Jean François Kentzel(*)

1. Deux jolis exercices pour le collège

Je ne sais plus dans quel manuel j'ai trouvé ces exercices. Le premier est traitable en classe de cinquième. C'est moins clair pour le second. Les deux sont encore intéressants en classe de seconde où beaucoup d'élèves ne sont pas à l'aise pour calculer l'aire d'un triangle avec $bh/2$ lorsque la hauteur est extérieure au triangle.

Premier exercice :

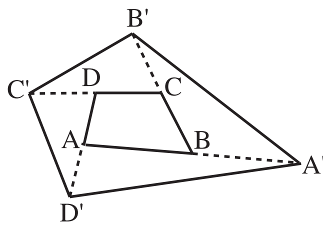
ABC étant un triangle, on désigne par A′, B′ et C′ les symétriques respectifs de A, B et C par rapport à B, C et A. S et S′ étant les aires (dans la même unité !) des triangles ABC et A′B′C′, calculer le rapport S′/S.
(les segments tracés en pointillés sont des médianes de triangles et on trouve S′/S = 7).



On a utilisé six fois le résultat : une médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire (on a donc évalué plusieurs aires de triangles avec la formule A = $bh/2$ lorsque la hauteur est extérieure au triangle).

Deuxième exercice :

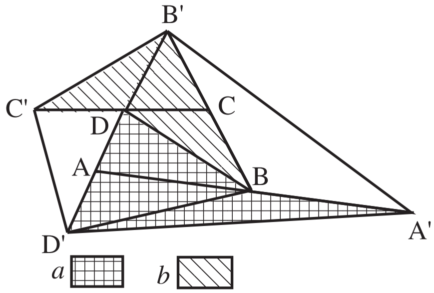
ABCD étant un quadrilatère convexe, on trace les symétriques respectifs A′, B′, C′ et D′ de A, B, C et D par rapport à B, C, D et A. S et S′ étant les aires de ABCD et A′B′C′D′, calculer le rapport S′/S.



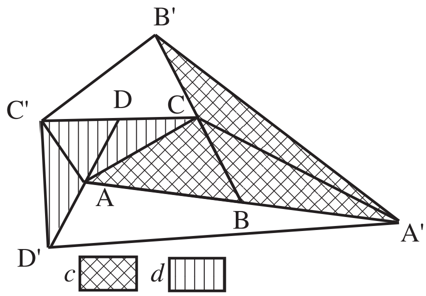
Pour une raison compréhensible dans ce qui suit, il vaut mieux imposer à chaque élève de tracer un quadrilatère ABCD superposable à celui de son (sa) voisin(e). Si les élèves n'ont pas l'idée d'utiliser le premier exercice, on leur propose de le faire en traçant une diagonale de ABCD. Il vaut mieux être directif en imposant à chaque rangée d'élèves un des découpages de ABCD montrés ci-dessous de façon que chaque élève ait un(e) voisin(e) qui a réalisé l'autre figure. Le seul problème à gérer dans la classe est celui des « fausses médianes » (comme (C′D) médiane de AB′C′ ci-dessous), fréquentes car beaucoup d' élèves cherchent à reproduire sans l'adapter la méthode utilisée pour le premier exercice. Il faut bien marquer les longueurs égales sur la figure pour éviter des erreurs.

(*) Lycée Pardailhan à Auch.

Légende : ci-dessous, a, b, c et d représentent l'aire d'un des triangles colorés de la façon indiquée.



