L'application logistique : une suite au comportement chaotique

Emmanuel Moreau

Cet article est la suite de réflexions menées avec un groupe d'élèves qui avait choisi en TPE de réfléchir sur le thème *hasard et chaos*. Il est divisé en deux parties : d'une part ce qui peut être l'objet de travaux avec une classe de terminale S (pour peu que l'on dispose d'un logiciel de calcul formel), d'autre part les prolongements que l'on peut étudier au niveau du DEUG ou d'une classe préparatoire … ou explorer pour son plaisir personnel.

Première partie : étude élémentaire

1.1. L'application logistique

On trouve souvent, dans les articles de vulgarisation traitant du chaos, l'exemple de suites définies à partir de ce qui est appelé, selon les ouvrages, application quadratique ou application logistique. La situation est la suivante : on considère un réel x quelconque compris entre 0 et 1 et on observe la suite des itérés par la fonction $f(x) = 4\mu x(1-x)$ avec $0 \le \mu \le 1$, ce qui revient à étudier la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [0;1], \\ u_{n+1} = 4\mu \times u_n(1-u_n). \end{cases}$$

On peut facilement vérifier que $u_n \in [0;1]$ pour tout n si $0 \le \mu \le 1$.

Voici un rapide panorama des différentes curiosités que l'on peut observer avec cette famille de suites :

– si $\mu < 0,75$ la suite converge vers le point fixe stable quel que soit u_0.

– si $0,75 \le \mu < 0,862\,37\ldots$, le point fixe devient instable, et il apparaît un attracteur de période 2 stable (autrement dit : la même pour toute valeur de u_0 qui n'est pas un point fixe).

– à partir de $\mu = \dfrac{1+\sqrt{6}}{4} = 0,862\,37\ldots$, cet attracteur de période 2 devient instable, c'est-à-dire que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont chacune une limite dans le seul cas où elles sont constantes à partir d'un certain rang ; simultanément apparaît un attracteur de période 4 stable. Cette situation reste valable jusqu'à une valeur $\mu = 0,886\,02\ldots$ où l'on observe à nouveau un doublement de période de l'attracteur stable…

– et ceci jusqu'à une valeur $\mu_\infty = 0,892\,486\,418\ldots$

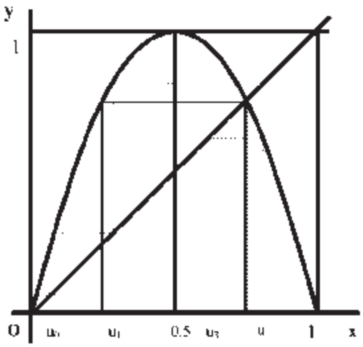
Ces phénomènes peuvent être relativement bien observés avec des élèves si l'on a un logiciel de calcul formel à disposition. Mais je ne m'y attarderai pas dans la mesure où ce sujet est assez abondamment traité.

La question à laquelle est consacré cet article est la suivante : pour les valeurs de μ comprises entre μ_∞ et 1, le comportement de la suite est souvent qualifié de « chaotique », sans que l'on trouve jamais l'esquisse d'une définition de ce terme. Doit-on comprendre qu'il règne un bazar indescriptible ? Ou bien peut-on émettre quelques assertions mathématiques précises relativement à ce désordre ?

C'est à quoi je tenterai de répondre dans cet article, en me consacrant exclusivement au cas $\mu = 1$.

1.2. Sensibilité aux conditions initiales

On étudiera donc uniquement désormais la suite des itérés d'un nombre x, compris entre 0 et 1, par la fonction $f(x) = 4x(1-x)$.



Cette suite est certainement l'un des objets mathématiques les plus simples à propos desquels on peut parler de chaos. Mettons tout de suite en évidence un caractère invariablement associé au chaos, qui est ce qui a donné son nom à ce paragraphe :

Effectuons le calcul des premiers termes de la suite pour des valeurs différentes, mais proches de u_0. Les calculs ont été effectués avec 30 décimales (nous montrerons plus loin que ceci suffit largement pour obtenir ici des résultats valides) et sont résumés dans le tableau ci-dessous.

$u_0 = 0.123456789$	$u_0 = 0.123456788$
$u_{21} = 0.0517..$	$u_{21} = 0.0530..$
$u_{25} = 0.252..$	$u_{25} = 0.298..$
$u_{26} = 0.75..$	$u_{26} = 0.83..$
$u_{28} = 0.77..$	$u_{28} = 0.99..$
$u_{29} = 0.70..$	$u_{29} = 0.03..$

On voit sur cet exemple que si l'on dispose d'une précision même de un milliardième pour u_0 on ne peut avoir aucune certitude concernant la valeur de u_{30}.

