# Comment introduire les fonctions logarithmes et exponentielles au lycée ?

Jean-Pierre Friedelmeyer

Afin d'éviter tout malentendu, je tiens à attirer d'emblée l'attention du lecteur sur le point suivant : si le titre de cet article est donné sous forme de question, son objectif n'est cependant nullement de répondre à cette question. Le titre ne fait que reprendre un ensemble d'interrogations qui se sont posées aux professeurs de mathématiques enseignant au lycée, après les modifications de programme engagées en août 2001 en classe de terminale S. Ces modifications qui demandaient d'introduire en premier la fonction exponentielle par le biais de la résolution de l'équation différentielle $f' = kf$ ont suscité un grand nombre de réactions souvent vives qui contestaient cette démarche et en proposaient une autre, mieux fondée, plus pédagogique, mieux ceci, plus cela, à leur avis. Pour des raisons éditoriales évidentes, nous ne pouvons publier tous ces articles, mais il est de la vocation de l'APMEP par l'intermédiaire du Bulletin Vert d'aider les collègues enseignant en Terminales à réfléchir et éventuellement à construire leur propre réponse à cette question en leur fournissant un certain nombre d'informations d'ordres historique et pédagogique. L'objectif de cet article est donc simplement d'initialiser cette réflexion. Nous commencerons par examiner la réponse donnée dans le passé à cette question, puis nous étudierons les avantages et les difficultés propres à chacune des manières d'y répondre ; nous nous appuierons, ici ou là, sur les contributions déjà évoquées, en priant ceux qui nous ont envoyé leurs réflexions sur la question de nous excuser de ne pouvoir les citer plus en détail.

La première question que l'on peut légitimement se poser d'abord est celle-ci :

**Faut-il enseigner les fonctions exponentielles et logarithmes dès le lycée ?**

La question se pose, en tout cas si l'on en juge par l'histoire de l'enseignement car la réponse longtemps donnée a été tout simplement non, et cela jusqu'en 1967 pour toutes les terminales à dominante mathématique, et à l'exception de certains enseignements spécialisés.

En réalité la réponse est plus complexe et oblige d'emblée à souligner le caractère toujours conjoncturel d'un programme d'enseignement. Les jeunes générations ont la chance de disposer de merveilleux outils de calcul qui ont rendu totalement obsolète le seul qui pouvait faciliter les calculs des anciens : la table de logarithmes ou son équivalent instrumental, la règle à calcul. Il faut donc faire très attention, lorsque l'on parle des anciens programmes, à bien distinguer l'aspect fonctionnel de l'aspect purement arithmétique et calculatoire : les logarithmes font partie des programmes d'algèbre de toutes les classes de second cycle scientifiques C et D, c'est-à-dire depuis la seconde. Rappelons que les classifications A, B, C, D datent de la réforme de 1902 qui avait profondément réorganisé l'enseignement secondaire tant sur le plan structurel que sur le plan des contenus. Elle en réalise l'unification (en supprimant la distinction ancienne entre « classique » et « moderne ») et établit un premier et un second cycles dans la succession des classes tout en développant la place accordée aux sciences. La classification se faisait selon la répartition suivante :

| Lettres | | Sciences | |
|---|---|---|---|
| A | Grec – latin | C | Latin – sciences |
| B | Latin – langues vivantes | D | Sciences – langues vivantes |

Le baccalauréat se faisait alors en deux parties, une première après la classe de Première, une seconde à la fin de la Terminale ; il y avait une session de rattrapage en octobre pour les candidats ayant échoué en juin ; et le nombre de bacheliers ne dépassait pas 3% d'une classe d'âge.
Caractéristique typiquement française, l'enseignement secondaire est prolongé dans les lycées par une préparation aux concours d'entrée aux Grandes Écoles (Polytechnique, École normale supérieure, Centrale, etc.). Cette préparation se fait dans les classes de *Mathématiques spéciales*. Pour donner là aussi un aperçu du nombre d'élèves concernés, durant les premières années du XX$^{e}$ siècle, le nombre total des élèves de *Mathématiques spéciales* réussissant chaque année à intégrer une grande école varie entre 250 et 300.
La réforme de 1902 a suscité beaucoup de réserves et de critiques, ce qui a conduit rapidement à des modifications et des aménagements.
En 1908, le quatrième congrès international des mathématiciens, crée une Commission Internationale présidée par Félix Klein « *chargée de faire une étude d'ensemble des progrès de l'enseignement mathématique dans les différentes nations* »(1) laquelle organise la rédaction de rapports sur la totalité de l'enseignement des mathématiques, rédaction effectuée par des sous-commissions nationales dont la France ; cela nous donne une photographie précise de cet enseignement au début du siècle dernier.
Le programme de 1902, repris dans le rapport de la sous-commission française est ainsi rédigé(2) :

> **Classe de Seconde C et D :** Progressions arithmétiques et progressions géométriques. Logarithmes. Usage des tables de logarithmes à quatre ou cinq décimales. Intérêts composés.
> *Nota*. Pour ce qui est des logarithmes on se proposera essentiellement de familiariser les élèves avec l'usage des tables.
> Les professeurs pourront donner des indications très sommaires sur la théorie déduite soit de l'étude des progressions, soit de l'étude des exposants.

Cet usage des tables était déjà préparé en Troisième B, sans référence aux progressions. Et l'intitulé du programme de Seconde est repris pratiquement mot pour mot dans le programme de la classe de Mathématiques.

(1) Revue *L'enseignement mathématique*, 1908, p. 446.
(2) Commission Internationale de l'Enseignement mathématique, Sous-Commission française, Rapports Volume II, Enseignement secondaire, publiés sous la direction de M. Ch. Bioche, p. 58, Librairie Hachette, Paris, 1911.

Le rapporteur, M. Guitton, commente ainsi cette partie du programme[(3)] :

> Une nouvelle étude des logarithmes est faite en « Mathématiques ». Beaucoup d'auteurs partent de progressions convenables et insèrent entre deux termes successifs un même nombre de moyens, ce qui revient à changer les raisons ; si le nombre de ces moyens est suffisamment grand, la progression géométrique croît par degrés aussi petits que l'on veut : on prend pour logarithme d'un nombre qui n'est pas dans la progression celui du terme le plus rapproché.
> Il vaudrait mieux faire d'abord l'étude de la fonction exponentielle ; on y est préparé par l'introduction des exposants fractionnaires positifs ou négatifs pour lesquels on démontre la permanence des formules rencontrées en Cinquième, à propos des puissances des nombres entiers. La fonction exponentielle à l'avantage d'une représentation géométrique : autant de points qu'on veut peuvent être construits.
> De la fonction exponentielle il est aisé de passer à la fonction logarithmique.
> Enfin on a proposé de définir cette dernière fonction comme la primitive de $1/x$ ou $a/x$ dans des conditions qu'il faut préciser ; la proposition fondamentale se démontre facilement.

L'usage des tables de logarithmes et son corollaire la règle à calcul demeureront en vigueur jusqu'au développement des calculatrices de poche, c'est–à-dire jusque dans les années 1970.

