Favoriser l'activité mathématique dans la classe : ouvrir les problèmes

Serge Betton(*) & Sylvie Coppé(**)

Résumé : Nous proposons une réflexion sur la façon actuelle de poser les problèmes en mathématiques dans l'enseignement secondaire. Nous montrons qu'il existe une tendance actuelle à découper les problèmes en de multiples questions guidées qui ne favorise pas l'activité mathématique et nous donnons quelques exemples visant à enrichir les problèmes en posant des questions plus ouvertes et en jouant sur les changements de cadres.

Dans cet article, nous souhaitons proposer une réflexion sur la façon actuelle de poser les problèmes en mathématiques dans l'enseignement secondaire. Notre propos est fondé sur notre expérience de formateurs à la fois en formation initiale et continue, sur notre pratique de classe et sur une recherche concernant l'enseignement de l'algèbre au collège et en seconde (voir des outils pour les enseignants issus de cette recherche disponibles sur le site suivant : http://web.lyon.iufm.fr/formation/UCDmath//algebre/index.htm). C'est pourquoi les exemples que nous prenons sont fortement liés au champ algébrique. Ils nous permettent d'amorcer une réflexion sur l'introduction d'une lettre, a priori, dans l'énoncé des problèmes et sur son rôle dans la résolution, comme variable ou comme inconnue.

1. Premiers constats

Nous partons d'un premier constat selon lequel, depuis une dizaine d'années, se développe une tendance à proposer aux élèves des problèmes très guidés, très découpés en de multiples questions, dans lesquels la plupart des résultats sont donnés et les procédures fortement indiquées (par exemple, sous la forme « montrer que » ou « pose x », « appelle x »).

Nous pensons que cette façon d'organiser l'étude en mathématiques a des conséquences de plusieurs ordres, qui portent à la fois sur la construction des connaissances mathématiques chez les élèves (voir à ce sujet les articles de A. Robert et H. Bareil, dans les Bulletins 457 et 458, qui analysent différentes façons de poser un même problème) mais aussi sur les représentations qu'ils peuvent se construire sur les mathématiques et sur l'école :

– tout d'abord, elle ne favorise pas les activités de recherche, elle ne donne pas aux élèves l'idée qu'on peut chercher, faire des conjectures, les vérifier, etc., ce qui constitue selon nous une part essentielle de l'activité mathématique ;
– elle véhicule une idée très guidée des mathématiques, nous pourrions dire très scolaire dans laquelle la notion de recherche personnelle, de défi, d'enjeu de savoir est absente ;

(*) Professeur Lycée Collège Jean Moulin. IUFM de Lyon. IREM de Lyon
(**) Maîtresse de conférence. IUFM de Lyon UMR ICAR. Équipe COAST CNRS Université Lyon 2, INRP, ENS sciences, ENS LSH.

– enfin, elle détourne l'activité mathématique vers une vision applicationniste et met trop l'accent sur des exigences de rédaction et de conformité à ce qui est attendu et non à ce qui est pertinent du point de vue mathématique.

Ceci nous semble particulièrement criant pour ce qui est désigné comme « Activités d'introduction » dans les manuels scolaires. Ces activités devraient avoir pour but, selon nous, de poser de vrais problèmes qui montrent, a minima, que les connaissances actuelles des élèves ne sont pas suffisantes pour résoudre ce nouveau problème ou bien qu'ils vont engendrer la construction de nouvelles connaissances ou procédures. Souvent, les activités proposées ne sont pas de véritables problèmes, elles se résument à des questions fermées, demandant peu de réflexion et sans véritable enjeu. De plus, le problème peut souvent être résolu par des méthodes que les élèves connaissent déjà, ce qui implique le recours à des injonctions fortes de la part des auteurs (par exemple, « appelle x ce nombre » dans le cas de l'introduction des équations). Dans les stages de formation continue que nous avons animés, nous avons pu constater que les professeurs sont bien conscients de cela, qu'ils le déplorent et que cela les conduit souvent à rejeter l'idée même d'activité préparatoire tant elle leur semble peu pertinente et sans enjeu.

En ce qui concerne les autres exercices (d'entraînement ou surtout de synthèse), nous constatons également que ces problèmes sont souvent très fermés dans le sens où :
– la réponse à la question est donnée dans la question : par exemple, en géométrie, « montrer que le quadrilatère est un losange » ;
– la méthode de résolution est fortement suggérée, voire imposée ;
– les élèves sont très guidés par des questions intermédiaires qui sont souvent des injonctions (calcule, pose, appelle, trace, etc.) et qui ne leur permettent pas d'élaborer un cheminement personnel. Ainsi le nombre des questions intermédiaires croît.

Or, dans le même temps, les programmes insistent de plus en plus sur l'activité des élèves.

> « Au collège, les mathématiques contribuent, avec d'autres disciplines, à entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique. L'objectif est de développer conjointement et progressivement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique. » (Programmes collège 1995 repris en 2005)
>
> Dès lors, les professeurs vont avoir à choisir des situations créant un problème dont la solution fera intervenir des « outils », c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles.
>
> Les activités choisies doivent développer la capacité de se poser des problèmes et de progresser vers leur résolution. Elles doivent aussi :
> – permettre un démarrage rapide pour tous les élèves…,
> – créer rapidement une situation assez riche pour provoquer des conjectures,
> – rendre possible la mise en jeu des outils prévus,
> – fournir aux élèves aussi souvent que possible des occasions de contrôle de leurs résultats… (Programme classe de Sixième 1995).