Si un phénomène physique est modélisé par une suite de ce type, cela a des conséquences importantes puisque cette sensibilité aux conditions initiales a pour corollaire l'imprédictibilité : en effet, les instruments de mesure étant par nature d'une précision limitée, u_0 ne peut être connu parfaitement. Pour reprendre la fameuse phrase de Lorenz, si les ailes d'un papillon bousculent les dernières décimales, la suite des événements s'en trouve radicalement modifiée…

On peut également faire constater expérimentalement aux élèves que si les valeurs de u_0 diffèrent d'un milliardième, quelles que soient ces valeurs, alors l'imprécision totale apparaîtra généralement au voisinage du rang $n = 30$. Ce phénomène est lié à l'*exposant de Liapounov*, dont nous parlerons au § 2.4.

Enfin, ceci doit nous servir de mise en garde : si nous programmons cette suite, même en gérant de très nombreuses décimales, nous n'aurons aucune garantie pour les valeurs de u_n obtenues lorsque n est grand.

1.3. Une formule explicite.

C'est là un résultat plutôt inattendu pour une suite dont la caractéristique semble de prime abord l'absence de régularité : il existe une formule explicite donnant le terme général ! Si ce résultat est surprenant, il n'est toutefois pas difficile à prouver :

Considérons la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [0;1], \\ u_{n+1} = 4u_n(1-u_n). \end{cases}$$

Alors $1 - 2u_0$ est dans [-1 ; 1]. Il existe donc dans $[0;\pi]$ un α unique tel que

$$\cos\alpha = 1 - 2u_0$$

ou, ce qui revient au même,

$$u_0 = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha).$$

Supposons qu'on ait

$$u_n = \frac{1}{2}(1-\cos\beta).$$

On en tire

$$u_{n+1} = 4u_n(1-u_n) = (1-\cos\beta)(1+\cos\beta) = \sin^2\beta$$

et donc

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(1-\cos 2\beta).$$

Une récurrence immédiate donne

$$u_n = \frac{1}{2}(1 - \cos 2^n \alpha).$$

Remarque 1 : Si l'on reprend les notations du § 1.1, le cas $\mu = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire celui de la suite définie par $v_{n+1} = 2v_n(1 - v_n)$, permet aussi un calcul explicite du terme général en fonction de n, car si l'on pose $v_n = \frac{1}{2} - h_n$, il vient $h_{n+1} = 2h_n^2$. On arrive par récurrence à

$$h_n = 2^{2^n - 1} h_0^{2^n}.$$

Remarque 2 : Les problèmes concernant l'application logistique restent ouverts, qu'on en juge :

Concernant la suite (u_n) générée par l'application logistique générale $f(x) = rx(1 - x)$ avec $0 < r \leq 4$, Wolfram a postulé en 2002 que toute formule explicite doit être de la forme

$$u_n = \frac{1}{2}\left(1 - g\left(q^n g^{-1}(1 - 2u_0)\right)\right).$$

La même année, Germundsson a prouvé que des solutions de cette forme n'existent que pour les deux cas ($r = 2$ et $r = 4$) que nous avons vus.

1.4. Valeurs pour lesquelles la suite est périodique à partir d'un certain rang

Nous allons aborder ce problème en utilisant la formule explicite mentionnée au § 1.3.

Soit $E = \{u_n, n \in \mathbf{N}\}$. *Dans quels cas* E *est-il fini ?*

Si E est fini, ses éléments ne peuvent être tous distincts, il existe donc n entier et p entier non nul tels que $u_{n+p} = u_n$.

Réciproquement, s'il existe une relation de la forme $u_{n+p} = u_n$, alors la suite est périodique de période p à partir d'un certain rang r (qui est le premier indice vérifiant $u_{r+p} = u_r$), et donc E est fini.

E est donc fini si et seulement si la suite est périodique à partir d'un certain rang.

Nous appellerons *valeurs particulières* les valeurs de u_0 associée à ce type de comportement.

Nous pouvons maintenant préciser ces *valeurs particulières* :

$$
\begin{aligned}
u_{n+p} = u_n &\Leftrightarrow \cos\left(2^n a\right) = \cos\left(2^{n+p} a\right) \quad \text{avec} \quad a = \cos^{-1}\left(1-2u_0\right)\\
&\Leftrightarrow 2^{n+p} a = 2^n a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2^{n+p} a = -2^n a + 2k\pi\\
&\Leftrightarrow a = \frac{1}{2^n}\frac{2k\pi}{2^p-1} \quad \text{ou} \quad a = \frac{1}{2^n}\frac{2k\pi}{2^p+1}.
\end{aligned}
$$

Ainsi :

$$u_0 = \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{1}{2^n}\frac{2k\pi}{2^p-1}\right)\right) \quad \text{pour} \quad 0 \le k \le 2^{p-1}-1$$

ou

$$u_0 = \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{1}{2^n}\frac{2k\pi}{2^p+1}\right)\right) \quad \text{pour} \quad 0 \le k \le 2^{p-1}.$$

Observons que, pour ces valeurs de u_0, p n'est pas forcément la plus petite période possible ; celle-ci peut être un diviseur de p.

