Mathématiques avec Xcas

Michèle Gandit, Bernard Parisse & Renée de Graeve(*)

Xcas est un logiciel libre de mathématiques, développé à l'Université J. Fourier de Grenoble, il peut être téléchargé en recherchant xcas sur google ou directement depuis :

http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html

Ce logiciel que nous utilisons dans nos classes de lycée et à l'université, combine les fonctions de tableur, géométrie dynamique, en deux ou trois dimensions, calcul formel, programmation. Cette dernière, la programmation, peut être initiée dès le collège par un module spécial, « la tortue », qui permet les premiers pas dans la compréhension d'une démarche algorithmique.

Une session de Xcas est une suite de niveaux de différents types : calcul formel, graphes de fonction, tableur, géométrie, etc.

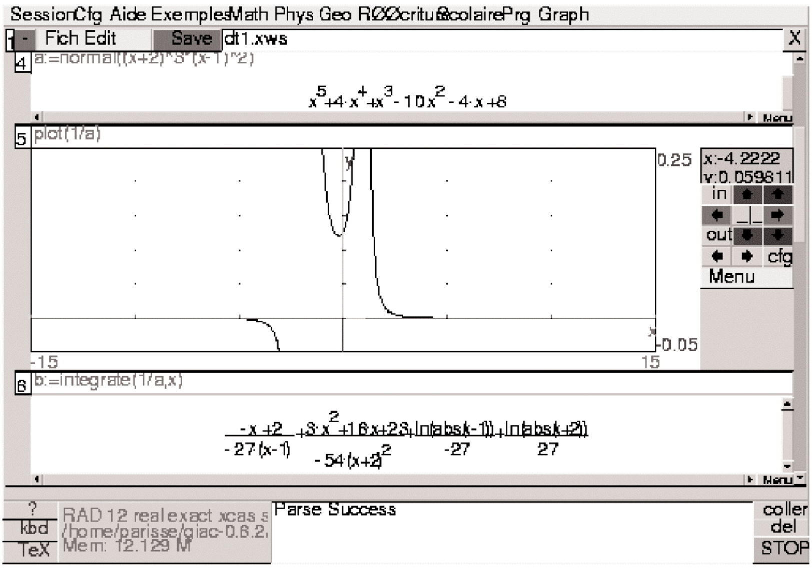

Illustration 1 : une session Xcas

Grâce au module de calcul formel, Xcas peut effectuer les calculs en précision arbitraire (y compris dans le tableur ou en géométrie). Il propose de nombreuses fonctions pouvant être utilisées à différents niveaux, du développement et factorisation d'expressions algébriques, à l'arithmétique des entiers et des polynômes

(*) GROUPE-IREM « Mathématiques avec XCAS », Université J. Fourier, Grenoble.

(PGCD, identité de Bézout, factorisation, ...), aux simplifications (fractions rationnelles, fonctions trigonométriques, ...) ; le logiciel permet la résolution d'équations ou de systèmes linéaires ou polynomiaux, le calcul de dérivées et de primitives, de limites et de développement de Taylor et asymptotiques. Les utilisateurs d'autres logiciels de calcul formel (Maple, MuPAD, TI89 ou Voyage 200) peuvent choisir un des modes de compatibilité de Xcas qui leur facilitera la prise en main.

Les modules de géométrie 2-d et 3-d permettent de construire des figures en utilisant la souris pour la plupart des objets, ou par l'intermédiaire de commandes analogues à celles du calcul formel : par exemple pour tracer un segment reliant deux points A et B, on peut sélectionner le mode segment et cliquer sur les deux extrémités, ou saisir la commande S:=segment(A,B). Tous les objets sont représentés analytiquement, de manière approchée ou exacte, au choix de l'utilisateur, les calculs approchés étant plus rapides (à privilégier pour faire des constructions dynamiques), les calculs exacts permettant de faire des preuves analytiques de propriétés géométriques.