Au début du XX^e^ siècle, le seul enseignement avant la classe de *Mathématiques Spéciales* ayant un programme faisant explicitement référence aux fonctions logarithme et exponentielle est le programme spécial de la deuxième année de la *Section Industrielle* des Écoles Primaires Supérieures qui est un enseignement à caractère professionnel, après le certificat d'études. On y lit[(4)] :

> Définition d'une fonction $y$ d'une variable $x$. Coordonnées rectangulaires ; représentation graphique d'un phénomène, lecture d'un graphique (statistiques, horaires de chemins de fer, courbes de solubilité, etc.)
> Progressions arithmétiques, progressions géométriques, puissances.
> Fonction exponentielle, sa représentation par une courbe ; logarithmes.
> Explications au moyen de la règle à calcul

Ce programme répond clairement à des objectifs utilitaires pour une section industrielle dont « *les théories seront réduites à des explications portant le plus souvent sur des exemples concrets*[(5)] ». Ne perdons pas de vue que cela s'insère dans un emploi du temps de 3 heures consacrées aux mathématiques sur un total de 37 heures dont 20 consacrées à l'apprentissage professionnel.
Donc l'enseignement secondaire ne prévoit aucun enseignement des fonctions logarithmes et exponentielles avant la classe de *Mathématiques spéciales*. Dans celles-ci, le programme d'Algèbre et Analyse prévoit[(6)] :

---

(3) Rapports II, p. 69.
(4) Rapports, Vol. I, Enseignement Primaire, p. 30.
(5) Rapports I, p. 21.
(6) Rapports II, p. 44.

*Fonctions*. – Fonctions d'une variable réelle, représentation graphique, continuité de la fonction exponentielle et de la fonction logarithmique. Limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ quand $m$ grandit indéfiniment en valeur absolue. – (…). Dérivées de $a^x$ et de log $x$ (logarithmes vulgaires et logarithmes népériens). – Usage des tables de logarithmes et de la règle à calcul.

Ce programme peut avoir quelque chose de déroutant pour nous, dans la mesure où il donne l'impression que l'existence, la définition et les propriétés algébriques des fonctions logarithmes et exponentielles sont déjà acquises en entrant dans ces classes, alors que nous n'avions vu aucune mention de leur existence et définition dans les classes précédentes. Il existait certes, après 1905, des *classes de mathématiques spéciales préparatoires* intermédiaires, (ancêtres de nos *mathématiques supérieures*), mais dont le programme est bien spécifié être le même que celui de la classe de spéciales(7).

L'explication nous est peut-être donnée par la progression qu'expose Joseph Bertrand (1822 – 1900) dans son *Traité d'Algèbre* en deux parties : Première partie : *à l'usage des classes de Mathématiques élémentaires* ; deuxième partie : *à l'usage des classes de mathématiques spéciales*(8). Ce traité a connu de nombreuses rééditions, qui prouvent une réelle influence au moins durant la seconde moitié du XIXe siècle. Explicitons en détail cette progression.

La première partie du *Traité* définit les logarithmes en considérant deux progressions, l'une géométrique (Bertrand la qualifie par *quotient*) de premier terme 1 et de raison $q$, la seconde arithmétique de premier terme 0 et de raison $r$. Alors *les termes de la seconde sont appelés les* logarithmes *des termes qui ont le même rang dans la première*. Puis il étend la définition aux nombres qui ne sont pas dans la progression qui définit le premier système de logarithmes, en insérant un même nombre de moyens entre deux termes consécutifs de chacune des progressions. Bertrand prend ensuite grand soin de démontrer les théorèmes suivants :

§ 353. THÉORÈME. – *Si l'on calcule des logarithmes en insérant un certain nombre de moyens entre les termes consécutifs des deux progressions, puis qu'on en calcule d'autres en insérant un autre nombre de moyens, ces divers logarithmes peuvent être considérés comme faisant partie d'un seul et même système.*

§ 354. THÉORÈME. – *On peut insérer, entre les termes consécutifs de la progression par quotient, un assez grand nombre de moyens, pour que deux termes consécutifs quelconques de la progression nouvelle diffèrent aussi peu qu'on voudra.*

§ 355. REMARQUE. – *Dans le système de logarithmes que définissent ces deux progressions* (celle géométrique des puissances de 10 et celle arithmétique des entiers) *les nombres commensurables qui ne sont pas entiers, sont tous des logarithmes de nombres incommensurables, et les nombres commensurables qui ne sont pas des puissances de* 10*, ne pouvant pas faire partie de la progression par quotient, devraient être regardés comme n'ayant pas de logarithmes*. D'où :

(7) Rapports II, p. 34.

(8) Paris, librairie Hachette. La première édition est de 1851. Nous nous appuyons sur la quatrième édition de 1866.

§ 356. DÉFINITION DES LOGARITHMES DES NOMBRES QUI NE PEUVENT PAS FAIRE PARTIE DE LA PROGRESSION PAR QUOTIENT. *Le logarithme d'un nombre* N*, qui ne peut pas faire partie de la progression par quotient, est plus grand que les nombres commensurables qui sont les logarithmes de nombres inférieurs à* N*, et plus petit que les nombres commensurables qui sont les logarithmes de nombres supérieurs à* N.

*Il en résulte que tout nombre supérieur à* 1 *a un logarithme*.

Puis Bertrand démontre les propriétés opératoires des logarithmes, et la construction de tables, en faisant un détour par la définition de ce qu'il appelle les nombres incommensurables (ce sont nos nombres irrationnels) et l'extension pour eux des règles arithmétiques usuelles. Sans donner une définition générale, il indique néanmoins qu'un nombre incommensurable est bien défini en disant quels sont les nombres commensurables qui sont plus grands que lui et quels sont les nombres qui sont plus petits que lui. Ce qui est déjà très proche de la définition des réels par Dedekind au moyen des coupures.

Bertrand a besoin de cette définition pour son « Complément de la théorie des logarithmes » qu'il donne dans la seconde partie, celle *à l'usage des classes de spéciales*. En voici les premiers paragraphes dont nous donnons seulement les définitions et théorèmes :

§ 66. DÉFINITION des exposants incommensurables. : $a^x$ *est la limite vers laquelle tendent les puissances dont l'exposant commensurable s'approche de plus en plus de* $x$.

§ 67. THÉORÈME I. *Toutes les puissances commensurables d'un nombre positif sont positives*.

§ 68. THÉORÈME II. *Toutes les puissances positives d'un nombre plus grand que l'unité sont elles mêmes plus grandes que l'unité, et toutes les puissances négatives sont moindres que l'unité*.

§ 69. THÉORÈME III. *Si $x$ reçoit des valeurs commensurables croissantes, l'expression $a^x$ varie toujours dans le même sens ; elle augmente si $a$ est plus grand que l'unité ; elle diminue dans le cas contraire*.

§ 70. THÉORÈME IV. *On peut, dans l'expression $a^x$ donner au nombre commensurable $x$ un accroissement assez petit pour que $a^x$ varie aussi peu qu'on le voudra*.

