Équation différentielle $y' = y$ et fonction exponentielle

Michel Fréchet

1. Introduction

Les nouveaux programmes de terminales S conseillent d'introduire la fonction exponentielle avant la fonction logarithme.

Nous allons montrer que l'on peut *presque* construire cette fonction en utilisant les notions du programme de cette classe.

On travaille évidemment sur des séries entières et il n'est pas question d'en faire la théorie en terminale. Cependant, admettre certains résultats peut permettre une certaine compréhension globale de l'exponentielle.

Jean Dieudonné écrivait, dans la préface de son cours à l'usage des étudiants de faculté :

> *. . . , les physiciens raillent souvent le mathématicien pur de vouloir toujours tout démontrer et de « couper les cheveux en quatre » pour établir des résultats « évidents » ; ils n'ont pas toujours tort, et un étudiant débutant a intérêt à admettre des résultats plausibles sans s'encombrer l'esprit de démonstrations subtiles, pour réserver ses efforts à l'assimilation de notions nouvelles et « non évidentes ».*

C'est ce que j'ai essayé de faire avec ma classe de terminale S cette année.

2. Recherche de fonctions égales à leur dérivée

Rechercher une fonction égale à sa dérivée revient à résoudre **l'équation différentielle** : $f' = f$.

Une fonction vérifiant cette équation différentielle ne peut être un polynôme, car le polynôme dérivé d'un polynôme de degré n est de degré $n - 1$. Nous n'avons, jusque là, rencontré aucune fonction rationnelle, ni fonction contenant des radicaux vérifiant $f' = f$. Aucune fonction trigonométrique ne convient non plus.

Il nous faut chercher ailleurs.

2.1. Famille de fonctions

On considère la famille de fonctions suivantes :

Pour tout n appartenant à $\mathbf{N}$ et pour tout $x \geq 0$, on définit la fonction :

$$x \to u_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

On rappelle que $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ et $0! = 1$.

2.2 Dérivée des fonctions u_n

$$u_n'(x)=\sum_{p=1}^{n}\frac{px^{p-1}}{p!}=0+1+\frac{2x}{1\times 2}+\frac{3x^2}{1\times 2\times 3}+\frac{4x^3}{1\times 2\times 3\times 4}+\cdots+\frac{nx^{n-1}}{n!}$$
$$=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\times 2}+\frac{x^3}{1\times 2\times 3}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{p=0}^{n-1}\frac{x^p}{p!}$$
$$=u_{n-1}(x).$$

L'idée est de considérer un polynôme *infini*. Dans ce cas, on obtiendra une *fonction* égale à sa dérivée.

Pour cela, il faut étudier la suite (u_n) afin de montrer qu'elle est convergente et donc trouver sa limite, pour x fixé. Nous nous limiterons aux x réels positifs.

3. Étude de suites

Si $x = 0$, pour tout n naturel, $u_n(0) = 1$.

On considère maintenant les deux suites $(u_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ définies, pour tout x réel positif strictement **fixé**, par : $u_n(x)=\sum_{p=0}^{n}\frac{x^p}{p!}$ et $v_n(x)=u_n(x)+\frac{x^n}{n!}$.

PROPOSITION 3.1. Les suites $(u_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes.

Démonstration. $v_n(x)-u_n(x)=\frac{x^n}{n!}>0$, car $x > 0$, donc $u_n(x) < v_n(x)$.

- $(u_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante, c'est-à-dire : $\forall n,\ n\in\mathbf{N},\ u_{n+1}(x)-u_n(x)>0$:

$$\forall n,\ n\in\mathbf{N},\ u_{n+1}(x)-u_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}>0.$$

- $(v_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement décroissante à partir de $n > 2x - 1$, c'est-à-dire :
$$\forall n,\ n>2x-1,\ v_{n+1}(x)-v_n(x)<0 :$$

$$\forall n,\ n>2x-1,\ v_{n+1}(x)-v_n(x)=u_{n+1}(x)-u_n(x)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{x^n}{n!}$$
$$=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{x^n}{n!}=\frac{x^n\left(2x-(n+1)\right)}{(n+1)!}<0.$$

- Leur différence tend vers 0 :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(v_n(x)-u_n(x)\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^n}{n!}=0.$$

Ces deux suites possèdent donc une limite commune.