$\mathrm{S} = a + b$



$\mathrm{S} = c + d$

Lorsque chaque élève a constaté qu'il ne peut rien conclure, on lui conseille (pour une fois !) de regarder ce qu'a fait son voisin. Si on en prend le temps (on peut proposer des figures du type de celles qui suivent aux élèves ayant trouvé plus vite que les autres le résultat final), chaque élève obtient :

$\mathrm{S}' = 3a + 3b + 2c + 2d$ (avec la figure de gauche),

$\mathrm{S}' = 3c + 3d + 2a + 2b$ (avec celle de droite),

et tout le monde est d'accord :

$$\mathrm{S}' = 5\mathrm{S}.$$

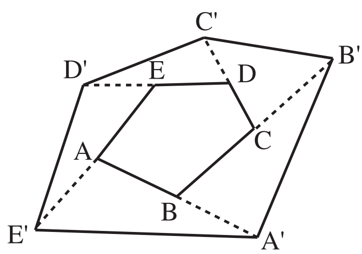
2. Généralisation

Il est tentant de ne pas s'arrêter en si bon chemin (cependant qu'il est de bon ton de pouvoir répondre à d'éventuelles questions d'élèves).

Soit n un entier valant au moins 3. On considère un polygone convexe P à n sommets :

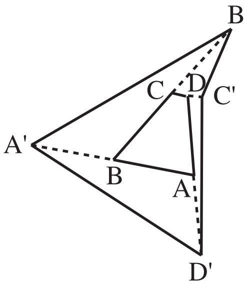
$$\mathrm{P} = \mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\ldots\mathrm{M}_n.$$

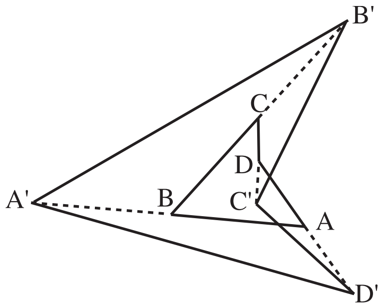
Pour tout entier k compris entre 1 et n, on définit M'_k comme étant le symétrique de M_k par rapport à M_{k+1} (avec la convention : $\mathrm{M}_{n+1} = \mathrm{M}_1$, convention adoptée pour tout le texte). On obtient alors le polygone $\mathrm{P}' = \mathrm{M}'_1\mathrm{M}'_2\ldots\mathrm{M}'_n$. Un exemple est donné ci-contre avec $n = 5$.



On désigne par S et S′ les aires de P et P′. La question étudiée ici est la (les) valeur(s) du quotient S′/S.

On suppose dans tout ce qui suit que P est convexe. P′ n'est alors pas nécessairement convexe (exemple : dessin à gauche ci-dessous) mais au moins les sommets de P′ sont tous extérieurs à P et on évite les situations du type à droite ci-dessous où le calcul de S′ en fonction de S semble impraticable.





Il y a deux façons de parcourir les sommets du polygone P. Elles donnent deux polygones P′ différents. La formule qui sera donnée au paragraphe 3 montre qu'ils ont la même aire.

On va prouver les résultats suivants : *quand* P *parcourt l'ensemble des polygones convexes à n sommets,*

$$\sup\left(\left\{\frac{S'}{S}\right\}\right) = 5 \text{ si } n \geq 5,$$

$$\inf\left(\left\{\frac{S'}{S}\right\}\right) = 3 \text{ si } n = 5 \text{ et } \inf\left(\left\{\frac{S'}{S}\right\}\right) = 1 \text{ si } n \geq 6.$$

On verra aussi qu'aucune de ces bornes n'est atteinte.

J'avoue n'avoir trouvé ces résultats qu'après avoir réalisé un grand nombre de dessins (certains à l'aide des logiciels Cabri et Géoplan). Des indications sur les preuves de ces résultats sont données dans ce qui suit.
(des preuves complètes, malheureusement très calculatoires, et quelques commentaires figurent sur le site abc-débat de l'APMEP : http://trg45.univ-lille1.fr/abc/apmep)

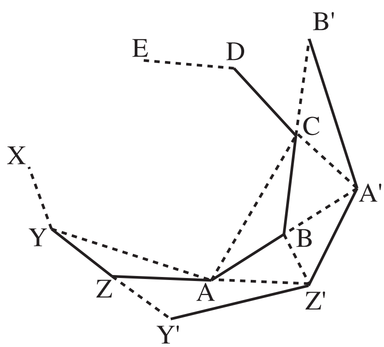
3. Une expression simple de S′ − S.