Dans le programme de la classe de Sixième, en 2005, on précise également : « *Cette démarche vise à (...) stimuler l'aptitude à chercher qui nécessite imagination et intuition.* »

De plus, les nouvelles épreuves du baccalauréat 2004 (BO nº 19 du 8 mai 2003) donnent comme un objectif d'évaluation parmi d'autres « *prendre des initiatives* » et préconisent aussi, à côté des situations plus classiques « *l'étude d'une situation conduisant à choisir un modèle simple, à émettre une conjecture, à expérimenter, …* »

Nous voyons ainsi une certaine tension entre des injonctions institutionnelles et leur réalisation, par exemple, dans les manuels. En ce qui concerne la pratique de classe, il n'est pas question de faire des généralités mais nous savons par notre expérience de formateurs que les activités de recherche ont du mal à vivre dans les classes. Nous rejoignons là les travaux de Robert et Rogalski (2004) qui précisent par exemple :

> Les contraintes de temps, rendues encore plus lourdes par les restrictions d'horaires actuelles, sont toujours évoquées pour justifier le fait de privilégier en classe un travail sur « le nouveau » mais sans beaucoup d'exploration, peu d'entretien de l'ancien, pas ou peu de réorganisation entre ancien et nouveau. En termes d'activités, cela correspond à des tâches isolées (qui portent sur le chapitre en cours) sans beaucoup d'adaptation des connaissances à utiliser.

Enfin se pose une autre question d'enseignement/apprentissage, encore peu mise en lumière, qui est le lien entre les activités d'introduction et les phases d'institutionnalisation. Il nous semble que si l'on veut rendre les activités d'introduction intéressantes non seulement du point du vue du problème résolu mais également du point de vue de la progression des apprentissages, il est important de montrer les liens entre le problème proposé et les connaissances mathématiques que l'on institutionnalise. Autrement dit, c'est dans l'articulation et la dynamique contextualisation/décontextualisation que les connaissances antérieures et le problème résolu vont pouvoir se réorganiser pour devenir des connaissances nouvelles (ceci est également souligné par Robert et Rogalski, 2004). Notons enfin qu'il ne suffît certainement pas d'un seul problème pour introduire une nouvelle notion.

Tous ces éléments nous amènent donc à introduire l'idée d'ouvrir les problèmes (ou de proposer des problèmes plus ouverts, ou d'autres formes d'énoncés) pour permettre des apprentissages mathématiques plus motivants. Cette position appelle deux remarques : tout d'abord, nous ne voulons pas dire que les apprentissages techniques et les problèmes de réinvestissement ne sont pas nécessaires. Bien au contraire, il est important de développer des automatismes pour permettre aux élèves d'asseoir leurs connaissances et de les réinvestir, mais il nous semble qu'un équilibre est nécessaire entre les différents types d'activités. Ensuite, nous n'employons pas le terme de problème ouvert car celui-ci a été rendu célèbre il y a une vingtaine d'années par des collègues de l'IREM de Lyon (Arsac et al. 1991) qui ont développé cette idée dans un sens différent du nôtre.

Nous donnerons tout d'abord quelques exemples de problèmes que nous qualifierons de fermés, que nous mettrons en regard avec des énoncés qui nous semblent développer davantage l'activité et la réflexion de l'élève, puis nous reviendrons sur cette notion de problème ouvert pour montrer en quoi nous nous en distinguons. Enfin, pour terminer, nous donnons trois exemples d'ouverture de problèmes.

2. Quelques exemples de problèmes fermés

Voici un premier exemple pris tel quel dans un manuel de Sixième dans le chapitre « Multiplication et division » (Math Bordas 2000). Il s'agit d'une activité d'introduction de la multiplication des décimaux.
On voit le dessin d'un baladeur avec des mesures en inches. Le texte est le suivant : *Margaux fait un voyage scolaire en Irlande pour améliorer sa pratique de la langue anglaise. Son professeur lui dit : « tu dois multiplier les mesures de longueur en inches par 2,54 pour obtenir les mesures en centimètres ». Quelles sont les dimensions du baladeur ? (utilise ta calculatrice).*
Nous voyons sur cet exemple, peut-être caricatural, que la tâche de l'élève se résume à appliquer ce qui est dit par le professeur fictif sans aucune problématisation de la multiplication des décimaux. On passe alors à une question de technique opératoire qui pourrait faire l'objet d'une recherche si on cherchait à l'expliquer mais l'utilisation de la calculatrice (comme une boîte noire) empêche aussi ce questionnement. On peut donc se demander comment l'élève pourra reconnaître la multiplication des décimaux dans une autre situation.
Il nous semble donc important que cette question du sens de la multiplication des décimaux soit prise en charge par les professeurs de Sixième, ce qui ne nous semble pas être vraiment le cas actuellement. Sur ce point, on pourra consulter la brochure de l'IREM de Lyon (Anselmo et al. 1999).

Un autre exemple peut être pris dans les annales du brevet des collèges qui proposent invariablement le problème suivant (par exemple. Brevet des collèges Lyon 2004) :
On considère l'expression $C = (2x - 1)^2 + (2x - 1)(x + 5)$.

1) *Développer et réduire l'expression* C.
2) *Factoriser l'expression* C.
3) *Résoudre l'équation* $(2x - 1)(3x + 4) = 0$.