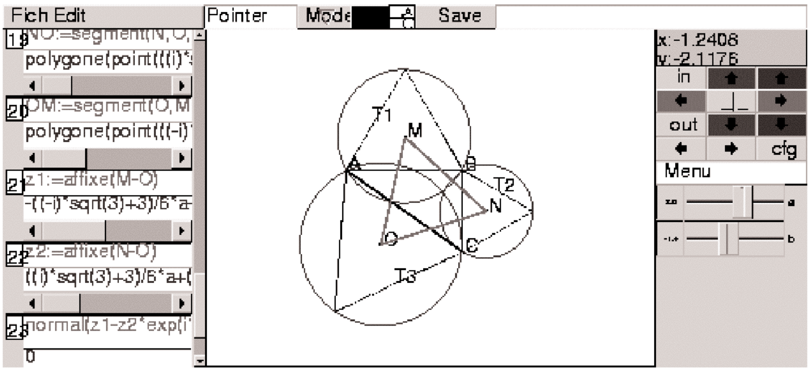

Illustration 2 : un niveau de géométrie-2d, le théorème de Napoléon

L'interface du tableur est moins complète que celle de logiciels comme OpenOffice, mais elle peut interagir avec le module de calcul formel ; on peut donc saisir des valeurs exactes dans une cellule (par exemple 1/3), ou des valeurs formelles (par exemple sin(x) en A1 et =diff(A1,x) en A2, si on modifie A1, la cellule A2 contient la dérivée correspondante).

Le module de programmation permet de définir des fonctions, avec des variables locales, des tests, des boucles. On dispose d'un débogueur interactif permettant d'exécuter une fonction, instruction par instruction, ce qui permet de corriger plus facilement des erreurs, mais peut aussi servir à expliquer le déroulement d'un algorithme.

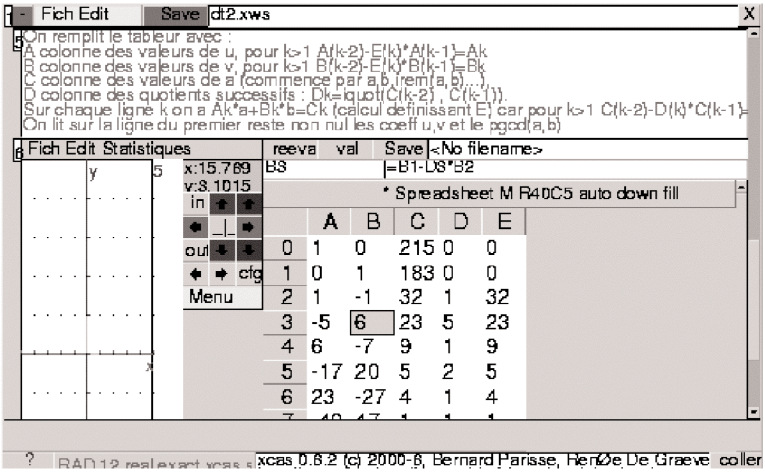

Illustration 3 : une feuille de calcul du tableur

Le module « tortue » permet d'initier dès le primaire à l'algorithmique en manipulant des notions mathématiques (repérage, angles, ...). On pilote une tortue laissant une trace de ses déplacements en lui donnant des ordres tels que « avance », « recule de *n* pas », « tourne à droite de *x* degrés », etc. Ces ordres peuvent être combinés au sein de programmes, ce qui permet de réaliser des figures complexes, composées de figures géométriques de base simples.