§ 71. DÉFINITION RIGOUREUSE DE $a^x$. *Nous dirons que $a^x$ représente pour une valeur incommensurable $h$, attribuée à $x$, un nombre compris entre les valeurs de $a^x$ qui correspondent à des exposants commensurables moindres que $h$, et celles qui correspondent à des exposants commensurables plus grands que $h$*.

Puis sont évoquées la continuité, qui est définie à cette occasion là, et le fait que $a^x$ *peut prendre toutes les valeurs positives, pour $x$ variant de* $-\infty$ *à* $+\infty$. (§ 73)

§ 72. CONTINUITÉ DE LA FONCTION $a^x$. *Nous venons de voir* (§ 70) *que si, le nombre $a$ étant donné, l'exposant $x$ reçoit des accroissements suffisamment petits, l'expression $a^x$ peut varier aussi peu que l'on voudra. On dit, d'après cela, que cette expression est* une fonction continue de $x$ *; et l'on entend par le mot* continue*, qu'elle ne peut passer brusquement d'une valeur à une autre sans être susceptible d'acquérir les valeurs intermédiaires*.

D'où une nouvelle définition du logarithme : *Lorsqu'on a la relation* $a^x = b$, *on dit que* $x$ *est le logarithme de* $b$. Suit la vérification de l'identité des logarithmes selon les deux définitions. Avec cette identité Bertrand considère que la généralisation des propriétés opératoires des exponentielles est acquise, en particulier pour la dérivation.
Le raisonnement utilisé pour déterminer la dérivée de $a^x$ est le suivant : on cherche la limite pour $h$ tendant vers 0 de : $u = \dfrac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \dfrac{a^h - 1}{h}$. Posant $a^h = 1 + \dfrac{1}{n}$, il arrive à $u = a^x \dfrac{\log a}{\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$. Le ressort du calcul des dérivées des fonctions exponentielles et logarithmes se trouve donc dans la « *limite de* $\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m$ *quand m grandit indéfiniment en valeur absolue* » qui est en place centrale dans le programme ci-dessus. Cette limite est obtenue dans un précédent chapitre sur la formule du binôme, la valeur de e étant elle-même définie comme la somme de la série de terme général $\dfrac{1}{n!}$. On comprend ainsi le contenu et la succession des premiers chapitres de la deuxième partie :
Livre I : Compléments des éléments d'Algèbre

- Chapitre I : Des séries
- Chapitre II : Combinaisons et formule du binôme
- Chapitre III : Compléments de la théorie des logarithmes

………………………………………………………………

Livre II : Théorie des dérivées

- Chapitre I : Calcul des dérivées des fonctions explicites d'une seule variable
- Chapitre II : Étude des fonctions à l'aide des dérivées
- Chapitre III : Séries qui servent au calcul des logarithmes et du nombre π

Cette logique qui consiste à placer l'étude des séries avant l'étude de la dérivation est héritée de l'École d'analyse algébrique, initiée par Euler et Lagrange, et qui voulait fonder l'analyse sur le développement des fonctions en séries entières.
De toute façon, cet enseignement restera encore longtemps absent des programmes du lycée jusqu'au baccalauréat inclus. La première irruption se produira en classe Terminale *Sciences expérimentales*, dans l'immédiat après-guerre, en 1947. La présentation se veut très pragmatique, et n'aborde aucune difficulté théorique d'existence ni de démonstration. Successivement :

1) la fonction logarithme népérien est définie comme la primitive de $1/x$ qui s'annule pour $x = 1$ ; puis sont déduites les propriétés opératoires du logarithme.
2) la fonction exponentielle est définie à partir de la résolution de l'équation d'inconnue $x$ : Log $x = a$ pour aboutir à l'équivalence $\mathrm{Log}\, y = x \Leftrightarrow y = \mathrm{e}^x$.

C'est que de nombreux domaines des sciences contemporaines font appel dans tous les domaines aux fonctions logarithmes et exponentielles pour analyser et modéliser les phénomènes étudiés : en physique bien sûr(9), mais aussi en économie, biologie, écologie, etc., mais aussi en mathématiques appliquées, telles le calcul des probabilités. Citons à titre d'exemple la loi de Gauss ou de Poisson, ou encore le modèle mathématique de Gompertz pour représenter la croissance de certaines variables morphologiques, taille, masse corporelle, … d'organismes supérieurs et qui se présente ainsi(10) : $\frac{dx}{dt} = ax \ln \frac{\mathrm{K}}{x}$, lorsqu'il est exprimé sous forme d'équation différentielle ; ou, sous la forme intégrée : $x = \mathrm{K}\,\mathrm{e}^{b\,\mathrm{e}^{-at}}$ avec $b = \ln \frac{x_0}{\mathrm{K}}$.

Pourtant dans les classes scientifiques, ces fonctions ne feront vraiment leur apparition qu'en 1962, en même temps que la première apparition du mot « analyse » dans les programmes (auparavant, l'étude des fonctions était un chapitre de l'algèbre). Voici la partie de ce programme consacrée aux fonctions logarithmes et exponentielles.

**Programme de 1962**

3° *Fonctions logarithmes*. Définition de la fonction logarithme népérien de $x$ (notation : Log $x$) comme primitive, nulle pour $x = 1$, de la fonction $\frac{1}{x}$ $(x > 0)$. Représentation par l'aire d'un trapèze mixtiligne (repère orthonormé).

Propriété fondamentale : Log $(ab)$ = Log $a$ + Log $b$ et ses conséquences : logarithme népérien d'un produit, d'un quotient, d'une puissance $n$-ième (exposant positif ou négatif), d'une racine $n$-ième.

Limites de Log $x$ lorsque la variable $x$ tend vers l'infini ou vers 0 ; limite de $\frac{\mathrm{Log}\, x}{x}$ lorsque $x$ tend vers l'infini.

Base des logarithmes népériens, définition du nombre e.

Courbe représentative de la fonction logarithme népérien (repère cartésien orthonormé).

La fonction K Log $x$ (K constante non nulle) a les propriétés fondamentales de calcul de la fonction Log $x$. Définition de la fonction logarithme de base $a$ ($a$ constante positive, différente de 1) :

$$\log_a x = \mathrm{K}\ \mathrm{Log}\, x \text{ avec } \mathrm{K}\ \mathrm{Log}\, a = 1.$$

Relation entre $\log_a x$ et $\log_b x$. Courbes représentatives des fonctions logarithmiques.

Logarithmes décimaux.

4° *Fonctions exponentielles*. Définition de la fonction exponentielle de base $a$ comme fonction réciproque de la fonction logarithmique de base $a$ $(a > 0,\ a \neq 1)$. Propriétés fondamentales de la fonction exponentielle de base $a$, représentée provisoirement par le symbole $\exp_a$ :

(9) Voir par exemple l'article de A. Warusfel : *La radioactivité, un mathématicien, un physicien et un probabiliste aux prises avec la radioactivité*, dans cette revue, n° 455, novembre-décembre 2004, pages 881à 892.