La tâche est toujours la même : on donne une expression algébrique du second degré écrite sous forme non réduite, qui doit être développée et réduite, puis factorisée sous forme d'un produit de deux facteurs du premier degré et enfin on demande de résoudre l'équation-produit dont un membre est obtenu à la question précédente.
On voit ici le souci des concepteurs de sujets de vérifier que les élèves savent développer ou factoriser (certaines expressions particulières), c'est-à-dire que l'on évalue des techniques mais assez peu une compréhension plus générale de notions algébriques concernant le calcul littéral.
Bien sûr, ce problème n'est pas posé dans les mêmes conditions que le précédent puisqu'il s'agit ici d'évaluer des compétences techniques relativement minimales de fin de collège. Nous ne voulons pas dire qu'il faut que ce type d'exercices disparaisse des tâches proposées aux élèves. En revanche, nous pensons que comme ce type

d'exercice est systématiquement posé au brevet des collèges, on le retrouve fréquemment dans les manuels et dans les pratiques avec un effet de contrat évident : l'expression factorisée doit être celle que l'on retrouve dans l'équation-produit. Autrement dit, il ne faudrait pas que ce type d'exercice, parce qu'il est donné à l'examen, pilote complètement l'activité de la classe[1].
Il nous semble donc important de proposer d'autres types d'exercices qui permettent, selon nous, de vérifier davantage la compréhension de la notion de distributivité de la multiplication sur l'addition et de laisser les élèves déterminer leur méthode de résolution plutôt que l'imposer.

Voici deux exercices (Abou Rael 2004) qui sont posés de façon différente et qu'on pourrait proposer aux élèves en complément des tâches classiques de factorisation et développement :

Pour factoriser $A = 4x^2 - 8$, *Gilles a trouvé* $A = (2x - 4)\,(2x + 4)$.
Est-ce juste ?
Si oui, explique comment tu le sais ?
Sinon, à quoi le vois- tu ? Corrige alors la réponse de Gilles.

On peut voir ici que pour répondre aux questions, on peut utiliser plusieurs procédures valides parce que les deux expressions ne sont pas égales :

- développer $(2x - 4)\,(2x + 4)$ et constater que ce n'est pas la même expression que celle donnée ;
- donner une valeur particulière à x dans les deux expressions et constater que ce n'est pas le même résultat ;
- factoriser les deux expressions et constater les deux résultats différents ;
- dire que pour avoir l'égalité il faudrait avoir $A = 4x^2 - 16$ grâce à l'application de l'identité remarquable.

On veut factoriser l'expression suivante : $C = x^2 - 4x - 5$.
Béatrice propose $(x - 5)\,(x + 1)$ *comme réponse*.
Est-ce que Béatrice a raison ? Comment le sais-tu ?

Ici les expressions sont égales, donc la procédure consistant à prendre une valeur particulière ne donnera pas la réponse. En revanche, il faut travailler à partir de la réponse donnée pour retrouver la première expression, ce qui devrait montrer que l'élève a compris le lien entre factorisation et développement.

Un dernier exemple concerne l'introduction des équations en classe de Quatrième ; on trouve souvent dans les manuels le type de problème suivant :

Je pense à un nombre, je lui ajoute 34, *je multiplie par* 7 *le résultat et je trouve* 112.
Quel était le nombre de départ ?

A priori ce n'est pas un problème fermé puisqu'on ne donne pas de procédure à l'élève. Cependant, nous voyons bien que ce problème peut facilement être résolu par une procédure qui consiste à « remonter » les calculs (les élèves ont l'habitude de faire ce genre de raisonnement notamment à l'école primaire). Ainsi l'élève écrira $112 : 7 = 16$ et $16 - 34 = -18$ et trouvera la solution sans avoir posé une équation.

(1) N.D.L.R. Ne suffirait-il pas que dans l'exercice les questions soient indépendantes ?

De plus, les nombres choisis sont simples et entiers (ce qui est souvent le cas), donc on peut aussi envisager des procédures par essais.
Selon nous, l'emploi de l'outil algébrique ne se justifie pas ici et cet exercice ne nous semble pas être un bon candidat pour introduire l'outil équation. Pour pouvoir mettre en équation ce type de problèmes, il faut au moins que les calculs soient beaucoup plus nombreux et complexes. Il y a donc fort à parier que les élèves ne verront pas la nécessité d'introduire une inconnue. Que font alors les auteurs de manuels pour pallier cette difficulté d'enseignement ? Ils rajoutent une étape comme : « tu appelleras x le nombre cherché », ce qui a pour but de faire rentrer l'élève dans le raisonnement ou la technique algébrique sur injonction du professeur et non parce que la situation le nécessite.
Plus généralement, dans nos propres recherches sur l'algèbre (Betton et Coppé, à paraître), nous avons constaté que dans les manuels la plupart des exercices imposent à l'élève l'emploi des lettres sans que cela soit indispensable pour lui, compte tenu de ses connaissances mathématiques à ce moment-là. Dans ce cas, nous pensons que l'élève va utiliser une lettre (par exemple, pour mettre en équation) sans voir l'utilité de cette résolution par les équations (en fait il pourrait résoudre le problème par une autre méthode aussi efficace). Les études de Sadoun (1999) ou de Coulange (1997), par exemple, ont montré que les élèves ont, par la suite, du mal à résoudre des problèmes dans lesquels l'inconnue (ou les inconnues dans le cas des systèmes) n'est (ne sont) pas explicitement désignée(s).
Donc, si l'on veut montrer à l'élève la puissance du raisonnement algébrique et la nécessité d'introduire une inconnue ou une variable, il est important d'une part, de lui donner des problèmes qu'il a du mal à résoudre par d'autres méthodes (arithmétiques, par exemple) et d'autre part de le laisser chercher, c'est-à-dire, de laisser du temps à la classe.