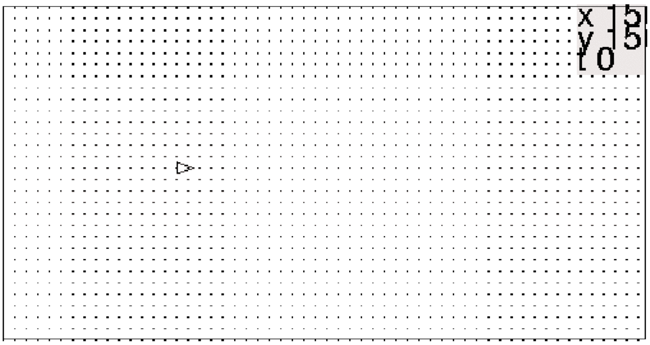

Illustration 4 : départ du module « tortue »

L'aide en ligne est entièrement rédigée en français, on y accède par l'index des fonctions ou par un des menus (qui regroupe les fonctions par thème) ou grâce à une recherche par mot clef. Les menus peuvent être redéfinis, par exemple pour masquer l'existence d'instructions et éviter que des élèves ne se perdent dans l'étendue des possibilités offertes. La version à télécharger contient d'ailleurs un menu Scolaire avec une sélection de fonctions de calcul formel pour le lycée, classées par niveau (seconde, première, terminale).

Xcas évolue encore notablement, en fonction des demandes des utilisateurs, par exemple certaines fonctionnalités comme la géométrie dans l'espace ou les interfaces vers d'autres logiciels (comme le logiciel PARI de théorie des nombres). La version actuelle (0.6) contient encore des bugs : elle devrait déboucher sur une version plus robuste (1.0), d'ici 2 ou 3 ans. Elle est néanmoins déjà utilisable par les candidats à l'agrégation externe, mais aussi dans nos classes, comme nous l'avons déjà dit.

L'atout majeur de Xcas, sur le plan pédagogique, et son originalité, résident dans le fait qu'il permet les allers-retours entre ses différentes fonctionnalités. Ceci permet d'aborder des notions mathématiques sous différents points de vue.

Prenons un exemple, au niveau de la classe de terminale S. Il s'agit d'un TP dont l'objectif est de construire, point par point, une courbe, constituée de segments, qui approche la courbe d'une certaine fonction f qui vérifie : $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ et $f(0) = 1$. Pour ce faire, on utilise l'approximation : $f(a+h)\approx f(a)+h\times f'(a)$.

Lors de ce TP, c'est d'abord l'aspect *calcul formel*, combiné au *graphique*, qui est privilégié, ensuite, c'est le *tableur*, combiné au *graphique*. Dans un premier temps, en effet, les élèves doivent définir un paramètre h, puis placer, dans un repère, successivement les points M_0, M_1, M_2, … qui ont pour abscisses x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h$, …, et qui appartiennent à la représentation graphique de la fonction qui approche f (sachant qu'ici $x_0 = 0$). Ils doivent saisir les formules successives qui permettent la construction des points M_0, M_1, M_2, … et des segments qui joignent ces points. Il apparaît alors qu'ils répètent toujours les mêmes instructions. Cette prise de conscience de la répétition est importante. On pourrait alors faire un programme pour obtenir successivement les points M_i, mais on peut aussi utiliser le *tableur* qui permet de recopier un grand nombre de fois une formule. À ce stade, les fonctions saisies dans le module formel sont conservées aussi pour le tableur. C'est un atout du logiciel.

Par ailleurs cette possibilité de combiner, de manière immédiate, calcul et graphique, d'une part, tableur et graphique, d'autre part, suscitent des questions qui n'apparaissent pas si l'on dispose d'un logiciel plus simple ou si l'on travaille en environnement papier-crayon.

Dans le TP déjà cité, la modification du graphique suivant le pas se voit en effet sous deux angles différents. Lors de la première étape, liant calcul formel et graphique, il apparaît un curseur lors de la définition du paramètre h, curseur qu'il suffit de déplacer pour voir changer le graphique « ligne-brisée ». Dans la deuxième partie du TP, le graphique se construit à partir des colonnes du tableur, calculées en fonction de la valeur de h qui se trouve dans l'une des cellules. Les graphiques que l'on construit suivant différentes valeurs de h restent à l'écran, peuvent devenir petits, voire invisibles : cela amène à réfléchir au fait que, pour avoir deux courbes qui correspondent à deux pas différents, tracées sur le même intervalle, il faut non seulement changer le contenu de la cellule qui correspond à h, mais aussi changer la plage de cellules correspondant au graphique. Ce n'est pas immédiat pour les élèves.

