Autour des nombres pythagoriciens

Richard Choulet(*)

Les choses entraînent les choses, le bidule
crée le bidule, y-a pas de hasard
(extrait du film UN SINGE EN HIVER).

I. J'ai trouvé dans un livre de Seconde l'exercice qui suit …

Retrouvez le nombre manquant dans

$$\frac{1}{\ldots^2} = \frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2}$$

et

$$\frac{1}{10^3} = \frac{1}{12^3} + \frac{1}{15^3} + \frac{1}{\ldots^3}.$$

Je me suis posé deux questions a priori. Comment est bâti un tel énoncé afin d'en concevoir d'autres du même genre (utilisant essentiellement en Seconde la décomposition en facteurs premiers et la réduction de quotients au même dénominateur) ? Comment construire sur la base découverte un énoncé d'arithmétique de Terminale ?

Il paraissait assez naturel pour le premier calcul qu'interviennent des triplets pythagoriciens, mais que dire du second ?

II. Proposition de devoir à la maison en Terminale S inspiré par cet énoncé de Seconde.

Partie A : Caractérisation des triplets pythagoriciens

Il s'agit de trouver toutes les solutions entières de l'équation :

$$z^2 = x^2 + y^2. \qquad (1)$$

On cherche donc les triplets $(x;y;z)$ *de* $\mathbf{Z}^3$ *(dit triplets pythagoriciens) satisfaisant* (1).

1. Justifiez qu'on peut se restreindre à la recherche des entiers naturels non nuls, qui de plus n'ont aucun diviseur commun.

2. Soient a et b deux entiers de parité différente et sans diviseur commun, tels que $a > b$.

(*) Lycée Augustin Fresnel CAEN. Courriel : richardchoulet@wanadoo.fr

On pose : $x = 2ab$, $y = a^2 - b^2$ et $z = a^2 + b^2$.

a. Montrez que PGCD $(x\ ;\ y) = 1$ et que $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est un triplet pythagoricien.

b. Donnez des exemples numériques de tels triplets autres que $(4\ ;\ 3\ ;\ 5)$.

La suite de cette partie propose de démontrer que réciproquement toutes les solutions de (1) *constituées d'entiers sans diviseur commun (au rôle symétrique près joué par x et y) se mettent sous la forme* $x = 2ab$, $y = a^2 - b^2$ et $z = a^2 + b^2$.

3. x, y et z étant trois entiers naturels sans diviseur commun et vérifiant (1), démontrez qu'un seul des nombres parmi x, y et z est pair et que ce n'est pas z. *Supposons donc que c'est x.*

4. Justifiez que $z + y$ et $z - y$ sont pairs et que $\mathrm{PGCD}\left(\frac{x-y}{2};\frac{x+y}{2}\right)=1$. On pourra écrire (1) sous la forme équivalente :

$$x^2 = (z - y)(z + y). \tag{1'}$$

Déduisez-en que $\frac{z-y}{2}$ et $\frac{z+y}{2}$ sont des carrés.

5. On pose donc $\frac{z-y}{2}=b^2$ et $\frac{z+y}{2}=a^2$ avec $a > b > 0$ et PGCD $(a\ ;\ b) = 1$.

Démontrez que a et b sont de parités différentes.
Justifiez alors le résultat suivant :

La solution générale de l'équation

$$z^2 = x^2 + y^2,$$

où x, y et z sont des entiers vérifiant les conditions $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, PGCD $(x\ ;\ y) = 1$, x est pair, est

$$\begin{cases} x = 2ab \\ y = a^2 - b^2 \\ z = a^2 + b^2 \end{cases}$$

où a et b sont des entiers de parités différentes avec PGCD $(a\ ;\ b) = 1$ et $a > b > 0$.

Partie B : Résolution de l'équation :

$$\frac{1}{\mathrm{C}^2} = \frac{1}{\mathrm{A}^2} + \frac{1}{\mathrm{B}^2}. \tag{2}$$

1. Soit $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ un triplet pythagoricien ; exprimez à l'aide de a, b et c un triplet (A ; B ; C) solution de l'équation (2). Donnez deux exemples provenant de ceux que vous avez proposé au A2.