Voici un exemple de problème que les élèves ont du mal à résoudre par des méthodes purement arithmétiques et qui permet d'introduire la nécessité d'une mise en équation :

Trois enfants jouent aux billes. Ils ont ensemble 198 *billes. Pierre a six fois plus de billes que Denis et trois fois plus de billes qu'Alain. Combien chaque enfant possède-t-il de billes ?*

En conclusion de cette partie, nous avons voulu illustrer sur des exemples que les problèmes ou les types de problèmes proposés majoritairement dans les manuels comme introduction nous paraissaient encore très fermés ou trop directifs au sens où nous l'avons défini et qu'ils ne permettaient pas de problématiser suffisamment les notions en jeu.
Nous souhaitons maintenant revenir sur un outil didactique introduit il y a quelques années, le problème ouvert, pour nous situer par rapport à lui.

3. Liens avec la notion de problème ouvert

Comme nous l'avons dit plus haut, il y a une vingtaine d'années une équipe de professeurs et de chercheurs lyonnais (Arsac et al. 1991) introduisait l'idée du problème ouvert. Rappelons rapidement ses caractéristiques :

> Nous appelons problème ouvert un problème qui possède les caractéristiques suivantes :
> - L'énoncé est court.
> - L'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de question intermédiaire, ni de question du type « montrer que »). En aucun cas, cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou à l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours.
> - Le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi, peuvent-ils prendre facilement « possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples. (Arsac et al., page 7)

Cette définition était accompagnée d'exemples et d'une méthodologie de gestion de classe : recherche personnelle puis en groupes, production d'une affiche par groupe et discussion collective de ces affiches selon un ordre bien choisi. Cette méthodologie était également employée dans de nombreux stages de formation continue (Peix et Tisseron, 1998).
Ces problèmes ouverts se distinguaient des situations-problèmes plus proches des activités d'introduction.
Nous voyons que les auteurs souhaitaient privilégier d'une part la recherche des élèves avec la production de procédures personnelles, pas forcément expertes, et d'autre part, favoriser le débat dans la classe.
Les exemples proposés étaient clairement des problèmes dont la solution générale n'était souvent pas à la portée des élèves de la classe concernée. Une procédure utilisable était souvent des essais plus ou moins organisés ou la détermination de solutions partielles.

Actuellement, nous ne savons pas si la pratique des problèmes ouverts vit toujours dans les classes car nous n'avons pas fait d'étude à ce sujet, mais si nous analysons les manuels ou si nous discutons avec les professeurs lors de stages de formation continue, nous pouvons penser que ce n'est pas le cas. Ou si c'est le cas, c'est plutôt exceptionnel, c'est-à-dire que ce n'est pas la pratique habituelle de la classe, cela se fait une ou deux fois par an.
Les raisons de cet abandon viennent certainement de la baisse du nombre d'heures de mathématiques qui permettent moins de laisser du temps aux élèves pour chercher ou bien de l'évolution des élèves et des classes (plus difficiles ou plus hétérogènes) ou enfin d'un souci de gestion des élèves en difficulté auxquels on a tendance à proposer des exercices guidés pour leur permettre de réussir. Enfin, une autre cause est peut-être aussi la trop grande originalité de ces problèmes, la difficulté d'en trouver de nouveaux et une certaine coupure avec ceux proposés dans le cadre habituel de la classe. C'est ce dernier point que nous retiendrons : en effet, pourquoi mettre cette condition si forte et finalement passer de problèmes très guidés à des problèmes très ouverts. Il nous semble donc qu'il y a un moyen terme entre ces deux positions en ouvrant les énoncés de problèmes proposés dans le cadre habituel de la classe. Il s'agit d'intégrer à la fois des problèmes de recherche en laissant du temps aux élèves et des activités qui permettent de travailler sur les problèmes quotidiens

de la classe en lien avec les notions mathématiques étudiées.
Nous proposons donc d'ouvrir les problèmes que l'on peut trouver dans les manuels, par exemple, et de les enrichir par des jeux sur les variables didactiques. Une autre idée importante, liée à l'algèbre, est de laisser à la charge de l'élève l'utilisation ou non d'une lettre (passage au cadre algébrique) ; on peut ainsi proposer plusieurs fois le même problème en changeant les valeurs numériques, ce qui peut amener à des changements de procédures. C'est ce que nous allons présenter maintenant.