Exemple : On a ainsi, par exemple, une suite de période 4 dès le rang 0 pour

$$u_0 = \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2k\pi}{15}\right) \quad \text{avec} \quad 0 \le k \le 7$$

et

$$u_0 = \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2k\pi}{17}\right) \quad \text{avec} \quad 1 \le k \le 8.$$

Les valeurs du second type donnent bien 4 comme plus petite période, mais parmi les valeurs du premier type, on obtient la période 1 pour $k = 0$ et la période 2 pour $k = 3$, 5 et 6.

Nous caractériserons dans la seconde partie l'ensemble des « valeurs particulières ».

1.5. Combien de décimales ?

Nous allons essayer de résoudre le problème suivant : *avec combien de décimales faut-il connaître u_0 pour avoir u_n à une précision souhaitée* 10^{-s} ?

Donnons à u_0 un « petit » accroissement δu_0, il en résulte pour u_n un accroissement δu_n, qu'on se propose ici de majorer. On tentera dans le § 2.4. de l'estimer, ce qui pose des problèmes beaucoup plus délicats.

Première majoration

Nous avons $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = 4x(1-x)$; la dérivée $f'(x) = 4(1-2x)$ varie de 4 à –4 lorsque x varie de 0 à 1. En appliquant le théorème des accroissements finis, il vient :

$$|\delta u_{n+1}| \leq 4|\delta u_n|$$

pour tout n, d'où :

$$|\delta u_n| \leq 4^n |\delta u_0|.$$

Pour avoir $|\delta u_n| \leq 10^{-s}$, il suffit de prendre $|\delta u_0| \leq 4^{-n}10^{-s}$, donc de connaître u_0 à 10^{-q} près, avec $q \geq s + n \log 4$.

Exemple 1. Dans le tableau de calculs du § 1.2, on veut u_{29} à 10^{-2} près. Il nous suffit de prendre $q \geq 2 + 29 \times 0{,}602\,06$, soit $q \geq 20$. Les calculs ayant été faits avec 30 décimales, la précision souhaitée est très largement atteinte.

Exemple 2. Si maintenant on veut avoir les termes à 10^{-2} près jusqu'à u_{1000}, il « suffira » de prendre $q \geq 2 + 1000 \times 0{,}602\,06$, soit … 605 décimales.

Seconde majoration

Heureusement, la majoration en 4^n peut être améliorée si l'on se sert de l'expression explicite trouvée au § 3 :

$$u_n = \frac{1}{2}(1 - \cos 2^n \alpha),$$

avec

$$u_0 = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha).$$

On reprend les notations précédentes : à un accroissement δu_0 de u_0, correspondent pour α un accroissement $\delta\alpha$ et pour u_n un accroissement δu_n. De $\cos\alpha = 1 - 2u_0$, on tire $\sin\alpha \cdot d\alpha \approx 2\delta u_0$, égalité approchée d'excellente qualité si δu_0 est petit.

Et comme $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = 2\sqrt{u_0(1 - u_0)}$, il vient

$$\delta\alpha \approx \frac{\delta u_0}{\sqrt{u_0(1 - u_0)}}.$$

Pour avoir δu_n en fonction de $\delta\alpha$, on utilise :

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\frac{p+q}{2} \sin\frac{p-q}{2}.$$

$$\delta u_n = \frac{1}{2}\left(\cos(2^n\alpha) - \cos(2^n(\alpha + \delta\alpha)\right) = \sin(2^{n-1}\delta\alpha)\sin\left(2^n\left(\alpha + \frac{\delta\alpha}{2}\right)\right) \qquad (1)$$

De la formule (1) on tire un premier résultat :

$$|\delta u_n| \leq 2^{n-1} |\delta \alpha|,$$

donc :

$$|\delta u_n| \leq 2^{n-1} \frac{|\delta u_0|}{\sqrt{u_0(1-u_0)}}. \qquad (2)$$

On obtient donc une majoration de l'écart au rang n qui est nettement meilleure que la précédente, mais qui n'est pas valable si u_0 vaut 0 ou 1 et qui est d'autant moins bonne que u_0 est plus proche de l'une de ces deux bornes.

Retour sur l'exemple 2. Limitons-nous à $0,1 \leq u_0 \leq 0,9$; alors

$$u_0(1-u_0) \geq 0,09$$

et la formule (2) nous donne

$$|\delta u_n| \leq 2^n \frac{|\delta u_0|}{0,3}.$$

Si l'on veut être sûr d'avoir u_{1000} à 10^{-2} près, il suffit d'imposer

$$|\delta u_0| \leq 2^{-1000} \times 10^{-2} \times 0,3,$$

ce qui sera réalisé si l'on connaît u_0 à 10^{-q} près, avec

$$q \geq 1000 \log 2 + 2 - \log 0,3.$$

On pourra donc se contenter de 304 décimales au lieu de 605.

Nous verrons dans la seconde partie (§ 2.4) qu'on ne peut malheureusement pas remplacer dans (2) 2^n par un facteur k^n avec $k < 2$.