Voici plusieurs années que nous expérimentons, de manière régulière, des TP avec Xcas, dans nos classes de seconde, première S, terminale ES et terminale S (depuis la rentrée de septembre, une séance en terminale S avec Xcas a lieu au moins une fois tous les quinze jours, les élèves devant ensuite rédiger un compte-rendu du TP réalisé). Enfin il est clair que l'utilisation d'un tel logiciel change l'approche des programmes de mathématiques dans les diverses classes de lycée. Elle modifie la façon dont les élèves abordent un problème de mathématiques, si on les laisse autonomes face à la machine, la façon aussi dont le professeur peut présenter les notions du programme. Les élèves apprennent autrement que dans un environnement papier-crayon, autrement qu'avec des logiciels plus spécialisés, mais aussi autre chose.

Échanges de Michèle Gandit et Gérard Kuntz à propos du « chapeau » de l'article sur Casyopée[1]

L'article qui présente Xcas a été l'occasion d'un intéressant échange de courriels entre l'auteur, Michèle Gandit, et Gérard Kuntz, à propos de la rubrique multimédia du Bulletin nº 466. La commission du bulletin a décidé, avec l'accord de Michèle Gandit, d'en publier les principaux passages.

GK

Je vous propose de présenter le logiciel Xcas sous la rubrique « Mathématiques en environnement multimédia » du bulletin de l'APMEP.

Il serait intéressant de préciser ses spécificités, ses caractéristiques, ses points forts, ses fonctionnalités principales, l'étendue de ses possibles utilisations (Collège, Lycée, Université ?), etc.

La présentation peut prendre jusqu'à quatre pages.
Je suis à votre disposition pour préciser cette proposition et pour discuter avec vous de son éventuelle réalisation.

MG

Ce petit mot pour vous dire que l'article est en cours.

Mais je m'interroge sur la manière dont la commission va recevoir cet article, au vu des questions qui figurent page 714 du dernier bulletin vert nº 466.

En préambule à la question sur le « rôle joué par les logiciels dans l'enseignement

(1) Bulletin de l'APMEP 466, page 714.

des mathématiques », je dois dire que je suis effarée de l'image négative des élèves qui est véhiculée dans ces questions.
Je lis que « la commission s'interroge sur le contraste entre la faible capacité théorique et technique des élèves concernés et les possibilités qu'offre le logiciel » (celui de l'équipe INRP-IREM de Rennes).
Comment peut-on se permettre de qualifier de faible la « capacité théorique et technique » des élèves concernés ?
Je lis plus loin « l'informatique peut-elle voler au secours des déficiences conceptuelles et de calculs des élèves ? ».
Mais comment peut-on parler des déficiences conceptuelles des élèves ?
Ces déficiences sont-elles constatées sur leur faible taux de réussite lors de la résolution d'une équation du premier degré ? Je pense qu'il y a beaucoup de gens qui ne savent pas résoudre une équation du premier degré et dont je ne me permettrais pas de dire qu'ils ont des déficiences conceptuelles et techniques.

En ce qui concerne le « rôle joué par les logiciels dans l'enseignement des mathématiques », je pense que la question se situe davantage sur le plan de ce que l'on apprend quand on utilise l'informatique. Je dirais qu'il y a une modification de ce que l'on apprend, par rapport à un environnement papier-crayon.
On apprend autre chose et je suis persuadée qu'il est nécessaire d'apprendre cette autre chose pour être en phase avec la société. Est-ce que les logiciels de calcul formel vont aider les élèves à résoudre des équations du premier degré ? Non, mais ils vont leur donner un autre moyen d'aborder la question, le tableur aussi.
Apprendre à un élève à résoudre une équation du premier degré, c'est louable, mais lui apprendre que pour traiter tel problème, il faut résoudre telle équation (pas forcément du premier degré), il faut faire tel calcul, cela me semble plus important, et cela peut être appris par un élève qui ne sait pas résoudre une équation du premier degré.
En relisant ces questions (et en essayant de faire abstraction de ce que j'ai écrit en préambule), je trouve qu'elles relèvent d'une conception de l'école, et des savoirs qui sont à y enseigner, complètement décalée par rapport à la mienne.