Ainsi, pour tout réel x positif, il existe un réel, que l'on notera exp(x), limite de la suite u_n(x).

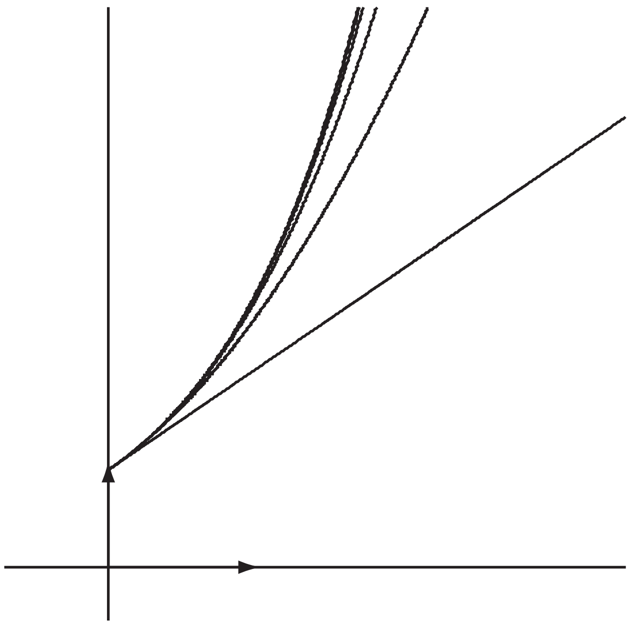
On peut donc considérer la fonction : $x \to \exp(x)$.

Nous pouvons ainsi écrire :

$$\boxed{\exp(0) = 1 \text{ et } \exp(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{p!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots}$$

On admet que toutes les propriétés vraies pour les sommes finies sont valables sur les sommes infinies rencontrées dans ce chapitre, ce qui est loin d'être vrai dans le cas général !

4 Construction de la représentation de la fonction exp par approximation sur R+



Constructions successives des courbes de $u_1(x) = 1 + x$, de $u_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$,

de $u_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$, de $u_4(x)$ et de $u_5(x)$.

5. Dérivée de exp

Proposition 5.1. La fonction exp est égale à sa dérivée sur R+.

Démonstration. Les suites $(u_n(x))$ et $(u_{n-1}(x))$ ont même limite. Nous admettrons donc que, comme $u_n'(x) = u_{n-1}(x)$, le passage à la limite permet de dire que :

$$(\exp(x))' = \exp(x).$$

6. Prolongement sur $\mathbf{R}^{-*}$

DÉFINITION. Pour tout $x < 0$, on définit $\exp(x)$ par :

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}.$$

THÉORÈME 6.1. Pour tout x strictement négatif : $(\exp(x))' = \exp(x)$.
Démonstration.

$$(\exp(x))' = \left(\frac{1}{\exp(-x)}\right)' = -\frac{(\exp(-x))'}{(\exp(-x))^2} = -\frac{-\exp(-x)}{(\exp(-x))^2} = \frac{1}{(\exp(-x))} = \exp(x).$$

Remarque : On utilise la dérivée de fonctions composées.

7. Propriétés de la fonction exp

PROPOSITION 7.1. $\forall a, a \in \mathbf{R}, \forall b, b \in \mathbf{R}, \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.
Démonstration. Pour tout b réel, on dérive, sur $\mathbf{R}$, la fonction :

$$f(x) = \frac{\exp(x+b)}{\exp(x) \times \exp(b)}.$$

$$f'(x) = \frac{\exp(x+b) \times \left(\exp(x) \times \exp(b)\right) - \exp(x+b) \times \exp(x) \times \exp(b)}{\left(\exp(x) \times \exp(b)\right)^2} = 0.$$

La fonction f est donc constante, donc égale pour tout x réel à sa valeur en 0. Or $f(0) = 1$, donc, pour tout x réel,

$$\frac{\exp(x+b)}{\exp(x) \times \exp(b)} = 1 \Leftrightarrow \exp(x+b) = \exp(x) \times \exp(b).$$

On fait $x = a$ et on obtient le résultat.