2. Soit maintenant (A ; B ; C) une solution de l'équation (2).

On note m = PPCM (A ; B), δ = PGCD(A ; B), A = δA′ et B = δB′ avec PGCD (A′ ; B′) = 1.

Démontrez l'existence d'un entier naturel non nul k tel que (kA′ ; kB′ ; δ) soit un triplet pythagoricien.

3. Concluez.

III. Quels prolongements peut-on espérer ?

On se doute alors que le deuxième énoncé proposé au I. ci-dessus procède de la même remarque avec des cubes et que, plus généralement, tout énoncé similaire utilise les solutions d'une équation diophantienne où apparaissent des puissances n par exemple. À ce moment là, en divisant les deux membres de l'égalité obtenue par un dénominateur approprié, on se retrouve avec une égalité où figurent uniquement des inverses de puissances n.

Seulement toutes les solutions sont-elles connues et ont-elles une représentation paramétrique ?

Par exemple

$$15^4 = 4^4 + 6^4 + 8^4 + 9^4 + 14^4$$

permet de construire l'énoncé : *Complétez*

$$\frac{1}{\dots^4} = \frac{1}{630^4} + \frac{1}{420^4} + \frac{1}{315^4} + \frac{1}{280^4} + \frac{1}{180^4}.$$

Mais revenons à notre énoncé de Seconde :

Retrouvez le nombre manquant dans

$$\frac{1}{10^3} = \frac{1}{12^3} + \frac{1}{15^3} + \frac{1}{\dots^3}.$$

On voit en réduisant au même dénominateur que le fond de l'affaire est que

$$6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3,$$

autrement dit que l'on utilise un quadruplet (a ; b ; c ; d) solution de $d^3 = a^3 + b^3 + c^3$. Des solutions entières de ce problème ont été données par Ramanujan (≈ 1920) sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} a = 3u^2 + 5uv - 5v^2 \\ b = 4u^2 - 4uv + 6v^2 \\ c = 5u^2 - 5uv - 3v^2 \\ d = 6u^2 + 5uv + 4v^2 \end{cases}$$

avec u, v et w dans $\mathbf{Z}$.

Toutefois la démonstration de ce résultat semble difficile au niveau de la Terminale S.

Quelques pistes pour en rester à des calculs numériques qui s'arrangent

Il n'est pas question de faire un inventaire qui en aucun cas ne pourra être exhaustif, mais on peut signaler quelques bribes de connaissances théoriques.

• En ce qui concerne les quadruplets pythagoriciens (donc faisant intervenir l'exposant deux)

On ne connaît pas la forme générale des entiers a, b, c et d tels que $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ mais on peut affirmer que si a et b sont pairs, il y a des solutions ; par contre si a et b sont impairs, il n'y en a pas. Ce résultat récent (1996) est dû à Oliverio. D'autre part des solutions sont fournies par le paramétrage de Mordell (1969) :

$$\begin{cases} a = 2mp \\ b = 2np \\ c = p^2 - (m^2 + n^2) \\ d = p^2 + (m^2 + n^2) \end{cases}$$

avec des entiers m, n et p. Le quadruplet (36 ; 8 ; 3 ; 37) échappe toutefois à la représentation.

• Avec l'exposant trois

Commençons par rappeler qu'on ne risque pas de trouver d'entiers tous différents de zéro tels que : $a^3 = b^3 + c^3$; cela était connu bien avant que A. Wiles achève la démonstration du « dernier théorème de Fermat ».
Par contre les équations diophantiennes $a^3 = b^3 + c^3 + d^3$ ou $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$ ou encore $a^3 + b^3 = c^2$ ont des solutions fournies par une représentation paramétrique. Pour des résultats plus complets le site http ://mathworld.wolfram.com offre des joyaux plus étonnants les uns que les autres.