4. Ouvrir les problèmes

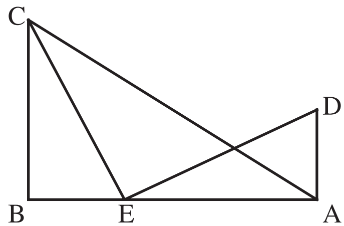
Dans cette partie, nous allons donner trois exemples de problèmes, trouvés dans des manuels, que nous avons adaptés. Au départ, ce sont des problèmes posés dans un contexte géométrique, mais dont la résolution attendue par les auteurs se situe dans le cadre algébrique (pour preuve, ils se trouvent dans le chapitre « Équations »). Pour cela, à chaque fois, soit on donne l'indication du type « on pose AB = x », soit la lettre est directement présente sur le dessin. Il nous semble que c'est un phénomène assez général qui se retrouve moins fréquemment dans les énoncés ayant un support numérique. En fait, nous pensons qu'en général, on laisse peu à la charge de l'élève le choix du cadre de résolution (Douady, 1987), ce qui a certainement pour conséquence de ne pas lui permettre de s'approprier la pertinence et l'efficacité des différents outils, notamment de l'outil algébrique.

Ainsi, de façon assez générale, en restant dans ce cadre, une première modification a consisté à supprimer les indications « pose x = … » de façon à laisser une certaine latitude à l'élève sur la méthode à utiliser. Nous avons également changé quelques valeurs numériques notamment par un jeu sur valeurs entières/non entières pour favoriser ou bloquer certaines procédures.
Enfin nous pensons que les différentes versions de ces exercices ainsi transformés peuvent être utilisés à différents niveaux de classe.

Premier exemple : enlever *x* et changer les valeurs numériques

Il fait partie des deux derniers exercices proposés dans le chapitre « Équations » du livre de Quatrième Triangle (Hatier 2002) page 136, Exercice 75. Ces deux exercices sont regroupés sous le titre « Problèmes de synthèse ».
Voici l'énoncé et nous invitons le lecteur à le faire « comme un élève » :

Reproduire la figure ci-contre à l'échelle 1 sachant que BC = 5,6 cm, AB = 9 cm et AC = 10,6 cm.
Les droites (CB) et (AD) sont parallèles et AD = 2,8 cm.
Le point E est un point quelconque du segment [AB].



a) Démontrer que : (BC) $\perp$ (AB).

b) Démontrer que (AD) $\perp$ (AB).

c) On pose BE = x. Pour quelle valeur de x les aires des triangles BCE et DEA sont-elles égales?

d) Dans le cas où les aires sont égales, les périmètres sont-ils égaux ?

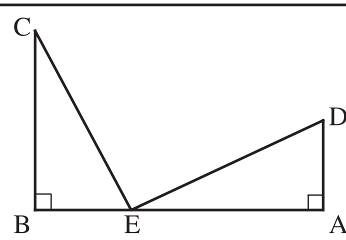
Il s’agit en fait de déterminer où placer E sur [AB] pour que les aires des triangles BCE et DEA soient égales. Pour cela, les auteurs posent des questions intermédiaires qui visent à mobiliser des propriétés géométriques, puis demandent une résolution algébrique. Ainsi, cette organisation des questions justifie le titre « Problèmes de synthèse » et ce travail peut se comprendre. Cependant la question c) nous impose de choisir BE = x, ce qui induit fortement la méthode algébrique à employer.
Commençons donc par supprimer « choisir BE = x » et par remplacer la question c) par :
Où doit-on placer E *sur* [AB] *pour que les aires des triangles* BCE *et* DEA *soient égales ?*
C’est une première forme d’ouverture que de supprimer l’indication du choix de x. En effet, nous proposons alors à l’élève un travail différent dans lequel il aura à traduire cette condition, ce qui devrait lui permettre de mobiliser d’autres connaissances notamment sur le choix et l’utilisation d’une variable pour résoudre un problème (il n’est d’ailleurs pas obligé de choisir BE comme inconnue).

Il reste cependant les données BC = 5,6 cm et DA = 2,8 cm. Comme BC est le double de DA, on peut choisir « la base » BE deux fois plus petite que EA et donc en divisant BA par 3, qui mesure 9 cm, on obtient la réponse BE = 3 et EA = 6.
Ceci montre les limites d’un tel choix de valeurs ! Comment convaincre alors un élève qui a trouvé cette réponse de l’utilité de choisir BE = x ?

Nous proposons donc l’énoncé suivant :

Sur la figure ci-contre :
AB = 9 cm ;
(CB) est perpendiculaire à (BA) et BC = 5,6 cm ;
(DA) est perpendiculaire à (BA) et DA = 2,4 cm.

Où faut-il placer E pour que l’aire du triangle BCE soit égale à l’aire du triangle ADE ?



La solution BE = 2,7 cm semble moins directement accessible, l’élève a à sa charge le fait de choisir BE = x et surtout EA = $9 - x$, pour écrire l’équation visée : $5{,}6\,x = 2{,}4\,(9 - x)$.
Cet apprentissage : choix de x, en déduire $9 - x$, ne peut se faire que si l’élève en éprouve vraiment le besoin parce que la résolution du problème le nécessite et non parce que le professeur l’exige. Penser à $9 - x$ est encore plus difficile à faire comprendre que le choix de x. Les élèves proposent souvent $5{,}6\,x$ et $2{,}4\,y$ avec $x + y = 9$, c’est un passage nécessaire qu’il est bon de laisser s’exprimer. Il aide à la compréhension, car dans les premières situations les élèves ne trouvent pas souvent eux-mêmes. Ce type de problèmes doit donc être proposé en recherche plusieurs fois, en classe, et pas forcément à la fin du chapitre.