PROPOSITION 7.2. $\exp(1)$ n'est pas un nombre rationnel.
Démonstration par l'absurde. $\exp(1)$ est la limite commune aux deux suites adjacentes $(u_n(1))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n(1))_{n \in \mathbf{N}}$.
Supposons que ***la limite*** $\exp(1)$ ***soit un nombre rationnel***, c'est-à-dire qu'il existe deux nombres entiers positifs p et q tels que $\exp(1) = \dfrac{p}{q}$.

On pose N le numérateur de $u_q(1)$; c'est un nombre entier car somme et produit de nombres entiers.

$$u_q(1)=\frac{\mathrm{N}}{q!}<\frac{p}{q}<\frac{\mathrm{N}}{q!}+\frac{1}{q!}=\frac{\mathrm{N}+1}{q!}=v_q(1).$$

On multiplie ces inégalités par $q!$ et on obtient :

$$\mathrm{N}<q!\times\frac{p}{q}=(q-1)!\times p<\mathrm{N}+1.$$

Les inégalités sont au sens strict. $(q-1)!\times p$ est donc un nombre entier compris strictement entre deux entiers consécutifs, ce qui est impossible. Donc l'hypothèse ***la limite*** exp(1) ***est un nombre rationnel*** est fausse. Le contraire est donc correct : ***la limite*** exp(1) ***n'est pas un nombre rationnel***.

ON NOTE e LE NOMBRE exp(1) EN SOUVENIR DU MATHÉMATICIEN SUISSE EULER.

$$\boxed{\mathrm{e}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\approx 2{,}718\,281\,828\,459\,045.}$$

PROPOSITION 7.3. Pour tout n appartenant à $\mathbf{N}$, $\exp(n)=\mathrm{e}^n$.
Démonstration par récurrence :

- $\exp(2)=\exp(1+1)=\exp(1)\times\exp(1)=\mathrm{e}\times\mathrm{e}=\mathrm{e}^2$.
- Supposons que $\exp(n)=\mathrm{e}^n$; calculons $\exp(n+1)$:

$$\exp(n+1)=\exp(n)\times\exp(1)=\mathrm{e}^n\times\mathrm{e}=\mathrm{e}^{n+1}.$$

PROPOSITION 7.4. $\exp\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\mathrm{e}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

Démonstration.

$$\exp\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\exp(1)=\mathrm{e}=\exp\left(\frac{1}{2}\right)\times\exp\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\exp\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2\Rightarrow\exp\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\mathrm{e}}.$$

DÉFINITION (NOTATION). Pour tout x appartenant à $\mathbf{R}$, on notera $\exp(x)=\mathrm{e}^x$. Par construction de chaque terme, $\mathrm{e}^x>0$ sur $\mathbf{R}$.

8. Étude de la fonction exponentielle

Domaine de définition

La fonction est définie pour tout x de $\mathbf{R}$.
De plus, $\forall x, x\in\mathbf{R}, \mathrm{e}^x>0$.

Dérivée

$$\boxed{\forall x,\ x\in\mathbf{R},\ f'(x)=\mathrm{e}^x>0.}$$

Sens de variations

La fonction est strictement croissante sur **R**.

$$\boxed{\forall x, x \in \mathbf{R}, \forall x', x' \in \mathbf{R}, x < x' \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x} < \mathrm{e}^{x'}.}$$

Limites

Proposition 8.1.

$$\forall x, x \in \mathbf{R}^{+*}, \mathrm{e}^{x} > x.$$

Démonstration. La suite $(u_n(x))$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}^{+*}$, sa limite est donc strictement supérieure à $u_1(x) = 1 + x$:

$$\forall x, x \in \mathbf{R}^{+*}, \mathrm{e}^{x} > 1 + x > x.$$

Proposition 8.2. La fonction exp tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Démonstration. On a $x < \mathrm{e}^x$ et lorsque $x \to +\infty$, d'après un corollaire du théorème des gendarmes, $\mathrm{e}^{x} \to +\infty$.

Proposition 8.3. La fonction exp tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$.