(10) Voir Alain Pavé, *Modélisation en biologie et en écologie*, Aléas, 1994, où l'on trouvera de multiples exemples.

$$\exp_a(u) = v \Leftrightarrow u = \log_a v \ (v > 0)\ ;\ \exp_a(0) = 1\ ;\ \exp_a(1) = a\ ;$$

$$\exp_a(u + u') = \exp_a(u) \cdot \exp_a(u')\ ;$$

et leurs conséquences, en particulier :

$$\exp_a(nu) = \left[\exp_a(u)\right]^n,\ \ \exp_a(n) = a^n \ \ (n \text{ entier relatif})\ ;$$

$$\exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p}.$$

Notation $a^x$. Dérivée de $a^x$, de $e^x$. Courbes représentatives des fonctions exponentielles (repère cartésien orthonormé)

*(Pour les fonctions logarithmes et exponentielles, leur étude est strictement limitée à celle des questions indiquées ci-dessus : en particulier, l'étude de fonctions composées faisant intervenir des logarithmes et des exponentielles est en dehors du programme).*

5° *Exposants fractionnaires*. Relation $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ $(a > 0)$.

Propriétés élémentaires de calcul des exposants fractionnaires.

*(L'étude générale de la fonction puissance d'exposant rationnel ou réel est en dehors du programme).*

Ce schéma restera la base de l'enseignement des logarithmes et des exponentielles jusqu'en l'an 2000. Les changements concerneront seulement certains éléments annexes. Ainsi, dans le programme de 1972, l'intégrale est définie au moyen des sommes de Riemann. Corrélativement se développe l'usage de calculatrices électroniques bon marché et un peu plus tard des ordinateurs, rendant totalement caduques et inutiles les nombreuses heures passées par les élèves aux pages de calculs numériques effectuées au moyen des tables de logarithmes tout en ouvrant un nouveau champ d'exploration dans le domaine du calcul numérique.

La formule attribuée à Dieudonné, ramenant l'activité en analyse à celles de « majorer, minorer, encadrer » est désormais rendue possible au Lycée. La possibilité de programmer les calculatrices permet une étude concrète des suites numériques qui prennent une place beaucoup plus importante dans les programmes de lycée et s'élargissent en des activités numériques telles que le calcul approché des zéros de fonctions par des méthodes comme la dichotomie, le point fixe et les suites récurrentes, également les calculs approchés d'intégrales.

Dans le même ordre d'idées, la représentation graphique est considérablement aidée et simplifiée par les calculatrices graphiques.

Tout ceci se passe dans un environnement politique et sociétal, avec comme objectif annoncé d'amener 80 % d'une classe d'âge au niveau du baccalauréat (alors que, rappelons-le, la proportion du nombre de bacheliers reste faible durant toute la première moitié du XX$^{e}$ siècle, même si elle est en progression régulière).

Il faut être bien conscient que ces multiples changements du paysage scolaire n'auront pas seulement des incidences sur les objectifs et les intitulés des programmes. Ils modifient aussi les possibilités pédagogiques : le cas des fonctions logarithmes et exponentielles est particulièrement représentatif de cette évolution, comme le montre le nouveau programme d'août 2001, dont voici un extrait :

| Introduction de la fonction exponentielle | | |
|---|---|---|
| Étude de l'équation $f' = kf$.<br>Théorème : « il existe une unique fonction $f$ dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ ».<br>Relation fonctionnelle caractéristique.<br>Introduction du nombre e. Notation $e^x$.<br>Extension du théorème pour l'équation $f' = kf$. | L'étude de ce problème pourra être motivée par un ou deux exemples, dont celui de la radioactivité traité en physique ou par la recherche des fonctions réelles dérivables $f$ telles que<br>$f(x + y) = f(x) f(y)$.<br>On construira avec la méthode d'Euler introduite en première des représentations graphiques approchées de $f$ dans le cas $k = 1$ ; on comparera divers tracés obtenus avec des pas de plus en plus petits.<br>L'unicité sera démontrée. L'existence sera admise dans un premier temps. Elle sera établie ultérieurement à l'occasion de la quadrature de l'hyperbole.<br>Approximation affine, au voisinage de 0, de $h \mapsto e^h$. | Ce travail se fera très tôt dans l'année car il est central dans le programme de mathématiques et de physique. Il fournit un premier contact avec la notion d'équation différentielle et montre comment étudier une fonction dont on ne connaît pas une formule explicite. La méthode d'Euler fait apparaître une suite géométrique et donne l'idée que l'exponentielle est l'analogue continu de la notion de suite géométrique, ce que l'équation fonctionnelle confirme. |

| Étude des fonctions logarithmes et exponentielles | | |
|---|---|---|
| Fonction logarithme népérien : notation ln.<br>Équation fonctionnelle caractéristique.<br>Dérivée : comportement asymptotique.<br><br>Fonction $x \mapsto a^x$ pour $a > 0$.<br>Comportement asymptotique ; allure des courbes représentatives. | On mentionnera la fonction logarithme décimal, notée log, pour son utilité dans les autres disciplines et son rapport avec l'écriture décimale des nombres.<br>Approximation affine, au voisinage de 0, de $h \mapsto \ln(1 + h)$.<br><br>On positionnera, à l'aide d'un grapheur, les courbes représentatives de $x \mapsto e^x$ et de $x \mapsto \ln x$ par rapport à celles des fonctions $x \mapsto x^n$. | Le mode d'introduction du logarithme n'est pas imposé. On peut, pour l'introduire :<br>– soit partir des propriétés des fonctions exponentielles ;<br>– soit poser le problème des fonctions dérivables sur $\mathbf{R}^{+*}$ telles que<br>$f(x\,y) = f(x) + f(y)$.<br>et admettre l'existence de primitives pour la fonction $x \mapsto 1/x$ ;<br>– soit traiter le logarithme après l'intégration. |

**En conclusion, quels enseignements peut nous donner ce détour historique ?**

Il nous apprend d'abord qu'il n' y a pas de présentation définitive et exemplaire pour un niveau donné. Au contraire, il met en évidence le fait qu'un programme est lié à une situation donnée, qu'il est forcément destiné à changer et que de multiples facteurs contribuent à cette nécessité de changement :

- modifications de l'environnement technique et instrumental,
- modifications des contraintes ou des impératifs de société,
- évolution des choix d'enseignement qui peuvent mettre l'accent plutôt sur des impératifs de performance pratique ou plutôt sur un enseignement théorique.

L'introduction de fonctions nouvelles comme l'exponentielle et les logarithmes dans l'enseignement peut être motivée par la simple nécessité de donner un outil de compréhension et de traitement des données dans une discipline non mathématique caractérisant telle ou telle spécialité. Une connaissance pratique et simplement opératoire de ces fonctions peut alors suffire.

Dans un enseignement à vocation scientifique, par contre, on construira une séquence déductive, qui sans doute devra admettre un certain nombre de propriétés, mais tentera de construire les nouveaux objets à partir des connaissances acquises, dans une démarche logique et organisée selon les règles mathématiques usuelles de clarté et de rigueur. Il se trouve que les fonctions exponentielles et logarithmes présentent une richesse de propriétés telle qu'elle permet de nombreuses approches différentes dont chacune met l'accent sur un caractère spécifique mais qui permet d'en déduire tous les autres.

