Cachez ces contradictions que je ne saurais voir…

Gérard Kuntz(*)

L'histoire qui suit a valeur de *parabole*. Les personnages qu'elle met en scène ne sont pas destinés à être plaints, loués ou stigmatisés. Ils sont *emblématiques* de situations qui les dépassent et qu'ils contribuent simplement à faire sortir de l'ombre, en vue de notre progrès commun.

A. est arrivée en France il y a quatre ans. En quelques mois, elle a appris le français et l'ensemble des connaissances enseignées en Quatrième dans nos Collèges. La « rage d'apprendre » et la forte mobilisation des professeurs en sa faveur en ont fait une des meilleures élèves de sa classe en fin d'année. En Troisième, elle a si bien consolidé les acquis que ses professeurs ont ciselé un dossier d'excellence pour la faire admettre dans une classe très sélective d'un « lycée-phare » de son académie. Elle dut se contenter d'une « bonne Seconde », la classe phare étant prise d'assaut par des élèves de toute la région.

J'ai aidé A. durant ses années de Collège. C'était alors une élève qui voulait à tout prix comprendre. « Tu m'aides à trouver, tu ne me dis pas la solution[1] » était une expression favorite. Elle ne lâchait prise qu'après avoir fait le tour d'une question. C'était un plaisir rare de travailler avec une élève d'une telle intelligence et d'une aussi forte détermination.

En Seconde, le rythme s'accéléra dans toutes les disciplines. La fréquence des « contrôles » devint pesante. Insensiblement, les préoccupations d'A. glissèrent du désir de comprendre vers l'obsession de réussir les interrogations écrites. Nos séances tournèrent de plus en plus à des interventions d'urgence (comment fait-on dans tel cas, que répondre dans tel autre ?) au détriment de la maîtrise des notions. Bien sûr, les résultats faiblirent et A. se mit à « somatiser » : maux de tête, de ventre, angoisses. Malgré cela, au prix de mille sacrifices et d'interminables heures de travail, elle réussit à se maintenir au contact des « meilleurs », si bien qu'elle eut droit à la Première scientifique « d'excellence » dont elle rêvait.

La dégringolade s'accéléra. Il y avait tant de choses à faire *dans toutes les matières*, qu'il n'était plus question de *s'offrir le luxe* de réfléchir. Elle apprit à faire un devoir de français sans lire l'œuvre de référence (profil d'œuvre et Internet suffisent amplement). Aujourd'hui, face à un problème de maths, elle avoue se demander « quelle formule appliquer ». Le plaisir d'apprendre a disparu. Elle travaille sans arrêt, avec une productivité déclinante.

(*) Membre du comité scientifique des Irem. g.kuntz@libertysurf.fr
http://publimath.irem.univ-mrs.fr/cgi-bin/publimath.pl?r=Kuntz&b=biblio

(1) Elle retrouvait spontanément un principe pédagogique central de Maria Montessori : « Aide-moi à faire seul ».

L'autre jour, elle m'envoya un courriel de demande d'aide, comme de coutume. Le voici, « copier/coller » de l'original :

Pb : énoncé exactement comme dans le livre(2).
3 nbres a,b,c pris dans cet ordre, ne sont ni en progression arith ni géo; démontrez qu'il existe un unique réel x non nul tel que (a+x), (b+x) et (c+x) pris dans cet ordre sont en progression géo(3).
Je voudrais une idée pour commencer;
mon idée est : faire (b+x)^2=(a+x)(c+x)
j'obtiens b^2+(2b-a-c)x-ac;
racine de delta=a+b+c-2racine (ab-bc)+racine(6ac)
trouve aussi un x1 et x2 mais qui sont ces x1 et x2?
AIDEZ MOI S'IL VOUS PLAIT!

Vous avez le désastre sous vos yeux. L'*idée* d'A. consiste à *« faire »*. Elle n'analyse pas, elle « agit » à partir d'une « formule » (en élève travailleuse, elle connaît les formules). Puis elle se raccroche à d'autres formules, celles du second degré. Car elle voit *un carré* dans son développement (jetons un voile pudique sur le calcul de delta…).