GK

Bonjour,

Votre (vive) réaction me surprend.

La commission s'est étonnée d'apprendre que la présence du nombre π « rendrait le travail délicat, noyant les élèves sous les difficultés algébriques ». Elle s'est demandée quel sens pouvaient alors donner les élèves à l'encadré de la page 722. Elle s'est amusée de l'arsenal mis en œuvre (par le logiciel) pour déterminer le signe de $2x^2 - 8$. Etc. Elle s'est rappelée les subtils équilibres, entre maîtrise et automatisation du calcul, préconisés par le rapport « Calcul »(2) de la commission Kahane.

(2) http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/RapportCalcul/RapportCalcul.pdf

Il lui a semblé que les élèves mis en scène par l'article gagneraient à améliorer leur capacité de traitement des expressions algébriques. « L'intelligence du calcul » dépasse les limites de la simple technique.

Vous écrivez : « … pour traiter tel problème, il faut résoudre telle équation (pas forcément du premier degré), il faut faire tel calcul, cela me semble plus important, et cela peut être appris par un élève qui ne sait pas résoudre une équation du premier degré. »

Vous semble-t-il scandaleux que l'élève apprenne l'un **ET** l'autre ?

La commission a trouvé que la première partie du premier problème méritait d'être traitée aussi en environnement papier-crayon. Montrer à des élèves qu'ils sont capables de résoudre une équation du premier degré (même si π intervient) vous semble-t-il relever du mépris ?

Malheureusement, le logiciel devient pauvre dès l'introduction du paramètre : pourquoi ne pas faire varier la demi-droite (dépendant de a) en continu sur le graphique, expliquant les raisons de l'absence de solutions dans certains cas ? Croyez-vous vraiment utile de parachuter des réponses sans la moindre justification ? Qu'apprend ainsi l'élève sinon l'acte de foi ?

Je pourrais de même critiquer l'absence d'outil général de factorisation dans ce logiciel. Il mériterait d'être amélioré sur plusieurs points qui ne sont pas des détails.

Cela n'empêche pas la commission de reconnaître l'utilité du travail réalisé avec ce logiciel. Elle a donc décidé, à une large majorité, de le publier, estimant cependant que les justes principes défendus par l'article seraient plus convaincants sur des exemples plus complexes. Surtout si, en parallèle, un travail était entrepris pour améliorer la maîtrise du calcul de tous les élèves.

Je ne vois dans cette position rien de scandaleux. Et cela me permet d'échanger avec vous, en attendant de vous lire !

MG (*les parties en italiques reprennent le texte de GK, auquel MG répond « dans le texte »*)

Voici donc (en fichier joint) un article qui présente Xcas. Cet article donne seulement une présentation, comme vous l'avez demandée, en quatre pages.
Si cela peut aider à préciser, pour le lecteur, d'autres facettes du logiciel, telles que le tableur ou la tortue, nous pouvons ajouter des copies d'écran dans ce sens, ce qui augmente d'une page l'article.

Par ailleurs, pour répondre à vos questions au sujet de ma vive réaction, je crois qu'il y a un malentendu. En effet, la page 714 du bulletin est en préambule à l'article, et je l'ai comprise dans un sens plus général, pas seulement dans le contexte de l'article qui suit.