Il est cependant frappant de constater que leur introduction dans l'enseignement secondaire à dominante mathématique est en concordance avec celle de considérations d'analyse fine comme la continuité ou les propriétés de l'ensemble des réels. Nous avions déjà vu que Bertrand introduisait la notion de continuité seulement au moment où il cherchait à définir la fonction $a^x$ pour $x$ réel quelconque. C'est que la fonction exponentielle, du fait qu'elle étend à des réels quelconques une notation qui au départ n'est définie que pour des rationnels, est la première fonction rencontrée par les élèves à poser problème quant à sa définition et son existence même. C'est le nœud des difficultés pour enseigner ces fonctions, et on ne peut pas y échapper, sauf à l'ignorer complètement.

Il y a donc un premier choix à effectuer dont il faut être conscient, et qui déterminera en profondeur le type d'enseignement scientifique dispensé :

- ou bien l'on adopte un point de vue pragmatique en souhaitant seulement mettre à la disposition des élèves un outil indispensable pour l'apprentissage des sciences et de l'économie et dont on estime qu'il suffit qu'ils en maîtrisent les propriétés numériques et fonctionnelles. Alors il n'y a pas de véritable problème d'enseignement et seul importe pour le choix du point de départ et de la progression utilisée sa facilité d'enseignement et sa cohérence.
- ou bien l'on veut donner aux élèves une véritable formation mathématique qui les initie à l'argumentation et la démonstration, qui les habitue aux considérations d'existence, de cohérence et de rigueur, et les prépare à l'enseignement scientifique universitaire. La question se pose alors

évidemment de la compatibilité de telles exigences avec les horaires et les conditions pratiques de l'enseignement actuel. Cette question ne sera jamais réglée de façon complète et définitive : il y aura toujours une adaptation à effectuer et des choix à faire qui tiennent compte de la situation présente sans pour autant sacrifier l'essentiel, c'est-à-dire une exigence de qualité et de rigueur. « *Le courage*, disait Jaurès[11], *c'est d'aller à l'idéal et de comprendre le réel* ». Encore faut-il avoir les éléments d'appréciation qui permettent ces choix : nous vous proposons donc d'examiner diverses manières d'introduire ces fonctions logarithmes et exponentielles, et cela sans référence explicite à un programme. Celui-ci précisera les connaissances acquises et les propriétés admises. Il s'agit pour le moment seulement de faire l'inventaire des méthodes théoriques tout en essayant de ne pas déborder le cadre de ce qui est possible au lycée.

Nous distinguerons ces diverses manières :
1. selon la fonction par laquelle on souhaite commencer (logarithme ou exponentielle),
2. par l'accent mis soit plutôt sur les aspects fonctionnels, soit plutôt sur les aspects numériques.

Elles n'ont aucune prétention ni à l'exhaustivité, ni à la normalité.

## Méthodes commençant par la fonction exponentielle

**A. Méthode par prolongement : extension progressive de la définition de $a^x$ pour un exposant $x$ réel quelconque**

***Base*** : la définition et les propriétés des fonctions puissances : $x \mapsto x^n$ pour $x$ réel et $n$ entier naturel puis négatif. Mise en évidence d'intervalles maximaux sur lesquels elles sont bijectives.

- Définition des fonctions réciproques : $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ ($x \geq 0$ ; $n$ entier naturel non nul).
- Définition des fonctions : $x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$ pour $\dfrac{p}{q}$ rationnel, par composition de fonctions.

Cela nécessite un travail assez fastidieux de vérification de la conservation des propriétés opératoires des puissances, à commencer par l'égalité $\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}$.

- Dérivabilité des fonctions $x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$, avec les théorèmes de dérivation des fonctions composées et réciproques.
- Définition du réel $x^a$ pour $x > 0$ et $a$ réel.

(11) Jean Jaurès, *Discours à la Jeunesse*, prononcé à la distribution des prix du lycée d'Albi, en 1903.

C'est là que les choses deviennent vraiment difficiles au niveau lycée, car cette définition demande un travail méticuleux et long avec calculs de limites, mise en évidence de continuités, pour le passage des propriétés sur les rationnels aux propriétés identiques sur les réels. Évidemment on peut toujours sauter par dessus les difficultés en demandant d'admettre les résultats souhaités ; mais, si ceux-ci sont trop nombreux et fréquents, on va à l'encontre de l'objectif d'une formation mathématique consistante.

- Définition de la fonction exponentielle de base $a$.
- Dérivabilité de la fonction exponentielle ; elle nécessite un travail d'une complexité comparable à celle de la définition de $x^a$. Les fonctions logarithmes s'en déduisent ensuite aisément par inversion.

On peut trouver un exposé clair et complet de cette méthode dans certains cours de classes préparatoires, comme celui de Abou-Jahoudé et Chevalier, *Cahiers de mathématique, Analyse II : Fonctions de la variable réelle*, O.C.D.L., Paris, 1972.

Georges Lion nous a envoyé une contribution intéressante qui défend cette méthode au niveau lycée, en s'inspirant de l'idée de convexité.

- Ayant défini $t^r$ pour $t > 0$ et $r$ rationnel comme ci-dessus, et remarquant que pour conclure à la dérivabilité de ces fonctions il suffit de se placer en $t = 1$, c'est-à-dire d'étudier le rapport $\dfrac{t^{\frac{1}{q}}-1}{t-1}=\dfrac{\tau-1}{\tau^q-1}=\dfrac{1}{\tau^{q-1}+\cdots+1}$ qui est borné sur [1/2 ; 1], d'où la dérivabilité en $t = 1$, qui permet de déduire la dérivabilité en général : $\dfrac{d}{dt}\left(t^r\right)=rt^{r-1}$.
- Par étude de la variation de la fonction adéquate on déduit pour $r$ rationnel, compris entre 0 et 1, l'inégalité :

$$t^r-1\leq r(t-1) \qquad (*)$$

- Le théorème des limites monotones (« axiome fondateur de **R** », rappelle G. Lion) et les relations ci-dessus permettent de définir $t^x$ pour tout $x$ réel, et ces relations persistent pour les exposants réels. En particulier, en écrivant (*) pour $t$ et $1/t$ on obtient :

$$xt^{x-1}(t-1)\leq t^x-1\leq x(t-1)$$

qui permet de déduire la dérivabilité de $t^x$ en $t = 1$ puis pour tout $t > 0$, et ceci pour tout $x$ réel.
- En prolongeant (*) aux exposants réels pour $a > 0$, $\alpha\in[0,1]$, $u > 0$ et $t = a^u$, on obtient :

$$0\leq a^{\alpha u}-1\leq \alpha(a^u-1) \qquad (**)$$

ce qui permet de démontrer la continuité de la fonction $x\mapsto a^x$ en $x = 0$, puis en tout $x$ réel.