S′ − S est la somme des aires de *n* triangles du type BA′B′. En appliquant la propriété de la médiane rappelée ci-dessus, on obtient :

aire (BA′B′) = 2 aire (ABC).

Avec la convention $M_{n+1} = M_1$ et $M_{n+2} = M_2$, on a donc :

$$\frac{S'-S}{2} = \sum_{k=1}^{n} aire(M_k\, M_{k+1}\, M_{k+2}),$$

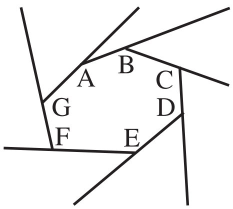


formule qu'on écrira sous la forme :

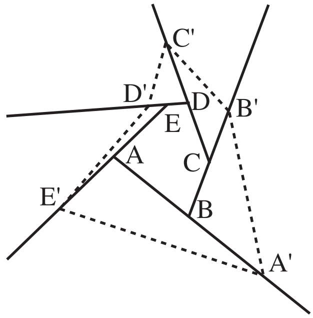
$$\frac{S'-S}{2}=\Sigma.$$

C’est la somme des aires des n triangles « bordant » l’intérieur du polygone P.

Remarque : quand on dessine des polygones P et P′, il est intuitivement évident que les n triangles dont la somme des aires vaut 2Σ ne se chevauchent pas : chacun de ces n triangles est contenu dans un des secteurs angulaires représentés ci-contre.
C’est prouvé sur la page Internet indiquée plus haut.



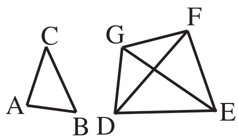
$n = 7$ et P′ convexe



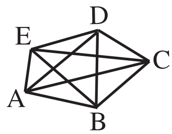
$n = 5$ et P′ non convexe

Conséquence immédiate de la formule $\dfrac{S'-S}{2}=\Sigma$:

On sait par ailleurs que Σ vaut 3S si $n = 3$ et vaut 2S si $n = 4$.
On retrouve donc les résultats : S′ = 7S si $n = 3$ et S′ = 5S si $n = 4$.



Parenthèse informelle : le rapport S′/S n’est pas constant si n dépasse 4 car dans ce cas il y a nécessairement à l’intérieur de P un polygone à n côtés dont l’aire n’intervient pas directement dans S′ − S (dessin ci-contre avec $n = 5$).



4. Conséquences : indications sur les preuves

a) $\dfrac{S'-S}{2}=\Sigma$ donc S′ = S + 2Σ cependant qu’il est clair que : $0 < \Sigma < 2S$ si $n \geq 5$ (dessin ci-dessus). On a donc :

$$S < S' = S + 2\Sigma < 5S \text{ si } n \geq 5.$$

(S < S′ était évident dès le départ car P est convexe : les sommets de P′ sont donc tous extérieurs à P).

b) Le seul résultat un peu difficile à prouver est : S′/S > 3 si $n = 5$.
La seule preuve que j’ai trouvée pour ce résultat est trop longue pour être évoquée ici. Elle est par ailleurs la seule dans tout ce texte à être incompréhensible pour un élève de la classe de première car elle utilise des calculs d’aires de triangles à l’aide de déterminants. Une interprétation graphique de ce résultat est proposée à la fin de ce texte.

c) Pour montrer que les bornes obtenues sont des Inf ou des Sup, il suffit de considérer des exemples et on peut utiliser les figures qui suivent et faire à chaque fois un calcul effectif de S′/S.