Au téléphone, j'essaie de remettre un peu de rationalité dans cet enchaînement baroque. « Quelles sont les données de ton problème ? Peux-tu préciser les inconnues ? Réfléchis au statut de la relation $(b + x)^2 = (a + x)\,(c + x)$: *traduit-elle bien* le fait que $a + x$, $b + x$ et $c + x$ forment une progression géométrique ? ».

Elle a beaucoup de peine à élucider la première question, tant elle a perdu (puissance de l'angoisse) en quelques mois les attitudes les plus élémentaires face à un problème. De longues minutes sont nécessaires à la rassurer et à lui faire admette qu'il est judicieux de *calculer x à partir de a, b, c*. Nous prenons rendez-vous quelques jours plus tard pour aller plus loin et finir la résolution du problème.

Le téléphone raccroché, je me mets à l'étudier en détail (ne jamais prendre un énoncé à la légère…).
Je me demande si $b^2 = ac$ est *équivalent* à « a, b, c sont en progression géométrique ».
Je traduis $b^2 = ac$ par $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$. Cela fonctionne bien si … a et b ne sont pas nuls. Dans ce cas, il suffit de poser $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = q$ pour conclure que a, b, c sont en progression géométrique.
Que se passe t-il quand $a = b = 0$, *ce que l'énoncé n'exclut pas* ?

(2) Transmath, Nathan, 1ère S, exercice 109, page 170. La précision « exactement comme dans le livre » renvoie à des précédents où, dans l'urgence, elle m'avait envoyé des énoncés tronqués de données essentielles…
(3) Trois nombres a, b, c pris dans cet ordre, ne sont ni en progression arithmétique ni en progression géométrique. Démontrez qu'il existe un unique réel x non nul tel que $(a + x)$, $(b + x)$ et $(c + x)$ pris dans cet ordre sont en progression géométrique.

$b^2 = ac$ donne alors : $0 = 0\ c$. Tout réel c convient.
Ainsi donc, 0, 0, c, c non nul annule $b^2 - ac$, sans former une progression géométrique… (0, 0, 0 est une suite géométrique de raison nulle).

Donc, a, b, c sont en progression géométrique si et seulement si $b^2 = ac$, a, b, c non nuls ou $a = b = c = 0$.

Quant à la face arithmétique de la question, il est évident que $2b = a + c$ équivaut à « a, b, c sont en progression arithmétique » ($b - a = c - b$).

Je reprends l'idée d'A. en la précisant :
$a + x$, $b + x$, $c + x$ sont en progression géométrique si et seulement si
1°) aucun des trois nombres n'est nul *ou* les trois sont nuls
et
2°) $(b + x)^2 = (a + x)\ (c + x)$.

Je trouve $x = \dfrac{b^2 - ac}{a + c - 2b}$, ce qui a un sens car le dénominateur ne peut être nul dans les conditions de l'énoncé.

En revanche, rien n'empêche le numérateur de l'être, *sans que a, b, c soient en progression géométrique* : voyez le triplet (0, 0, 1) et ses semblables. Je me rends compte que l'énoncé est faux…. (pour ces triplets on ne peut trouver un x non nul…).

Pire encore, je calcule $a + x$, $b + x$, $c + x$:

$$x + a = \frac{(a-b)^2}{a+c-2b}\ ;\ x + b = \frac{(b-c)(a-b)}{a+c-2b}\ ;\ x + c = \frac{(c-b)^2}{a+c-2b}\ .$$

Les trois nombres sont nuls si $a = b = c$. Ils forment alors une suite géométrique, ce qu'exclut l'énoncé.
Aucun n'est nul si les nombres a, b, c sont deux à deux distincts.
Mais un cas intéressant se produit si $a = b$ et $b \neq c$ (ou si $a \neq b$ et $b = c$). Alors $(a + x, b + x, c + x) = (0, 0, d)$, $d \neq 0$ (ou d, 0, 0).
Dans ce cas $a + x$, $b + x$, $c + x$ ne forment pas une progression géométrique !

Ainsi donc pour tout triplet (a, a, c) ou (a, c, c), $c \neq a$, il n'existe AUCUN x non nul tel que $a + x$, $b + x$, $c + x$ forment une progression géométrique. Pourtant (a, a, c) ou (a, c, c), $c \neq a$, ne forment ni une progression géométrique, ni une progression arithmétique.