Démonstration. Par définition, $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}$; ainsi lorsque $x \to -\infty$, $-x \to +\infty$ et $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}} \to 0$.

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la représentation graphique de la fonction exponentielle en $-\infty$.

Proposition 8.4. La fonction exponentielle est bijective de **R** sur $\mathbf{R}^{+*}$.

$$\boxed{\forall a, a \in \mathbf{R}, \forall b, b \in \mathbf{R}, \mathrm{e}^{a} = \mathrm{e}^{b} \Leftrightarrow a = b.}$$

Démonstration. La fonction est continue et strictement croissante de **R** sur $\mathbf{R}^{+*}$.

Équation de la tangente en $x = 0$

Comme $\mathrm{e}^0 = 1$, l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est : $y = x + 1$.

Croissance comparée

Proposition 8.5.

$$\boxed{\forall n, n \in \mathbf{N}, \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x^{n}} = +\infty.}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} &\forall n, n \in \mathbf{N}, \mathrm{e}^{x} > u_{n+1}(x) \\ &\Rightarrow \frac{\mathrm{e}^{x}}{x^{n}} > \frac{u_{n+1}(x)}{x^{n}} = \frac{1}{x^{n}} + \frac{1}{2x^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{x}{(n+1)!} > \frac{x}{(n+1)!} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty. \end{aligned}$$

9. Commentaires

9.1. Ce qui précède

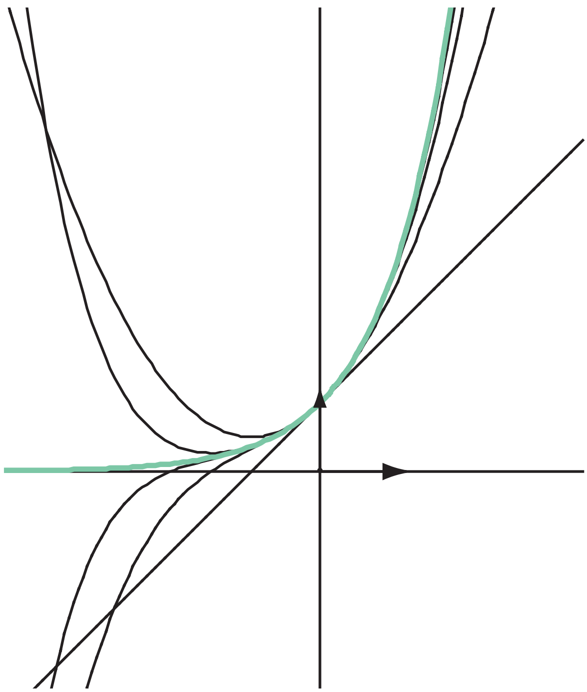
Avant ce cours, les élèves avaient travaillé sur les suites. Ils ont rencontré notamment, lors de l'étude des suites adjacentes, les deux suites $(u_n(1))$ et $(v_n(1))$ étudiées dans le chapitre 3. Le fait de remettre dans ce cours la démonstration déjà connue de l'irrationalité de e par cette méthode permet de faire des révisions et surtout d'insister sur l'importance de ce nombre.

9.2. Quelques remarques

Il n'est pas question dans ce cours de faire l'étude complète de l'équation différentielle $y' = y$. Ce cours sera fait plus tard.

On aurait certes pu étudier les suites $(u_n(x))$ pour $x < 0$ en démontrant que les suites extraites $(u_{2n}(x))$ et $(u_{2n+1}(x))$ sont adjacentes, pour $n > |x|$. J'ai choisi de n'étudier $(u_n(x))$ que sur $\mathbf{R}^+$ et ensuite de définir la fonction exponentielle sur $\mathbf{R}^-$ en passant à l'inverse pour plusieurs raisons :

– Si les représentations graphiques de u_1, u_2, u_3, etc., se rapprochent très rapidement de la représentation graphique de la fonction exp sur $\mathbf{R}^+$, il n'en est pas de même sur $\mathbf{R}^-$:



Constructions successives des courbes de u_1, de u_2, de u_3, de u_4 et de u_5 sur **R**.

– De cette façon, on fait travailler sur la notion de dérivée de fonctions composées.