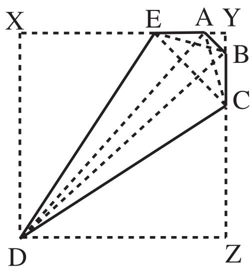


Figure 1

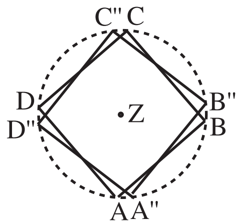


Figure 2

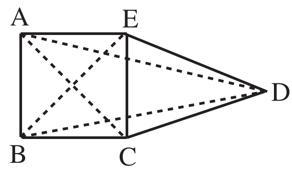


Figure 3

Exploitation de la Figure 1 : $\sup\left(\left\{\dfrac{S'}{S}\right\}\right) = 5$ si $n \geq 5$.

Dans le carré XYZD, on pose XE = ZC = 1, EA = BC = x et AY = BY = x^2.
P est ABCDE.

On a alors : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{S'(x)}{S(x)}\right) = 5$ (dessin et calculs du même type si n dépasse 5).

Exploitation de la Figure 2 : $\inf\left(\left\{\dfrac{S'}{S}\right\}\right) = 1$ si $n > 5$.

On construit d'abord un polygone régulier (de centre Z) et son image par une rotation de centre Z et d'angle x assez petit.
On a $n = 8$ et x vaut 10 degrés : P (non tracé) est AA″BB″CC″DD″.

On a alors : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{S'(x)}{S(x)}\right) = 1$ (on rajoute un petit côté et quelques calculs pour traiter le cas où n est impair).

Exploitation de la Figure 3 : $\inf\left(\left\{\dfrac{S'}{S}\right\}\right) = 3$ si $n = 5$.

Le carré ABCE a ses côtés de longueur x et CDE est isocèle de hauteur DD' = 1.
P est ABCDE.

On a alors : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{S'(x)}{S(x)}\right) = 3$ (calculs très simples)

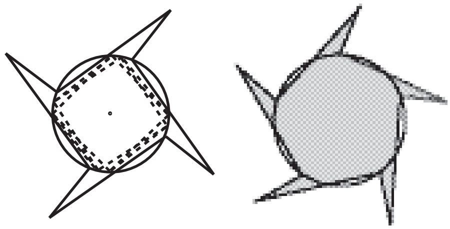
Principes de ces trois calculs (on rappelle que $\frac{S'-S}{2} = \Sigma$ donc que S′ = S + 2Σ) :

Calcul 1.
Σ est la somme des aires de n triangles dont trois principaux si x est « petit » :

$$\Sigma \approx \text{aire (DEC)} + \text{aire (DEA)} + \text{aire (DCB)} = \text{aire (DEC)} + 2\cdot\text{aire (DEA)}.$$

Ce dernier nombre vaut presque 2S si x est très petit. On va donc avoir S′ ≈ 5S.

Calcul 2.
On fait alterner « grands » et « petits » côtés. Σ est alors une somme de « petites » aires (en vertu de $\left|\frac{1}{2}\sin\left(\widehat{A}\right)bc\right| < \frac{bc}{2}$) d'où Σ ≈ 0 et S ≈ S′.
Ci-contre, dessins de P′ si x est assez petit pour $n = 8$ et $n = 10$.



Calcul 3.
Σ est la somme des aires de cinq triangles. Parmi eux, CED a la plus grande aire si x est « petit ».
aire (CED) ≈ Σ et aire (CED) ≈ S.
On va donc avoir S′ ≈ 3S.

5. Interprétation graphique du résultat S′/S > 3 si *n* = 5

Ce résultat s'écrit aussi Σ > S si $n = 5$. Sur le dessin ci-contre, désignons par Q l'aire quadrillée, par H l'aire hachurée et par B l'aire laissée en blanc. Σ > S s'écrit : B + 2Q > B + Q + H, c'est-à-dire : Q > H. Cette inégalité saute aux yeux pour n'importe quel pentagone « ordinaire ». Cependant, elle peut n'être vraie qu'à un ε près : en faisant tendre x vers 0 sur le dessin de gauche ci-dessous, on obtient le dessin de droite où l'inégalité Q > H est en effet moins évidente.