Notre énoncé est donc (pour le moins) discutable.

Je me dis que tout cela est très au-delà des possibilités de compréhension d'A. (la notion d'équivalence en particulier). J'imagine une stratégie moins complexe (qui évite les équivalences), mais qui soit rigoureuse, en vue de notre prochaine rencontre…

À partir de $x = \dfrac{b^2 - ac}{a + c - 2b}$ qu'elle a trouvé, je l'interroge :

Cette expression a-t-elle un sens ? Est-elle non nulle ? Elle sait que l'un des cas correspond au numérateur non nul, l'autre suppose le dénominateur non nul. Elle met longtemps à distinguer les deux situations (il faut revenir aux partages de gâteaux et à la différence entre $\dfrac{0}{4}$ et $\dfrac{4}{0}$).

Elle explique sans trop de difficultés la non-nullité du dénominateur et constate que le numérateur peut devenir nul sans trahir l'énoncé.

Pour éviter la notion d'équivalence des propriétés, je lui suggère de *vérifier* si $a + x$, $b + x$, $c + x$ forment bien une progression géométrique (vérifier que le résultat correspond aux attentes).

Elle constate que $\dfrac{b+x}{a+x} = \dfrac{c+x}{b+x} = \dfrac{b-c}{a-b}$ et découvre le pot aux roses en fixant les conditions $a \neq b$ et $b \neq c$ (pour que ces expressions aient un sens).

Les cas $a = b \neq c$ ou $a \neq b = c$ fournissent des contre-exemples à l'énoncé.

Tout cela jette A. dans un grand trouble. Après notre séance, elle fait un sondage téléphonique auprès de ses camarades qui n'y ont vu que du feu. Ce qui augmente encore son trouble : comment faire *sans trop se singulariser* ? Car dans ces classes d'excellence, il est préférable de ne pas sortir du lot, ni de mettre l'enseignant en difficulté…

Je lui suggère de rédiger *ce qu'elle a compris*, et de simplement signaler par les contre-exemples que l'énoncé *paraît* discutable. Une façon d'inviter l'enseignant à réagir… Elle se rallia à cette solution minimaliste.

Lors du corrigé, le professeur noya le poisson (dans mon incorrigible naïveté, j'avais imaginé que l'exercice était destiné à provoquer les réactions de la classe…). Il y a, certes, une difficulté avec cet énoncé, les contre-exemples le montrent. Mais comme les contre-exemples présentent deux éléments égaux, l'indication « *a, b, c, pris dans cet ordre* » n'était-elle pas destinée à les écarter ?

Il en resta là. Aucune analyse de fond de la question ne vint éclairer les obscures raisons de ces contre-exemples. Aucune demande de la classe ne l'y invita d'ailleurs…

« Pris dans cet ordre », cette expression suggère-t-elle un *ordre strict* ? Pourquoi ne pas le dire alors ? Mais qui nous garantit la non-existence d'*autres contre-exemples* avec trois nombres deux à deux distincts ? Seul un travail mathématique pourrait trancher. Or il n'a pas été entrepris, ni même esquissé lors du corrigé.

Quelques questions pour finir[4].

Quel est l'intérêt de cet exercice *tel qu'il a été traité par les élèves et corrigé par leur professeur* ? La frontière entre le vrai et le faux est-elle élastique en mathématiques ? Est-il formateur de laisser *dans l'ombre* les difficultés rencontrées dans la résolution d'un problème ? Est-ce acceptable dans une Première S en général, et plus particulièrement dans une classe « d'excellence » ? Que dire de l'absence de réactions d'une telle classe devant les difficultés d'un énoncé, et *qui fait semblant de ne pas les voir* ? Ne serait-il pas judicieux d'en faire moins, mais d'aller au fond des choses ?

Les mathématiques ont-elles vraiment dans ce contexte la vertu formatrice qu'on leur prête et qui mérite qu'on les défende ?

Rebonds.

Jean-Pierre Friedelmeyer m'a fait l'amitié d'une lecture critique de l'article qui précède. Ses réflexions et ses propositions conduisent à une re-formulation de l'‘énoncé et ouvrent d'intéressantes perspectives pédagogiques. Les voici, en résumé.