– L'étude de la dérivée fait l'objet d'un traitement original ; s'appuyant sur (**) pour $a > 1$, avec $0 < v < u$, $\alpha \in [0,1]$ tel que $v = \alpha u$, on a

$$0 \leq \frac{a^v - 1}{v} \leq \frac{a^u - 1}{u} \ ;$$

d'où pour $x > 0$ l'existence de

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lambda_a = \lim_{x\to 0} a^{-x} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a^{-x} - 1}{-x}.$$

La fonction $x \mapsto a^x$ est donc dérivable en 0, de dérivée $\lambda_a$, ce qui permet de déduire la dérivabilité pour tout $x$ réel, la dérivée de $a^x$ étant $a^x \cdot \lambda_a$.

Sachant $a > 1$ la fonction $a^x$ n'est pas décroissante et la dérivée $\lambda_a$ est nécessairement strictement positive.

En faisant ci-dessus $u = 1$ on a : $\lambda_a \leq a - 1$.

Les résultats venant d'être établis sont encore vrais pour $a < 1$ avec $\lambda_a < 0$ et pour $a = 1$ avec $\lambda_a = 0$. Pour $a \neq 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est une bijection strictement monotone de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

Le logarithme est alors tout simplement défini par $\log_a(y) = \dfrac{\lambda_y}{\lambda_a}$ et avec des calculs de limites du même genre que ci-dessus on établit que $\log_a(a^x) = x$, ce qui montre que la fonction $\log_a(y)$ est la bijection réciproque de $a^x$.

***Commentaire***. Cette démarche, qui pourrait paraître la plus « naturelle » et la plus directe en ce qu'elle part de l'opération tout à fait élémentaire des puissances, se heurte vite à des difficultés conceptuelles si on veut la mener en toute rigueur. Elle peut être pédagogiquement très intéressante pour des élèves de classes préparatoires ou de première année d'université car elle met en œuvre l'ensemble des propriétés topologiques des réels ainsi que les méthodes spécifiques de l'analyse, autour des notions de continuité et de dérivabilité.

Il y a des raisons plus profondes qui expliquent les difficultés inhérentes à cette méthode et dont l'ignorance peut avoir des conséquences néfastes sur le plan pédagogique. L'idée de prolonger la fonction puissance à des exposants réels quelconques donne l'illusion que l'on reste dans le domaine des opérations arithmétiques et algébriques familières depuis l'école primaire (addition, soustraction, multiplication, division, à peine élargi au lycée par des extractions de racines). Mais en réalité, avec les fonctions exponentielles et logarithmes, on sort totalement de ce cadre pour pénétrer dans celui que l'on appelle dans l'enseignement supérieur le cadre des fonctions transcendantes. Alors certes, ce n'est pas la peine d'effrayer les élèves avec des concepts et des mots aussi élaborés, mais il peut être important d'insister sur la nouveauté radicale de ces fonctions, ne serait-ce que, par exemple, pour mieux les sensibiliser à leur comportement « incomparable » au voisinage de 0 ou de l'infini, et donner un sens plus concret à des expressions contestables mais courantes comme : « *l'exponentielle l'emporte toujours sur la puissance* ». Pédagogiquement il est important pour les élèves de pouvoir relier les nouvelles connaissances aux anciennes, mais il ne faut pas pour autant bloquer leur imagination sur la répétition du même, reproduisant une tentation constante et régulièrement démentie des mathématiciens eux-mêmes à penser à l'intérieur d'un domaine familier : que les racines d'une équation polynôme s'expriment toujours à l'aide de radicaux, que toutes les primitives peuvent s'écrire à l'aide des fonctions usuelles, que toutes les fonctions peuvent se développer sous forme de série entière, etc.

**B. Équation fonctionnelle**

On cherche les fonctions $f$ ($f$ non nulle) définies et continues sur **R** vérifiant

$$f(x+y)=f(x)f(y) \qquad (1)$$

pour tout $x$ et tout $y$ réels.
Cauchy a traité ce problème dans son *Cours d'analyse algébrique* (1821), en montrant successivement que :

1. $f$ prend des valeurs positives,
2. $f(rx) = [f(x)]^r$ pour $r$ rationnel, puis pour $r$ réel au moyen d'une suite de rationnels convergeant vers $r$. C'est le lieu précis et pédagogiquement exemplaire où intervient la continuité.
3. $f(x) = [f(1)]^x = \mathrm{A}^x$ en posant $f(1) = \mathrm{A}$ (A est strictement positif).

Dans cette présentation, Cauchy dispose en fait déjà de la fonction exponentielle, alors que pour nous il faudra poser $\mathrm{A}^x$ comme la limite de $\mathrm{A}^{r_n}$ lorsque la suite de rationnels $r_n$ converge vers $x$.
Il reste alors, comme dans la méthode précédente, à mettre en place la dérivation, puis la définition du logarithme par inversion.

***Commentaire***. Le programme de 2001 ci-dessus propose la recherche des fonctions $f$ vérifiant (1) comme motivation d'une autre méthode (résolution de l'équation différentielle $y' = ky$), mais en ajoutant la contrainte forte supplémentaire pour $f$ d'être dérivable. Cette recherche ne travaille donc pas sur l'équation fonctionnelle (1), mais remplace celle-ci par une équation différentielle. Une telle contrainte, si elle simplifie beaucoup la recherche de $f$, a en revanche le défaut de manquer une occasion unique pour familiariser les élèves avec la notion de fonction continue. Roger Cuppens signale que, cependant, la relation entre (1) et la dérivabilité de $f$ sur **R** peut se réduire à la dérivabilité de $f$ en 0 seulement. En effet, si $f(x+y)=f(x)f(y)$ et $f(0)=1$, alors :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f(x)\times\frac{f(h)-1}{h}=f(x)\times\frac{f(h)-f(0)}{h};$$

ce qui est déjà la démarche de Bertrand évoquée ci-dessus. C'est une remarque tout à fait accessible au niveau lycée, et qui met bien en relief la relation entre l'égalité fonctionnelle et les propriétés de dérivation.

***Remarque.*** Dans ces deux méthodes, une fois mise en place la définition et les propriétés opératoires des fonctions exponentielles, puis celles des logarithmes, on peut déterminer plus simplement la dérivée de l'exponentielle par un procédé du type de celui de Bertrand, basé sur la limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ pour $m$ tendant vers l'infini. Pour déterminer cette limite, on n'est pas obligé de passer par la formule du binôme. On peut étudier les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$, $(n \geq 1)$ définies par $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$, et montrer qu'elles sont adjacentes, par exemple en utilisant l'inégalité de Bernoulli : $(1 + a)^n \geq 1 + na$ (pour $a > -1$). La démonstration de cette inégalité est accessible en Terminale S, par exemple par récurrence sur $n$. On passera ensuite sans difficulté à la limite de $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ pour $x$ infini, par encadrement.

***Commentaire***. L'étude des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ reprend une construction de la fonction exponentielle donnée au Capes externe 2004(12), à partir des suites $u_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ et $v_n(x)=\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}$. Contrairement à la première méthode, l'introduction de ces suites paraît très artificielle. Leur utilité ne s'impose que dans le calcul de la dérivée de $a^x$ tel qu'il est proposé par Bertrand, ou dans la résolution approchée d'une équation différentielle par la méthode d'Euler
Ce caractère artificiel disparaît donc dans l'introduction par l'intermédiaire d'une équation différentielle.