Signalons la très jolie formule qui utilise tous les entiers de 1 à 12 :

$$1^3 + 2^3 + 4^3 + 8^3 + 9^3 + 12^3 = 3^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 10^3 + 11^3.$$

• Avec l'exposant quatre

Euler croyait que l'équation $a^4 = b^4 + c^4 + d^4$ n'avait pas de solution entière ; il est vrai que la première solution obtenue en 1987 par Elkies :

$$2\,682\,440^4 + 15\,365\,639^4 + 18\,796\,760^4 = 20\,615\,673^4$$

ne s'invente pas mais on a trouvé la plus petite solution par la suite avec :

$$95\,800^4 + 217\,519^4 + 414\,560^4 = 422\,481^4.$$

C'est encore le site précédent d'E. W. Weisstein qui sera source de jolis exercices de calculs comme ceux proposés au départ mais il y a aussi :

http://www.math.fau.edu/Richman/cubes.htm.

• Soyons fous : et l'exposant un ?

Cette situation est peut-être la plus riche d'un point de vue pratique car elle permet de construire des solutions plus accessibles ; néanmoins une étude générale est délicate et fait toujours l'objet de recherches. Détaillons un peu.
La toute bête relation diophantienne (le terme est bien pompeux ici) :

$$n+1=(n)+(1)$$

donne en divisant par $n(n+1)$ la moins ridicule :

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Et bien sûr elle peut être réinvestie à volonté !
Cette remarque permet d'accéder par exemple à la décomposition :

$$\begin{aligned}\frac{3}{7}&=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\\&=\frac{1}{7}+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{56}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{56}\right)\\&=\frac{1}{7}+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{56}\right)+\left(\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{72}\right)+\left(\frac{1}{57}+\frac{1}{3192}\right)\right)\\&=\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{56}+\frac{1}{57}+\frac{1}{72}+\frac{1}{3\,192}.\end{aligned}$$

Plus généralement c'est

$$m+n=(m)+(n)$$

qui va fournir :

$$\frac{1}{mn}=\frac{1}{m(m+n)}+\frac{1}{n(m+n)}.$$

Cette décomposition d'inverse en somme d'inverses se place dans le cadre plus général de l'écriture des rationnels entre 0 et 1 avec une somme de fractions unitaires, c'est-à-dire de numérateurs 1 et de dénominateurs distincts ou non. Signalons à ce sujet les toujours d'actualité conjectures de Erdös et Straus d'une part « $\frac{4}{n}$ can always be written as the sum of three unit fractions » et celle de Sierpinski d'autre part « $\frac{5}{n}$ can always be written as the sum of three unit fractions ».

Il y a toujours des travaux en cours entre autres, sur la décomposition de 1 en somme d'un nombre fixé de fractions unitaires et en particulier sur le plus petit dénominateur maximum dans une telle décomposition (voir http ://www.ics.uci.edu/ eppstein/numth/egypt/kterm-minden.html) mais aussi sur la taille maximale de z_k ((z_i) suite finie strictement croissante d'entiers plus grands que 1) dans

$$\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{z_i}.$$

C'est $n(n+1)(n^2+n+1)$ avec $k=3$, mais comment cela se généralise-t-il ? En fait, j'ai démontré que $z_k = u_k$ où (u_n) est la suite définie par $u_1 = n$ et pour tout k,

$$u_{k+1}=u_k(u_k+1),$$

mais ceci viendra plus tard.

Voici pour terminer une sommaire bibliographie avec quelques adresses :

- Mahdi Abdeljaouad : *Introduction à l'Arithmétique*, Centre de Publication Universitaire de Tunis (2002). En vente à l'APMEP.
- Richard Guy : *Unsolved Problems in Number Theory* (1974).
- Mathieu Savin : *Arithmétique*, Brochure 129 de l'APMEP (2000).
- http ://mathworld.wolfram.com
- http ://www.ics.uci.edu/ eppstein/numth/egypt/kterm-minden.html
- http ://www.math.fau.edu/Richman/cubes.htm
- http ://www.seanet.com/ ksbrown/
- http ://www.york.cuny.edu/ malk/tidbits/tidbit-fractions.html