« Je trouve que tu passes trop de temps à décortiquer les incohérences de l'énoncé, au risque d'amplifier encore chez les élèves le sentiment que décidément “ les maths c'est du pinaillage et du coupage de cheveux en quatre ” et pas assez de temps à proposer des éléments de réflexion pédagogique qui permettent de donner du sens et de l'intérêt à un tel exercice. Par exemple :

- insister sur la définition[5] que l'on donne des suites arithmétiques (suites dont la différence de deux termes consécutifs est constante) et géométriques (suites dont le rapport de deux termes consécutifs est constant), ce qui exclut, dans ce dernier cas, que l'on prenne des nombres nuls. Je ne sais pas si l'on donne d'autres définitions aujourd'hui, plus formelles, mais je défends celles ci-dessus car elles ont un sens en soi, et non par une formule.
- remarquer alors que $a + x$, $b + x$, $c + x$ peuvent être en progression arithmétique si et seulement si a, b, c, le sont déjà
- mettre en évidence la raison “ candidate ” possible pour une suite géométrique, (on incitait les élèves autrefois à faire une “ analyse ” du problème), en écrivant $\dfrac{a+x}{b+x}=\dfrac{b+x}{c+x}$ donc $=\dfrac{a-b}{b-c}$; ce qui montre tout de suite l'intérêt de l'hypothèse, a, b, c, non arithmétique

(4) On peut bien sûr y répondre par la lourdeur des programmes, la difficulté pour un enseignant et pour les élèves d'être toujours au mieux de leur forme et mille autres raisons encore, toutes plus convaincantes les unes que les autres. Mais cet exercice fut donné (*avec beaucoup d'autres*) avant les vacances de printemps et corrigé à la rentrée. Donc ni le manque de temps, ni la fatigue des acteurs ne peut être invoquée. C'est bien un fonctionnement approximatif et un flou dans les démarches et les objectifs qui semblent en cause, en l'occurrence. Après tout, lorsqu'un énoncé est douteux, rien n'empêche de le rectifier comme Jean-Pierre Fridelmeyer le propose, ou de ne pas le soumettre aux élèves !

(5) Les définitions données dans la classe utilisent les classiques formules de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$ et $u_{n+1} = qu_n$.

L'exercice proposé est-il formateur ? Pour répondre à cette question, il est utile de distinguer nettement deux aspects :
1) l'appropriation des objets “ suite arithmétique, suite géométrique ” dans leur sens et dans leurs caractérisations, de façon que l'élève les reconnaisse dans un autre contexte (pas forcément mathématique scolaire, ou même mathématique) et puisse résoudre des problèmes qui les mettent en jeu.
2) l'occasion d'un exercice de raisonnement mathématique avec toutes les caractéristiques que tu mets fort bien en relief à la fin de ton article.

Il me semble que tu traites surtout du second aspect, important certes, mais qui n'est pas le seul. Si on prend en compte le premier aspect, je pense que l'exercice *modifié dans son énoncé* présente un réel intérêt. J'ai tendance à penser que certaines difficultés de notre enseignement viennent justement du trop d'importance accordé dans nos classes au second point (le discours mathématique rigoureux mais formel) et pas assez au premier (le sens de ce discours pour l'élève).

On pourrait poser *des questions plus ouvertes*, mais qui viennent assez naturellement, eu égard aux opérations arithmétiques à l'œuvre dans ces suites. Par exemple :

Soient a, b, c trois réels distincts non nuls, rangés dans cet ordre ($a < b < c$, ou $c < b < a$) et x un réel non nul.
1) À quelles conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c, la suite $a{\cdot}x$, $b{\cdot}x$, $c{\cdot}x$ (les nombres étant pris dans cet ordre) est-elle arithmétique ? géométrique ? Préciser dans chaque cas la raison de la suite.
2) À quelles conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c, la suite $(a + x)$, $(b + x)$, $(c + x)$ (les nombres étant toujours pris dans cet ordre) est-elle arithmétique ? géométrique ? Préciser dans chaque cas la raison de la suite.
3) Comment faut-il modifier ces conditions si l'on ne fait aucune hypothèse sur a, b, c ?

Les deux premières questions mettent plutôt l'accent sur le sens, la troisième plutôt sur la rigueur. »