Prolongements possibles :

Toujours avec cette situation et cette figure, nous pouvons proposer des prolongements qui touchent à d'autres parties du programme. Voici quelques propositions :

• AB *peut-il être égal à* 1 *?*

• AB *peut-il être égal à* 256 *?*

• *Exprimer* BE *en fonction de* AB *(voici une fonction linéaire pour la classe de troisième !).*

• Ou encore, ne pas donner dans l'énoncé la longueur de [AB], mais poser la question suivante :

Où faut-il placer E *pour que l'aire du triangle* BCE *soit égale à l'aire du triangle* ADE. *dans les différents cas suivants :*

AB = 7 ; AB = 9 : AB = 10 : AB = 24 ; AB = 25,6 ; AB=324 ; …

Tu dois trouver le plus vite possible !

On attend chez l'élève le passage à l'écriture $5{,}6\,x = 2{,}4\,(\text{AB} - x)$ pour obtenir :

$$x = \frac{2{,}4}{8}\text{AB} \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{10}\text{AB}.$$

Pour un élève de Quatrième, ces écritures peuvent constituer une rencontre avec des lettres ayant plutôt le statut d'inconnue pour x et de paramètre pour AB (sans que ce terme soit employé bien sûr), ou bien, on peut aussi y voir aussi la formule $\text{BE} = \frac{3}{10}\text{AB}$, cette écriture étant souvent utilisée au collège, elle peut être aussi un moyen de passer à la fonction linéaire $f(x) = \frac{3}{10}x$.

Nous avons donc montré qu'à partir de ce problème, on pouvait soit enlever l'indication algébrique pour permettre une résolution dans deux cadres différents (géométrique ou algébrique), soit favoriser le cadre algébrique en changeant les variables numériques, soit encore aller vers les fonctions par les formules.

Deuxième exemple : enlever *x* et changer l'énoncé

Il s'agit de l'exercice qui suit le précédent dans le même manuel (Exercice 76, page 136, Collection Triangle Quatrième, Hatier 2002). Cette fois-ci, c'est un exercice posé au brevet en Asie en 1999.

Un rectangle ABCD est tel que AB = 5 cm et AD = 4 cm.

E est le point du segment [AB] tel que AE = 1 cm.

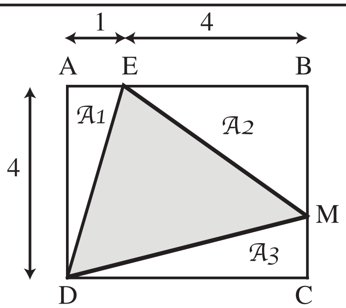
M est un point du segment [BC].

On pose BM = x (en cm).

a) Calculer l'aire $\mathcal{A}_1$ du triangle AED.

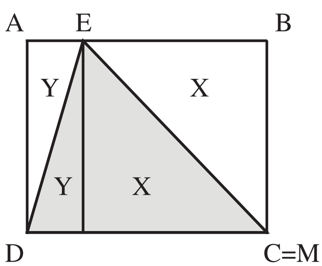
b) (1) Exprimer en fonction de x :

– l'aire $\mathcal{A}_2$ du triangle EBM ;



– la longueur MC ;
– l'aire $\mathcal{A}_3$ du triangle DMC.
(2) Démontrer que la somme des trois aires $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$ est $12 - 0{,}5\,x$. En déduire que l'aire de la partie grise est $8 + 0{,}5\,x$.
(3) Calculer la valeur de x pour laquelle l'aire de la partie grise est égale à la somme des trois aires $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$. Quelle est alors la position du point M ?

Si on fait l'exercice tel qu'il est proposé, on constate tout d'abord qu'il est vraiment très découpé et que les réponses aux questions sont données dans b) (2).
Ensuite, on peut voir que l'on obtient BM = 4 ce qui fait que M = C, ce qui ne donne pas beaucoup d'intérêt à l'exercice, selon nous. Dans les conditions du brevet, un élève qui trouverait cette réponse peut même penser qu'il s'est trompé puisque l'aire de $\mathcal{A}_3$ est nulle.



En fait, ce résultat est plus général puisque que quelles que soient les valeurs numériques choisies, M = C. Si AD = a, AE = b et EB = c, la solution est toujours $x = a$.
Donc, le problème a une solution dans le seul cas où l'on a seulement deux aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$: M est en C et E est où l'on veut sur [AB] (ceci est assez évident sur le dessin ci-contre).

Ce problème, posé tel quel, a, selon nous, peu d'intérêt. C'est pourtant un exercice de brevet. Il a dû sembler légitime aux auteurs de mettre des questions intermédiaires très détaillées qui forcent l'élève à adopter une procédure classique (celle du correcteur).
Pour nous, un tel sujet semble plus intéressant si on le modifie de façon à éliminer les questions intermédiaires et à ne pas avoir comme solution M en C. Nous sommes bien conscients que les propositions de changement transforment complètement le problème.

Changeons donc complètement l'énoncé :

On garde le même dessin, mais on change de condition : l'aire de $\mathcal{A}_3$ est la somme des aires de $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$.
Bien sûr on n'indique pas à l'élève de poser BM = x et MC = $4 - x$, cela reste à sa charge.
Voici donc trois énoncés modifiés que nous proposons :

Énoncé 1

Un rectangle ABCD est tel que AB = 5 cm et AD = 4 cm.
E est le point du segment [AB] tel que AE = 2 cm.
M est un point du segment [BC].

Où placer M pour que la somme des aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ soit égale à l'aire $\mathcal{A}_3$?

On trouve BM = 1,5 cm.