La commission s'est étonnée d'apprendre que la présence du nombre π « rendrait le travail délicat, noyant les élèves sous les difficultés algébriques ». Elle s'est demandée quel sens pouvaient alors donner les élèves à l'encadré de la page 722. Elle s'est amusée de l'arsenal mis en œuvre (par le logiciel) pour déterminer le signe de $2x^2 - 8$*. Etc. Elle s'est rappelée les subtils équilibres, entre maîtrise et automatisation du calcul, préconisés par le rapport « Calcul » de la commission Kahane.*

Sur ces points, je suis d'accord.

Il lui a semblé que les élèves mis en scène par l'article gagneraient à améliorer leur capacité de traitement des expressions algébriques. « L'intelligence du calcul » dépasse les limites de la simple technique.

D'accord, et je pense que l'informatique, notamment le tableur, peut les y aider, à comprendre cette intelligence du calcul. J'ai pu le constater avec les élèves de Première L.

Vous écrivez : « … pour traiter tel problème, il faut résoudre telle équation (pas forcément du premier degré), il faut faire tel calcul, cela me semble plus important, et cela peut être appris par un élève qui ne sait pas résoudre une équation du premier degré. »

Vous semble-t-il scandaleux que l'élève apprenne l'un ET l'autre ?

Évidemment non.

La commission a trouvé que la première partie du premier problème méritait d'être traitée aussi en environnement papier-crayon. Montrer à des élèves qu'ils sont capables de résoudre une équation du premier degré (même si π intervient) vous semble-t-il relever du mépris ?

Mais non. Et ce n'est pas cela que j'ai trouvé méprisant.

Malheureusement, le logiciel devient pauvre dès l'introduction du paramètre : pourquoi ne pas faire varier la demi-droite (dépendant de a) en continu sur le graphique, expliquant les raisons de l'absence de solutions dans certains cas ? Pourquoi la demi-droite ne s'affiche-t-elle plus ? (on pourrait faire varier a sur un segment et afficher les demi-droites correspondantes. Voyez la fin de l'article en http://revue.sesamath.net/ecrire/?exec=articles&id_article=6)

Je pense qu'il faudrait effectivement que l'on puisse faire varier la demi-droite (dépendant de *a*) en continu sur le graphique, à l'aide d'un curseur. En relisant l'article pages 721 et 722, je ne suis pas sûre que cela ne soit pas possible, puisqu'il est dit que les élèves « doivent d'abord créer un paramètre (ils peuvent choisir les bornes ainsi que le pas) … ». En tous cas, le logiciel XCAS offre la possibilité d'avoir simultanément un graphique piloté par un curseur relatif à un paramètre (ce paramètre prenant pour le graphique la valeur fixée par le curseur) et une suite de calculs où le paramètre intervient sans avoir de valeur fixée.

Croyez-vous vraiment utile de parachuter des réponses sans la moindre justification ? Qu'apprend ainsi l'élève sinon l'acte de foi ? Je pourrais de même critiquer l'absence d'outil général de factorisation dans ce logiciel. Il mériterait d'être amélioré sur plusieurs points qui ne sont pas des détails.

Sur le fait de « parachuter des réponses sans la moindre justification », j'ai un autre regard sur ce point : cela peut en effet permettre d'éveiller la curiosité des élèves, surtout lorsque le résultat affiché par la machine est simple, alors que le calcul saisi est complexe (ce n'est pas le cas dans l'activité sur les volumes égaux). Il est bien entendu essentiel que les élèves aient à chercher une explication de ce que donne la machine. Ici la copie d'écran de la page 722 montre un résultat assez compliqué à comprendre, il est vrai, mais le décrypter relève d'une compétence à travailler à l'école : ce travail n'a pas lieu en environnement papier-crayon. Il faut bien entendu ensuite chercher les raisons pour lesquelles la machine affiche ce résultat.

G.K

Votre article est clair et précis. Il dit beaucoup de choses en peu de pages. Ajoutez-y les copies d'écran que vous proposez. Cela fera un ensemble complet. Pouvez-vous me renvoyer l'article complété par retour ?

Je vois que mes éclaircissements ont réduit quelque peu l'incompréhension du « chapeau » de la page 714. On gagne toujours à dialoguer.