### C. Introduction au moyen de l'équation différentielle $y' = ky$ ; $y(0) = 1$

Elle est développée dans le programme de 2001 reproduit ci-dessus. Robert Rolland, de l'IREM de Marseille, a rédigé dés sa parution une progression complète et détaillée, se focalisant sur ce qui était nouveau : la présentation à partir des équations différentielles, « *dans le* **strict respect** *des termes du programme* ». On en trouvera le texte sur le site de l'IREM de Marseille. Elle avait aussi fait l'objet d'une partie du problème de Capes externe de 2004.

***Commentaire***. Cette méthode, reliée à la résolution approchée par la méthode d'Euler, a l'avantage de bien mettre en relief l'apport des moyen informatiques et calculatoires actuels (voir le traitement de la question « en environnement informatique », par André Stoll à la suite de cet article).

(12) Voir CAPES AGRÉGATION & CAPLP2, Épreuves de Mathématiques, Sujets corrigés, Concours 2004 Externes & Internes ; Brochure APMEP nº 164.

**D. Méthode par « séries entières »**

Je vois d'emblée les protestations de mes collègues en voyant l'expression « séries entières ». Il ne s'agit évidemment pas de faire une étude des séries au lycée. Le terme est commode pour situer la problématique, étant entendu que nous resterons dans le cadre du programme lycéen des suites. La démarche est la suivante qui part elle aussi de la recherche de fonctions égales à leur dérivée.

1. On peut commencer par familiariser les élèves avec des polynômes de degré indéterminé, et dont les coefficients suivent des règles précises, tels $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$ ou les encadrements faciles à mettre en place de façon corrélée comme $x-\frac{x^3}{3!}\leq \sin x \leq x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$ et $1-\frac{x^2}{2!}\leq \cos x\leq 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$, généralisables à des degrés quelconques. Cela attire l'attention sur la dérivée de $\frac{x^n}{n!}$ qui est $\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ et manifeste une certaine conservation de la forme.
2. On fait constater qu'il n'est pas possible qu'une fonction égale à sa dérivée soit un polynôme, à cause du degré, mais qu'on n'en est « pas loin » avec un polynôme de la forme $u_n(x)=\sum_{p=0}^{n}\frac{x^p}{p!}$.
3. On étudie les suites $u_n(x)$ et $v_n(x)=u_n(x)+\frac{x^n}{n!}$ pour $x$ réel positif fixé, que l'on montre être adjacentes et dont la limite commune définit $\exp(x)$. Il faudra ensuite admettre que cette fonction est bien égale à sa dérivée sur l'ensemble des réels positifs.
4. On définit $\exp(-x)$ par $\frac{1}{\exp(x)}$, puis sa dérivée et les propriétés opératoires.

***Commentaire***. Si le début de cette démarche peut ouvrir des horizons intéressants pour les élèves, la définition de $\exp(-x)$ peut paraître tout de même artificielle. On trouvera à la suite de ce texte une présentation de Michel Fréchet détaillant l'ensemble de cette démarche.

## Méthodes commençant par la fonction logarithme

**A. Le logarithme comme primitive de la fonction $x \to \frac{1}{x}$**

C'est la démarche utilisée durant toutes les années 1960 à 2000 (voir plus haut le programme de 1962), avec simplement des variantes quant à la notion d'intégrale utilisée pour justifier l'existence de cette fonction. C'était aussi celle préconisée par Félix Klein dès le début du XX^e^ siècle, et elle est encore utilisée aujourd'hui dans de nombreux Lands allemands comme par exemple le Bade-Wurtemberg ou Hesse, en classe 12 du Gymnasium (équivalent de nos classes terminales).

***Commentaire***. Mise à part l'introduction, cette démarche a l'avantage de pouvoir tout justifier selon une démarche rigoureuse accessible à des élèves de lycée. Son défaut principal est que son introduction repose sur une question assez artificielle, et son existence peu justifiée d'un point de vue théorique. Mais, pour les élèves, la considération d'une aire a l'avantage d'être concrète et leur suffit pour la grande majorité. On peut également regretter l'éloignement de cette démarche avec les propriétés fonctionnelles des exponentielles dont la présence en physique et en de nombreux autres domaines mériterait d'être introduite de façon plus directe et « naturelle ».

**B. Le logarithme par les décimaux**

Cette démarche originale est proposée comme illustration des idées que Henri Lebesgue expose dans son ouvrage « *La mesure des grandeurs* » et présentée dans le numéro de mars 1938[13] de la revue « *L'Enseignement scientifique* ». Son intérêt se trouve dans sa progression très élémentaire, en relation avec l'écriture décimale des nombres réels. La voici, résumée :

1. Soit N un réel strictement positif. Il existe K unique, entier naturel, tel que

$$10^{\mathrm{K}} \leq \mathrm{N} < 10^{\mathrm{K}+1}\,; \qquad (1)$$

le nombre K sera appelé *caractéristique* (du futur logarithme de N noté log N).

2. De (1) on déduit

$$10^{10\mathrm{K}} \leq \mathrm{N}^{10} < 10^{10\mathrm{K}+10}, \qquad (2)$$

laquelle entraîne l'existence d'un unique chiffre $a_1$ ($0 \leq a_1 \leq 9$) vérifiant :

$$10^{10\mathrm{K}+a_1} \leq \mathrm{N}^{10} < 10^{10\mathrm{K}+a_1+1},$$

ou encore d'un entier naturel $\mathrm{K}_1$ vérifiant:

$$10^{\mathrm{K}_1} \leq \mathrm{N}^{10} < 10^{\mathrm{K}_1+1}.$$

Le nombre écrit $\mathrm{K},a_1$ est ainsi la valeur décimale approchée par défaut à 1/10 près de log N ; et l'on peut poursuivre indéfiniment ce procédé, pour obtenir la valeur décimale approchée à $10^{-n}$ près de log N.

3. Mise en place de la propriété fondamentale des logarithmes : les inégalités

$$10^{\mathrm{K}_p} \leq \mathrm{N}^{10^p} < 10^{\mathrm{K}_p+1},$$

$$10^{\mathrm{K}'_p} \leq \mathrm{N}'^{10^p} < 10^{\mathrm{K}'_p+1}$$

nous donnent :

$$10^{\mathrm{K}_p+\mathrm{K}'_p} \leq (\mathrm{N}\,\mathrm{N}')^{10^p} < 10^{\mathrm{K}_p+\mathrm{K}'_p+2},$$

(13) *L'enseignement scientifique*, Organe de l'enseignement des sciences, (Lycées et Collèges, Écoles normales primaires, Écoles primaires supérieures, Écoles techniques).