Énoncé 2

On peut choisir AB = 8 cm, AD = 4 cm et AE = 3 cm.

Dans ce cas, on trouve $\mathrm{BM} = \dfrac{20}{13}\,\mathrm{cm}$.

Énoncé 3

En classe de seconde on peut proposer : AB = a, AD = b et AE = c.

Puis on demande d'écrire BM en fonction de a, b et c.

Dans ce cas, on trouve $\mathrm{BM} = \dfrac{ab - bc}{2a - c}$.

Le changement de question (*Où placer* M *pour que la somme des aires* $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ *soit égale à l'aire* $\mathcal{A}_3$?) amène à trouver que la position de M sur le segment [BC] n'est plus en C.
Dans les deux premiers énoncés, nous ajoutons un changement de valeurs numériques. Dans le premier cas, on trouve que BM est décimal simple, ce que l'élève peut éventuellement trouver en tâtonnant alors que dans le deuxième cas BM est non décimal, ce qui peut (doit) obliger les élèves à passer à une méthode algébrique.
Enfin le troisième problème peut être proposé en classe de Seconde pour amener les élèves vers des expressions littérales plus complexes.
Notons que l'énoncé initial peut également être donné pour montrer, dans ce cas, avec des valeurs littérales, que M est toujours en C.
Voici donc un exemple de problème qui se traite dans le cadre algébrique, qui peut être posé avec ses différents énoncés, soit les uns à la suite des autres pour favoriser le changement de procédure, soit dans différentes classes avec différents objectifs de travail.

Troisième exercice : enlever *x* et changer les cadres de résolution

Il s'agit du n° 102, page 100 du livre de Quatrième Dimathème (Didier 2002).

> ABC est un triangle tel que AB = 9 cm, AC = 7 cm et BC = 6 cm. M est un point du segment [AB]. La parallèle à (BC) passant par M coupe [AC] en N.
> Où doit-on placer M pour que le triangle BMN soit isocèle en M ?
> (Sur le dessin on désigne par x les mesures BM et MN).

Cet exercice se trouve à la fin du chapitre « Équations », dans une page dont le titre est « Devoirs à la maison ». C'est un bon exercice, mais quel dommage surtout pour un travail à la maison de ne pas relier algèbre et géométrie.
Une autre version de ce problème a été proposée au brevet des collèges 2004 dans l'Académie de Lyon. Cette fois-ci, le triangle ABC était rectangle en B, ce qui permettait de faire appliquer le théorème de Pythagore pour déterminer la mesure d'un côté, mais cela masquait complètement le caractère plus général du résultat.

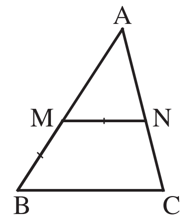
Ainsi, dans les deux cas, les intentions des auteurs sont de faire résoudre ce problème dans le cadre algébrique puisqu'il est dans le chapitre « Équations » et qu'on impose MN = x.

Nous proposons une autre méthode de résolution :

Commençons par supprimer les x sur le dessin, mais aussi les mesures des côtés AB, AC et BC.
Voici une version dont le texte incite davantage à travailler dans le cadre géométrique. Nous laissons au lecteur le temps de le chercher :

ABC est un triangle.
M est un point du segment [AB].
La parallèle à (BC) passant par M coupe [AC] en N.

Où doit-on placer M pour que le triangle BMN soit isocèle en M ?



On constate, dans cette version, que le cadre algébrique n'est pas privilégié et que l'on se place dans un cas général vrai pour tout triangle. Le but du problème est alors changé puisqu'il s'agit de montrer un résultat général.

Étant donné un triangle ABC quelconque, M un point du segment [AB], la parallèle à (BC) passant par M coupe [AC] en N. Le triangle BMN est isocèle en M si et seulement si N est sur la bissectrice de $\widehat{ABC}$.

Proposition de scénario de classe testé en quatrième, troisième et seconde :

On commence en donnant le problème sous cette dernière forme qui propose un cas général.

Dans les trois classes, après 10 à 15 minutes de recherche, la solution géométrique n'est pas trouvée par les élèves. Ceci est certainement normal car il faut procéder par analyse et synthèse et cette procédure n'est pas habituelle dans notre enseignement actuel. L'analyse demande de supposer le problème résolu, de tracer le segment [BN] et de découvrir ainsi que (BN) est la bissectrice de $\widehat{ABC}$. On part de la conclusion !, méthode souvent déconseillée voire interdite au collège.
Il est important de remarquer que le segment [BN] n'est pas tracé dans l'énoncé et bien que la question « Où doit-on placer M pour que le triangle BMN soit isocèle en M ? » indique ce triangle BNM, les élèves le tracent rarement. Nous retrouvons là une difficulté de la démonstration.

Cependant, dans toutes les classes, les élèves évoquent le théorème de Thalès, ce qui est normal car les élèves reconnaissent cette configuration, mais ils ne peuvent pas l'appliquer (à ces niveaux de classe) puisqu'ils n'ont aucune mesure. Le professeur peut donc s'appuyer sur ces remarques et donner des mesures pour aider les élèves à trouver une solution particulière et pour les amener à la généralisation par ce procédé.

On propose alors le premier énoncé aux élèves, mais cette fois-ci comme aide à la résolution en tant que cas particulier.

Trouver une solution numérique dans le cas particulier suivant : AB = 9 cm, AC = 7 cm et BC = 6 cm.

Les élèves introduisent alors BM = MN = x, si toutefois dans la classe le contrat « introduire une lettre pour trouver une valeur inconnue » a été mis en place, sinon c'est un bon moment pour le faire. On trouve ainsi $\frac{9-x}{9}=\frac{x}{6}$, puis $x = 3{,}6$.

Il est alors intéressant de faire remarquer que la longueur AC = 7 cm n'a pas été utilisée. On peut donc choisir n'importe quel autre nombre positif avec la seule condition de l'existence du triangle, c'est ce qui va nous aider à la généralisation.

Trouver une solution géométrique valable dans tous les triangles.

Le problème n'est donc pas fini. Reprenons maintenant un triangle ABC quelconque, c'est-à-dire revenons à l'énoncé initial. Cette distinction entre cas particulier numérique et cas général sans mesure prend du sens dans cet exercice.
Dans le cas numérique précédent, les élèves doivent « inventer une lettre » pour résoudre le problème et utiliser aussi le théorème de Thalès qui appartient plutôt au cadre géométrique. Trouver une nouvelle procédure va donc être difficile. En effet, ils doivent ici « inventer un segment », le segment [BN], qui n'est pas mis en avant dans l'exercice. Une aide du professeur sera certainement nécessaire, mais pas initialement imposée. Finalement, ils terminent seuls, et la découverte de la bissectrice est une surprise et un plaisir dont il ne faut pas les priver en laissant suffisamment de temps pour chercher.

Quelques remarques sur ce problème.
Comme de nombreux problèmes, nous voyons qu'il peut être résolu dans les deux cadres, géométrique et algébrique, et qu'il permet de mobiliser plusieurs connaissances exigibles au collège. De plus, les résolutions dans les deux cadres sont assez éloignées : c'est ce qui fait, selon nous, sa richesse. Son but didactique peut être de montrer mais surtout d'articuler ces deux méthodes de résolution par le biais de la distinction cas particulier/général.
Dans toutes les classes où nous l'avons testé, il a été nécessaire d'aider les élèves, mais selon leurs besoins à différents moments. Il nous semble donc tout à fait intéressant de faire chercher ce problème en classe, suivant le scénario que nous avons développé, plutôt qu'à la maison où les élèves risquent de passer à côté de la généralisation avec la première version ou de ne rien faire avec la deuxième. Nous avons notamment trouvé intéressant de considérer à la fois le changement de cadre et l'articulation général/particulier/général comme une aide à la résolution.

Conclusion

Dans cet article, nous avons voulu montrer sur quelques exemples qu'il était possible de rendre les problèmes habituels proposés aux élèves (notamment au collège et en algèbre) plus ouverts, c'est-à-dire de ne pas trop les découper en de multiples micro-questions dans lesquelles la réponse est donnée, orientées vers la procédure attendue par le professeur, et ne laissant que peu d'autonomie de recherche à l'élève. Nous pensons, en particulier, que la suppression dans les énoncés des injonctions du type « on pose BM = x » permet non seulement cette ouverture mais donne du sens à l'utilisation de la lettre.

À l'heure où les élèves se détournent des sciences, cela nous semble être une question d'enseignement actuelle importante puisqu'il s'agit, selon nous, de donner un enjeu à l'activité mathématique et de la rendre formatrice et motivante.
De plus, nous avons aussi montré, à travers le troisième exemple, qu'il était important de favoriser les changements de cadres, mais aussi de les utiliser dans la pratique du professeur.

Enfin, nous voulons souligner qu'il est important de proposer des problèmes de recherche dans la classe et donc de laisser du temps pour cela plutôt que de renvoyer ce travail à la maison sous la seule responsabilité de l'élève.

Bibliographie

Abou Rael, N. (2004). Les identités remarquables fonctionnent-elles comme un théorème ou comme une règle d'action dans le sens de la factorisation pour les élèves de la classe de troisième en France ? Mémoire de DEA de Didactique et Interactions. Université Lyon 2.

Anselmo, B., Bonnet, M., Colonna, A., Combler, G., Latour, J., Planchette, P. (1999). La sixième entre fractions et décimaux. IREM de LYON.

Arsac, G., Germain, G., Mante, M. (1998). Problème ouvert et situation problème. IREM de Lyon.

Bareil, H. (2005). Brèves rencontres d'hier à demain. Bulletin de l'APMEP nº 458.

Betton, S., Coppé, S. (à paraître). Des problèmes pour introduire les équations.

Coulange, L. (1997). Les problèmes « concrets » à mettre en équation dans l'enseignement. Grenoble : Petit x nº 47.

Douady, R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. Recherches en didactique des mathématiques Vol 7.2. Grenoble : la Pensée Sauvage.

Peix, A., Tisseron, C. (1998). Le problème ouvert comme moyen pour réconcilier les futurs professeurs d'école avec les mathématiques. Grenoble : Petit x nº 48.

Robert, A., Rogalski, M. (2004). Problèmes d'introduction et autres problèmes de recherche au lycée. REPÈRES IREM nº 54.

Robert, A. (2005). Quelles différences y a-t-il… ? Exemples d'analyses didactiques d'exercices et d'activités d'élèves (en collège ou lycée). Bulletin de l'APMEP no 457.

Sadoun, C. (1999). Une étude didactique de la notion de formule en 3ème. Mémoire de DEA. Université J. Fourier. Grenoble.