ce qui montre que la valeur approchée par défaut à $10^{-p}$ près de $\log(\mathrm{NN}')$ est ou bien $\dfrac{\mathrm{K}_p+\mathrm{K}'_p}{10^p}$ ou bien $\dfrac{\mathrm{K}_p+\mathrm{K}'_p+1}{10^p}$ ; elle est donc égale à $10^{-p}$ près à la somme des valeurs approchées, à $10^{-p}$ près, de $\log \mathrm{N}$ et $\log \mathrm{N}'$. Ceci ayant lieu quel que soit $p$, il y a donc identité entre $\log(\mathrm{NN}')$ et $\log \mathrm{N} + \log \mathrm{N}'$, soit :

$$\log(\mathrm{NN}') = \log \mathrm{N} + \log \mathrm{N}'.$$

4. Le reste en découle assez aisément, en particulier la définition et l'étude des propriétés de la fonction log.
5. Par exemple la continuité peut s'établir ainsi, en commençant par la continuité à droite en $x = 1$ ($x > 1$). Soit M entier naturel non nul tel que $\log x < 1/\mathrm{M}$ donc

$$x^{\mathrm{M}} - 1 < 9\ ;$$

si $0 < x < 2$ on a :

$$(x-1)(x^{\mathrm{M}-1}+\ldots+x+1)<9,$$

donc

$$x<\frac{9}{2^{\mathrm{M}}-1}$$

et, si $\mathrm{M} \geq 4$,

$$1<x<\frac{9}{2^{\mathrm{M}}-1}.$$

On aura donc

$$0<\log x'-\log x<\frac{1}{\mathrm{M}}$$

ou

$$0<\log\frac{x'}{x}<\frac{1}{\mathrm{M}}$$

dès que

$$1<\frac{x'}{x}<1+\frac{9}{2^{\mathrm{M}}-1},$$

soit

$$0<x'-x<\frac{9}{2^{\mathrm{M}}-1}.$$

6. La fonction exponentielle de base 10 peut se définir alors par inversion, et celle de base $a$ par la relation formelle $\log(a^x) = x \log a$. Mais la dérivation se heurte aux mêmes difficultés évoquées plus haut dans les méthodes A et B.

***Commentaire***. Cette méthode avait surtout un intérêt à l'époque des calculs par tables de logarithmes, car elle préparait bien à cet usage là. Elle peut se généraliser à l'écriture des nombres dans une base quelconque. Elle reste instructive par les relations qu'elle met en évidence entre les logarithmes et l'écriture des nombres dans une base donnée.

Au total, et d'un point de vue simplement mathématique, la variété des manières d'introduire cet ensemble de fonctions peut révéler un domaine nouveau et très riche pour un élève curieux de mathématiques. Il y rencontre pour la première fois de façon aussi nette

- Le problème de l'existence et de la construction d'un objet abstrait qui n'est pas donné immédiatement.
- La déduction argumentée de tout un ensemble de propriétés non évidentes, laquelle met en jeu les concepts nouvellement acquis ou à acquérir de dérivabilité et de continuité.
- Une intuition plus forte de ce qui caractérise le continu de l'ensemble des réels comparé à celui des rationnels et de la densité du second par rapport au premier.

Le dernier point est peut-être le plus significatif dans cette affaire. Il renvoie à l'histoire même de l'invention des logarithmes par Neper au début du XVII^e siècle. La propriété qui est à la base de cette invention, à savoir $a^n \cdot a^p = a^{n+p}$, était connue depuis Archimède. Il s'est écoulé près de 20 siècles avant l'invention des logarithmes. Parmi les multiples raisons qui expliquent cette invention au XVII^e siècle et pas avant, il en est deux, fondamentales :

– la disponibilité, à la fin du XVI^e siècle d'une écriture unique, opérationnelle et performante pour « tous » les nombres : le système décimal illimité et à virgule (en réalité un point) ;
– la possibilité de penser le continu numérique au moyen du mouvement d'un point sur une droite, le point étant repéré par son écriture décimale.

Neper construit ses tables en associant à la suite (arithmétique) des entiers une suite géométrique de puissances. Mais cela ne suffit pas et de loin. Pour inventer les logarithmes, il fallait inverser le procédé de construction. Chez tous les calculateurs précédant Neper, la démarche est : pour $n$ donné que vaut $A\left(1 \pm \frac{1}{10^k}\right)^n$, A coefficient fixé, en général de la forme $10^p$. Or pour construire une table de logarithmes complète et utilisable, il faut pouvoir répondre à la question inverse : pour un nombre X donné, quel est le $n$ tel que $X = A\left(1 \pm \frac{1}{10^k}\right)^n$ ? C'est tout le problème des logarithmes et des exponentielles et toute sa difficulté.

**Conclusion**

Dans sa contribution déjà signalée, Georges Lion énonce trois critères *devant être respectés lors de l'introduction d'une notion nouvelle dans le cursus mathématique au lycée :*

1) *La cohérence et la continuité par rapport aux connaissances et aux méthodes acquises antérieurement.*
2) *L'économie en matière de résultats nécessairement admis en vue de cette introduction.*
3) *La simplicité de la mise en œuvre de cette notion.*

Le survol rapide de diverses manières d'introduire les fonctions logarithmes et exponentielles nous montre combien il est difficile de respecter simultanément ces trois critères et qu'il n' y a pas de méthode simple et facile, parce qu'elles mettent en jeu pour la première fois de façon non immédiate la topologie des réels et les concepts subtils de continuité et de dérivabilité. Chacune présente un certain nombre de résultats à admettre au niveau du lycée. Toutes offrent des études intéressantes pour comprendre les diverses techniques courantes dans l'enseignement de l'analyse. En réalité, c'est par leur étude que s'ouvre véritablement cet enseignement. On l'a bien vu dans le fait qu'historiquement l'étude de l'analyse coïncide avec l'introduction de ces fonctions. Auparavant on se concentrait pour l'étude des fonctions, soit aux aspects purement calculatoires, soit aux aspects purement algébriques (pour les fonctions algébriques) ou géométriques (pour les fonctions circulaires), et beaucoup de temps était consacré à mettre en place l'allure graphique de ces fonctions.

Nous pensons que ces fonctions doivent aussi faire l'objet d'un enseignement dans les classes terminales non scientifiques, ne serait-ce qu'à cause de leur importance dans de nombreux domaines du monde contemporain : le caractère exponentiel d'un phénomène fait partie de ces propriétés fréquemment invoquées en démographie, en économie. Les différentes manières d'introduire la fonction exponentielle détaillées plus haut peuvent donner de nombreuses idées d'activités numériques et graphiques pour en décrire les caractères sans pour autant rentrer dans les définitions et encore moins les démonstrations techniques.

Comme dit en introduction, cet article n'a pas pour objectif de répondre à la question posée en titre. Il veut seulement lancer le débat : à chacun d'entre vous **qui avez expérimenté dans vos classes** une ou plusieurs manières d'introduire ces fonctions, de nous faire part de votre expérience, de vos propres méthodes et idées. Comme ces fonctions sont également très utilisées par nos collègues de physique, SVT ou économie, leur point de vue sur leur présentation, par exemple dans un travail interdisciplinaire, nous intéresserait également beaucoup.

Afin d'amorcer concrètement cet échange, voici dans les pages suivantes le traitement effectué par André Stoll au lycée Couffignal de Strasbourg, qui a le privilège d'enseigner en environnement informatique et qui développe la méthode C, et celui de Michel Fréchet qui développe la méthode D, toutes deux commençant par la fonction exponentielle.